



ত্রিকোণমিতি (Trigonometry)

By Optimum usage of time and minimum waste of time, you can build up yourself. So, don't worry about your career. It's your's... Mind it.

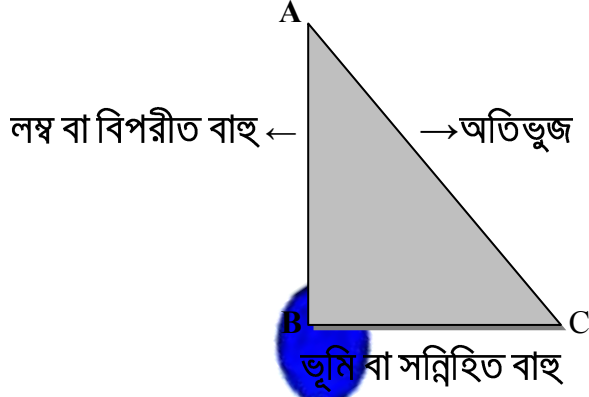
Jewel's Care
Life is for motto lesson



Sponsored by Md: Ibrahim Khalil Jewel
Math, english & Accounting Teacher (MO: 01677836677)



তিন কোন নিয়ে পরিমাপ করা হলে তাকে ত্রিকোনমিতি বলে।



প্রথম অংশ

$\sin \theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}}$	$\text{cosec } \theta = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{লম্ব}}$	$\sin \theta = \frac{1}{\text{cosec } \theta}$	$\text{cosec } \theta = \frac{1}{\sin \theta}$
$\cos \theta = \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}}$	$\sec \theta = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{ভূমি}}$	$\cos \theta = \frac{1}{\sec \theta}$	$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$
$\tan \theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}}$	$\cot \theta = \frac{\text{ভূমি}}{\text{লম্ব}}$	$\tan \theta = \frac{1}{\cot \theta}$	$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$

বিপরীত সম্পর্কের চিত্রের মিলনমেলাঃ

$$\sin \theta \rightarrow \text{cosec } \theta, \tan \theta \rightarrow \cot \theta, \cos \theta \rightarrow \sec \theta$$

মনে রাখতে হবে যে, $\rightarrow \sin \theta, \cos \theta$ মূল

$\rightarrow 6$ টি $\theta \sin, \cos, \sec, \text{cosec}, \tan, \cot$

$\rightarrow \theta$ এর পরিবর্তে মাঝে মাঝে A, B, C... অথবা $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ ব্যবহার করা হয়।

বাংলা সূত্রসমূহ মনে রাখার সহজ উপায়ঃ

- * $\sin \theta$ = সাগরে লবণ অনেক
- * $\tan \theta$ = ট্যাংরা লম্বা ভূত
- * $\sec \theta$ = সেখানে অনেক ভূত
- * $\cos \theta$ = কবরে ভূত অনেক
- * $\cot \theta$ = কলকাতার ভূত লম্বা
- * $\text{cosec } \theta$ = কোথায় অনেক লবণ

যোগ বিয়োগের সূত্রঃ

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$	$\sec^2 \theta - \tan^2 \theta = 1$	$\text{cosec}^2 \theta - \cot^2 \theta = 1$
$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$	$\sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta$	$\text{cosec}^2 \theta = 1 + \cot^2 \theta$
$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$	$\sec \theta = \sqrt{1 + \tan^2 \theta}$	$\text{cosec } \theta = \sqrt{1 + \cot^2 \theta}$
$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$	$\tan^2 \theta = \sec^2 \theta - 1$	$\cot^2 \theta = \text{cosec}^2 \theta - 1$
$\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta}$	$\tan \theta = \sqrt{\sec^2 \theta - 1}$	$\cot \theta = \sqrt{\text{cosec}^2 \theta - 1}$

যোগ-বিয়োগ সূত্রের প্রমাণ বা অভেদাবলীঃ

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$	$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$	$\operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$
$\rightarrow \left(\frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}}\right)^2 + \left(\frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}}\right)^2$	$\rightarrow \left(\frac{\text{অতিভুজ}}{\text{ভূমি}}\right)^2 + \left(\frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}}\right)^2$	$\rightarrow \left(\frac{\text{অতিভুজ}}{\text{লম্ব}}\right)^2 + \left(\frac{\text{ভূমি}}{\text{লম্ব}}\right)^2$
$\rightarrow \frac{\text{লম্ব}^2}{\text{অতিভুজ}^2} + \frac{\text{ভূমি}^2}{\text{অতিভুজ}^2}$	$\rightarrow \frac{\text{অতিভুজ}^2}{\text{ভূমি}^2} + \frac{\text{লম্ব}^2}{\text{ভূমি}^2}$	$\rightarrow \frac{\text{অতিভুজ}^2}{\text{লম্ব}^2} + \frac{\text{ভূমি}^2}{\text{লম্ব}^2}$
$\rightarrow \frac{\text{লম্ব}^2 + \text{ভূমি}^2}{\text{অতিভুজ}^2}$	$\rightarrow \frac{\text{অতিভুজ}^2 + \text{লম্ব}^2}{\text{ভূমি}^2}$	$\rightarrow \frac{\text{অতিভুজ}^2 + \text{ভূমি}^2}{\text{লম্ব}^2}$
$\rightarrow \frac{\text{অতিভুজ}^2}{\text{অতিভুজ}^2}$	$\rightarrow \frac{\text{ভূমি}^2}{\text{ভূমি}^2}$	$\rightarrow \frac{\text{লম্ব}^2}{\text{লম্ব}^2}$
$\rightarrow 1$	$\rightarrow 1$	$\rightarrow 1$

জ্যামিতিক উপায়ে $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ এর প্রমাণঃ

আমরা জানি, $\sin \theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}}$ চিত্র
এবং $\cos \theta = \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}}$

এখন, প্রদত্ত চিত্রের, OAB সমকোণী ত্রিভুজে θ কোণের লম্ব AB = Y, ভূমি OB = X, অতিভুজ OA

পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে পাই,
 $OA^2 = AB^2 + OB^2$
বা, $OA = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\therefore \sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ এবং $\cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

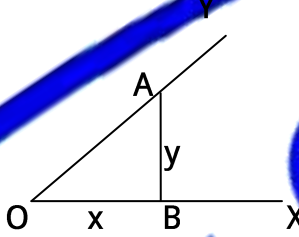
$\therefore \sin^2\theta + \cos^2\theta = \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 + \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2$

$= \frac{y^2}{x^2 + y^2} + \frac{x^2}{x^2 + y^2}$

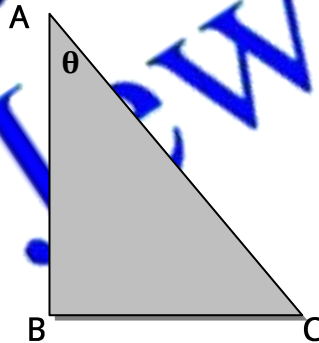
$= \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2}$

$= 1$

$\therefore \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
(প্রমানিত)



যোগ-বিয়োগের ক্ষেত্রে অন্যান্য সূত্র এইভাবেই হবে। চেষ্টা করে দেখ !!

সূক্ষকোণের অনুপাতঃ

→ $\angle ABC$ সমকোন, $\angle BAC$ সূক্ষকোন

→ সমকোনের বিপরীত দিকের বাহু অতিভুজ, AC

→ সূক্ষকোনের বা θ এর বিপরীত দিকের বাহু লম্ব, BC. অন্যটি ভূমি, AB.

→ পাহাড়-পর্বত, টাওয়ার ও গাছের উচ্চতা এবং নদীর প্রস্থ যা পরিমাপ করা অসম্ভব। তাই সূক্ষকোনের অনুপাত দ্বারা পরিমাপ করা সম্ভব। এই বিষয়ে দূরত্ব ও উচ্চতা অধ্যায়ে আলোচনা করা হয়।

বিভিন্ন θ এর সম্পূর্ণ রূপ ও সংক্ষিপ্ত রূপঃ

- | | |
|--|--|
| → $\sin \theta = \text{sin } \theta$ | → $\cos \theta = \text{cosin } \theta$ |
| → $\tan \theta = \text{tangent } \theta$ | → $\cot \theta = \text{cotangent } \theta$ |
| → $\sec \theta = \text{secant } \theta$ | → $\text{cosec } \theta = \text{cosecant } \theta$ |

উদাহরন ও অনুশীলনীঃ

Type 1:

- (1) $\tan A = \frac{4}{3}$ হলে, A কোনের অন্যান্য ত্রিকোনমিতিক অনুপাতসমূহ নির্ণয় কর ?
- (2) $\sin A = \frac{3}{4}$ হলে, A কোনের অন্যান্য ত্রিকোনমিতিক অনুপাতসমূহ নির্ণয় কর ?
- (3) ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle B$ কোণটি সমকোন। $\tan A = 1$ হলে, $2\sin A \cos A = 1$ এর সত্যতা যাচাই কর ?
- (4) ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle B$ কোণটি সমকোন। $\tan A = \sqrt{3}$ হলে, $\sqrt{3}\sin A \cos A = \frac{3}{4}$ এর সত্যতা যাচাই কর ?
- (5) ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle C$ সমকোন, AB = 13 সেমি., BC = 12 সেমি. এবং $\angle ABC = \theta$ হলে, $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ এর মান নির্ণয় কর ?
- (6) দেওয়া আছে, $15 \cot A = 8$, $\sin A$ ও $\sec A$ এর মান নির্ণয় কর ?

Type 2:

- (1) প্রমাণ করো যে, $\tan \theta + \cot \theta = \sec \theta \cdot \text{cosec } \theta$
- (2) প্রমাণ করো যে, $\sec^2 \theta + \text{cosec}^2 \theta = \sec^2 \theta \cdot \text{cosec}^2 \theta$

Type 3:

- (1) $\frac{1}{\sec^2 A} + \frac{1}{\text{cosec}^2 A} = 1$
- (2) $\frac{1}{\cos^2 A} - \frac{1}{\cot^2 A} = 1$
- (3) $\frac{1}{\sin^2 A} - \frac{1}{\tan^2 A} = 1$
- (4) $\frac{1}{\text{cosec } A - 1} + \frac{1}{\text{cosec } A + 1} = 2\tan^2 A$
- (5) $\frac{1}{1 + \sin^2 \theta} + \frac{1}{1 + \text{cosec}^2 \theta} = 1$
- (6) $\frac{1}{1 + \sin^2 A} + \frac{1}{1 + \text{cosec}^2 A} = 1$
- (7) $\frac{1}{2 - \sin^2 A} + \frac{1}{1 + \tan^2 A} = 1$
- (8) $\frac{1}{1 + \tan^2 A} + \frac{1}{1 + \cot^2 A} = 1$
- (9) $\frac{1}{1 + \sin A} + \frac{1}{1 - \sin A} = 2\sec^2 A$
- (10) $\frac{\text{cosec } A}{\sin A} + \frac{\sec A}{\cos A} = 1$
- (11) $\frac{\sec A}{\cos A} - \frac{\tan A}{\cot A} = 1$

Type 4:

- (1) $\frac{\tan A}{\sec A + 1} - \frac{\sec A - 1}{\tan A} = 0$

- (2) $\frac{\sin A}{1-\cos A} - \frac{1-\cos A}{\sin A} = 2\operatorname{cosec} A$
- (3) $\frac{\tan A}{1-\cot A} + \frac{\sin A}{1-\tan A} = \sec A \cdot \operatorname{cosec} A + 1$
- (4) $\frac{1-\cot A}{\cos A} + \frac{1-\tan A}{\sin A} = \sin A + \cos A$
- (5) $\frac{\operatorname{cosec} A}{\operatorname{cosec} A - 1} + \frac{\operatorname{cosec} A}{\operatorname{cosec} A + 1} = 2\sec^2 A$
- (6) $\frac{\tan^2 A}{1+\tan^2 A} + \frac{1+\cot^2 A}{\tan^2 A} = \sin^2 A \cdot \sec^2 A$
- (7) $\tan A \sqrt{1-\sin^2 A} = \sin A$
- (8) $\frac{\sec A + \tan A}{\operatorname{cosec} A + \cot A} = \frac{\operatorname{cosec} A - \cot A}{\sec A - \tan A}$
- (9) $(\tan \theta + \sec \theta)^2 = \frac{1+\sin \theta}{1-\sin \theta}$
- (10) $(\cot \theta + \operatorname{cosec} \theta)^2 = \frac{1+\cos \theta}{1-\cos \theta}$
- (11) $\frac{\cot A + \tan B}{\cot B + \tan A} = \cot A \cdot \tan B$

Type 5:

- (1) $\sqrt{\frac{1-\sin A}{1+\sin A}} = \sec A - \tan A$
- (2) $\sec A - \tan A = \sqrt{\frac{1-\sin A}{1+\sin A}}$
- (3) $\sqrt{\frac{\sec A + 1}{\sec A - 1}} = \cot A + \operatorname{cosec} A$

Type 6:

- (1) $\tan A + \sin A = a$ এবং $\tan A - \sin A = b$ হলে, প্রমাণ করো যে, $a^2 - b^2 = 4\sqrt{ab}$
- (2) $\tan A + \sin A = m$ এবং $\tan A - \sin A = n$ হলে, প্রমাণ করো যে, $m^2 - n^2 = 4\sqrt{mn}$
- (3) $\sin A + \cos A = a$ এবং $\sec A + \operatorname{cosec} A = b$ হলে, প্রমাণ করো যে, $b(a^2 - 1) = 2a$.

Type 7:

- (1) $\sec A + \tan A = \frac{5}{2}$ হলে, $\sec A - \tan A$ এর মান নির্ণয় কর?
- (2) $\cos A + \sin A = \sqrt{2} \cos A$ হলে, প্রমাণ করো যে, $\cos A - \sin A = \sqrt{2} \sin A$
- (3) $\operatorname{cosec} A - \cot A = \frac{4}{3}$ হলে, $\operatorname{cosec} A + \cot A$ এর মান নির্ণয় কর?

Type 8:

- (1) যদি $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$ হয়, তবে $\frac{\operatorname{cosec}^2 A - \sec^2 A}{\operatorname{cosec}^2 A + \sec^2 A}$ এর মান নির্ণয় কর?
- (2) $\cot A = \frac{b}{a}$ হলে, $\frac{a \sin A - b \cos A}{a \sin A + b \cos A}$ এর মান নির্ণয় কর?
- (3) $\frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta - \cos \theta} = 7$ হলে, $\sec \theta, \tan \theta, \sec \theta - \tan \theta$ এর মান নির্ণয় কর?

Type 9:

- (1) প্রমাণ করো যে, $\frac{\cot \theta + \operatorname{cosec} \theta - 1}{\cot \theta - \operatorname{cosec} \theta + 1} = \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta}$ [Hints: (-1) target]
- (2) প্রমাণ করো যে, $\frac{\cos \theta + \sin \theta - 1}{\cos \theta - \sin \theta + 1} = \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta}$
- (3) প্রমাণ করো যে, $\frac{\tan \theta + \sec \theta - 1}{\tan \theta - \sec \theta + 1} = \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta}$

Type 10:

- (1) $\cot^4 A - \cot^2 A = 1$ হলে, প্রমাণ করো যে, $\cos^4 A + \cos^2 A = 1$
- (2) $\sin^2 A + \sin^4 A = 1$ হলে, প্রমাণ করো যে, $\tan^4 A - \tan^2 A = 1$

প্রয়োজনীয় উত্তরমালা:

Type 1: (1) $\sin A = \frac{4}{5}, \cos A = \frac{3}{5}, \cot A = \frac{3}{4}, \operatorname{cosec} A = \frac{5}{4}, \sec A = \frac{5}{3}$ (2) $\cos A = \frac{\sqrt{7}}{4}, \tan A = \frac{3}{\sqrt{7}}, \cot A = \frac{\sqrt{7}}{3}, \sec A = \frac{4}{\sqrt{7}}, \operatorname{cosec} A = \frac{4}{3}$ (5) $\sin \theta = \frac{5}{13}, \cos \theta = \frac{12}{13}, \tan \theta = \frac{5}{12}$ (6) $\sin A = \frac{15}{17}, \cos A = \frac{8}{17}$

Type 7: (1) $\frac{2}{5}$ (3) $\frac{3}{4}$

Type 8: (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$ (3) $\dots, \frac{4}{3}, \dots$

দ্বিতীয় অংশ

θ	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞
cot	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
sec	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞
cosec	∞	2	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	1

মনে রাখার কৌশলঃ

0 1 1 0, 0 ∞ ∞ 0, 1 ∞ ∞ 1, $\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 1 1 $\sqrt{2}$ $\sqrt{2}$,

sin 30° 60° $\frac{1}{2}$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

tan 30° 60° $\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\sqrt{3}$

sec 30° 60° $\frac{2}{\sqrt{3}}$ 2

বিপরীত সম্পর্কের চিত্রঃ

sin θ \rightarrow cos θ , tan θ \rightarrow cot θ , sec θ \rightarrow cosec θ

প্রথম ও দ্বিতীয় অংশ মিলিয়ে চিত্রঃ

sin θ \rightarrow cos θ , tan θ \rightarrow cot θ , sec θ \rightarrow cosec θ

পূরক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয়ঃ

sec(90⁰- θ) = cosec θ [এখানে θ যদি হয় 30⁰ তাহলে sec(90⁰- 30⁰) = 60⁰ অর্থাৎ, sec 60⁰ যাকিনা cos 30⁰ এর সমান \therefore sec(90⁰- θ) = cosec θ প্রমানিত]

sin(90⁰- θ) = cos θ

tan(90⁰- θ) = cot θ

উদাহরন ও অনুশীলনীর মিলনমেলাঃ

Type 1 :

(1) $\frac{1-\sin^2 45^\circ}{1+\sin^2 45^\circ} + \tan^2 45^\circ$

(2) $\frac{1-\tan^2 60^\circ}{1+\tan^2 60^\circ} + \sin^2 60^\circ$

(3) $\frac{1-\cot^2 60^\circ}{1+\cot^2 60^\circ}$

(4) $\frac{1-\cos^2 60^\circ}{1+\cos^2 60^\circ} + \sec^2 60^\circ$

Type 2 :

(1) cot 90⁰.tan 0⁰.sec 30⁰.cosec 60⁰

(2) sin 60⁰.cos 30⁰.+ cos 60⁰.sin 30⁰

- (3) $\tan 45^\circ \cdot \sin^2 60^\circ \cdot \tan 30^\circ \cdot \tan 60^\circ$
- (4) $\tan^2 45^\circ \cdot \sin 60^\circ \cdot \tan 30^\circ \cdot \tan^2 60^\circ$
- (5) $\cos 45^\circ \cdot \cot^2 60^\circ \cdot \operatorname{cosec}^2 30^\circ$

Type 3 :

- (1) $\sqrt{2} \cos(A - B) = 1, 2\sin(A + B) = \sqrt{3}$ এবং A, B সূক্ষকোন হলে, A ও B এর মান নির্ণয় কর ?
- (2) $2\cos(A + B) = 1 = 2\sin(A - B)$ এবং A, B সূক্ষকোন হলে দেখাও যে, $A = 45^\circ, B = 15^\circ$ ।
- (3) $\cos(A - B) = 1, 2\sin(A + B) = \sqrt{3}$ এবং A, B সূক্ষকোন হলে, A ও B এর মান নির্ণয় কর ?
- (4) A ও B সূক্ষকোন এবং $\cot(A + B) = 1, \cot(A - B) = \sqrt{3}$ হলে, A ও B এর মান নির্ণয় কর ?

Type 4 :

- (1) $\frac{\cos A - \sin A}{\cos A + \sin A} = \frac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$ হলে, A এর মান নির্ণয় কর ?
- (2) $\frac{\cos A - \sin A}{\cos A + \sin A} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}$ সমাধান কর ?

Type 5 :

- (1) $\cos^2 30^\circ \cdot \sin^2 30^\circ = \cos 60^\circ$
- (2) $\sin 60^\circ \cdot \cos 30^\circ + \cos 60^\circ \cdot \sin 30^\circ = \sin 90^\circ$
- (3) $\cos 60^\circ \cdot \cos 30^\circ + \sin 60^\circ \cdot \sin 30^\circ = \cos 30^\circ$
- (4) $A = 45^\circ$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\cos 2A = \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}$
- (5) $\sin 3A = \cos 3A$ যদি $A = 15^\circ$ হয়।
- (6) $\sin 2A = \frac{2 \tan A}{1 + \tan^2 A}$ যদি $A = 45^\circ$ হয়।
- (7) $\tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$ যদি $A = 30^\circ$ হয়।
- (8) $\cos 2A = \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}$ যদি $A = 60^\circ$ হয়।
- (9) দেখাও যে, $\cos 3A = 4 \cos^3 A - 3 \cos A$ যদি $A = 30^\circ$ হয়।

Type 6 :

- (1) সমাধান করঃ $2\cos^2 \theta - 3\sin \theta - 3 = 0$
- (2) সমাধান করঃ $\sin \theta + \cos \theta = 1$, যখন $0 \leq \theta \leq 90^\circ$
- (3) সমাধান করঃ $\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2 - 5 \cos \theta$ যখন θ সূক্ষকোন
- (4) $2\sin^2 \theta + 3\cos \theta - 3 = 0$, θ সূক্ষকোন
- (5) $\tan^2 \theta - (1 + \sqrt{3})\tan \theta + \sqrt{3} = 0$

Type 7 :

- (1) মান নির্ণয় করঃ $3\cot^2 60^\circ + \frac{1}{4} \operatorname{cosec}^2 30^\circ + 5 \sin^2 45^\circ - 4 \cos^2 60^\circ$
- (2) দেখাও যে, $3\tan^2 30^\circ + \frac{1}{4} \sec 60^\circ + 5\cot^2 45^\circ - \frac{2}{3} \sin^2 60^\circ = 6$

প্রয়োজনীয় উত্তরমালাঃ

Type 1: (1) $\frac{4}{3}$ (2) $\frac{1}{4}$ (3) $\frac{1}{2}$ (4) $\frac{23}{5}$

Type 2: (1) 0 (2) 1 (3) $\frac{3}{4}$ (4) $\frac{3}{2}$ (5) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

Type 3: (1) $A = 52\frac{1}{2}^\circ, B = 7\frac{1}{2}^\circ$ (3) $A = 30^\circ, B = 30^\circ$ (4) $A = 37\frac{1}{2}^\circ, B = 7\frac{1}{2}^\circ$

Type 4: (1) 60° (2) $A = 30^\circ$

Type 6: (1) $30^\circ, 90^\circ$ (2) $\theta = 90^\circ$ (3) $\theta = 60^\circ$ (4) 60° (5) 45°

Type 7: (1) $\frac{7}{2}$

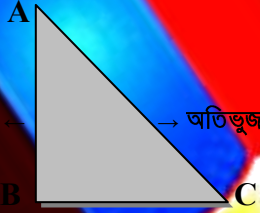
তৃতীয় অংশ (দূরত্ব ও উচ্চতা)

→ পাহাড়-পর্বত, টাওয়ার, গাছের উচ্চতা, নদ-নদীর প্রস্থ ইত্যাদি পরিমাপ করার জন্য ত্রিকোণমিতিক সূক্ষকোনের মান অর্থাৎ, $0^{\circ}, 30^{\circ}, 45^{\circ}, 60^{\circ}, 90^{\circ}$ এর মান জানা প্রয়োজন।

θ	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞
cot	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
sec	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞
cosec	∞	2	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	1

→ লম্ব, ভূমি, অতিভুজ, উন্নতি কোণ, অবনতি কোণ।

লম্ব/বিপরীত বাহু/উর্ধ্বরেখা/উন্নত রেখা



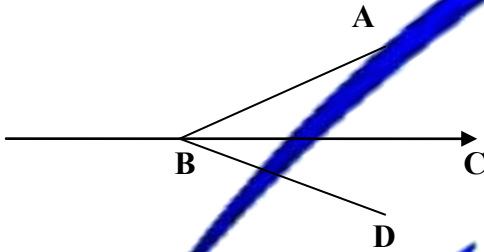
→ অতিভুজ

ভূমি/সন্নিহিত বাহু/ভূ-রেখা/ভূতলস্থ রেখা/শরন রেখা/আনুভূমিক রেখা

ভূ-রেখা: ভূতলে অবস্থিত রেখাকে ভূ-রেখা বলে। যেমন: BC

উর্ধ্বরেখা: ভূমি তলের উপরে যে কোন সরল রেখা কে উর্ধ্বরেখা বলে। যেমন: AB

উলম্বতল: পরস্পর ছেদী ভূ-রেখা ও উর্ধ্বরেখা যে তলে নিদেশ করে তাকে উলম্ব তল বলে। যেমন: ABC



উন্নতি কোণ: ভূ তলের উপর কোন বিন্দু ভূমির সমান্তরাল রেখার সাথে যে কোন উৎপন্ন করে তাকে উন্নতি কোণ বলে। যেমন: $\angle ABC$ । এক কথায় ভূমির উপরের কোণ কে উন্নতি কোণ বলে।

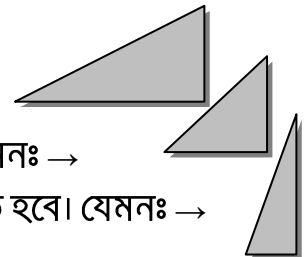
অবনতি কোণ: ভূ তলের নিচে কোন বিন্দু ভূমির সমান্তরাল রেখার সাথে যে কোন উৎপন্ন করে তাকে অবনতি কোণ বলে। যেমন: $\angle CBD$

সকল ছাত্র-ছাত্রীদের চিত্র যাতে একই রকম হয় তার নির্দেশনা:

30° বললে ভূ রেখা বড় ও উর্ধ্বরেখা ছোট হবে এবং কোণ ছোট হবে। যেমন: →

45° বললে ভূ রেখা ও উর্ধ্বরেখা সমান হবে এবং কোণ 30° থেকে বড় হবে। যেমন: →

60° বললে ভূ রেখা ছোট হবে কিন্তু উর্ধ্বরেখা বড় হবে এবং 45° থেকে কোণ বড় হবে। যেমন: →



উদাহরন ও অনুশীলনীর মিলনমেলাঃ**Type 1 :**

- (1) সূর্যের উন্নতি কোন 60° হলে মিনারের ছায়ার দৈর্ঘ্য 240 মিটার। মিনারটির উচ্চতা কত ?
- (2) একটি টাওয়ারের পাদদেশ থেকে 75 মিটার দূরে ভূতলস্থ কোনো বিন্দুতে টাওয়ারের শীর্ষের উন্নতি কোণ 30° হলে, টাওয়ারের উচ্চতা নির্ণয় কর ?
- (3) একটি লম্বা গাছের পাদদেশ থেকে 90 মিটার দূরে ভূতলস্থ কোনো বিন্দুতে গাছটির চূড়ার/শীর্ষের উন্নতি কোণ 30° হলে, গাছটির উচ্চতা নির্ণয় কর ?
- (4) একটি গাছের পাদদেশ থেকে 20 মিটার দূরে ভূতলস্থ কোনো বিন্দুতে গাছটির চূড়ার উন্নতি কোণ 60° হলে, গাছটির উচ্চতা নির্ণয় কর ?
- (5) একটি মিনারের পাদদেশ থেকে 30 মিটার দূরে ভূতলস্থ কোনো বিন্দুতে গাছটির চূড়ার উন্নতি কোণ 60° হলে, মিনারটির উচ্চতা নির্ণয় কর ?
- (6) 18 মিটার লম্বা একটি মই একটি দেয়ালের ছাদ বরাবর ঠেস দিয়ে ভূমির সঙ্গে 45° কোণ করে। দেয়ালটির উচ্চতা কত ?
- (7) 18 মিটার লম্বা একটি মই ভূমির সাথে 45° কোণ উৎপন্ন করে দেয়ালের ছাদ স্পর্শ করে। দেয়ালটির উচ্চতা কত ?
- (8) একটি ঘরের ছাদের কোনো বিন্দুতে ঐ বিন্দু থেকে 20 মিটার দূরে ভূতলস্থ একটি বিন্দুর অবনতি কোণ 30° হলে, ঘরটির উচ্চতা কত ?
- (9) একটি মিনারের শীর্ষবিন্দুতে ঐ বিন্দু থেকে 15 মিটার দূরের ভূতলস্থ একটি বিন্দুর অবনতি কোণ 45° হলে, মিনারটির উচ্চতা কত ?

Type 2 :

- (1) একটি গাছের উচ্চতা 105 মিটার। গাছটির শীর্ষের উন্নতি ভূমির কোনো বিন্দুতে উন্নতি কোন 60° হলে, গাছটির গোড়া থেকে ভূতলস্থ বিন্দুটির দূরত্ব কত ?
- (2) একটি মিনারের পাদদেশ থেকে কিছু দূরে একটি স্থানে মিনারটির শীর্ষের উন্নতি কোন 30° এবং মিনারটির উচ্চতা 26 মিটার/26 মিটার উচ্চ হলে, মিনার থেকে ঐ স্থানটির দূরত্ব কত/ঐ স্থানটি গাছটি থেকে কত দূরে ?
- (3) একটি নদীর কোনো এক তীরে অবস্থিত বিন্দুতে অপর তীরে অবস্থিত 150 মিটার উচ্চ একটি গাছের শীর্ষবিন্দুর উন্নতি কোণ 60° ; নদীর প্রস্থ কত ?

Type 3 :

- (1) ভূতলস্থ কোনো স্থানে একটি দালানের ছাদে একটি বিন্দুর উন্নতি কোন 60° । ঐ স্থান থেকে 42 মিটার পিছিয়ে গেলে দালানের ঐ বিন্দুর উন্নতি কোণ 45° হয়। দালানের উচ্চতা কত ?

- (2) ভূতলস্থ কোনো স্থানে একটি দালানের ছাদে কোন বিন্দুর উন্নতি কোন 30° । ঐ স্থান থেকে দালানের দিকে 60 মিটার এগিয়ে আসলে ঐ বিন্দুর উন্নতি কোণ 45° হয়। দালানের উচ্চতা কত ?
- (3) ভূতলে কোন স্থানে একটি স্তম্ভের শীর্ষের উন্নতি কোণ 60° । ঐ স্থান থেকে 25 মিটার পিছিয়ে গেলে স্তম্ভটির উন্নতি কোণ 30° হয়। স্তম্ভটির উচ্চতা কত ?
- (4) কোন স্থান থেকে একটি মিনারের দিকে 60 মিটার এগিয়ে আসলে মিনারের শীর্ষবিন্দুর উন্নতি কোণ 45° থেকে 60° হয়, মিনারটির উচ্চতা কত ?
- (5) একটি নদীর তীরে কোন এক স্থানে দাঁড়িয়ে একজন লোক দেখলো যে, ঠিক সোজাসুজি অপর এক তীরে অবস্থিত একটি টাওয়ারের উন্নতি কোণ 60° । ঐ স্থান থেকে 32 মিটার পিছিয়ে গিয়ে দেখলো যে, টাওয়ারের উন্নতি কোণ 30° হয়, টাওয়ারের উচ্চতা ও নদীর বিস্থার নির্ণয় কর ?
- (6) একটি নদীর তীরে কোন এক স্থানে দাঁড়িয়ে একজন লোক দেখলো যে, ঠিক সোজাসুজি অপর এক তীরে অবস্থিত একটি স্তম্ভের উন্নতি কোণ 60° । ঐ স্থান থেকে 25 মিটার পিছিয়ে গিয়ে দেখলো যে, স্তম্ভের উন্নতি কোণ 30° হয়, স্তম্ভের উচ্চতা ও নদীর বিস্থার নির্ণয় কর ?
- (7) ভূতলের একটি টাওয়ারের ছায়া 24 মিটার বেশি লম্বা হয় যদি সূর্যের উন্নতি কোণ 60° থেকে 45° হয়। টাওয়ারের উচ্চতা কত ?

Type: 4

- (1) ঝরে একটি গাছ হেলে পড়লো। গাছের গোড়া থেকে 7 মিটার উচ্চতায় একটি খুঁটি ঠেস দিয়ে গাছটিকে সোজা করা হলো। মাটিতে খুঁটিটির স্পর্শ বিন্দুর অবনতি কোণ 30° হলে, খুঁটিটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর ?
- (2) একটি খুঁটি এমনভাবে ভেঙ্গে গেলো যে, তার অবিচ্ছিন্ন ভাঙ্গা অংশ দন্ডায়মান অংশের সাথে 30° কোণ উৎপন্ন করে খুঁটিটির গোড়া থেকে 10 মিটার দূরে মাটি স্পর্শ করে। সম্পূর্ণ খুঁটিটির দৈর্ঘ্য কত ?
- (3) 64 মিটার লম্বা একটি খুঁটি ভেঙ্গে গিয়ে সম্পূর্ণ বিচ্ছিন্ন না হয়ে ভূমির সাথে 60° কোণ উৎপন্ন করে। খুঁটিটির ভাঙ্গাঅংশের দৈর্ঘ্য কত ?
- (4) একটি 48 মিটার লম্বা একটি খুঁটি ভেঙ্গে গিয়ে সম্পূর্ণ বিচ্ছিন্ন না হয়ে ভূমির সাথে 30° কোণ উৎপন্ন করল। খুঁটিটি কত উচুতে ভেঙ্গেছিলো ?
- (5) একটি গাছ ঝরে এমনভাবে ভেঙ্গে গেলো যে, অবিচ্ছিন্ন ভাঙ্গাঅংশ দন্ডায়মান অংশের সাথে 30° কোণ উৎপন্ন করে গাছের গোড়া থেকে 12 মিটার দূরে মাটি স্পর্শ করে। সম্পূর্ণ গাছটির দৈর্ঘ্য কত ?
- (6) একটি গাছ ঝরে এমনভাবে ভেঙ্গে গেলো যে, অবিচ্ছিন্ন ভাঙ্গাঅংশ দন্ডায়মান অংশের সাথে 30° কোণ উৎপন্ন করে গাছের গোড়া থেকে 10 মিটার দূরে মাটি স্পর্শ করে। সম্পূর্ণ গাছটির দৈর্ঘ্য কত ?

Type 5 :

- (1) 1000 কিমি দূরত্বে দুইটি ল্যাম্পোষ্টের ওপর কোন এক বিন্দুতে একটি হেলিকপ্টারের অবনতি কোন 60° ও 30° হলে, হেলিকপ্টারটি মাটি থেকে কত উচুতে আছে ?

প্রয়োজনীয় উত্তরমালাঃ

Type 1: (1) 415.692 মিটার(প্রায়) (2) 43.30 মিটার(প্রায়) (3) 51.962 মিটার(প্রায়) (4) 34.641 মিটার(প্রায়) (5) 51.962 মিটার(প্রায়) (6) 12.73 মিটার(প্রায়) (7) 12.728 মিটার (8) 10 মিটার (9) 10.607 মিটার(প্রায়)

Type 2: (1) 60.62 মিটার(প্রায়) (2) 45.033 মিটার(প্রায়) (3) 86.603 মিটার(প্রায়)

Type 3: (1) 99.373 মিটার(প্রায়) (2) 81.962 মিটার(প্রায়) (3) 21.651 মিটার(প্রায়) (4) 141.962 মিটার(প্রায়) (5) উচ্চতা 27.713 মিটার(প্রায়),বিস্তার 16 মিটার (6) উচ্চতা 21.651 মিটার(প্রায়),বিস্তার 12.5 মিটার(প্রায়) (7) 56.785 মিটার(প্রায়)

Type 4: (1) 14 মিটার (2) 37.32 মিটার(প্রায়) (3) 34.298 মিটার(প্রায়) (4) 16 মিটার (5) 44.785 মিটার(প্রায়) (6) 37.321 মিটার(প্রায়)

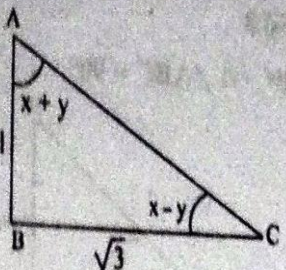
Type 5: (1) 433.013 মিটার(প্রায়)

সৃজনশীল অংশঃ

(1) $\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta = \frac{1}{x}$, যেখানে θ সূক্ষকোণ।
 ক. $\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta$ এর মান নির্ণয় কর।
 খ. দেখাও যে, $\sec\theta = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$
 গ. উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর যে, $\tan\theta + \cot\theta = \sec\theta \operatorname{cosec}\theta$

(2) $\triangle ABC$ এর $\angle B = 90^\circ$, $AB = 5 \text{ cm}$, $BC = 12 \text{ cm}$.
 ক. AC এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।
 খ. $\angle C = \theta$ হলে, $\sin\theta + \cos\theta$ এর মান নির্ণয় কর।
 গ. দেখাও যে, $\sec^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta = \sec^2\theta \operatorname{cosec}^2\theta$

(3)

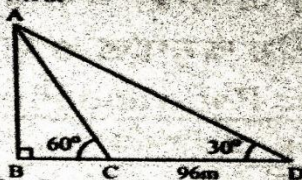


ক. AC এর পরিমাণ কত?
 খ. $\tan A + \tan C$ এর মান নির্ণয় কর।
 গ. x ও y এর মান নির্ণয় কর।

(4) $\sin\theta = p$, $\cos\theta = q$, $\tan\theta = r$, যেখানে θ সূক্ষকোণ।
 ক. $r = \sqrt{3}$ হলে, θ এর মান নির্ণয় কর।
 খ. $p + q = \sqrt{2}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\theta = 45^\circ$
 গ. $7p^2 + 3q^2 = 4$ হলে দেখাও যে, $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

(5) একটি নদীর এক তীরে কোনো স্থানে দাঁড়িয়ে একজন লোক দেখলো যে, ঠিক সোজাসোজি অপর তীরে অবস্থিত 150 মিটার লম্বা একটি গাছের শীর্ষের উন্মুক্ত কোণ 30° । লোকটি একটি নৌকাবোলে গাছটিকে লক্ষ্য করে ফারা শুরু করলো। কিন্তু পানির প্রোত্তের কারণে লোকটি গাছ থেকে 10 মিটার দূরে তীরে পৌঁছল।

(7) চিত্রে, $CD = 96$ মিটার



ক. $\angle CAD$ এর ডিগ্রি পরিমাণ নির্ণয় কর।
 খ. BC এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।
 গ. $\triangle ACD$ এর পরিসীমা নির্ণয় কর।

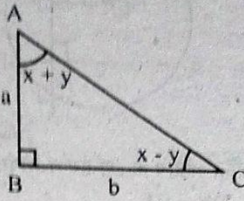
(6) 16 মিটার দীর্ঘ একটি মই লম্বভাবে দণ্ডায়মান একটি দেয়ালের বরাবর চেস দিয়ে রাখা হলো। ফলে এটি ভূমির সাথে 60° কোণ তৈরি করল।
 ক. উদ্দীপক অনুসারে সঙ্ক্ষিপ্ত কর্নাসহ চিত্র অঙ্কন কর।
 খ. দেয়ালটির উচ্চতা নির্ণয় কর।
 গ. দেয়ালের সাথে চেস দিয়ে রাখা মইটিকে পূর্বের অবস্থান থেকে বরাবর আর কতদূরে সরালে মইটি ভূমির সাথে 30° কোণ করবে?

বোর্ড এর সৃজনশীল অংশঃ

▶▶ নবম অধ্যায় : ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

৩ বোর্ড পরীক্ষার সৃজনশীল প্রশ্ন :

০১.



ক. AC এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

[ঢাকা বোর্ড - ২০১৭]

খ. প্রমাণ কর যে, $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{1-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}{b} = 2\operatorname{cosec}A$ 8

গ. $a=1$ এবং $b=\sqrt{3}$ হলে, x ও y এর মান নির্ণয় কর। 8

০২. $\triangle ABC$ এ $\angle B = 90^\circ$ এবং $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

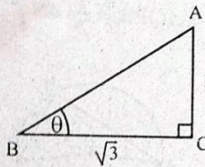
[যশোর বোর্ড - ২০১৭]

ক. AC বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $\frac{\operatorname{cosec}^2\theta - \sec^2\theta}{\operatorname{cosec}^2\theta + \sec^2\theta} = \frac{1}{2}$ 8

গ. $\angle A = x-y$ এবং $\angle C = x+y$ হলে x ও y এর মান নির্ণয় কর। 8

০৩.



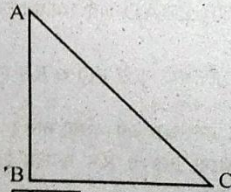
[কুমিল্লা বোর্ড - ২০১৭]

ক. θ মান নির্ণয় কর। ২

খ. উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{1+\sin^2\theta} + \frac{1}{1+\operatorname{cosec}^2\theta} = 1$ 8

গ. যদি $\frac{\cos B - \sin B}{\cos B + \sin B} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ হয়, তবে দেখাও যে, $B = \theta$ 8

০৪.



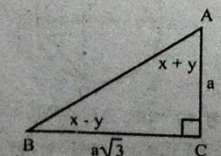
AB = a, AC = $\sqrt{a^2+b^2}$ এবং $\angle C = \theta$ হলে— [চট্টগ্রাম বোর্ড - ২০১৭]

ক. চিত্র হতে $\tan\theta$ এর ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয় কর। ২

খ. $\tan\theta$ এর মানের উপর ভিত্তি করে $\frac{a\sin\theta - b\cos\theta}{a\sin\theta + b\cos\theta}$ এর মান নির্ণয় কর। 8

গ. যদি $\tan A + \sin A = m$, $\tan A - \sin A = n$ হয়, তাহলে প্রমাণ কর যে, $m^2 - n^2 = 4\sqrt{mn}$. 8

০৫.



চিত্রে ABC একটি ত্রিভুজ

[বরিশাল বোর্ড - ২০১৭]

ক. AB এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, $\angle x = 45^\circ$ এবং $\angle y = 15^\circ$ 8

গ. $\angle B + 15^\circ$ এর ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলো বের কর। 8

০৬. ABC সমকোণী ত্রিভুজে $\angle B = 1$ সমকোণ এবং $\tan A = 1$.

ক. AC এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

খ. উদ্দীপকের আলোকে $(\sec^2 A + \cot^2 C + \sin^2 A)$ এর মান নির্ণয় কর। ২

গ. উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর যে, $\frac{1-\sin^2 A}{1+\sin^2 A} + \frac{2\tan^2 A}{3\sin 2A} = 1$. ২

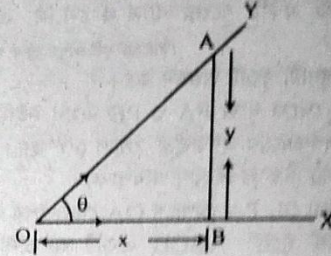
০৭. $A = \cos\theta + \sin\theta$ এবং $B = \cos\theta - \sin\theta$ দুইটি ত্রিকোণমিতিক রাশি।

ক. $\theta = 45^\circ$ হলে A এবং B এর মান নির্ণয় কর।

খ. $A = \sqrt{2}(A - \sin\theta)$ হলে, প্রমাণ কর যে, $B = \sqrt{2}(A - \cos\theta)$ ২

গ. $A = 1$ হলে, θ এর মান নির্ণয় কর যেখানে, $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ ২

০৮.



[মালদাশ বোর্ড - ২০১৭]

ক. $\cot\theta$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. উদ্দীপকের আলোকে জ্যামিতিক পদ্ধতিতে দেখাও যে, $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$. ২

গ. উদ্দীপকের আলোকে $\left(\frac{\sin A}{1-\cos A} + \frac{1-\cos A}{\sin A}\right)$ এর মান নির্ণয় কর, যখন $x=3, y=4$. ২

০৯. $\tan\theta + \sin\theta = m$ এবং $\tan\theta - \sin\theta = n$.

[যশোর বোর্ড - ২০১৭]

ক. উদ্দীপকের আলোকে দেখাও যে, $m+n = 2\sec\theta \cdot \sin\theta$. ২

খ. প্রমাণ কর যে, $m^2 - n^2 = 4\sqrt{mn}$. ২

গ. $\frac{m}{n} = \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$ হলে, θ এর মান নির্ণয় কর, যেখানে $0^\circ < \theta < 90^\circ$ ২

১০. $\tan A + \sin A = m$ এবং $\tan A - \sin A = n$.

[সুদূপ বোর্ড - ২০১৭]

ক. প্রমাণ কর যে, $\tan^2 A \cdot \sin^2 A = mn$. ২

খ. দেখাও যে, $m^2 - n^2 = 4\sqrt{mn}$. ২

গ. প্রমাণ কর যে, $\sec A = \sqrt{mn} \cdot \operatorname{cosec}^2 A$. ২

১১. $\triangle ABC$ -এ $\angle B = 90^\circ$, $\angle A = x-y$, $\angle C = x+y$, $AB = \sqrt{3}$, $BC = 1$.

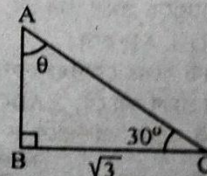
[বরিশাল বোর্ড - ২০১৭]

ক. AC-এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ২

খ. উদ্দীপকের আলোকে $\frac{\operatorname{cosec}^2 A - \sec^2 A}{\cos^2 A - \sin^2 A}$ এর মান নির্ণয় কর। ২

গ. x ও y এর মান নির্ণয় কর। ২

১২.



BC = $\sqrt{3}$ সে.মি., $\angle B =$ এক সমকোণ, $\angle ACB = 30^\circ$

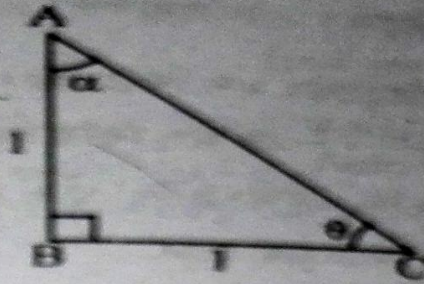
[শিলে বোর্ড - ২০১৭]

ক. AB ও AC বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ২

খ. উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{2-\sin^2 A} + \frac{1}{2+\tan^2 A} = 1$ ২

গ. উদ্দীপক অনুসারে θ কোণের সাপেক্ষে যদি $2\left(\frac{BC}{AC}\right)^2 + 3\frac{AB}{AC} - 3 = 0$ হয়, তবে দেখাও যে, $\theta = 60^\circ$ । ২

১৩. নিচের ত্রিভুজটি লক্ষ কর :



- ক. অতিভুজ এর পরিমাণ কত? সিদ্ধান্ত কোর্স - ২০১৪/ ২
- খ. $\cos\theta + \cos\alpha$ এর মান নির্ণয় কর। ৪
- গ. ত্রিভুজের আলোকে প্রমাণ কর যে, $\sin^2\theta + \cos^2\alpha = 1$. ৪
১৪. ABC সমকোণী ত্রিভুজে $\angle C$ সমকোণ, $\tan B = \sqrt{3}$. সমস্যা কোর্স - ২০১৪/ ২
- ক. AB এর মান কত? ২
- খ. উন্মীপকের আলোকে প্রমাণ কর যে, $\frac{\cot A + \tan B}{\cot B + \tan A} = \cot A \cdot \tan B$. ৪
- গ. $\angle B = p + q$ এবং $\angle A = p - q$ হলে, p ও q এর মান নির্ণয় কর। ৪
১৫. $p = 1 + \sin A$ এবং $q = 1 - \sin A$ হলে— সমস্যা কোর্স - ২০১৪/ ২
- ক. pq এর মান কত? ২

খ. প্রমাণ কর যে, $\sqrt{\frac{p}{q}} = \sec A + \tan A$. ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $(\sec A - \tan A)^2 = \frac{q}{p}$. ৪

১৬. $\frac{\cos A + \sin A}{\cos A - \sin A} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1}$, $\angle B = 60^\circ$ সুস্থিত কোর্স - ২০১৪/ ২

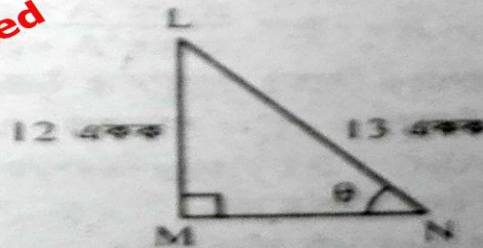
ক. $\operatorname{cosec}^2 B + \cot^2 B$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. A এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $4 \sin^2 \theta - (2 + 2\sqrt{3}) \sin \theta + \sqrt{3} = 0$ সমীকরণটি সমাধান করে দেখাও যে, $\theta = 2A$ অথবা $\theta = A$. ৪

১৭.

Jewel's Care Collected



- ক. $\cot \theta$ এর মান নির্ণয় কর। সিদ্ধান্ত কোর্স - ২০১৪/ ২
- খ. উন্মীপকের আলোকে প্রমাণ কর যে, $\tan^2 \theta - \sin^2 \theta = \tan^2 \theta \cdot \sin^2 \theta$. ৪
- গ. জ্যামিতিক পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$. ৪
১৮. কোনো সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ $\sqrt{1+p}$ এবং θ কোণের সন্ধিস্থিত বাহু $\sqrt{2p}$ । সিদ্ধান্ত কোর্স - ২০১৪/ ২
- ক. তথ্যগুলো জ্যামিতিক চিত্রে উপস্থাপন করে অন্য বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ৪
- খ. $\sec^2 \theta + \tan^2 \theta$ এর মান নির্ণয় কর। ৪
- গ. প্রমাণ কর যে, $\frac{1 + \operatorname{cosec}^2 \theta}{1 - \operatorname{cosec}^2 \theta} = \frac{-1}{p}$. ৪

৯ বাস্তব জীবনে এ অধ্যায়ের প্রয়োগ

ইতিহাসের দিকে তাকালে দেখা যায়, জ্যোতির্বিদ্যা ও ভূগোলের বিভিন্ন বিষয় সমাধা করতে গিয়েই ত্রিকোণমিতির উদ্ভব হয়েছে। কিন্তু বিজ্ঞানের শতাব্দীর পরেও বিভিন্ন ক্ষেত্রে ত্রিকোণমিতি ব্যবহার করে যাচ্ছেন। পদার্থবিজ্ঞান, প্রকৌশলবিদ্যা, রসায়নশাস্ত্র প্রভৃতিতে ত্রিকোণমিতি ব্যবহৃত হয়। পলিটেকনিক ত্রিকোণমিতি ব্যবহার হয় ক্যালকুলাস, যোগাশ্রয়ী বীজগণিত বা লিনিয়ার অ্যালজেবরা ও পরিসংখ্যানে। সুতরাং বোঝাই যাচ্ছে ত্রিকোণমিতির গুরুত্ব কতখানি! একই জীবনে ত্রিকোণমিতির কিছু প্রয়োগ দেখা যাক।

পর্বত কিংবা টাওয়ারের উচ্চতা নির্ণয় খুব সাধারণ একটি সমস্যা। এ সমস্যা সমাধানে ত্রিকোণমিতি ব্যবহৃত হয়।

নৌচালনবিদ্যায় সমুদ্রের কোন নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে তীরের দূরত্ব নির্ণয়েও ত্রিকোণমিতি ব্যবহৃত হয়।

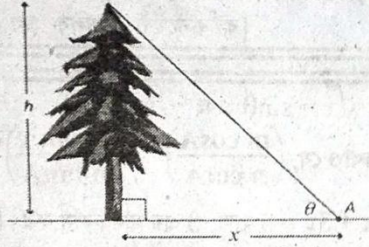
সমুদ্রবিদ্যায় (Oceanography) উচু ঢেউয়ের উচ্চতা নির্ণয়ে ত্রিকোণমিতির ব্যবহার রয়েছে।

মহাকাশবিজ্ঞানে মহাশূণ্যের বিভিন্ন বস্তু (গ্রহ-উপগ্রহ) মধ্যে দূরত্ব নির্ণয়েও এ শাস্ত্রের ব্যবহার আছে।

পর্যায়বৃত্তিক ফাংশন (শব্দ তরঙ্গ/ আলোক) বর্ণনায় সাইন/কোসাইন (অর্থাৎ ত্রিকোণমিতিক ফাংশন) ব্যবহৃত হয়।

প্রকৌশলী (Engineer) ও স্থাপত্যবিদগণ (Architects) স্থাপন (Building) সংক্রান্ত বিভিন্ন কাজ যেমন-স্থাপনার ভর, ছাদের ঢাল, ভূমির পৃষ্ঠ, পিল, আলোক রশ্মি কত কোণে স্থাপনাতে আসবে ইত্যাদি বিষয় নির্ধারণেও ত্রিকোণমিতির সাহায্য নেন।

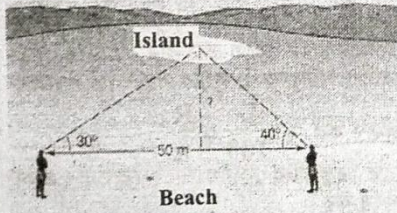
মোটকথা বাস্তব জীবন ও বিজ্ঞানে ত্রিকোণমিতির বহুমুখী ব্যবহার আমাদের সামনে এ শাস্ত্র অধ্যয়নের গুরুত্ব তুলে ধরছে।



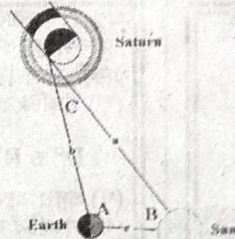
চিত্র-১: গাছের উচ্চতা নির্ণয়



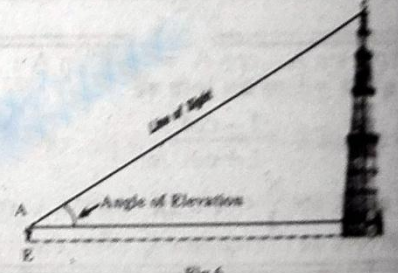
চিত্র-২: পর্বতের উচ্চতা নির্ণয়



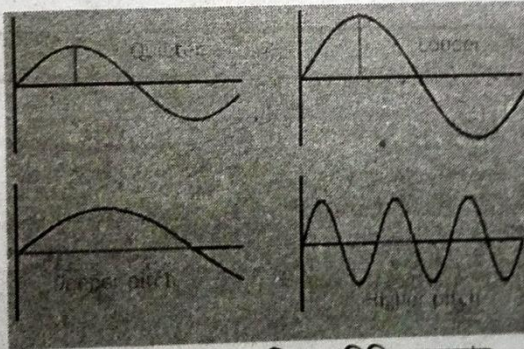
চিত্র-৩: জঙ্গাশয়ের অবস্থান নির্ণয়



চিত্র-৪: দূরত্ব নির্ণয়



চিত্র-৫: মিনারের উচ্চতা নির্ণয়



চিত্র-৬: শব্দ তরঙ্গে ত্রিকোণমিতির ব্যবহার



চিত্র-৭: দূরত্ব নির্ণয়

“As we express our gratitude, we must never forget that the highest appreciation is not to utter words, but to live by them”.

-John F. Kennedy

বিজ্ঞাপনঃ

আমাদের অরবিট কোচিং সেন্টারে স্যার দেব ক্লাস ও আনন্দের একটি অংশ তুলে ধরা হলো।

যাতে করে সকল অভিভাবক জানতে পারে যে, আমরা সকল ছাত্র-ছাত্রীদের প্রতি যথেষ্ট খেয়াল রেখে আনন্দ দেয়ার মাধ্যমে তাদের পাঠ্যদানে আগ্রহী করে তুলি।



প্রত্যেক ছাত্র-ছাত্রীকে আমরা মানসম্মত রঙীন শীট প্রদান করে থাকি। যাতে করে তারা পড়াশুনা কে আনন্দের সাথে উপলব্ধি করতে সক্ষম হয়।



আমাদের অরবিট কোচিং সেন্টারের স্যার দেব ক্লাস ও ছাত্র-ছাত্রীদের একাংশ ছবি।



অধ্যায় ভিত্তিক ক্যালকুলেটরের ব্যবহারঃ

(1) ত্রিকোণমিতিক সম্পর্কিত Calculator এর ব্যবহারঃ

কোনো কোণে ডিগ্রিতে রূপান্তরঃ

পাঠ্যবই-পৃষ্ঠা-১৪৪ঃ $\frac{\pi}{2}$ ডিগ্রিমান = 90°

Calculator button (সহকারী MODE-এ সাধারণত Degree থাকে)	ক্রীয়ে ফলাফল
ধাপ-১: ON () SHIFT EXP + () 2 ()	$(\pi+2)$
ধাপ-২: SHIFT Ans. () 2 ()	$(\pi+2)^2$
ধাপ-৩: =	90
$\therefore \left(\frac{\pi}{2}\right)^\circ = 90^\circ$	

$1^\circ = \left(\frac{\pi}{180}\right)^\circ \rightarrow$

Calculator \rightarrow	ক্রীয়ে ফলাফল
ধাপ-১: MODE MODE MODE MODE 2	Calculator কে Radian MODE-এ সেতয়া হলো
ধাপ-২: 1 SHIFT Ans. () 1 =	0.017453292 যা $\frac{\pi}{180}$ (3.141516.....) এর আসন্ন মান
$\therefore 1^\circ = \left(\frac{\pi}{180}\right)^\circ$	

(2) পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-১৪৩ঃ উদাহরণ-৩ (i): $30^\circ 12' 36''$ কে ডিগ্রিমান রূপান্তর করঃ

Calculator \rightarrow	ক্রীয়ে ফলাফল
ধাপ-১: MODE MODE MODE MODE 2	Calculator কে Radian MODE-এ সেতয়া হলো
ধাপ-২: 3 0 ° ' " 1 2 ° ' " 3 6 ° ' " ° ' "	$30^\circ 12' 36''$
ধাপ-৩: SHIFT Ans. () 1 =	0.5273 (সহ)
$\therefore 30^\circ 12' 36'' = 0.5273$ ডিগ্রিমান (সহ)	

(ii) $\frac{3\pi}{13}$ কে ডিগ্রি, মিনিট ও সেকেন্ডে রূপান্তর করঃ

Calculator	ক্রীয়ে ফলাফল
ধাপ-১: Calculator সহকারী MODE বা Degree MODE রাখতে হবে।	
ধাপ-২: 3 SHIFT Exp + () 1 3 =	0.72498292
ধাপ-৩: SHIFT Ans. () 2 = ° ' "	$41^\circ 32' 18.46''$
$\therefore \frac{3\pi}{13}$ ডিগ্রিমান = $41^\circ 32' 18.46''$	

পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-১৪৪ঃ

১) (ii) (iii): 1.3177 ডিগ্রিমানকে ডিগ্রিতে রূপান্তর করঃ

Calculator button	ক্রীয়ে ফলাফল
ধাপ-১: 1 () 3 1 7 7 SHIFT Ans. () 2	1.3177
ধাপ-২: = ° ' "	$75^\circ 29' 55.14''$
$\therefore 1.3177$ ডিগ্রিমান = $75^\circ 29' 55.14''$	

(3) ত্রিকোণমিতিক সম্পর্কিত অনুপাতের sin মান নির্ণয়ঃ

কোনো ডিগ্রি মানকে Radian Mode-এ লিখতে হবে।

একজন শিক্ষকের কাজ করতে হবে: MODE MODE MODE MODE 2 \rightarrow a button টপো চাপলেই Calculator-এ ডিগ্রিমান MODE রূপান্তরিত হবে। অতঃপর

ত্রিকোণমিতিক অনুপাত	Calculator (ডিগ্রিমান মোডে)	ক্রীয়ে ফলাফল
$\sin 0^\circ = 0$	sin () 0 =	0
$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$	sin () SHIFT Exp + () 6 () = $\frac{a}{b}$	1/2
$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	sin () SHIFT Exp + () 4 () =	0.707 যা $\frac{1}{\sqrt{2}}$ এর আসন্ন মান
$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	sin () SHIFT Exp + () 3 () =	0.866 যা $\frac{\sqrt{3}}{2}$ এর আসন্ন মান
$\sin \frac{\pi}{2} = 1$	sin () SHIFT Exp + () 2 () =	1

sin অনুপাতের বর্ধিত ক্ষমতি অর্জন করে cos ও tan অনুপাতের মান নির্ণয় একে একে কিংবা ডিগ্রিমান একে একে পর্যায়ক্রমিক ভাবে নির্ণয় করা যায়।

পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-১৪৯, অনুশীলন-১৩.২ঃ

১) (ii) যা ধাপের সমাধান: $\tan \frac{\pi}{4} + \tan \frac{\pi}{6} + \tan \frac{\pi}{3}$

Calculator	ক্রীয়ে ফলাফল
ধাপ-১: MODE MODE MODE MODE 2	Calculator কে Radian MODE-এ সেতয়া হলো
ধাপ-২: tan () SHIFT Exp + () 4 () + tan () SHIFT Exp + () 6 () + tan () SHIFT Exp + () 3 () =	2
$\therefore \tan \frac{\pi}{4} + \tan \frac{\pi}{6} + \tan \frac{\pi}{3} = 2$	

পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-১৪৩ঃ

২২ (i) যা ধাপের সমাধান: (i) $\sin^2 \frac{\pi}{6} + \cos^2 \frac{\pi}{4} + \tan^2 \frac{\pi}{3} + \cot^2 \frac{\pi}{6}$

Calculator button	ক্রীয়ে ফলাফল
ধাপ-১: MODE MODE MODE MODE 2	Calculator কে Radian MODE-এ সেতয়া হলো
ধাপ-২: () sin () SHIFT Exp + () 6 () ^ 2 + () cos () SHIFT Exp + () 4 () ^ 2 + () tan () SHIFT Exp + () 3 () ^ 2 + () cot () SHIFT Exp + () 6 () ^ 2 =	$(\sin(\pi+6))^2 + (\cos(\pi+6))^2$
ধাপ-৩: =	-75
অন্য: $\tan^2 \frac{\pi}{3} + \cot^2 \frac{\pi}{6}$ মান নির্ণয় করি	

পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-১৪২, ত্রিকোণমিতিক সার্বিকঃ

SD (Standard MODE-এ) অথবা Degree MODE-এ sin, cos ও অনুপাতের মান নির্ণয়ঃ

অনুপাত	Calculator button	ক্রীয়ে ফলাফল
$\sin 0^\circ = 0$	sin () 0 =	0
$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$	sin () 3 0 = $\frac{a}{b}$	1/2
$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$	sin () 4 5 =	0.7071 যা $\frac{1}{\sqrt{2}}$ এর আসন্ন মান
$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$	sin () 6 0 =	0.866 যা $\frac{\sqrt{3}}{2}$ এর আসন্ন মান
$\sin 90^\circ = 1$	sin () 9 0 =	1

(4) পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-১৪৯, অনুশীলন-১৩.২ঃ

১) (ii) যা ধাপের সমাধান: $\tan \frac{\pi}{6} + \tan \frac{\pi}{3} + \tan \frac{\pi}{4}$

Calculator button	ক্রীয়ে ফলাফল
ON () tan () SHIFT Exp + () 6 () + tan () SHIFT Exp + () 3 () + tan () SHIFT Exp + () 4 () =	6
$\therefore \sin \frac{\pi}{6} + \cos^2 \frac{\pi}{4} + \tan^2 \frac{\pi}{3} + \cot^2 \frac{\pi}{6} = 0.75 + 6 = 6.75$	

এ প্রক্রিয়া অর্জন করে পাঠ্যবই উদাহরণ-১৪ঃ পৃষ্ঠা-১৪৯ এর সমস্যার সমাধান কর।

পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-১৪৩ঃ উদাহরণ-৯ঃ $\sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Calculator button	ক্রীয়ে ফলাফল
ধাপ-১: MODE MODE MODE MODE 2	Calculator কে Radian MODE-এ সেতয়া হলো।
ধাপ-২: sin () 2 SHIFT Exp + () 6 () =	0.866025403 যা $\frac{\sqrt{3}}{2}$ এর আসন্ন মান।
অনুরূপভাবে $\cos \left(\frac{3\pi}{4}\right)$, $\tan \left(\frac{5\pi}{6}\right)$ এর মান নির্ণয় কর।	

ত্রিকোণমিতিক সীমাকরণের সমাধানঃ

পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-১৪৩ঃ উদাহরণ-১৭ঃ $\sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2}$; $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ সমাধান: $\theta = \frac{\pi}{4}$

Calculator button	ক্রীয়ে ফলাফল
ধাপ-১: MODE MODE MODE MODE 2	Calculator কে Radian MODE-এ সেতয়া হলো।
ধাপ-২: sin () ALPHA () + cos () ALPHA () = $\sqrt{2}$	$\sin X + \cos X - \sqrt{2} = 0$
ধাপ-৩: SHIFT CALC	
ধাপ-৪: SHIFT CALC	0.78539 যা $\frac{\pi}{4}$ এর আসন্ন মান।

১) $\sec \theta + \tan \theta = \sqrt{3}$; $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ সমাধান: $\frac{\pi}{6}$

Calculator button	ক্রীয়ে ফলাফল
ধাপ-১: MODE MODE MODE MODE 1	Calculator কে Degree MODE-এ লিখে হবে।
ধাপ-২: () 1 + cos () ALPHA () + tan () ALPHA () = $\sqrt{3}$	$(1 + \cos X) + \tan X - \sqrt{3} = 0$
ধাপ-৩: SHIFT CALC	
ধাপ-৪: SHIFT CALC	30 যা $\frac{\pi}{6}$ এর সমাধান।

(5) পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-১৪৩ঃ উদাহরণ-১৭ঃ $\sin^2 \theta - \cos^2 \theta = \cos \theta$; $0 < \theta < 2\pi$ সমাধান: $\theta = \frac{\pi}{3}, \pi$

Calculator button	ক্রীয়ে ফলাফল
ধাপ-১: CALC	1.414213562 যা $\sqrt{2}$ এর আসন্ন মান।
ধাপ-২: SHIFT Exp + () 4 () =	
বিঃদ্রঃ ক্যালকুলেটরে Degree Mode-এ রেখে এ সমস্যার সমাধান করা যায় এক্ষেত্রে $\frac{\pi}{4}$ এর পরিবর্তে 45 লিখতে হবে।	
১) $\sec \theta + \tan \theta = \sqrt{3}$; $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ সমাধান: $\theta = \frac{\pi}{6}$	
Calculator button	ক্যালকুলেটরে Radian Mode-এ সেতয়া হলো।
ধাপ-১: ON MODE MODE MODE 2	
ধাপ-২: () 1 + cos () ALPHA () + tan () ALPHA () = $\sqrt{3}$	x ?
ধাপ-৩: SHIFT CALC	1.7320 যা $\sqrt{3}$ এর আসন্ন মান।
ধাপ-৪: SHIFT Exp + () 6 () =	
২) $\sin^2 \theta - \cos^2 \theta = \cos \theta$; $0 < \theta < 2\pi$ সমাধান: $\theta = \frac{\pi}{3}, \pi$	
Calculator button	ক্যালকুলেটরে Radian Mode-এ সেতয়া হলো।
ধাপ-১: MODE MODE MODE MODE 2	
ধাপ-২: () sin () ALPHA () ^ 2 - () cos () ALPHA () ^ 2 = () cos () ALPHA ()	$(\sin X)^2 - (\cos X)^2 - \cos X = 0$
ধাপ-৩: ALPHA CALC 0	
ধাপ-৪: SHIFT CALC	
ধাপ-৫: SHIFT CALC	1.04719 যা $\frac{\pi}{3}$ এর আসন্ন মান।
পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-১৪২ঃ উদাহরণ-১৭ঃ $\sin^2 \theta - \cos^2 \theta = \cos \theta$; $0 < \theta < 2\pi$ সমাধান: $\theta = \frac{\pi}{3}, \pi$	
Calculator button	ক্যালকুলেটরে Radian Mode-এ সেতয়া হলো।
ধাপ-১: MODE MODE MODE MODE 2	
ধাপ-২: () sin () ALPHA () ^ 2 - () cos () ALPHA () ^ 2 = () cos () ALPHA ()	$(\sin X)^2 - (\cos X)^2 - \cos X$
ধাপ-৩: CALC SHIFT Exp + () 3 () =	0
ধাপ-৪: CALC SHIFT Exp + () 3 () =	0
$\therefore \sin^2 \theta - \cos^2 \theta = \cos \theta = 0$ সীমাকরণের সমাধানের চক্রটি ঘাটতি করা হলো।	

My Speech:
Make a relation with a good person,
then you can know about your world.
Md: Ibrahim Khalil Jewel