Chapter basis board Q. and solve

সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর

বিগত এসএসসি পরীক্ষার সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর

প্রশ্ন নং- ১। $A = \{x : x \in R$ এবং $x^2 - (p+q)x + pq = 0; p, q \in R\}$
$B = \{2, 3\}$ এবং $C = (3, 4, 5)$.
(ক) উপসেট ও পূরক সেট কী?
(খ) দেখাও যে, $P(B \cap C) = P(B) \cap P(C)$.
(গ) প্রমাণ কর যে, $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.
[ঢাকা বোর্ড-২০১৬]

(ক)-এর সমাধান:
উপসেট : যদি কোনো সেটের প্রত্যেক উপাদান অপর একটি সেটে বিদ্যমান থাকে তবে তাকে ঐ সেটের উপসেট বলা হয়। উদাহরণস্বরূপ–
$A = \{a, b\ c\}$ ও $B = \{a, b, c, d\}$ দুটি সেট হলে A-কে B-এর উপসেট বলা হয় এবং একে $A \subseteq B$ লিখে প্রকাশ করা হয়।
পূরক সেট : U সার্বিক সেট এবং A সেটটি U-এর উপসেট হলে A সেটের বহির্ভূত সকল উপাদান নিয়ে গঠিত সেটকে A সেটের পূরক সেট বলে। A-এর পূরক সেটকে A^c বা A' দ্বারা প্রকাশ করা হয়। গাণিতিকভাবে $A^c = U \backslash A$

(খ)-এর সমাধান:
দেওয়া আছে, $B = \{2, 3\}$
$C = \{3, 4, 5\}$
সুতরাং $B \cap C = \{2, 3\} \cap \{3, 4, 5\}$
$= \{3\}$
$P(B) = \{\{2,3\}, \{2\}, \{3\}, \varnothing\}$
$P(C) = \{\{3, 4, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \varnothing\}$
বামপক্ষ $= P(B \cap C) = \{\{3\}, \varnothing\}$
ডানপক্ষ $= P(B) \cap P(C)$
$= \{\{2, 3\}, \{2\}, \{3\}, \varnothing\} \cap \{\{3, 4, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \varnothing\}$
$= \{\{3\}, \varnothing\}$
$\therefore P(B \cap C) = P(B) \cap P(C)$ [দেখানো হলো]

(গ)-এর সমাধান:
দেওয়া আছে,
$A = \{x : x \in R$ এবং $x^2 - (p+q)x + pq = 0; p, q \in R\}$
$B = \{2, 3\}$
$C = \{3, 4, 5\}$
A এর বর্ণনাকারী সমীকরণ,
$x^2 - (p+q)x + pq = 0$
বা, $x^2 - px - qx + pq = 0$
বা, $x(x-p) - q(x-p) = 0$
বা, $(x-p)(x-q) = 0$
হয়, $x - p = 0$ অথবা, $x - q = 0$
বা, $x = p$ বা, $x = q$
$\therefore A = \{p, q\}$
বামপক্ষ $= A \times (B \cup C)$
এখন, $B \cup C = \{2, 3\} \cup \{3, 4, 5\}$
$= \{2, 3, 4, 5\}$
$\therefore A \times (B \cup C) = \{p, q\} \times \{2, 3, 4, 5\}$
$= \{(p,2), (p, 3), (p,4), (P, 5)\ (q, 2), (q, 3), (q,4) (q, 5)\}$
ডানপক্ষ $= (A \times B) \cup (A \times C)$
এখন, $A \times B = \{p, q\} \times \{2, 3\}$
$= \{(p, 2), (p, 3), (q, 2), (q, 3)\}$
এবং $A \times C = \{p, q\} \times \{3, 4, 5\}$
$= \{(p, 3), (p, 4), (p, 5), (q, 3), (q, 4), (q, 5)\}$

$\therefore (A \times B) \cup (A \times C) = \{(p, 2), (p, 3), (q, 2), (q, 3)\} \cup \{(p, 3), (p, 4), (p, 5), (q, 3), (q, 4), (q, 5)\}$
$= \{(p, 2), (p, 3), (p, 4), (p, 5)\ (q, 2), (q, 3), (q, 4), (q, 5)\}$
$\therefore A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ [প্রমাণিত]

প্রশ্ন নং- ২। $A = \{x : x \in R$ এবং $x^2 - (a+b)x + ab = 0\}$, $B = \{2,3\}$, $C = \{2, 4,5\}$ যেখানে $a, b \in R$
(ক) A সেটের উপাদানসমূহ নির্ণয় কর।
(খ) দেখাও যে, $P(B \cap C) = P(B) \cap P(C)$.
(গ) প্রমাণ কর যে, $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.
[ঢাকা বোর্ড-২০১৫]

(ক) এর সমাধান:
দেওয়া আছে, $A = \{x : x \in R$ এবং $x^2 - (a+b)x + ab = 0\}$
এখানে,
A সেটের বর্ণনাকারী সমীকরণ $x^2 - (a+b)x + ab = 0$
বা, $x^2 - ax - bx + ab = 0$
বা, $x(x-a) - b(x-a) = 0$
বা, $(x-a)(x-b) = 0$
$\therefore$ হয় $x - a = 0$ অথবা, $x - b = 0$.
বা, $x = a$ বা, $x = b$.
সুতরাং A সেটের উপাদান সমূহ a ও b অর্থাৎ $A = \{a, b\}$. [Ans.]

(খ) এর সমাধান:
দেওয়া আছে, $A = \{a, b\}$, $B = \{2, 3\}$ $C = \{2, 4, 5\}$
$\therefore B \cap C = \{2, 3\} \cap \{2, 4, 5\}$
$= \{2\}$
$\therefore P(B \cap C) = \{\varnothing, \{2\}\}$.
আবার, $P(B) = \{\varnothing, \{2\}, \{3\}, \{2, 3\}\}$
এবং $P(C) = \{\varnothing, \{2\}, \{4\}, \{5\}, \{2, 4\}, \{4, 5\}, \{2, 5\}, \{2, 4, 5\}\}$
$\therefore P(B) \cap P(C) = \{\varnothing, \{2\}\}$
সুতরাং $P(B \cap C) = P(B) \cap P(C)$ [দেখানো হলো]

(গ) এর সমাধান:
['ক' হতে পাই]
$A = \{a, b\}$
$B = \{2, 3\}$
$C = \{2, 4, 5\}$
$B \cup C = \{2, 3\} \cup \{2, 4, 5\}$
$= \{2, 3, 4, 5\}$
$\therefore A \times (B \cup C) = \{a, b\} \times \{2, 3, 4, 5\}$
$= \{(a, 2), (a, 3), (a, 4), (a, 5), (b, 2), (b, 3), (b, 4), (b, 5)\}$
আবার, $A \times B = \{a, b\} \times \{2, 3\}$
$= \{(a, 2), (a, 3), (b, 2), (b, 3)\}$
$A \times C = \{a, b\} \times \{2, 4, 5\}$
$= \{(a, 2), (a, 4), (a, 5), (b, 2), (b, 4), (b, 5)\}$
$\therefore (A \times B) \cup (A \times C) = \{(a, 2), (a, 3), (b, 2), (b, 3)\} \cup \{(a, 2), (a, 4), (a, 5), (b, 2), (b, 4), (b, 5)\}$
$= \{(a, 2), (a, 3), (a, 4), (a, 5), (b, 2), (b,3), (b, 4), (b, 5)\}$
সুতরাং $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ [প্রমাণিত]

প্রশ্ন নং- ৩। $A = \{x : x \in Z$ এবং $x^2 \leq 4\}$
$B = \{x \in N : x$ বিজোড় সংখ্যা এবং $x < 5\}$ এবং $C = \{3, 5\}$
(ক) A সেটকে তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ কর।
(খ) দেখাও যে, $P(B) \cup P(C) \subset P(B \cup C)$.
(গ) $S = \{(x, y) : x \in A, y \in A$ এবং $y = \sqrt{4 - x^2}\}$ অন্বয়টিকে তালিকা পদ্ধতিতে বর্ণনা করে ডোম S এবং রেঞ্জ S নির্ণয় কর।
[রাজশাহী বোর্ড-২০১৬]

(ক) এর সমাধান:
$A = \{x : x \in Z$ এবং $x^2 \leq 4\}$
অর্থাৎ, A হল যেসব পূর্ণসংখ্যার বর্গ 4এর সমান অথবা কম তাদের সেট।

$(-1)^2 = 1, < 4$
$(-2)^2 = 4$
$(-3)^2 = 9 > 4$
$0^2 = 0 < 4$
$1^2 = 1 < 4$
$2^2 = 4$
$3^2 = 9 > 4$

সুতরাং তালিকা পদ্ধতিতে, $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ [Ans.]

৯ (খ) এর সমাধান:

দেওয়া আছে,

$A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$
$B = \{1, 3\}$
$C = \{3, 5\}$

$\therefore P(B) = \{\phi, \{1\}, \{3\}, \{1, 3\}\}$
$P(C) = \{\phi, \{3\}, \{5\}, \{3, 5\}\}$

$\therefore P(B) \cup P(C) = \{\phi, \{1\}, \{3\}, \{1, 3\}\} \cup \{\phi, \{3\}, \{5\}, \{3, 5\}\}$
$= \{\phi, \{1\}, \{3\}, \{5\}, \{1, 3\}, \{3, 5\}\}$

আবার, $B \cup C = \{1, 3\} \cup \{3, 5\}$
$= \{1, 3, 5\}$

$P(B \cup C) = \{\phi, \{1\}, \{3\}, \{5\}, \{1, 3\}, \{3, 5\}, \{1, 5\}, \{1, 3, 5\}\}$

$\therefore P(B) \cup P(C) \subset P(B \cup C)$ [দেখানো হলো]

৯ (গ) এর সমাধান:

দেওয়া আছে,

$S = \{(x, y) : x \in A, y \in A$ এবং $y = \sqrt{4 - x^2}\}$
$A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

$\therefore x = -2$ হলে, $y = 0 \in A$
$x = -1$ হলে, $y = \sqrt{3} \notin A$
$x = 0$ হলে, $y = 2 \in A$
$x = 1$ হলে, $y = \sqrt{3} \notin A$
$x = 2$ হলে, $y = 0 \in A$

$\therefore S = \{(-2, 0), (0, 2), (2, 0)\}$
$\therefore$ ডোম $S = \{-2, 0, 2\}$
রেঞ্জ $S = \{0, 2\}$ [Ans.]

প্রশ্ন নং- ৪। $A = \{x : x \in R$ এবং $x^2 - 9x + 20 = 0\}$
$B = \{5, 6\}$ এবং $C = \{x : x$ মৌলিক সংখ্যা $6 \leq x \leq 12\}$

(ক) A সেটকে তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ কর।
(খ) $P(B \cup C)$ এর উপাদান সংখ্যা কত লিখ।
(গ) প্রমাণ কর যে, $P(A) \cap P(B) \neq P(A \cup B)$.

[চট্টগ্রাম বোর্ড- ২০১৫]

৯ (ক) এর সমাধান:

দেওয়া আছে,

$A = \{x : x \in R$ এবং $x^2 - 9x + 20 = 0\}$

এখানে, A সেটের বর্ণনাকারী সমীকরণ

$x^2 - 9x + 20 = 0$
বা, $x^2 - 5x - 4x + 20 = 0$
বা, $x(x-5) - 4(x-5) = 0$
বা, $(x-5)(x-4) = 0$
$\therefore x = 4, 5$
$\therefore A = \{4, 5\}$ [Ans.]

৯ (খ) এর সমাধান:

দেওয়া আছে, $B = \{5, 6\}$
$C = \{x : x$ মৌলিক সংখ্যা $6 \leq x \leq 12\}$
$= \{7, 11\}$

$\therefore B \cup C = \{5, 6, 7, 11\}$

$\therefore P(B \cup C) = \{\{5\}, \{6\}, \{7\}, \{11\}, \{5, 6\}, \{5, 7\}, \{5, 11\}, \{6, 7\}, \{6, 11\}, \{7, 11\}, \{5, 6, 7\}, \{5, 7, 11\}, \{6, 7, 11\}, \{5, 6, 11\}, \{5, 6, 7, 11\}, \phi\}$

$\therefore P(B \cup C)$ এর উপাদান সংখ্যা 16 টি। [Ans.]

৯ (গ) এর সমাধান:

$A = \{4, 5\}$
$B = \{5, 6\}$
$C = \{7, 11\}$

$\therefore P(A) = \{\phi, (4), (5), (4, 5)\}$
$P(B) = \{\phi, (5), (6), (5, 6)\}$

আবার, $A \cup B = \{4, 5\} \cup \{5, 6\}$
$= \{4, 5, 6\}$

$\therefore P(A \cup B) = \{\phi, (4), (5), (6), (4, 5), (4, 6), (5, 6), (4, 5, 6)\}$

সুতরাং $P(A) \cap P(B) = \{\phi, (5)\}$

সুতরাং $P(A) \cap P(B) \neq P(A \cup B)$ [প্রমাণিত]

অতিরিক্ত সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর

৫। কোনো বিদ্যালয়ের 100 জন শিক্ষার্থীর মধ্যে 44 জন ক্রিকেট 34 জন ফুটবল ও 32 জন হকি খেলতে পছন্দ করে। এদের মধ্যে 8 জন ক্রিকেট ও ফুটবল, 13 জন ফুটবল ও হকি, 14 জন ক্রিকেট ও হকি এবং 5 জন শিক্ষার্থী তিনটি খেলাই পছন্দ করে।

(ক) কতজন শিক্ষার্থী তিনটি খেলার একটিও পছন্দ করে না?
(খ) তিনটি খেলার কেবল একটি খেলা পছন্দ করে এমন শিক্ষার্থীর সংখ্যা কত?
(গ) কতজন শিক্ষার্থী ঐ তিনটি খেলার কেবল দুইটি খেলা পছন্দ করে?

[আইডিয়াল স্কুল অ্যান্ড কলেজ, মতিঝিল, ঢাকা]

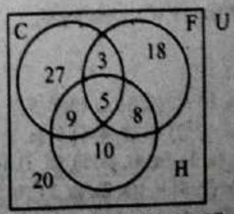
(ক) এর সমাধান:

এখানে $n(U) = 100, n(C) = 44, n(F) = 34, n(H) = 32, n(C \cap F) = 8, n(F \cap H) = 13, n(C \cap H) = 14, n(C \cap F \cap H) = 5$

তিনটি খেলার একটিও যারা পছন্দ করে না তাদের সংখ্যা

$= n(U) - n(C \cup F \cup H)$
$= n(U) - n(C) - n(F) - n(H) + n(C \cap F) + n(F \cap H) + n(C \cap H) - n(C \cap F \cap H)$
$= 100 - 44 - 34 - 32 + 8 + 13 + 14 - 5$
$= 135 - 115 = 20$ জন [Ans.]

(খ) এর সমাধান:



তিনটি খেলাই পছন্দ করে তাদের সংখ্যা $n(C \cap F \cap H) = 5$

ভেনচিত্র থেকে, $n(C \cap F) - n(C \cap F \cap H) = 8 - 5 = 3$
$n(F \cap H) - n(C \cap F \cap H) = 13 - 5 = 8$
$n(C \cap H) - n(C \cap F \cap H) = 14 - 5 = 9$

সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর

বিগত এসএসসি পরীক্ষার সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর

প্রশ্ন নং-১ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x-1}}$ এবং $g(x) = \frac{x^2}{x^2-16}$ দু'টি ফাংশন।
(ক) $f(x)$ দ্বারা বর্ণিত ফাংশনের ডোমেন নির্ণয় কর।
(খ) $f^{-1}(-1)$ নির্ণয় কর।
(গ) $g(x)$কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। [রাজশাহী বোর্ড-২০১৬]

(ক)-এর সমাধান:
দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x-1}}$

এখন, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x-1}} \in R$ হবে যদি ও কেবল যদি

$\frac{1}{\sqrt{3x-1}} \geq 0$

বা, $\sqrt{3x-1} \geq 0$ [উভয়পক্ষকে $(3x-1)$ দ্বারা গুণ করে]

বা, $3x - 1 \geq 0$ [বর্গ করে]

বা, $3x \geq 1$

বা, $x \geq \frac{1}{3}$

$\therefore x = \frac{1}{3}$ এবং $x > \frac{1}{3}$

এখানে, $x = \frac{1}{3}$ বসালে প্রদত্ত ফাংশটি অসংজ্ঞায়িত হয়।

কাজেই, $x = \frac{1}{3}$ গ্রহণযোগ্য নয়।

$\therefore$ ডোম, $F = \left\{x \in R : x > \frac{1}{3}\right\}$ [Ans.]

(খ)-এর সমাধান:
ধরি, $f^{-1}(x) = y$

$\therefore f^{-1}(y) = x$ ....(i)

দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x-1}}$

$\therefore$ বা, $f^{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{3y-1}}$

বা, $x = \frac{1}{\sqrt{3y-1}}$

বা, $x^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3y-1}}\right)^2$ [বর্গ করে]

বা, $3y - 1 = \frac{1}{x^2}$

বা, $3y = \frac{1+x^2}{x^2}$

বা, $y = \frac{1+x^2}{3x^2}$

$\therefore f^{-1}(x) = \frac{1+x^2}{3x^2}$

এখন, $f^{-1}(-1) = \frac{1+(-1)^2}{3.(-1)^2} = \frac{2}{3}$

(গ)-এর সমাধান:
দেওয়া আছে,

$g(x) = \frac{x^2}{x^2-16}$

এখন, $g(x) = \frac{x^2}{x^2-16} = \frac{x^2}{(x)^2-(4)^2} = \frac{x^2}{(x+4)(x-4)}$

ধরি, $\frac{x^2}{(x+4)(x-4)} \equiv 1 + \frac{A}{x+4} + \frac{B}{x-4}$ .... (ii)

(1) এর উভয়পক্ষকে $(x+4)(x-4)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$x^2 \equiv (x+4)(x-4) + A(x-4) + B(x+4)$ ......(ii)

(2) এর উভয়পক্ষে পর্যায়ক্রমে $x = -4, 4$ বসিয়ে পাই,

$(-4)^2 = 0 + A(-4-4) + 0$

বা, $-8A = 16$

$\therefore A = -2$

এবং $(4)^2 = 0 + 0 + B(4+4)$

বা, $8B = 16$

$\therefore B = 2$

এখন, A ও B এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$\frac{x^2}{(x+4)(x-4)} = 1 - \frac{2}{x+4} + \frac{2}{x-4}$

$\therefore g(x) = 1 - \frac{2}{x+4} + \frac{2}{x-4}$ যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশে। [Ans.]

প্রশ্ন নং-২ $F(x) = \sqrt{2-4x}$ একটি ফাংশন।
(ক) $F(x)$ দ্বারা বর্ণিত ফাংশনের ডোমেন নির্ণয় কর।
(খ) F একটি এক-এক ফাংশন কি না নির্ধারণ কর।
(গ) $F^{-1}(-3)$ এর মান নির্ণয় কর। [কুমিল্লা বোর্ড-২০১৬]

(ক)-এর সমাধান:
$F(x) = \sqrt{2-4x} \in R$ হবে যদি ও কেবল যদি

$2 - 4x \geq 0$

বা, $-4x \geq -2$

বা, $x \leq \frac{2}{4}$

বা, $x \leq \frac{1}{2}$

সুতরাং, ডোম $F = \{x \in R : x \leq \frac{1}{2}\}$ [Ans.]

(খ)-এর সমাধান:
দেওয়া আছে,

$F(x) = \sqrt{2-4x}$

ধরি, যেকোনো $x_1 \in$ ডোম F, $x_2 \in$ ডোম F যেখানে, $x_1 \neq x_2$ এর জন্য

$F(x_1) = F(x_2)$ হবে যদি ও কেবল যদি $\sqrt{2-4x_1} = \sqrt{2-4x_2}$ হয়।

$\therefore \sqrt{2-4x_1} = \sqrt{2-4x_2}$

বা, $2 - 4x_1 = 2 - 4x_2$ [বর্গ করে]

বা, $-4x_1 = -4x_2$

বা, $x_1 = x_2$

$\therefore F(x)$ একটি এক-এক ফাংশন।

(গ)-এর সমাধান:
সংজ্ঞানুসারে, $F(F^{-1}(x)) = x$

$\therefore F(y) = x$ ....(i) [ধরি, $F^{-1}(x) = y$]

দেওয়া আছে,

$F(x) = \sqrt{2-4x}$

বা, $F(y) = \sqrt{2-4y}$

বা, $x = \sqrt{2-4y}$

বা, $x^2 = 2 - 4y$

বা, $4y = 2 - x^2$

বা, $y = \frac{1}{4}(2 - x^2)$

$\therefore F^{-1}(x) = \frac{1}{4}\{2 - x^2\}$

তাহলে, $F^{-1}(-3) = \frac{1}{4}(2-(-3)^2)$

$= \frac{1}{4}(2-9)$

$= -\frac{7}{4}$

$\therefore F^{-1}(-3)$ এর নির্ণেয় $-\frac{7}{4}$ [Ans.]

প্রশ্ন নং-৩ $f(x) = \frac{2x+2}{x-1}$ একটি ফাংশন যেখানে $x \neq 1$.
(ক) $f(p) = k$ হলে, p এর মান k এর মাধ্যমে প্রকাশ কর।
(খ) $f^{-1}(3)$ নির্ণয় কর।
(গ) $f(x^2)$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। [বরিশাল বোর্ড-২০১৬]

(ক)-এর সমাধান:

দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{2x+2}{x-1}$

$\therefore f(p) = \frac{2p+2}{p-1}$

যেহেতু, $f(p) = k$

$\therefore \frac{2p+2}{p-1} = k$

বা, $pk - k = 2p + 2$

বা, $pk - 2p = k + 2$

বা, $p(k-2) = k + 2$

বা, $p = \frac{k+2}{k-2}$

$\therefore p = \frac{k+2}{k-2}$ [Ans.]

(খ)-এর সমাধান:

ধরি, $f^{-1}(x) = y$

$\therefore f^{-1}(y) = x$ .....(i)

দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{2x+2}{x-1}$

বা, $f^{-1}(y) = \frac{2y+2}{y-1}$

বা, $x = \frac{2y+2}{y-1}$ [(i) হতে]

বা, $xy - x = 2y + 2$

বা, $xy - 2y = x + 2$

বা, $y(x-2) = x + 2$

বা, $y = \frac{x+2}{x-2}$

$\therefore f^{-1}(x) = \frac{x+2}{x-2}$

তাহলে, $f^{-1}(3) = \frac{3+2}{3-2} = 5$

$\therefore f^{-1}(3) = 5$. [Ans.]

(গ)-এর সমাধান:

দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{2x+2}{x-1}$

$\therefore f(x^2) = \frac{2x^2+2}{x^2-1}$

বা, $f(x^2) = \frac{2(x^2+1)}{(x+1)(x-1)}$

এখন, $\frac{2(x^2+1)}{(x+1)(x-1)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করতে হবে।

ধরি, $\frac{2(x^2+1)}{(x+1)(x-1)} = 1 + \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$ ....(i)

উভয়পক্ষকে $(x+1)(x-1)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$2(x^2+1) = (x+1)(x-1) + A(x-1) + B(x+1)$ ......(ii)

যা x এর সকল মানের জন্য সত্য।

(ii) নং-এ $x = -1$ বসিয়ে পাই,

$2\{(-1)^2+1\} = 0 + A(-1-1) + B(-1+1)$

বা, $4 = -2A + 0$

বা, $A = -2$

আবার, (ii)-এ $x = 1$ বসিয়ে পাই,

$2.2 = 0 + 0 + 2B$

বা, $2B = 4$

বা, $B = 2$

A ও B এর মান (i)নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$\frac{2(x^2+1)}{(x+1)(x-1)} = 1 - \frac{2}{x+1} + \frac{2}{x-1}$ যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ। [Ans.]

প্রশ্ন নং-৪ $F(x) = \frac{1}{x-5}$ একটি ফাংশন,
(ক) $F(x) = 2$ হলে, x-এর মান নির্ণয় কর।
(খ) $F(x)$ ফাংশনের ডোমেন নির্ণয় কর এবং ফাংশনটি এক এক কিনা নির্ধারণ কর।
(গ) $F^{-1}(3)$ নির্ণয় কর। [কুমিল্লা বোর্ড-২০১৬]

(ক) এর সমাধান:

দেওয়া আছে,

$F(x) = \frac{1}{x-5}$

এখন,

$F(x) = 2$

বা, $\frac{1}{x-5} = 2$

বা, $2(x-5) = 1$

বা, $2x - 10 = 1$

বা, $2x = 10 + 1$

বা, $x = \frac{11}{2}$ [Ans.]

(খ) এর সমাধান:

দেওয়া আছে,

$F(x) = \frac{1}{x-5}$

এখন,

$F(x) = \frac{1}{x-5} \in R$ যদি এবং কেবল যদি $x - 5 \neq 0$

বা, $x \neq 5$ হয়।

$\therefore$ ডোম $F = R - \{5\}$ [Ans.]

ধরি, $a, b, \in R$ তাহলে $F(a) = \frac{1}{a-5}$

এবং $F(b) = \frac{1}{b-5}$

এখন, $F(a) = F(b)$

বা, $\frac{1}{a-5} = \frac{1}{b-5}$

বা, $a - 5 = b - 5$

বা, $a = b$

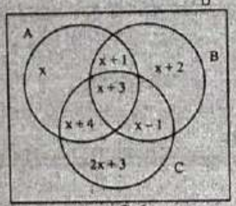
সুতরাং F এক এক ফাংশন।

Jewel's Care Life is for motto lesson

(গ) এর সমাধান:

ধরি,
$F(x) = y$
বা, $\frac{1}{x-5} = y$
বা, $y(x-5) = 1$
বা, $x - 5 = \frac{1}{y}$
বা, $x = \frac{1}{y} + 5$
কিন্তু, $x = F^{-1}(y)$
বা, $F^{-1}(y) = \frac{1}{y} + 5$
বা, $F^{-1}(3) = \frac{1}{3} + 5$
$= \frac{1+15}{3} = \frac{16}{3}$ [Ans.]

প্রশ্ন নং-৫ ।



(ক) $P(x)=2x^2+3x$ হলে, $P(-2)$ নির্ণয় কর।
(খ) $x=2$ হলে দেখাও যে, $P(B) \neq P(A'\cap B)$।
(গ) $f(x) = n(C\cap A'\cap B')$ হলে দেখাও যে, $f(x)$ এক-এক ফাংশন ও $f^{-1}(3)=0$
[সিলেট বোর্ড- ২০১৫]

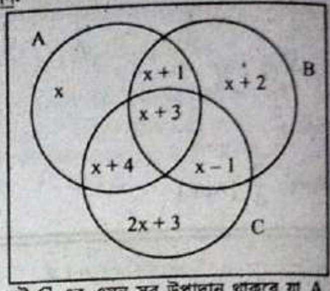
(ক) এর সমাধান:

দেওয়া আছে,
$P(x) = 2x^2 + 3x$
$P(-2) = 2\cdot(-2)^2 + 3\cdot(-2)$
$= 8 - 6 = 2$ m [Ans.]

(খ) এর সমাধান:

উদ্দীপকের চিত্র হতে ,সেট B : $x + 1 = 2 + 1 = 3$
$x + 2 = 2 + 2 = 4$
$x + 3 = 2 + 3 = 5$
$x - 1 = 2 - 1 = 1$
$\therefore$ সেট $B = \{1, 3, 4, 5\}$
একইভাবে, সেট $A = \{2, 3, 5, 6\}$
সেট $C = \{1, 5, 6, 7\}$
$\therefore$ সেট $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
বামপক্ষ,
$P(B) = \{(1, 3, 4, 5), (1, 3, 4), (1, 3, 5), (1, 4, 5), (3, 4, 5), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (3, 4), (3, 5), (4, 5), (1), (3), (4), (5), \varphi\}$
ডানপক্ষ, $A' = U - A$
$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} - \{2, 3, 5, 6\}$
$= \{1, 4, 7\}$
$\therefore A'\cap B = \{1, 4, 7\} \cap \{1, 3, 4, 5\}$
$= \{1, 4\}$
$\therefore P(A'\cap B) = \{(1,4), (1), (4)\}$
$\therefore P(B) \neq P(A'\cap B)$ [দেখানো হল]

(গ) এর সমাধান:



$(C\cap A'\cap B')$ সেটে C এর এমন সব উপাদান থাকবে যা A ও B সেটে নাই। এমন সেটের উপাদান সংখ্যা হল $(2x+3)$। সুতরাং $f(x) = 2x + 3$
এখন, $x_1 \in$ ডোম F এবং $x_2 \in$ ডোম F এর জন্য
$f(x_1) = f(x_2)$ হবে যদিও কেবল যদি
$2x_1 + 3 = 2x_2 + 3$
বা, $2x_1 = 2x_2$
বা, $x_1 = x_2$
সুতরাং $f(x)$ ফাংশনটি এক-এক ফাংশন। [দেখানো হলো]
ধরি, $y = 2x + 3$
বা, $2x = y - 3$
বা, $x = \frac{y-3}{2}$
বা, $f^{-1}(y) = \frac{y-3}{2}$
বা, $f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$
বা, $f^{-1}(3) = \frac{3-3}{2} = 0$
$\therefore f(x)$ এক এক ফাংশন এবং $f^{-1}(3) = 0$ [দেখানো হলো]

প্রশ্ন নং-৬ । $F(x) = \sqrt{1-2x}$
(ক) $F(x)$এর ডোমেন নির্ণয় কর।
(খ) ফাংশনটি এক-এক কি-না তা নির্ধারণ কর।
(গ) $F^{-1}(x)$নির্ণয় কর। [বরিশাল বোর্ড- ২০১৫]

(ক) এর সমাধান:

দেওয়া আছে,
$F(x) = \sqrt{1-2x}$
এখন $F(x) \in R$ হবে যদিও কেবল যদি $1 - 2x \geq 0$
বা, $1 \geq 2x$
বা, $x \leq \frac{1}{2}$
$\therefore$ ডোম $F = \{x : x \in R$ এবং $x \leq \frac{1}{2}\}$

(খ) এর সমাধান:

$x_1 \in$ ডোম F এবং $x_2 \in$ ডোম F এর জন্য $F(x_1) = F(x_2)$ হবে যদি ও কেবল যদি
$\sqrt{1-2x_1} = \sqrt{1-2x_2}$
বা, $1 - 2x_1 = 1 - 2x_2$
বা, $-2x_1 = -2x_2$
$\therefore x_1 = x_2$
$\therefore F(x)$ ফাংশনটি এক-এক.

(গ) এর সমাধান:

ধরি, $y = F(x) = \sqrt{1-2x}$
বা, $y^2 = 1 - 2x$
বা, $2x = 1 - y^2$
বা, $x = \frac{1-y^2}{2}$
বা, $F^{-1}(y) = \frac{1-y^2}{2}$
বা, $F^{-1}(x) = \frac{1-x^2}{2}$ [Ans.]

প্রশ্ন নং-৭। $f(y)=\dfrac{y^3-2y^2+1}{y^2-2y-3}$

(ক) $f\left(-\dfrac{1}{3}\right)$ নির্ণয় কর।

(খ) $f(y)=0$ হলে y এর মান নির্ণয় কর।

(গ) $f(y)$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। [দিনাজপুর বোর্ড- ২০১৫]

৭ (ক) এর সমাধান:

দেওয়া আছে,

$$f(y)=\frac{y^3-2y^2+1}{y^2-2y-3}$$

$$\therefore f\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^3-2\left(-\frac{1}{3}\right)^2+1}{\left(-\frac{1}{3}\right)^2-2\left(-\frac{1}{3}\right)-3}$$

$$=\frac{-\frac{1}{27}-2\left(\frac{1}{9}\right)+1}{\frac{1}{9}+\frac{2}{3}-3}$$

$$=\frac{\frac{-1-6+27}{27}}{\frac{1+6-27}{9}}$$

$$=\frac{20}{27}\times\frac{9}{-20}=\frac{-1}{3}\ \text{[Ans.]}$$

৭ (খ) এর সমাধান:

$f(y)=0$

বা, $\dfrac{y^3-2y^2+1}{y^2-2y-3}=0$

বা, $y^3-2y^2+1=0$

বা, $y^3-y^2-y^2+y-y+1=0$

বা, $y^2(y-1)-y(y-1)-1(y-1)=0$

বা, $(y-1)(y^2-y-1)=0$

$\therefore y-1=0$ অথবা, $y^2-y-1=0$

বা, $y=1$ বা, $y=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

$\therefore y=1, \dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ [Ans.]

৭ (গ) এর সমাধান:

$$f(y)=\frac{y^3-2y^2+1}{y^2-2y-3}$$

$$=\frac{y(y^2-2y-3)+3y+1}{y^2-3y+y-3}$$

$$=y+\frac{3y+1}{(y+1)(y-3)}$$

ধরি, $\dfrac{3y+1}{(y+1)(y-3)}=\dfrac{A}{y+1}+\dfrac{B}{y-3}$ -----(i)

(i)নং এর উভয় পক্ষকে $(y+1)(y-3)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$3y+1=A(y-3)+B(y+1)$-------(ii)

(ii) নং এ $y=-1$ বসিয়ে পাই,

$-3+1=A(-1-3)+B(-1+1)$

বা, $-2=-4A$

বা, $A=\dfrac{1}{2}$

(ii)নং এ $y=3$ বসিয়ে পাই,

$3.3+1=A(3-3)+B(3+1)$

বা, $10=4B$

বা, $B=\dfrac{10}{4}=\dfrac{5}{2}$

$\therefore f(y)=\dfrac{y^3-2y^2+1}{y^2-2y-3}=y+\dfrac{1}{2(y+1)}+\dfrac{5}{2(y-3)}$ [Ans.]

অতিরিক্ত সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর

প্রশ্ন নং-৮। $S=\{(x,y): x\in A, y\in A$ এবং $y=x^2\}$ যেখানে, $A=\{-2,-1,0,1,2\}$.

(ক) S এর অধীনে $-2,-1,0,1,2$ এর ইমেজ নির্ণয় কর।

(খ) S অন্বয়টিকে তালিকা পদ্ধতিতে লিখ এবং ডোম ও রেঞ্জ S নির্ণয় কর।

(গ) S ও S^{-1} অন্বয়দ্বয় ফাংশন কী না? ব্যাখ্যা কর।

(ক) এর সমাধান:

ধরি, $y=f(x)=x^2$

$\therefore S$ এর অধীনে, -2 এর ইমেজ $f(-2)=(-2)^2=4$

-1 এর ইমেজ $f(-1)=(-1)^2=1$

0 এর ইমেজ $f(0)=0^2=0$

1 এর ইমেজ $f(1)=1^2=1$

2 এর ইমেজ $f(2)=2^2=4$

(খ) এর সমাধান:

প্রদত্ত অন্বয়, $S=\{(x,y): x\in A, y\in A$ এবং $y=x^2\}$ যেখানে, $A=\{-2,-1,0,1,2\}$

এখন $y=x^2$

প্রত্যেক $x\in A$ এর জন্য $y=x^2$ এর মান 'ক' হতে পাই,

x	-2	-1	0	1	2
$y=x^2$	4	1	0	1	4

কিন্তু $4\notin A$

$\therefore (-2,4)\notin S$ এবং $(2,4)\notin S$

$\therefore S=\{(x,y): x\in A, y\in A$ এবং $y=x^2\}$

$=\{(-1,1),(0,0),(1,1)\}$

ডোম $S=\{-1,0,1\}$ এবং রেঞ্জ $S=\{0,1\}$. **(Ans.)**

(গ) এর সমাধান:

'খ' হতে পাই

$S=\{(x,y): x\in A, y\in A$ এবং $y=x^2\}$

$=\{(-1,1),(0,0),(1,1)\}$

এখন, S অন্বয়ে একই প্রথম উপাদান বিশিষ্ট একাধিক ভিন্ন ক্রমজোড় নেই। সুতরাং S অন্বয়টি একটি ফাংশন।

আবার, $S^{-1}=\{(1,-1),(0,0),(1,1)\}$

S^{-1} অন্বয়ে একই প্রথম উপাদান বিশিষ্ট একাধিক ভিন্ন ক্রমজোড় আছে। যথা: $(1,-1)$ এবং $(1,1)$.

$\therefore S^{-1}$ অন্বয়টি ফাংশন নয়।

প্রশ্ন নং-৯। $A=\{-2,-1,0,1,2\}$, $B=\{-8,-1,0,1,8\}$. (VVI)

$f: A\to B$, যেখানে $f(x)=x^3$.

(ক) f এর অধীনে A ও B সেটের মধ্যে এক-এক মিল চিত্রের মাধ্যমে দেখাও।

(খ) দেখাও যে, $f(x)$ এক-এক এবং অনটু।

(গ) $f^{-1}(x)$ নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, f^{-1} এর অধীনে B সেটের ইমেজ A সেট।

(ক) এর সমাধান:

দেওয়া আছে,

$A=\{-2,-1,0,1,2\}$, $B=\{-8,-1,0,1,8\}$

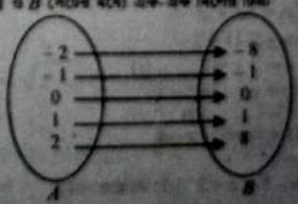
এবং $f: A\to B$, যেখানে $f(x)=x^3$

এখন, $f(-2)=(-2)^3=-8$ $f(-1)=(-1)^3=-1$

$f(0)=0^3=0$ $f(1)=1^3=1$

$f(2)=2^3=8$

$\therefore f$ এর অধীনে A ও B সেটের মধ্যে এক-এক মিলের চিত্র:



$f: A\to B$

Jewel's Care Life is for motto lesson

সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর

বিগত এসএসসি পরীক্ষার সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর

প্রশ্ন-১ $f(a) = a^3 + 5a^2 + 6a + 8$ এবং $g(a) = \dfrac{2a}{(a+1)(a^2+1)^2}$ দুইটি বীজগণিতীয় রাশি।

(ক) $f(-3)$ এর মান কত?

(খ) $f(a)$ কে $x - p$ এবং $x - q$ দ্বারা ভাগ করলে যদি একই ভাগশেষ থাকে যেখানে $p \neq q$, তবে দেখাও যে, $p^2 + q^2 + pq + 5p + 5q + 6 = 0$.

(গ) $g(a)$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। [ঢাকা বোর্ড-২০১৬]

(ক)-এর সমাধান:

$f(a) = a^3 + 5a^2 + 6a + 8$

$\therefore f(-3) = (-3)^3 + 5(-3)^2 + 6(-3) + 8$

$= -27 + 45 - 18 + 8$

$= 53 - 45$

$= 8$

$\therefore$ নির্ণেয় মান 8 [Ans.]

(খ)-এর সমাধান:

দেওয়া আছে, $f(a) = a^3 + 5a^2 + 6a + 8$

$f(a)$ কে $x - p$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে, $f(p)$;

$\therefore f(p) = p^3 + 5p^2 + 6p + 8$

এবং $f(a)$ কে $x - q$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে, $f(q)$;

$\therefore f(q) = q^3 + 5q^2 + 6q + 8$

শর্তানুসারে, $f(p) = f(q)$

বা, $p^3 + 5p^2 + 6p + 8 = q^3 + 5q^2 + 6q + 8$

বা, $p^3 - q^3 + 5p^2 - 5q^2 + 6p - 6q + 8 - 8 = 0$

বা, $(p - q)(p^2 + pq + q^2) + 5(p + q)(p - q) + 6(p - q) = 0$

বা, $(p - q)\{(p^2 + pq + p^2) + 5(p + q) + 6\} = 0$

সুতরাং, $p^2 + pq + q^2 + 5(p + q) + 6 = 0$ [$\because p \neq q$ বা, $p - q \neq 0$]

বা, $p^2 + pq + q^2 + 5p + 5q + 6 = 0$

$\therefore p^2 + q^2 + pq + 5p + 5q + 6 = 0$ [দেখানো হলো]

(গ)-এর সমাধান:

দেওয়া আছে, $g(a) = \dfrac{2a}{(a+1)(a^2+1)^2}$

এখন, $\dfrac{2a}{(a+1)(a^2+1)^2}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করতে হবে।

ধরি, $\dfrac{2a}{(a+1)(a^2+1)^2} = \dfrac{A}{a+1} + \dfrac{Ba+C}{a^2+1} + \dfrac{Da+E}{(a^2+1)^2}$ ....(i)

(i) নং এর উভয়পক্ষে $(a + 1)(a^2 + 1)^2$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$2a \equiv A(a^2+1)^2 + (Ba+C)(a+1)(a^2+1) + (Da+E)(a+1)$

বা, $2a \equiv A(a^4+2a^2+1) + (Ba+C)(a^3+a^2+a+1) + (Da+E)(a+1)$

বা, $2a \equiv Aa^4 + 2Aa^2 + A + Ba^4 + Ba^3 + Ba^2 + Ba + Ca^3 + Ca^2 + Ca + C + Da^2 + Da + Ea + E$ .... (ii)

বা, $2a \equiv a^4(A + B) + a^3(B + C) + a^2(2A + B + C + D) + a(B + C + D + E) + 1(A + C + E)$ ....(ii)

(ii) নং এর উভয়পক্ষ থেকে a^4, a^3, a^3, a এর সহগ এবং ধ্রুবক পদ সমীকৃত করে পাই,

$A + B = 0$ ....(iii)

$(B + C) = 0$ ..... (iv)

$(2A + B + C + D) = 0$ ......(v)

$(B + C + D + E) = 2$ ......(vi)

$(A + C + E) = 0$ ......(vii)

(iii) হতে (iv) নং বিয়োগ করে পাই,

$A - C = 0$

বা, $A = C$

(v) হতে (vi) নং বিয়োগ করে পাই,
$2A - E = -2$
বা, $2C - E = -2$ $[\because A = C]$
বা, $2C = E - 2$
বা, $C = \frac{E-2}{2}$
(vii) নং হতে পাই,
$A + C + E = 0$
বা, $C + C + E = 0$
বা, $2C + E = 0$
বা, $2\frac{E-2}{2} + E = 0$
বা, $E - 2 + E = 0$
বা, $2E = 2$
$\therefore E = 1$
$\therefore A = C = \frac{E-2}{2} = \frac{1-2}{2} = -\frac{1}{2}$
(iii) নং হতে পাই,
$A + B = 0$
বা, $-\frac{1}{2} + B = 0$
বা, $B = \frac{1}{2}$
(vi) নং হতে পাই,
$(B + C + D + E) = 1$
বা, $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + D + 1 = 2$
বা, $D = 2 - 1$
$\therefore D = 1$
(i) নং এ A, B, C, D ও E এর মান বসিয়ে পাই,

$$\frac{2a}{(a+1)(a^2+1)^2} = \frac{-\frac{1}{2}}{a+1} + \frac{\frac{1}{2}.a + \left(-\frac{1}{2}\right)}{a^2+1} + \frac{1.a+1}{(a^2+1)^2}$$
$$= \frac{(-)1}{2(a+1)} + \frac{\frac{1}{2}.a - \frac{1}{2}}{a^2+1} + \frac{a+1}{(a^2+1)^2}$$
$$= \frac{(-)1}{2(a+1)} + \frac{a-1}{2(a^2+1)} + \frac{a+1}{(a^2+1)^2}$$
$$= \frac{(-)1}{2(a+1)} + \frac{a-1}{2(a^2+1)} + \frac{a+1}{(a^2+1)^2}$$

$\therefore$ এটিই g(a) এর নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ। **[Ans.]**

প্রশ্ন - ২ : $P(x) = x^3 - x^2 + ax + b$ এবং $Q(x) = x^2 - 2x - 8$.
(ক) $Q(x)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।
(খ) $\frac{x^2}{Q(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।
(গ) $P(x)$ এর একটি উৎপাদক $Q(x)$ হলে, a এবং b এর মান নির্ণয় কর।
[যশোর বোর্ড-২০১৬]

(ক)-এর সমাধান:
দেওয়া আছে,
$Q(x) = x^2 - 2x - 8$
$= x^2 - 4x + 2x - 8$
$= x(x-4) + 2(x-4)$
$= (x-4)(x+2)$
$\therefore$ Q(x) এর বিশ্লেষিত উৎপাদক $(x-4)(x+2)$ **[Ans.]**

(খ)-এর সমাধান:
এখানে, $Q(x) = x^2 - 2x - 8 = (x-4)(x+2)$
$\therefore \frac{x^2}{Q(x)} = \frac{x^2}{(x-4)(x+2)}$
ধরি, $\frac{x^2}{(x-4)(x+2)} \equiv 1 + \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+2}$ .....(i)
(1) এর উভয়পক্ষকে $(x-4)(x+2)$ দ্বারা গুণ করে পাই,
$x^2 \equiv (x-4)(x+2) + A(x+2) + B(x-4)$ .....(ii)

(ii) এর উভয়পক্ষে পর্যায়ক্রমে $x = 4, -2$ বসিয়ে পাই,
$(4)^2 = (4-4)(4+2) + A(4+2) + B(4-4)$
বা, $16 = 6A$
বা, $A = \frac{16}{6}$
$\therefore A = \frac{8}{3}$
এবং, $(-2)^2 = (-2-4)(-2+2) + A(-2+2) + B(-2-4)$
বা, $4 = -6B$
বা, $B = -\frac{4}{6}$
$\therefore B = -\frac{2}{3}$
A ও B এর মান (i) এ বসিয়ে পাই,
$$\frac{x^2}{(x-4)(x+2)} = 1 + \frac{\frac{8}{3}}{x-4} + \frac{-\frac{2}{3}}{x+2}$$
$$= 1 + \frac{8}{3(x-4)} - \frac{2}{3(x+2)}$$
$\therefore \frac{x^2}{Q(x)}$ এর আংশিক ভগ্নাংশ $1 + \frac{8}{3(x-4)} - \frac{2}{3(x+2)}$ **[Ans.]**

(গ)-এর সমাধান:
দেওয়া আছে,
$P(x) = x^3 - x^2 + ax + b$
'ক' হতে পাই; $Q(x) = (x-4)(x+2)$
P(x) এর একটি উৎপাদক Q(x) অর্থাৎ $(x-4)(x+2)$ হলে,
$(x-4)(x+2) = 0$
বা, $x = -2, 4$
এখন, Q(x), P(x) এর উৎপাদক হওয়ায়,
$P(-2) = 0$
বা, $(-2)^3 - (-2)^2 + a(-2) + b = 0$
বা, $-8 - 4 - 2a + b = 0$
বা, $b - 2a = 12$ .....(i)

এবং $P(4) = 0$
বা, $(4)^3 - (4)^2 + 4a + b = 0$
বা, $64 - 16 + 4a + b = 0$
বা, $b + 4a = -48$ .....(ii)

(i) হতে, (ii) বিয়োগ করে পাই,
$b - 2a - 4a - b = 12 + 48$
বা, $-6a = 60$
$\therefore a = -10$
(ii) নং এ a-এর মান বসিয়ে পাই,
$b + 4.(-10) = -48$
বা, $b = -48 + 40$
$\therefore b = -8$
a ও b এর নির্ণেয় মান $-10, -8$ **[Ans.]**

প্রশ্ন - ৩ : $p(x) = x^3 + x^2 - 6x$ এবং $f(x) = x^2 - 9x - 6$ দুটি বহুপদী।
(ক) $f(x)$ কে $(x+3)$ দ্বারা ভাগ করলে যে ভাগশেষ থাকে তা ভাগশেষ উপপাদ্যের সাহায্যে নির্ণয় কর।
(খ) $p(x)$ কে $(x-a)$ এবং $(x-b)$ দ্বারা ভাগ করলে যদি একই ভাগশেষ থাকে যেখানে $a \neq b$, তবে দেখাও যে, $a^2 + ab + b^2 + a + b = 6$.
(গ) $\frac{f(x)}{p(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। [চট্টগ্রাম বোর্ড-২০১৬]

(ক)-এর সমাধান:
দেওয়া আছে, $f(x) = x^2 - 9x - 6$
ভাগশেষ উপপাদ্য থেকে আমরা পাই, যদি $f(x)$ ধনাত্মক মাত্রার বহুপদী হয় এবং a কোনো নির্দিষ্ট সংখ্যা হয়, তবে $f(x)$ কে $x - a$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ $f(a)$ হবে।
যেহেতু, $x - a = x + 3 \therefore x + 3 = x - (-3)$ বা, $a = -3$
সুতরাং, ভাগশেষ, $f(-3) = (-3)^2 - 9.(-3) - 6$
$= 9 + 27 - 6$
$= 30$ **[Ans.]**

(খ)-এর সমাধান:
দেওয়া আছে,
$P(x) = x^3 + x^2 - 6x$
P(x) কে $(x-a)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে,
$P(a) = a^3 + a^2 - 6a$
এবং P(x) কে $(x-b)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে,
$P(b) = b^3 + b^2 - 6b$

শর্তানুসারে,
$a^3 + a^2 - 6a = b^3 + b^2 - 6b$
বা, $a^3 - b^3 + a^2 - b^2 = 6a - 6b$
বা, $(a - b)(a^2 + ab + b^2) + (a - b)(a + b) - 6(a - b) = 0$
বা, $(a - b)(a^2 + ab + b^2 + a + b - 6) = 0$
বা, $a^2 + ab + b^2 + a + b - 6 = 0$ [$\because a \neq b$ বা, $a - b \neq 0$]
$\therefore a^2 + ab + b^2 + a + b = 6$ [দেখানো হলো]

✍ (গ)-এর সমাধান:

Jewel's Care Collected

এখানে,
$P(x) = x^3 + x^2 - 6x$
$= x(x^2 + x - 6)$
$= x(x^2 + 3x - 2x - 6)$
$= x\{(x(x + 3) - 2(x + 3)\}$
$= x(x + 3)(x - 2)$
এবং $f(x) = x^2 - 9x - 6$
তাহলে, $\frac{f(x)}{P(x)} = \frac{x^2 - 9x - 6}{x(x - 2)(x + 3)}$
ধরি, $\frac{x^2 - 9x - 6}{x(x - 2)(x + 3)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 2} + \frac{C}{x + 3}$......(i)
(i) নং এর উভয়পক্ষকে $x(x - 2)(x + 3)$ দ্বারা গুণ করে পাই,
$x^2 - 9x - 6 \equiv A(x - 2)(x + 3) + Bx(x + 3) + Cx(x - 2)$.....(ii)
এখন, (ii) নং এর উভয়পক্ষে $x = 0$ বসিয়ে পাই,
$-6 = A(-2)(3) + 0 + 0$
বা, $-6A = -6$
$\therefore A = 1$
আবার, (ii) নং এর উভয়পক্ষে $x = 2$ বসিয়ে পাই,
$4 - 18 - 6 = 0 + B.2(2 + 3) + 0$
বা, $10B = -20$
$\therefore B = -2$
এখন, (ii) নং এর উভয়পক্ষে $x = -3$ বসিয়ে পাই,
$9 + 27 - 6 = 0 + 0 + C(-3)(-5)$
বা, $15C = 30$
$\therefore C = 2$
A, B ও C এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,
$\frac{x^2 - 9x - 6}{x(x - 2)(x + 3)} = \frac{1}{x} - \frac{2}{x - 2} + \frac{2}{x + 3}$
$\therefore \frac{f(x)}{P(x)} = \frac{x^2 - 9x - 6}{x(x - 2)(x + 3)} = \frac{1}{x} - \frac{2}{x - 2} + \frac{2}{x + 3}$, যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ। [Ans.]

প্রশ্ন - ৪ : $g(x) = px^3 + qx^2 + rx + s$ বহুপদীর সহগগুলো পূর্ণসংখ্যা $p \neq 0, s \neq 0$ এবং $x - 1$ বহুপদীটির একটি উৎপাদক। অপর একটি রাশি $Q(x) = \frac{x^3}{x^2 - 16}$

(ক) দেখাও যে, $p + q + r + s = 0$.
(খ) যদি $p = 1, q = 5, r = 6, s = 8$ হয় এবং $g(x)$ কে $x - k$ ও $x - l$ দ্বারা ভাগ করিলে একই অবশিষ্ট থাকে, যেখানে, $k \neq l$ তবে দেখাও যে $k^2 + l^2 + kl + 5k + 5l + 6 = 0$.
(গ) $Q(x)$-কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। [সিলেট বোর্ড-২০১৬]

✍ (ক)-এর সমাধান:
যেহেতু, $g(x) = px^3 + qx^2 + rx + s$ বহুপদীর $(x - 1)$ একটি উৎপাদক
সেহেতু, $g(1) = 0$ হবে
এখন,
$g(x) = px^3 + qx^2 + rx + s$
বা, $g(1) = p.(1)^3 + q(1)^2 + r.(1) + s$
বা, $g(1) = p + q + r + s$
$\therefore p + q + r + s = 0$ [দেখানো হলো]

✍ (খ)-এর সমাধান:
দেওয়া আছে,
$g(x) = px^3 + qx^2 + rx + s$
বা, $g(x) = x^3 + 5x^2 + 6x + 8$ [$\because p = 1, q = 5, r = 6$ এবং $s = 8$]
$g(x)$ কে $x - k$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে
$g(k) = k^3 + 5k^2 + 6k + 8$
এবং $g(x)$ কে $k - l$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে
$g(l) = l^3 + 5l^2 + 6l + 8$

শর্তানুসারে,
$k^3 + 5k^2 + 6k + 8 = l^3 + 5l^2 + 6l + 8$
বা, $k^3 - l^3 + 5k^2 - 5l^2 + 6k - 6l + 8 - 8 = 0$
বা, $(k - l)(k^2 + kl + l^2) + 5(k^2 - l^2) + 6(k - l) = 0$
বা, $(k - l)(k^2 + kl + l^2) + 5(k + l)(k - l) + 6(k - l) = 0$
বা, $(k - l)(k^2 + kl + l^2 + 5k + 5l + 6) = 0$
যেহেতু $k \neq l$ সেহেতু, $(k - l) \neq 0$
$\therefore k^2 + l^2 + kl + 5k + 5l + 6 = 0$ [দেখানো হলো]

✍ (গ)-এর সমাধান:
দেওয়া আছে, $\frac{x^3}{x^2 - 16} = \frac{x^3}{(x)^2 - (4)^2} = \frac{x^3}{(x + 4)(x - 4)}$
এখানে, লবকে হর দ্বারা ভাগ করলে x হয়।
তাহলে, ধরি, $\frac{x^3}{(x + 4)(x - 4)} \equiv x + \frac{A}{x + 4} + \frac{B}{x - 4}$.....(i)
(i) এর উভয় পক্ষকে $(x + 4)(x - 4)$ দ্বারা গুণ করে পাই,
$x^3 \equiv x(x + 4)(x - 4) + A(x - 4) + B(x + 4)$ .....(ii)
(ii) এর উভয়পক্ষে পর্যায়ক্রমে $x = -4, 4$ বসিয়ে পাই,
$(-4)^3 = 0 + A(-4 - 4) + 0$
বা, $-64 = -8A$
বা, $A = 8$
এবং $64 = 0 + 0 + 8B$
বা, $B = 8$
A ও B এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,
$\frac{x^3}{(x + 4)(x - 4)} = x + \frac{8}{x + 4} + \frac{8}{x - 4}$, যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ [Ans.]

প্রশ্ন - ৫ : $P(x) = x^2 + x - 12$, $Q(x) = 9x + 2$.

(ক) $P(x) = \frac{2x}{x + 3}$ এর ডোমেন নির্ণয় কর।
(খ) যদি $P(x)$ কে $2x - a$ এবং $2x - b$ দ্বারা ভাগ করলে একই ভাগশেষ থাকে যেখানে $a \neq b$, তবে দেখাও যে, $a + b + 2 = 0$.
(গ) $\frac{Q(x)}{P(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। [দিনাজপুর বোর্ড-২০১৬]

✍ (ক)-এর সমাধান:
প্রদত্ত ফাংশন $F(x) = \frac{2x}{x + 3}$
এখন, প্রদত্ত ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত হবে যদি $x + 3 \neq 0$ হয়
অর্থাৎ $x \neq -3$
$\therefore x = -3$ ব্যতীত ফাংশনটি সকল বাস্তব মানের জন্য সংজ্ঞায়িত।
$\therefore$ ফাংশনটির ডোমেন $= \{R - 3\}$ [Ans.]

✍ (খ)-এর সমাধান:
দেওয়া আছে,
$P(x) = x^2 + x - 12$
$P(x)$ কে $2x - a$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে, $P\left(\frac{a}{2}\right) = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right) - 12$
$= \frac{a^2}{4} + \frac{a}{2} - 12$
এবং $P(x)$ কে $2x - b$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে, $P\left(\frac{b}{2}\right) = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right) - 12$
$= \frac{b^2}{4} + \frac{b}{2} - 12$

প্রশ্নমতে,
$P\left(\frac{a}{2}\right) = P\left(\frac{b}{2}\right)$
বা, $\frac{a^2}{4} + \frac{a}{2} - 12 = \frac{b^2}{4} + \frac{b}{2} - 12$
বা, $\frac{a^2 + 2a - 48}{4} = \frac{b^2 + 2b - 48}{4}$
বা, $a^2 + 2a - 48 = b^2 + 2b - 48$ [উভয় পক্ষকে 4 দ্বারা গুণ করে]
বা, $a^2 + 2a - b^2 - 2b = -48 + 48$
বা, $a^2 - b^2 + 2a - 2b = 0$

Jewel's Care Life is for motto lesson

বা, $(a+b)(a-b)+2(a-b)=0$
বা, $(a+b+2)(a-b)=0$
কিন্তু $a-b=0$ হতে পারে না কারণ, $a \neq b$
$\therefore a+b+2=0$ [দেখানো হলো]

(গ)-এর সমাধান:
এখানে,
$P(x)=x^2+x-12$
$=x^2+4x-3x-12$
$=x(x+4)-3(x+4)$
$=(x+4)(x-3)$
এবং $Q(x)=9x+2$

এখন, $\dfrac{Q(x)}{P(x)}=\dfrac{9x+2}{(x+4)(x-3)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করতে হবে।

ধরি, $\dfrac{9x+2}{(x+4)(x-3)} \equiv \dfrac{A}{x+4}+\dfrac{B}{x-3}$ ....(i)

(1) এর উভয়পক্ষকে $(x+4)(x-3)$ দ্বারা গুণ করে পাই,
$9x+2 \equiv A(x-3)+B(x-4)$ ....(ii)
যা x এর সকল মানের জন্য সত্য।
এখন, (ii) এর উভয়পক্ষে $x=-4$ বসিয়ে পাই,
$9(-4)+2=A(-4-3)+B(-4+4)$
বা, $-36+2=-7A+0$
বা, $A=\dfrac{-34}{-7}$
$\therefore A=\dfrac{34}{7}$
আবার, (২) এর উভয়পক্ষে $x=3$ বসিয়ে পাই,
$9.3+2=A(3-3)+B(3+4)$
বা, $27+2=0+7B$
বা, $7B=29$
$\therefore B=\dfrac{29}{7}$

এখন, A ও B এর মান (1) এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{9x+2}{(x+4)(x-3)}=\frac{\frac{34}{7}}{x+4}+\frac{\frac{29}{7}}{x-3}$$
$$=\frac{34}{7(x+4)}+\frac{29}{7(x-3)}$$

এটিই $\dfrac{Q(x)}{P(x)}$ এর আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ। [Ans.]

প্রশ্ন - ৬: x, y, z এর একটি বহুপদী হলো, $F(x, y, z)=x^3+y^3+z^3-3xyz$.
(ক) দেখাও যে, $F(x, y, z)$ একটি চক্রক্রমিক রাশি।
(খ) $F(x, y, z)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর এবং যদি $F(x, y, z)=0, x+y+z \neq 0$ হয়, তবে দেখাও যে, $x^2+y^2+z^2=xy+yz+zx$.
(গ) যদি $x=b+c-a, y=c+a-b$ ও $z=a+b-c$, হয়, তবে দেখাও যে, $F(a, b, c) : F(x, y, z)=1:4$. [ঢাকা বোর্ড- ২০১৫]

(ক) এর সমাধান:
দেওয়া আছে, $F(x, y, z)=x^3+y^3+z^3-3xyz$
প্রদত্ত রাশিটি x, y, z চলকের বহুপদী।
x এর স্থলে y, y এর স্থলে z এবং z এর স্থলে x বসিয়ে পাই,
$F(y, z, x)=y^3+z^3+x^3-3.y.z.x$
$=x^3+y^3+z^3-3xyz$
দেখা যায় যে, চলকগুলো স্থান পরিবর্তন করলেও রাশিটি একই থাকে।
অর্থাৎ $F(x, y, z)=F(y, z, x)$
সুতরাং $F(x, y, z)$ একটি চক্র-ক্রমিক রাশি। [দেখানো হলো]

(খ) এর সমাধান:
দেওয়া আছে,
$F(x, y, z)=x^3+y^3+z^3-3xyz.$
$=(x+y)^3-3xy(x+y)+z^3-3xyz.$
$=(x+y)^3+z^3-3xy(x+y+z)$
$=(x+y+z)\{(x+y)^2-(x+y)z+z^2\}-3xy(x+y+z)$
$=(x+y+z)(x^2+2xy+y^2-xz-yz+z^2)-3xy(x+y+z)$
$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$
এখানে, যেহেতু $F(x, y, z)=0$ এবং $x+y+z \neq 0$
সুতরাং $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=0$
বা, $x^2+y^2+z^2=xy+yz+yx$. [দেখানো হলো]

(গ) এর সমাধান:
দেওয়া আছে, $x=b+c-a$
$y=c+a-b$,
এবং $z=a+b-c$
$F(x, y, z)=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$
$=\dfrac{1}{2}(x+y+z)(2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx)$
$=\dfrac{1}{2}(x+y+z)\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}$
$=\dfrac{1}{2}(b+c-a+c+a-b+a+b-c)\{(b+c-a-c-a+b)^2+(c+a-b-a-b+c)^2+(a+b-c-b-c+a)^2\}$ [x, y, z এর মান বসিয়ে]
$=\dfrac{1}{2}(a+b+c)\{(2b-2a)^2+(2c-2b)^2+(2a-2c)^2\}$
$=\dfrac{1}{2}(a+b+c)\{4(a-b)^2+4(b-c)^2+4(c-a)^2\}$
$=4\left[\dfrac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}\right]$
$=4(a^3+b^3+c^3-3abc)=4.F(a, b, c)$
$[\because \frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=a^3+b^3+c^3-3abc]$
বা, $F(x, y, z)=4F(a, b, c)$
বা, $\dfrac{F(x,y,z)}{F(a,b,c)}=4$
বা, $\dfrac{F(a,b,c)}{F(x,y,z)}=\dfrac{1}{4}$ [বিপরীতকরণ করে]
$\therefore F(a, b, c) : F(x, y, z)=1:4$ [দেখানো হলো]

প্রশ্ন - ৭: $P(x)=-x^2+15x+10x^3+9$ এবং
$Q(x)=x^3+x^2-6x$.
(ক) $P(x)$ কে x চলকের আদর্শরূপে লিখে এর মুখ্যসহগ নির্ণয় কর।
(খ) $P(x)$ কে উৎপাদক বিশ্লেষণ কর।
(গ) $\dfrac{x^2+x-1}{Q(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। [রাজশাহী বোর্ড ...]

(ক) এর সমাধান:
দেওয়া আছে,
$P(x)=-x^2+15x+10x^3+9$
একে x চলকের আদর্শরূপে লিখলে পাই,
$P(x)=10x^3-x^2+15x+9$
$\therefore P(x)$ এর মুখ্যসহগ হল $=10$. [Ans.]

(খ) এর সমাধান:
দেওয়া আছে,
$P(x)=10x^3-x^2+15x+9$
$P(x)$ এর ধ্রুব পদ 9 এর উৎপাদকসমূহের সেট
$F_1=\{-1, 1, -2, 2, -3, 3\}$
$P(x)$ এর মুখ্যসহগ 10 এর উৎপাদকসমূহের সেট
$F_2=\{-1, 1, -2, 2, 5, -5\}$

এখন, $P(a)$ বিবেচনা করি যেখানে $a = \frac{r}{s}$

এবং $r \in F_1, s \in F_2$

$a = 1$ হলে, $P(1) = 10 + 15 - 1 + 9 = 33 \neq 0$

$a = -1$ হলে, $P(-1) = -10 - 1 - 15 + 9 = -17 \neq 0$

$a = \frac{1}{2}$ হলে, $P\left(\frac{1}{2}\right) = 10\left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 15\left(\frac{1}{2}\right) + 9$

$= \frac{10}{8} - \frac{1}{4} + \frac{15}{2} + 9$

$= \frac{10 - 2 + 60 + 72}{8} = \frac{140}{8} \neq 0$

$a = -\frac{1}{2}$ হলে, $P\left(-\frac{1}{2}\right) = 10\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 15\left(-\frac{1}{2}\right) + 9$

$= -\frac{10}{8} - \frac{1}{4} - \frac{15}{2} + 9$

$= \frac{-10 - 2 - 60 + 72}{8}$

$= 0$

সুতরাং $x - \left(-\frac{1}{2}\right) = \left(x + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(2x + 1)$ অর্থাৎ $(2x + 1)$,

$P(x)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন,

$10x^3 - x^2 + 15x + 9 = 10x^3 + 5x^2 - 6x^2 - 3x + 18x + 9$

$= 5x^2(2x + 1) - 3x(2x + 1) + 9(2x + 1)$

$= (2x + 1)(5x^2 - 3x + 9)$ [Ans.]

৯ (গ) এর সমাধান:

$\frac{x^2 + x - 1}{x^3 + x^2 - 6x}$

$= \frac{x^2 + x - 1}{x(x^2 + x - 6)}$

Jewel's Care Collected

$= \frac{x^2 + x - 1}{x(x - 2)(x + 3)}$

মনে করি, $\frac{x^2 + x - 1}{x(x - 2)(x + 3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 2} + \frac{C}{x + 3}$ -------(1)

(1) এর উভয় পক্ষকে $x(x - 2)(x + 3)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$x^2 + x - 1 = A(x - 2)(x + 3) + Bx(x + 3) + Cx(x - 2)$ -----(2)

(2) নং x এর সকল মানের জন্য সত্য

(2) নং এ $x = 0$ বসিয়ে পাই,

$-1 = A(-2)(3) \therefore -6A = -1$

বা, $A = \frac{1}{6}$

(2) এ $x = 2$ বসিয়ে পাই,

$4 + 2 - 1 = B \times 2\ (2 + 3)$

বা, $10B = 5$

বা, $B = \frac{5}{10}$

$= \frac{1}{2}$

(2) এ $x = -3$ বসিয়ে পাই,

$9 - 3 - 1 = C(-3)(-5)$

বা, $15C = 5$

$\therefore C = \frac{5}{15}$

বা, $C = \frac{1}{3}$

A, B ও C এর মান (1) এ বসিয়ে পাই,

$\frac{x^2 + x - 1}{x(x - 2)(x + 3)} = \frac{\frac{1}{6}}{x} + \frac{\frac{1}{2}}{x - 2} + \frac{\frac{1}{3}}{x + 3}$

$= \frac{1}{6x} + \frac{1}{2(x - 2)} + \frac{1}{3(x + 3)}$

যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ [Ans.]

প্রশ্ন - ৮ : $f(a) = a^3 + 5a^2 + 6a + 8$ এবং $P(x) = \frac{x + 3}{x^2 + 8x + 15}$।

(ক) $f(-2)$ এর মান নির্ণয় কর।

(খ) $P(x)$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

(গ) যদি $f(a)$ কে $(a - x)$ এবং $(a - y)$ দ্বারা ভাগ করলে একই ভাগশেষ থাকে তবে প্রমাণ কর যে, $x^2 + y^2 + xy + 5x + 5y + 6 = 0$, যেখানে $x \neq y$।

[চট্টগ্রাম বোর্ড-২০১৫]

৮ (ক) এর সমাধান:

দেওয়া আছে,

$f(a) = a^3 + 5a^2 + 6a + 8$

$\therefore f(-2) = (-2)^3 + 5(-2)^2 + 6(-2) + 8$

$= -8 + 20 - 12 + 8$

$= 8$ [Ans.]

৮ (খ) এর সমাধান:

দেওয়া আছে,

$P(x) = \frac{x + 3}{x^2 + 8x + 15}$

$= \frac{x + 3}{x^2 + 5x + 3x + 15}$

$= \frac{x + 3}{x(x + 5) + 3(x + 5)}$

$= \frac{x + 3}{(x + 3)(x + 5)}$

$= \frac{1}{x + 5}$ [Ans.]

৮ (গ) এর সমাধান:

দেওয়া আছে,

$f(a) = a^3 + 5a^2 + 6a + 8$

$f(a)$ কে $(a - x)$, দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ উপপাদ্য অনুযায়ী ভাগশেষ হবে

$f(x) = x^3 + 5x^2 + 6x + 8$

$f(a)$ কে $(a - y)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ উপপাদ্য অনুযায়ী ভাগশেষ হবে

$f(y) = y^3 + 5y^2 + 6y + 8$

প্রশ্নমতে, $f(x) = f(y)$

বা, $x^3 + 5x^2 + 6x + 8 = y^3 + 5y^2 + 6y + 8$

বা, $x^3 - y^3 + 5(x^2 - y^2) + 6(x - y) = 0$

বা, $(x - y)(x^2 + xy + y^2) + 5(x + y)(x - y) + 6(x - y) = 0$

বা, $(x - y)(x^2 + xy + y^2 + 5x + 5y + 6) = 0$

যেহেতু $x \neq y$ সুতরাং $x - y \neq 0$

$\therefore x^2 + y^2 + xy + 5x + 5y + 6 = 0$ [প্রমাণিত]

প্রশ্ন - ৯ : $F(x) = x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 6x + 4$ একটি বহুপদী।

(ক) $F(x)$ কে $(2x + 1)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে তা নির্ণয় কর।

(খ) $F(x) = 0$ হলে x এর মান নির্ণয় কর।

(গ) $\frac{x}{F(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। [যশোর বোর্ড-২০১৫]

৯ (ক) এর সমাধান:

দেওয়া আছে, $F(x) = x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 6x + 4$

$F(x)$ কে $(2x + 1)$ বা, $2\left(x + \frac{1}{2}\right)$ বা, $2\left\{x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right\}$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে,

$F\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^4 + 3\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 4\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 6\left(-\frac{1}{2}\right) + 4$

$= \frac{1}{16} + 3\left(\frac{-1}{8}\right) + 4\left(\frac{1}{4}\right) + 6\left(-\frac{1}{2}\right) + 4$

$= \frac{1}{16} - \frac{3}{8} + 1 - 3 + 4$

$= \frac{1 - 6 + 16 - 48 + 64}{16}$

$= \frac{27}{16}$ [Ans.]

৯ (খ) এর সমাধান:

দেওয়া আছে, $F(x) = 0$

বা, $x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 6x + 4 = 0$

প্রদত্ত বহুপদীর $F(x)$ এর সহগসমূহ পূর্ণসংখ্যা এবং ধ্রুবপদ $= 4$, মুখ্য সহগ $= 1$. এখন r যদি পূর্ণসংখ্যা হয় এবং $P(x)$ এর যদি $(x - r)$ আকারের কোনো উৎপাদক থাকে তবে r অবশ্যই 4 এর উৎপাদক $\pm1, \pm2$ হবে। যেহেতু বহুপদীর প্রত্যেকটি পদের পূর্বেই ধনাত্মক চিহ্ন রয়েছে তাই (-1) এবং (-2) দিয়ে পরীক্ষা করি।

$F(-1) = 1 - 3 + 4 - 6 + 4 = 0$

$F(-2) = 16 - 24 + 16 - 12 + 4 = 0$

সুতরাং $F(x)$ এর দুইটি উৎপাদক হবে $\{x - (-1)\} = (x + 1)$ এবং $\{x - (-2)\} = (x + 2)$

এখন,

$$
\begin{aligned}
F(x) &= x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 6x + 4 \\
&= x^4 + x^3 + 2x^3 + 2x^2 + 2x^2 + 2x + 4x + 4 \\
&= x^3(x + 1) + 2x^2(x + 1) + 2x(x + 1) + 4(x + 1) \\
&= (x + 1)(x^3 + 2x^2 + 2x + 4) \\
&= (x + 1)\{x^2(x + 2) + 2(x + 2)\} \\
&= (x + 1)(x^2 + 2)(x + 2)
\end{aligned}
$$

$\therefore x = -1, -2, \pm\sqrt{-2}$ [Ans.]

৯ (গ) এর সমাধান:

$$\frac{x}{F(x)}$$

$$= \frac{x}{x^4 + 3x^4 + 4x^2 + 6x + 4}$$

$$= \frac{x}{(x + 1)(x + 2)(x^2 + 2)}$$

ধরি,

$$\frac{x}{(x + 1)(x + 2)(x^2 + 2)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x + 2} + \frac{cx + D}{x^2 + 2} \quad \text{.....(i)}$$

(i) নং এর উভয় পক্ষকে $(x + 1)(x + 2)(x^2 + 2)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$x = A(x + 2)(x^2 + 2) + B(x + 1)(x^2 + 2) + (cx + D)(x + 1)(x + 2) \quad \text{.......(ii)}$$

(ii) নং এ $x = -2$ বসিয়ে পাই,

$-2 = B(-1)(6)$ বা, $-6B = -2$ বা, $B = \frac{1}{3}$

(ii) এ $x = -1$ বসিয়ে পাই,

$-1 = 3A$

বা, $A = -\frac{1}{3}$

(ii) হতে x^3 এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$0 = A + B + C$

বা, $C = -(A + B)$

$C = -\left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right)$

$C = 0$

(ii) হতে x^2 এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$0 = 2A + B + 3C + D$

$0 = \frac{-2}{3} + \frac{1}{3} + 0 + D$

$0 = \frac{-1}{3} + D$

$\therefore D = \frac{1}{3}$

সুতরাং, $\frac{x}{(x + 1)(x + 2)(x^2 + 2)} = -\frac{1}{3(x + 1)} + \frac{1}{3(x + 2)} + \frac{1}{3(x^2 + 2)}$ [Ans.]

PART-4 [অধ্যায়ভিত্তিক সমাধান]

সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর

বিগত এসএসসি পরীক্ষার সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর

প্রশ্ন নং- ১। ΔABC এর $\angle C = 90^\circ$ এবং BC, AC ও AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P, Q ও R।

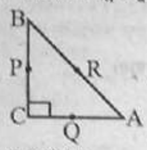
(ক) উদ্দীপকের আলোকে নিখুঁত চিহ্নিত চিত্র আঁক।

(খ) প্রমাণ কর যে, $AB^2 = PA^2 + PB^2 + 2PB.PC$.

(গ) প্রমাণ কর যে, $3(AC^2 + BC^2) = 2(AP^2 + BQ^2 + CR^2)$. [যশোর বোর্ড-২০১৬]

(ক)-এর সমাধানঃ

উদ্দীপকের আলোকে নিম্নে নিখুঁত চিহ্নিত চিত্র আঁকা হলো−



(খ)-এর সমাধানঃ

বিশেষ নির্বচন : ΔABC-এ $\angle C = 90^\circ$ এবং BC, AC ও AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P, Q ও R.

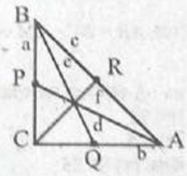
P, A যোগ করা হলো।

প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 = AP^2 + PB^2 + 2PB.PC$

প্রমাণ : ΔABC-এ $\angle C = 90^\circ$

$\therefore AB^2 = BC^2 + AC^2 = \quad ....(i)$

[পিথাগোরাসের উপপাদ্য]



আবার, ΔAPC-এ $\angle C = 90^\circ$

$\therefore PA^2 = AC^2 + PC^2$

বা, $AC^2 = PA^2 - PC^2 \quad .....(ii)$

এখন, (i) ও (ii) নং হতে পাই,

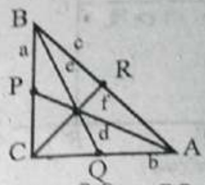
$AB^2 = BC^2 + PA^2 - PC^2$

$= (PB + PC)^2 + PA^2 - PC^2$ [$\because$ P, BC এর মধ্যবিন্দু]

$= PB^2 + 2PB.PC + PC^2 + PA^2 - PC^2$

$\therefore AB^2 = PA^2 + PB^2 + 2PB.PC$ [প্রমাণিত]

(গ)-এর সমাধানঃ



বিশেষ নির্বচনঃ মনে করি, ABC সমকোণী ত্রিভুজে BC, CA ও AB বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে a, b, c। BC, CA ও AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P, Q ও R। A, P; B, Q ও C, R যোগ করা হলো।

ধরি, AP, BQ ও CR মধ্যমার দৈর্ঘ্য যথাক্রমে d, e ও f

প্রমান করতে হবে যে, $3(AC^2 + BC^2) = 2(AP^2 + BQ^2 + CR^2)$

প্রমাণঃ এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য হতে পাই,

$AB^2 + AC^2 = 2(AP^2 + BP^2)$ [$\because$ AP, BC এর মধ্যমা]

বা, $c^2 + b^2 = 2\left\{d^2 + \left(\frac{1}{2}.a\right)^2\right\}$ [$\because BP = \frac{1}{2}BC$]

বা, $b^2 + c^2 = 2d^2 + \frac{1}{2}a^2$

বা, $2b^2 + 2c^2 - a^2 = 2d^2 \times 2$

বা, $d^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}$

অনুরূপভাবে পাওয়া যায়,

$$c^2 = \frac{2(c^2 + a^2) - b^2}{4}$$

এবং $f^2 = \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4}$

আবার, $d^2 + e^2 + f^2$

$$= \frac{2(b^2 + c^2) - a^2 + 2(c^2 + a^2) - b^2 + 2(a^2 + b^2) - c^2}{4}$$

$$= \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\therefore (a^2 + b^2 + c^2) = \frac{3}{4}(d^2 + e^2 + f^2)$$

কিন্তু ΔABC সমকোণী ত্রিভুজে,

$AB^2 = BC^2 + AC^2$

বা, $c^2 = a^2 + b^2$

$\therefore a^2 + b^2 + c^2 = 2(a^2 + b^2)$

$\therefore \frac{4}{3}(d^2 + e^2 + f^2) = 2(a^2 + b^2)$

বা, $3(a^2 + b^2) = \frac{4}{2}(d^2 + e^2 + f^2)$

সুতরাং, $3(BC^2 + AC^2) = 2(AP^2 + BQ^2 + CR^2)$ [প্রমাণিত]

প্রশ্ন নং- ২। ABC ত্রিভুজের AB = 12 cm, AC = 5 cm, BC = 13 cm এবং মধ্যমাত্রয়ের ছেদবিন্দু O.

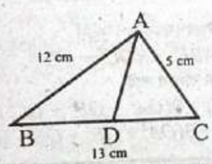
(ক) শীর্ষবিন্দু A থেকে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত মধ্যমার দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

(খ) দেখাও যে, উদ্দীপকে উল্লিখিত ত্রিভুজের বাহু তিনটির বর্গের সমষ্টি 'O' বিন্দু হতে শীর্ষবিন্দু তিনটির দূরত্বের বর্গের সমষ্টির তিনগুণের সমান।

(গ) ত্রিভুজটিকে উহার ক্ষুদ্রতর বাহুর চতুর্দিকে ঘোরালে যে ঘনবস্তু উৎপন্ন হয়, তার সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল ও আয়তনের সাংখ্যিক মানের পার্থক্য নির্ণয় কর।

[বরিশাল বোর্ড-২০১৬]

(ক)-এর সমাধান:



উপরিউক্ত চিত্রে, ΔABC-এ AB = 12 সে.মি., AC = 5 সে.মি., BC = 3 সে.মি. ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দ A থেকে বিপরীত বাহু AC উপর অঙ্কিত AD মধ্যমা BC বাহু সমান ভাগে বিভক্ত করে।

$\therefore BD = \frac{BC}{2} = \frac{13}{2} = 6.5$ সে.মি.

AD বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করতে হবে। অ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য হতে আমরা পাই,

$AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$

বা, $2(AD^2 + BD^2) = (12)^2 + (5)^2$

বা, $2(AD^2 + BD^2) = 144 + 25$

বা, $AD^2 + BD^2 = \frac{169}{2}$

বা, $AD^2 = 84.5 - (6.5)^2$

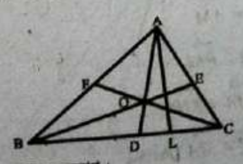
বা, $AD^2 = 42.25$

$\therefore AD = 6.5$

সুতরাং, মধ্যমার দৈর্ঘ্য = 6.5 সে.মি.

(খ)-এর সমাধান:

ΔABC-এ AD, BE ও CF মধ্যমাত্রয় O বিন্দুতে ছেদ করেছে। BC-বাহুর উপর AL লম্ব আঁকি।



এখন ΔABD-এ $\angle ADB$ স্থূলকোণ।

$\therefore AB^2 = AD^2 + BD^2 + 2.BD.DL$ .... (i)

আবার, ΔACD-এ $\angle ADC$ সূক্ষকোণ।

$\therefore AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2.CD.DL$ .... (ii)

এখন (i) ও (ii) যোগ করে পাই,

$AB^2 + AC^2 = AD^2 + BD^2 + 2.BD.DL + AD^2 + CD^2 - 2.CD.DL$

$= 2AD^2 + 2BD^2 + 2.BD.DL - 2.BD.DL$ [$\because$ D, BC এর মধ্যবিন্দু]

$= 2(AD^2 + BD^2)$

$\therefore AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$ .... (iii)

অনুরূপভাবে, $AB^2 + BC^2 = 2(BE^2 + CE^2)$ .... (iv)

এবং $BC^2 + AC^2 = 2(CF^2 + BF^2)$ .... (v)

এখন সমীকরণ (iii), (iv) ও (v) যোগ করে পাই,

$2AB^2 + 2BC^2 + 2AC^2 = 2AD^2 + 2BD^2 + 2BE^2 + 2CF^2 + 2BF^2$

বা, $2(AB^2 + BC^2 + AC^2) = 2(AD^2 + BE^2 + CF^2) + 2(BD^2 + CE^2 + BF^2)$

বা, $4(AB^2 + BC^2 + AC^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2) + 4(BD^2 + CE^2 + BF^2)$ [উভয়পক্ষকে 2 দ্বারা গুণ করে]

বা, $4(AB^2 + BC^2 + AC^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2) + (2BD)^2 + (2CE)^2 + (2BF)^2$

বা, $4(AB^2 + BC^2 + AC^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2) + BC^2 + AC^2 + AB^2$

বা, $3(AB^2 + BC^2 + AC^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2)$ .... (vi)

আমরা জানি, ত্রিভুজের মধ্যমাগুলো সম্পাত বিন্দুতে 2 : 1 অনুপাতে বিভক্ত করে।

$\frac{AO}{OD} = \frac{2}{1}$

বা, $\frac{OD}{AO} = \frac{1}{2}$

বা, $\frac{OD + AO}{AO} = \frac{1+2}{2}$ [যোজন করে]

বা, $\frac{AD}{AO} = \frac{3}{2}$

বা, $2AD = 3AO$

বা, $4AD^2 = 9AO^2$ [বর্গ করে]

অনুরূপভাবে, $4BE^2 = 9BO^2$

এবং $4CF^2 = 9CO^2$

সুতরাং (vi) নং সমীকরণ থেকে পাই,

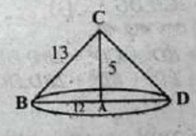
$3(AB^2 + BC^2 + AC^2) = 9AO^2 + 9BO^2 + 9CO^2$

$\therefore AB^2 + BC^2 + AC^2 = 3(AO^2 + BO^2 + CO)^2$

অর্থাৎ, ABC ত্রিভুজের বাহু তিনটির বর্গের সমষ্টি 'O' বিন্দু হতে শীর্ষবিন্দু তিনটির দূরত্বের বর্গের সমষ্টির তিনগুণের সমান।

(গ)-এর সমাধান:

ABC ত্রিভুজটি উহার ক্ষুদ্রতর বাহু AC চতুর্দিকে ঘোরালে ABC সমবৃত্তভূমিক কোণক উৎপন্ন হবে।



এখানে, কোণকের উচ্চতা, AC = h = 5 সে.মি., ব্যাসার্ধ, r = AB = 12 সে.মি. এবং হেলানো উচ্চতা, BC = l = 13 সে.মি.

কোণকের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $= \pi r(r + l)$ বর্গ একক

$= 3.1416 \times 12(12 + 13)$ বর্গ সে.মি.

$= 3.1416 \times 12 \times 25$ বর্গ সে.মি.

$= 942.48$ বর্গ সে.মি.

এবং, কোণকের আয়তন $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$ ঘন একক

$= \frac{1}{3} \times 3.1416 \times (12)^2 \times 5$ ঘন সে.মি.

$= 753.984$ ঘন সে.মি.

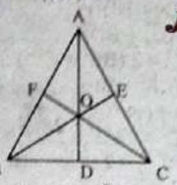
$\therefore$ সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল ও আয়তনের সাংখ্যিক মানের পার্থক্য

$= 942.480 - 753.984$

$= 188.496$

প্রশ্ন নং- ৩ ΔABC এর AD, BE ও CF মধ্যমাত্রয় O বিন্দুতে ছেদ করেছে।
(ক) O বিন্দুটির নাম কি? O, AD কে কি অনুপাতে বিভক্ত করে?
(খ) উদ্দীপকের চিত্রটি অংকন করে দেখাও যে, $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$.
(গ) প্রমাণ কর যে, $AB^2 + BC^2 + AC^2 = 3(AO^2 + BO^2 + CO^2)$.
[ঢাকা বোর্ড- ২০১৫]

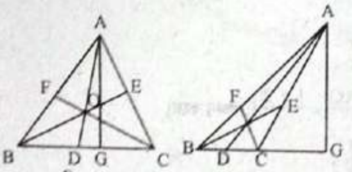
(ক) এর সমাধান:



আমরা জানি, কোন ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয় যে বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করে তাকেই ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র বলা হয়। ΔABC এর AD, BE ও CF মধ্যমাত্রয় O বিন্দুতে ছেদ করেছে বিধায় O বিন্দুকে ABC ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র বলে। O, AD কে $2 : 1$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

(খ) এর সমাধান:

বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, ΔABC এর AO, BE এবং CF মধ্যমাত্রয় O বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 + AC^2 = 2(AO^2 + BO^2)$



চিত্র-ক চিত্র-খ

অঙ্কন: BC বাহুর উপর (চিত্র: ক) এবং BC বাহুর বর্ধিতাংশের উপর (চিত্র: খ) AG লম্ব অঙ্কন করি।

প্রমাণ: ΔABD এর $\angle ADB$ স্থূলকোণ এবং BD রেখার বর্ধিতাংশের উপর AD রেখার লম্ব অভিক্ষেপ DG [উভয় চিত্রে]।

$\therefore$ স্থূলকোণের ক্ষেত্রে পীথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি অনুসারে আমরা পাই, $AB^2 = AD^2 + BD^2 + 2BD.DG$........(১)

আবার,

ΔACD এর $\angle ADC$ সূক্ষ্মকোণ এবং DC রেখার (চিত্র : ক) এবং DC রেখার বর্ধিতাংশের (চিত্র : খ) উপর AD রেখার লম্ব অভিক্ষেপ DG.

$\therefore$ সূক্ষ্মকোণের ক্ষেত্রে পীথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি অনুসারে পাই,

$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2CD.DG$........(২)

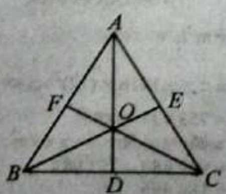
এখন সমীকরণ (১) ও (২) যোগ করে পাই,

$$AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + BD^2 + CD^2 + 2BD.DE - 2CD.DE$$
$$= 2AD^2 + BD^2 + BD^2 + 2BD.DG - 2BD.DG \quad [\because BD = CD]$$
$$= 2AD^2 + 2BD^2 = 2(AD^2 + BD^2) \text{ [প্রমাণিত]}$$

(গ) এর সমাধান:

বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, ABC ত্রিভুজের AD, BE ও CF মধ্যমাত্রয় G বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। প্রমাণ করতে হবে যে,

$$AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3(OA^2 + OB^2 + OC^2)$$



প্রমাণ: ΔABC-এ

$AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + 2CD^2$ [এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য]

বা, $AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + 2\left(\frac{1}{2}BC\right)^2$

$[\because D, BC$ এর মধ্যমা তাই $CD = BD = \frac{1}{2}BC]$

বা, $AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + 2.\frac{1}{4}BC^2$

বা, $AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + \frac{1}{2}BC^2$

বা, $2AD^2 = AB^2 + AC^2 - \frac{1}{2}BC^2$

বা, $AD^2 = \frac{2AB^2 + 2AC^2 - BC^2}{4}$

অনুরূপভাবে, $BE^2 = \frac{2AB^2 + 2BC^2 - AC^2}{4}$

এবং $CF^2 = \frac{2BC^2 + 2AC^2 - AB^2}{4}$

$\therefore AD^2 + BE^2 + CF^2$

$= \frac{2AB^2 + 2AC^2 - BC^2}{4} + \frac{2AB^2 + 2BC^2 - AC^2}{4} + \frac{2BC^2 + 2AC^2 - AB^2}{4}$

বা, $4(AD^2 + BE^2 + CF^2) = 3(AB^2 + BC^2 + AC^2)$ .... (1)

এখন, $AO = \frac{2}{3}AD$ [$\because$ O বিন্দুতে মধ্যমাত্রয় $2 : 1$ অনুপাতে বিভক্ত হয়]

বা, $3AO = 2AD$

$\therefore 9AO^2 = 4AD^2$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করি]

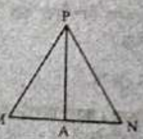
অনুরূপভাবে, $9OB^2 = 4BE^2$ ও $9OC^2 = 4CF^2$

(1) নং সমীকরণে এই মান বসিয়ে পাই,

$3(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 9(OA^2 + OB^2 + OC^2)$

$\therefore AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3(OA^2 + OB^2 + OC^2)$ [প্রমাণিত]

প্রশ্ন নং- ৪



PMN সমদ্বিবাহু ত্রিভুজে $PM = PN$ এবং $PA \perp MN$.

(ক) ΔAPM এর ক্ষেত্রে $\overrightarrow{AP}$ ভেক্টরকে $\overrightarrow{MA}$ এবং $\overrightarrow{MP}$ ভেক্টরদ্বয়ের মাধ্যমে প্রকাশ কর।

(খ) B, MN রেখার ওপর যে কোনো বিন্দু হলে, দেখাও যে, $PM^2 - PB^2 = MB.BN$.

(গ) PMN ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধ R হলে, প্রমাণ কর যে, $PM^2 = 2R.PA$.

[রাজশাহী বোর্ড- ২০১৫]

(ক) এর সমাধান:

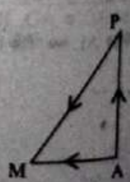
ΔAPM হতে ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি অনুসারে পাই,

$\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PM} = \overrightarrow{AM}$

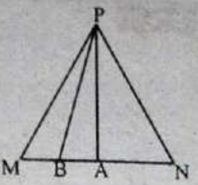
বা, $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{PM}$

বা, $\overrightarrow{AP} = -\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MP}$

$= \overrightarrow{MP} - \overrightarrow{MA}$ [Ans.]



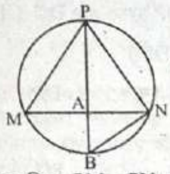
৯ (খ) এর সমাধান:



দেওয়া আছে, PMN সমদ্বিবাহু ত্রিভুজে PM = PN এবং PA ⊥ MN. MN এর উপর যে কোন বিন্দু B নিই। PB যোগ করি। প্রমান করতে হবে যে, $PM^2 - PB^2 = MB.BN$

প্রমাণ: ΔPAM এবং ΔPAN সমকোণী ত্রিভুজে
PM = PN [দেওয়া আছে]
এবং PA সাধারণ বাহু
∴ ΔPAM ≅ ΔPAN [দুইটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজদ্বয় সমান হলে এবং একটির এক বাহু অপরটির অপর এক বাহুর সমান হলে, ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।]
∴ AM = AN
ΔPAM হতে পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুযায়ী পাই,
$PM^2 = PA^2 + AM^2$ -----(i)
ΔPAB সমকোণী ত্রিভুজ হতে পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুযায়ী পাই,
$PB^2 = BA^2 + PA^2$ -----(ii)
(i)নং হতে (ii)নং বিয়োগ করে পাই,
$PM^2 - PB^2 = PA^2 + AM^2 - AB^2 - PA^2$
$= AM^2 - AB^2$
$= (AM+AB)(AM-AB)$
$= (AN + AB)(AM-AB)$ [AM = AN]
$= BN.MB$
∴ $PM^2 - PB^2 = MB.BN$ [দেখানো হলো]

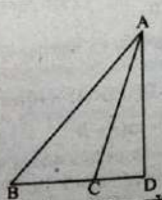
৯ (গ) এর সমাধান:



দেওয়া আছে, PMN সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ PM = PN এবং PA ⊥ MN, PA কে B পর্যন্ত বর্ধিত করি যেন তা PMN বৃত্তকে B বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে, PMN ত্রিভুজটির পরিব্যাসার্ধ R। B, N যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, $PM^2 = 2R.PA$
প্রমাণ: ΔPMA এবং ΔPBN এ
∠PAM = ∠PNB [উভয়ে এক সমকোণ]
∠PMA = ∠PBN [একই জ্যা BN এর উপর অবস্থিত বৃত্তস্থকোণ।]
অবশিষ্ট ∠APM = অবশিষ্ট ∠BPN
ΔPMA ও ΔPBN সদৃশকোণী ও সদৃশ
$\frac{PM}{PB} = \frac{PA}{PN}$
বা, PM.PN = PA.PB
বা, PM.PN = 2R.PA
বা, $PM^2 = 2R.PA$ [প্রমাণিত]

প্রশ্ন নং-৫ ABC ত্রিভুজের ∠C স্থূলকোণ, AB স্থূলকোণের বিপরীত বাহু এবং স্থূলকোণের সন্নিহিত বাহুদ্বয় যথাক্রমে BC ও AC।
(ক) AC বাহুর লম্ব অভিক্ষেপ অঙ্কন কর।
(খ) প্রমাণ কর যে, $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC.CD$।
(গ) ত্রিভুজটির মধ্যমাত্রয় P বিন্দুতে মিলিত হলে প্রমাণ কর যে, $AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3(PA^2 + PB^2 + PC^2)$। [চট্টগ্রাম বোর্ড- ২০১৫]

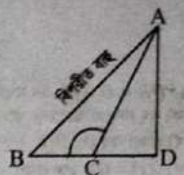
৯ (ক) এর সমাধান:



A বিন্দু হতে BC এর বর্ধিতাংশের উপর AD লম্ব আঁকি। সুতরাং BC বাহু বরাবর AC এর লম্ব অভিক্ষেপ CD।

৯ (খ) এর সমাধান:

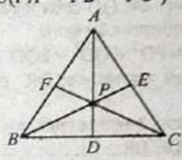
বিশেষ নির্বচন: মনে করি, ABC ত্রিভুজের ∠BCA স্থূলকোণ, AB স্থূলকোণের বিপরীত বাহু এবং স্থূলকোণের সন্নিহিত বাহুদ্বয় যথাক্রমে BC ও AC।
BCবাহুর বর্ধিতাংশের ওপর AC বাহুর লম্ব অভিক্ষেপ CD প্রমাণ করতে হবে যে,
$AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC.CD$.



প্রমাণ: BC বাহুর বর্ধিতাংশের ওপর AC বাহুর লম্ব অভিক্ষেপ CD হওয়ায় ΔABD একটি সমকোণী ত্রিভুজ এবং ∠ADB সমকোণ।
সুতরাং পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে
$AB^2 = AD^2 + BD^2$
$= AD^2 + (BC + CD)^2$ [∵ BD = BC + CD]
$= AD^2 + BC^2 + CD^2 + 2BC.CD$.
∴ $AB^2 = (AD^2 + CD^2) + BC^2 + 2BC.CD$.......(1)
আবার ΔACD সমকোণী ত্রিভুজ এবং ∠ADC সমকোণ।
∴ $AC^2 = AD^2 + CD^2$ ....(2)
(2) নং সমীকরণ হতে AC^2 এর মান (1) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,
$AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC.CD$ [প্রমাণিত]

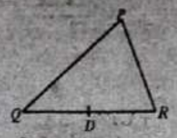
৯ (গ) এর সমাধান:

বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, ABC ত্রিভুজের AD, BE ও CF মধ্যমাত্রয় P বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। প্রমাণ করতে হবে যে,
$AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3(PA^2 + PB^2 + PC^2)$



প্রমাণ: ΔABC-এ
$AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + 2CD^2$ [এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য]
বা, $AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + 2\left(\frac{1}{2}BC\right)^2$
[∵ D, BC এর মধ্যমা তাই $CD = BD = \frac{1}{2}BC$]
বা, $AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + 2.\frac{1}{4}BC^2$
বা, $AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + \frac{1}{2}BC^2$
বা, $2AD^2 = AB^2 + AC^2 - \frac{1}{2}BC^2$
বা, $AD^2 = \frac{2AB^2 + 2AC^2 - BC^2}{4}$
অনুরূপভাবে, $BE^2 = \frac{2AB^2 + 2BC^2 - AC^2}{4}$
এবং $CF^2 = \frac{2BC^2 + 2AC^2 - AB^2}{4}$
∴ $AD^2 + BE^2 + CF^2$
$= \frac{2AB^2 + 2AC^2 - BC^2}{4} + \frac{2AB^2 + 2BC^2 - AC^2}{4} + \frac{2BC^2 + 2AC^2 - AB^2}{4}$
বা, $4(AD^2 + BE^2 + CF^2) = 3(AB^2 + BC^2 + AC^2)$ ....(1)
এখন, $AP = \frac{2}{3}AD$ [∵ P বিন্দুতে মধ্যমাত্রয় 2 : 1 অনুপাতে বিভক্ত হয়]
বা, $3AP = 2AD$
∴ $9AP^2 = 4AD^2$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করি]
অনুরূপভাবে, $9PB^2 = 4BE^2$ ও $9PC^2 = 4CF^2$
(1) নং সমীকরণে এই মান বসিয়ে পাই,
$3(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 9(PA^2 + PB^2 + PC^2)$
∴ $AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3(PA^2 + PB^2 + PC^2)$ [প্রমাণিত]

প্রশ্ন নং- ৬ ।



ΔPQR এ D, QR-এর মধ্যবিন্দু।

(ক) লম্ব বিন্দু ও ভরকেন্দ্র কী?

(খ) প্রমাণ কর যে, $PQ^2 + PR^2 = 2(PD^2 + QD^2)$

(গ) $\angle Q = 60°$ হলে প্রমাণ কর যে, $PR^2 = PQ^2 + QR^2 - PQ.QR$.

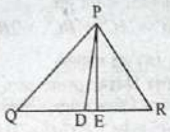
[কুমিল্লা বোর্ড- ২০১৫]

(ক) এর সমাধান:

লম্ব বিন্দু: ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু হতে অপর বাহুর উপর অঙ্কিত লম্ব ত্রয়ের ছেদবিন্দুকে লম্ববিন্দু বলে।

ভরকেন্দ্র: ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয়ের ছেদবিন্দুকে ভরকেন্দ্র বলে।

(খ) এর সমাধান:



ΔPQR এ D, QR এর মধ্যবিন্দু। P ও D যোগ করি। সুতরাং PD, ΔPQR এর একটি মধ্যমা। P বিন্দু হতে QR এর উপর PE লম্ব আঁকি।

প্রমাণ:

ΔPDQ এ $\angle PDQ$ স্থূল কোণ এবং QD রেখার বর্ধিতাংশের উপর PD এর লম্ব অভিক্ষেপ DE। সুতরাং পীথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি অনুসারে পাই, $PQ^2 = PD^2 + QD^2 + 2QD.DE$ ... . (i)

আবার, ΔPDR এর $\angle PDR$ সূক্ষ্মকোণ এবং DR রেখার উপর PD এর লম্ব অভিক্ষেপ DE।

সূক্ষ্মকোণের ক্ষেত্রে পীথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি অনুসারে পাই,

$PR^2 = PD^2 + DR^2 - 2DE.DR$... ... ... (ii)

এখন সমীকরণ (i) ও (ii) যোগ করে পাই,

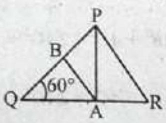
$PQ^2 + PR^2 = PD^2 + QD^2 + 2QD.DE + PD^2 + DR^2 - 2DE.DR$

$= 2PD^2 + 2QD^2 + 2QD.DE - 2QD.DE$ [$\because QD = DR$]

$= 2(PD^2 + QD^2)$

$\therefore PQ^2 + PR^2 = 2(PD^2 + QD^2)$ [প্রমাণিত]

(গ) এর সমাধান:



ΔPQR এ $\angle Q = 60°$। P বিন্দু হতে QR এর উপর PA লম্ব আঁকি। A বিন্দু হতে QA এর সমান করে AB নিই।

প্রমাণ:

যেহেতু অঙ্কন অনুসারে, AQ = AB

$\therefore \angle ABQ = \angle BQA = 60°$ [ত্রিভুজের সমান সমান বাহুর বিপরীত কোণদ্বয় পরস্পর সমান]

সুতরাং ΔBQA একটি সমবাহু ত্রিভুজ।

$\therefore \angle BAQ = 60°$

Jewel's Care Collected

এখন $\angle PAQ = 90°$

বা, $\angle PAB + \angle BAQ = 90°$

বা, $\angle PAB = 90° - 60° = 30°$

আবার,

ΔAPB এ, $\angle PAB + \angle PBA + \angle APB = 180°$

বা, $\angle APB = 180° - \angle PAB - \angle PBA$

$= 180° - 30° - (180° - 60°) = 30°$

এখন ΔPAB তে $\angle PAB = \angle APB = 30°$

$\therefore PB = AB$ [ত্রিভুজের সমান সমান কোণের বিপরীত বাহুদ্বয় সমান]

সুতরাং, PB = AB = AQ = BQ

সুতরাং, PQ = PB + BQ

= AQ + AQ

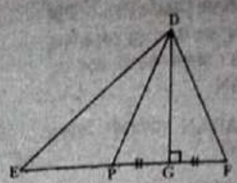
= 2AQ

সূক্ষ্মকোণী ΔPQR এর সূক্ষ্মকোন $\angle Q = 60°$ হলে এবং এর বিপরীত বাহু PR হলে পীথাগোরাসের উপাপাদ্যের বিস্তৃতি অনুসারে পাই,

$PR^2 = PQ^2 + QR^2 - 2AQ.QR$

$= PQ^2 + QR^2 - PQ.QR$ [$\therefore PQ = 2AQ$] [প্রমাণিত]

প্রশ্ন নং- ৭ ।



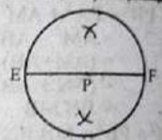
(ক) EP এর সমান ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্ত আঁক যা দুটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়ে যায়। [অংকনের শুধু চিহ্ন আবশ্যক]

(খ) উদ্দীপকের ভিত্তিতে প্রমাণ কর যে, $DP^2 + EP^2 = \frac{1}{2}(DE^2 + DF^2)$।

(গ) $DG = 10cm$ ও $PF = 8$ cm হলে, ΔDGF কে DG বাহুর সাপেক্ষে ঘোরালে উৎপন্ন ঘনবস্তুর আয়তন ও ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

[সিলেট বোর্ড- ২০১৫]

(ক) এর সমাধান:

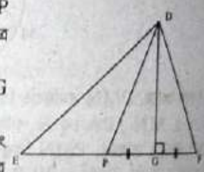


EP ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তটি E ও F দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়ে যায়।

(খ) এর সমাধান:

দেওয়া আছে, ΔDEF এর DP মধ্যমা এবং $DG \perp EF$। প্রমাণ করতে হবে যে,

$DP^2 + EP^2 = \frac{1}{2}(DE^2 + DF^2)$



প্রমাণ: ΔDEP এর $\angle DPE$ স্থূলকোণ এবং DP এর লম্ব অভিক্ষেপ PG. স্থূলকোণের ক্ষেত্রে পীথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি অনুসারে পাই,

$DE^2 = DP^2 + EP^2 - 2EP.\ PG$ ....(1)

আবার, ΔDPF-এর $\angle DPF$ সূক্ষ্মকোণ এবং DP-এর লম্ব অভিক্ষেপ PG সূক্ষ্মকোণের ক্ষেত্রে পীথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি অনুসারে পাই,

$DF^2 = DP^2 + PF^2 - 2PF.\ PG$ ....(2)

(1) ও (2)নং সমীকরণ যোগ করি–

$DE^2 + DF^2 = DP^2 + EP^2 - 2EP.\ PG + DP^2 + PF^2 - 2PF.\ PG$

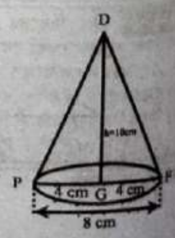
$= 2DP^2 + EP^2 - 2EP.PG + EP^2 - 2EP.PG$ [$\because PF = EP$]

বা, $DE^2 + DF^2 = 2DP^2 + 2EP^2$

বা, $2(DP^2 + EP^2) = DE^2 + DF^2$

$\therefore DP^2 + EP^2 = \frac{1}{2}(DE^2 + DF^2)$ [প্রমাণিত]

(গ) এর সমাধান:



উৎপন্ন ঘনবস্তু হবে কোণক।

$\therefore$ কোণকটির উচ্চতা, $h = DG = 10$ cm

ভূমির ব্যাসার্ধ, $r = \frac{PF}{2} = \frac{8 \text{ cm}}{2} = 4$ cm

$\therefore$ হেলানো উন্নতি, $l = \sqrt{h^2 + r^2}$

$= \sqrt{(10)^2 + (4)^2}$

$= \sqrt{116}$

$\therefore$ কোণকটির আয়তন $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{1}{3} \times 3.1416 \times (4)^2 \times 10 \text{ cm}^3 = 167.552 \text{ cm}^3$

$\therefore$ কোণকটির সমগ্র ক্ষেত্রফল $= \pi r(r + l)$

$= 3.1416 \times 4 \times (4 + \sqrt{116}$ cm^2

$= 12.5664 \times 14.7703$ cm^2

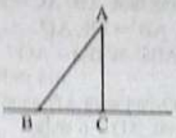
$= 185.61$ cm^2

অতএব, উৎপন্ন ঘনবস্তুর আয়তন 167.552 cm^3 এবং ক্ষেত্রফল 185.61 cm^3

PART-4 [অধ্যায়ভিত্তিক সমাধান]

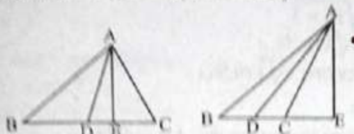
প্রশ্ন নং-৯: ΔABC-এর AD একটি মধ্যমা এবং অপর একটি ত্রিভুজ PQR এর উচ্চতা h, ভূমির উপর মধ্যমা d এবং ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ x.
(ক) লম্ব অভিক্ষেপ বিষয়টি ব্যাখ্যা কর।
(খ) প্রমাণ কর যে, $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$.
(গ) PQR ত্রিভুজটি অঙ্কন কর (অঙ্কনের চিহ্ন ও বিবরণ আবশ্যক)।
[দিনাজপুর বোর্ড-২০১৫]

৯ (ক) এর সমাধান:
লম্ব অভিক্ষেপ: কোনো নির্দিষ্ট সরলরেখার ওপর কোনো বিন্দুর লম্ব অভিক্ষেপ বলতে ঐ বিন্দু থেকে উক্ত নির্দিষ্ট রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুকে বোঝায় এবং কোন রেখাংশের লম্ব অভিক্ষেপ বলতে রেখাংশের দুই প্রান্ত বিন্দু হতে সরলরেখার ওপর যে লম্ব আঁকা হয় তাদের পাদবিন্দুর অন্তর্বর্তী দূরত্ব বোঝায়।



যেমন, BC সরলরেখার উপর A বিন্দুর লম্ব অভিক্ষেপ C এবং BA রেখাংশের লম্ব অভিক্ষেপ BC।

৯ (খ) এর সমাধান:
বিশেষ নির্বচন: ΔABC এর AD মধ্যমা BC বাহুকে সমদ্বিখণ্ডিত করেছে।
প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$

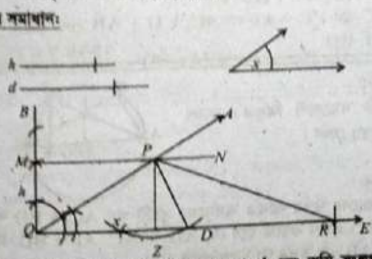


চিত্র : (ক) চিত্র : (খ)

অঙ্কন: BC বাহুর ওপর (চিত্র: (ক)) এবং BC বাহুর বর্ধিতাংশের উপর (চিত্র: (খ)) AE লম্ব অঙ্কন করি।
প্রমাণ: ΔABD এর $\angle ADB$ স্থূলকোণ এবং BD রেখার বর্ধিতাংশের উপর AD রেখার লম্ব অভিক্ষেপ DE [উভয় চিত্রে]
$\therefore$ স্থূলকোণ এর ক্ষেত্রে পীথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি অনুসারে
আমরা পাই, $AB^2 = AD^2 + BD^2 + 2\,BD.DE$........(১)
আবার, ΔACD এর $\angle ADC$ সূক্ষ্মকোণ এবং DC রেখার (চিত্র: (ক)) এবং DC রেখার বর্ধিতাংশের (চিত্র: (খ)) উপর AD রেখার লম্ব অভিক্ষেপ DE.
$\therefore$ সূক্ষ্মকোণের $\angle ADC$ এর ক্ষেত্রে পীথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি অনুসারে পাই,
$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2CD.DE$..................(২)
এখন সমীকরণ (১) ও (২) যোগ করে পাই,

$$\begin{aligned} AB^2 + AC^2 &= 2AD^2 + BD^2 + CD^2 + 2BD.DE - 2CD.DE \\ &= 2AD^2 + BD^2 + BD^2 + 2BD.DE - 2BD.DE; \quad [\because BD = CD] \\ &= 2AD^2 + 2BD^2 \\ &= 2(AD^2 + BD^2). \text{ [প্রমাণিত]} \end{aligned}$$

৯ (গ) এর সমাধান:

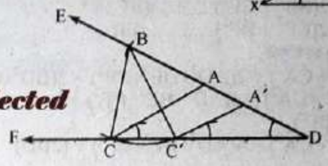


মনেকরি, ত্রিভুজের উচ্চতা h, ভূমির উপর মধ্যমা d এবং ভূমি সংলগ্ন একটি $\angle x$ দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কন করতে হবে।
অঙ্কনের বিবরণ:
ধাপ ১ : যেকোনো রশ্মি QE এর Q বিন্দুতে $\angle x$ এর সমান $\angle EQA$ অঙ্কন করি।
ধাপ ২ : Q বিন্দুতে QE রেখার ওপর BQ লম্ব অঙ্কন করি।
ধাপ ৩ : BQ থেকে ত্রিভুজের উচ্চতা h এর সমান QM অংশ কেটে নিই।
ধাপ ৪ : M বিন্দুতে BE এর সমান্তরাল করে MN রেখা অঙ্কন করি যা AQ কে P বিন্দুতে ছেদ করে।
ধাপ ৫ : P বিন্দুকে কেন্দ্র করে মধ্যমা d এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ অঙ্কন করি। ঐ বৃত্তচাপ QE কে D বিন্দুতে ছেদ করে।
ধাপ ৬ : QE থেকে $QD = DR$ অংশ কেটে নিই।
ধাপ ৭ : P, R যোগ করি। তাহলে, PQR-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

অতিরিক্ত সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর

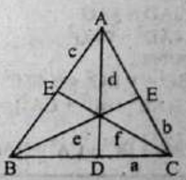
প্রশ্ন নং-৯: ΔABC এর $\angle C = 90°$ এবং BC, CA ও AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E ও F। ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র G।
(ক) ত্রিভুজের ভূমি, শিরঃকোণ ও অপর বাহুদ্বয়ের সমষ্টি দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁক।
(খ) দেখাও যে, $2(AD^2 + BE^2 + CF^2) = 3AB^2$
(গ) দেখাও, $AB^2 + BC^2 + AC^2 = 3(GA^2 + GB^2 + GC^2)$
[ভিকারুননিসা নূন স্কুল অ্যান্ড কলেজ, ঢাকা]

(ক) এর সমাধান:
মনে করি, একটি ত্রিভুজের ভূমি a, অপর দুই বাহুর সমষ্টি s এবং শিরঃকোণ $\angle x$ দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।



অঙ্কনের বিবরণ:
ধাপ-১: যেকোনো রশ্মি DE থেকে DB = s অংশ কেটে নিই।
ধাপ-২: DB রেখার D বিন্দুতে $\angle BDF = \frac{1}{2}\angle x$ অঙ্কন করি।
ধাপ-৩: B কে কেন্দ্র করে ভূমি a এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ অঙ্কন করি যা DF কে C ও C′ বিন্দুতে ছেদ করে। B, C ও B, C′ যোগ করি।
ধাপ-৪: C বিন্দুতে $\angle BDF$ এর সমান $\angle DCA$ এবং C′ বিন্দুতে $\angle BDF$ এর সমান $\angle DC'A'$ অঙ্কন করি। CA ও C′A′ বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে ABC ও A′BC′ ত্রিভুজদ্বয় উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

(খ) এর সমাধান:
মনে করি, ΔABC এর BC, AC ও AB বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে a, b ও c. BC, CA ও AB বাহুর মধ্যমা AD, BE ও CF এর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে d, e ও f.
প্রমাণ করতে হবে যে,
$2(AD^2 + BE^2 + CF^2) = 3AB^2$



প্রমাণ: অ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য অনুসারে

$$AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$$

বা, $c^2 + b^2 = 2\left\{d^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2\right\}$. $[\because BD = \frac{1}{2}a]$

বা, $a^2 + b^2 = 2d^2 + \frac{a^2}{2}$

বা, $2d^2 = b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2}$

বা, $d^2 = \frac{2(b^2+c^2) - a^2}{4}$

অনুরূপভাবে, $e^2 = \frac{2(c^2+a^2) - b^2}{4}$ এবং $f^2 = \frac{2(a^2+b^2) - c^2}{4}$

এখন, $d^2 + e^2 + f^2 = \frac{2(b^2+c^2) - a^2}{4} + \frac{2(c^2+a^2) - b^2}{4} + \frac{2(a^2+b^2) - c^2}{4}$

$= \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2 + 2c^2 + 2a^2 - b^2 + 2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}$

$= \frac{3a^2 + 3b^2 + 3c^2}{4} = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$

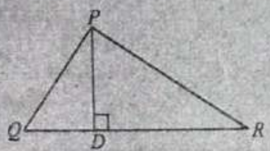
বা, $a^2 + b^2 + c^2 \frac{4}{3}(d^2 + e^2 + f^2)$

Jewel's Care Life is for motto lesson

সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর

বিগত এসএসসি পরীক্ষার সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর

প্রশ্ন নং- ১



ΔPQR এর $\angle R$ একটি সূক্ষ্মকোণ এবং $PD \perp QR$.

(ক) ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র ও ভরকেন্দ্র বলতে কী বোঝ?

(খ) উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর যে, $PQ^2 + 2\,QR.DR = PR^2 + QR^2$.

(গ) $DR = 6$ cm., $PD = 4$ cm. হলে DR ও PD কে একটি আয়তক্ষেত্রের যথাক্রমে দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ ধরে ঐ আয়তক্ষেত্রকে DR বাহুর সাপেক্ষে একবার ঘোরালে উৎপন্ন ঘনবস্তুর সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয় কর।

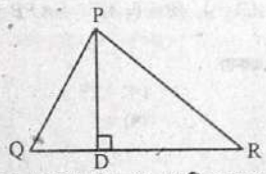
[ঢাকা বোর্ড-২০১৬]

(ক)-এর সমাধান:

ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র: ত্রিভুজের যে কোন দুই বাহুর লম্ব সমদ্বিখণ্ডিক যে বিন্দুতে ছেদ করে তাকে ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র বলে।

ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র: ত্রিভুজের মধ্যমাগুলো যে বিন্দুতে ছেদ করে ঐ বিন্দুকে ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্র বলা হয়।

(খ)-এর সমাধান:



বিশেষ নির্বচন: এখানে, ΔPQR এর $\angle R$ একটি সূক্ষ্মকোণ, $PD \perp QR$ এবং $\angle R$ এর বিপরীত বাহু PQ, অপর বাহু যথাক্রমে QR ও PR। প্রমাণ করতে হবে যে, $PQ^2 + 2QR.DR = PR^2 + QR^2$.

প্রমাণ: ΔPQD এ $\angle PDQ$ = এক সমকোণ

$\therefore PQ^2 = PD^2 + QD^2$.......(i) [পীথাগোরাসের উপপাদ্য]

আবার, ΔPDR এ $\angle PDR$ = এক সমকোণ

$\therefore PR^2 = PD^2 + DR^2$.....(ii)

কিন্তু, $QD = QR - DR$

(i) নং সমীকরণ হতে পাই,

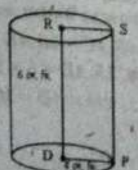
$PQ^2 = PD^2 + (QR - DR)^2$
$= PD^2 + QR^2 + DR^2 - 2QR.DR$
$= (PD^2 + DR^2) + QR^2 - 2QR.DR$
$= PR^2 + QR^2 - 2QR.DR$ [(ii) নং থেকে]

$\therefore PQ^2 + 2QR.DR = PR^2 + QR^2$ [প্রমাণিত]

(গ)-এর সমাধান:

দেওয়া আছে,
DR = 6 সে.মি.
PD = 4 সে.মি.

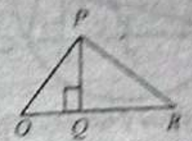
এখন, DR ও PD কে একটি আয়তক্ষেত্রের যথাক্রমে দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ ধরে ঐ আয়তক্ষেত্রকে সিলিন্ডার উৎপন্ন হয় যার ব্যাসার্ধ, $r = PD = 4$ সে.মি. এবং উচ্চতা, $h = DR = 6$ সে.মি.



আমরা জানি,
সিলিন্ডারের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল,
$= 2\pi r\,(r + h)$ বর্গ একক
$= 2 \times 3.1416 \times 4(4 + 6)$ বর্গ সে.মি.
$= 251.33$ বর্গ সে.মি. (প্রায়) [Ans.]

এবং সিলিন্ডারের আয়তন $= \pi r^2 h$ ঘন একক
$= 3.1415 \times 4^2 \times 6$ ঘন সে.মি.
$= 301.59$ ঘন সে.মি. (প্রায়) [Ans.]

প্রশ্ন নং- ২



ΔPOR এ $\angle OPR = 90°$

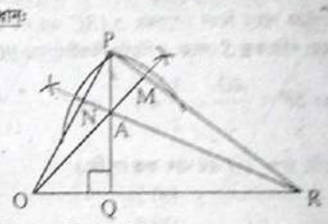
(ক) ΔPOR এর লম্ববিন্দু নির্ণয় কর। [অঙ্কনের চিহ্ন আবশ্যক]

(খ) প্রমাণ কর যে, $PR^2 = PO^2 + OR^2 - 2OR.OQ$

(গ) প্রমাণ কর যে, $PQ^2 = OQ.QR$

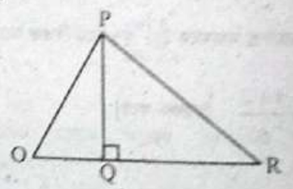
[রাজশাহী বোর্ড-২০১৬]

(ক)-এর সমাধান:



চিত্রে OM ⊥ PR এবং PR ⊥ OP অংকন করা হলো। যেখানে PQ,OM ও RN লম্বত্রয় A বিন্দুতে ছেদ করেছে। সুতরাং A বিন্দুতে ΔPOR এর লম্ব বিন্দু।

(খ)-এর সমাধান:



বিশেষ নির্বচন: মনে করি, ΔPOR-এ $\angle OPR = 90°$ এবং $PQ \perp OR$
প্রমাণ করতে হবে যে, $PR^2 = PO^2 + OR^2 - 2OR.OQ$.

প্রমাণ: ΔOPQ-এ $\angle OQP = 90°$

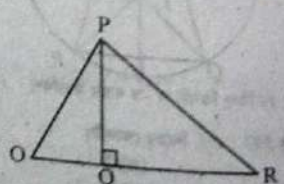
$\therefore PO^2 = PQ^2 + OQ^2$...(i) [পীথাগোরাসের উপপাদ্য]

আবার, ΔPQR এ $\angle PQR = 90°$

$\therefore PR^2 = PQ^2 + QR^2$
$= PQ^2 + (OR - OQ)^2$ [$\therefore QR = OR - OQ$]
$= PQ^2 + OR^2 + OQ^2 - 2OR.OQ$
$= (PQ^2 + OQ^2) + OR^2 - 2OR.OQ$
$= PO^2 + OR^2 - 2OR.OQ$ [(i) নং থেকে]

$\therefore PR^2 = PO^2 + OR^2 - 2OR.OQ$ [প্রমাণিত]

(গ)-এর সমাধান:



বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, ΔPOR এর $\angle OPR = 90°$ এবং $PQ \perp OR$।
প্রমাণ করতে হবে যে, $PQ^2 = OQ.OR$

প্রমাণ: ΔPOR এ $\angle OPR = 90°$

$\therefore \angle OPQ + \angle QPR = 90°$.....(i)

Jewel’s Care Life is for motto lesson

আবার, ΔOPQ এর $\angle OPQ = 90°$ [$\because PQ \perp OR$]

$\therefore \angle POQ + \angle OPQ = 90°$.......(ii)

(i) ও (ii) নং সমীকরণ থেকে পাই,

$\angle OPQ + \angle QPR = \angle POQ + \angle OPQ$

$\therefore \angle QPQ = \angle POQ$

এখন, ΔOPQ ও PQR এর মধ্যে

$\angle OQP = \angle PQR = 90°$

$\angle POQ = \angle QPR$

এবং অবশিষ্ট $\angle OPQ$ = অবশিষ্ট $\angle PRQ$

$\therefore \Delta OQP$ ও ΔPQR সদৃশকোণী।

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ।

$\therefore \frac{OQ}{PQ} = \frac{PQ}{QR}$

বা, $OQ.QR = PQ^2$

$\therefore PQ^2 = OQ.QR$ [প্রমাণিত]

প্রশ্ন নং- ৩ PQR ত্রিভুজের $PQ = 6$ সে.মি., $QR = 8$ সে.মি. এবং $PR = 4.5$ সে.মি.। S, QR এর মধ্যবিন্দু।

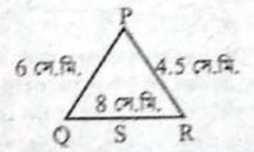
(ক) উপর্যুক্ত তথ্যের আলোকে ত্রিভুজটি আঁক।

(খ) জ্যামিতিক পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, $PQ^2 + PR^2 = 2(PS^2 + QS^2)$

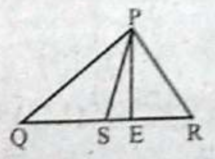
(গ) যদি কোনো ত্রিভুজের ভূমি QR এর অর্ধেকের সমান, শিরঃকোণ উদ্দীপকে উল্লিখিত ত্রিভুজের $\angle R$ এর সমান এবং অপর দুই বাহুর সমষ্টি QR এর সমান হয়, তবে ত্রিভুজটি আঁক। [অঙ্কনের চিহ্ন ও বিবরণ আবশ্যক]

[কুমিল্লা বোর্ড-২০১৬]

(ক)-এর সমাধান:



(খ)-এর সমাধান:



বিশেষ নির্বচন: PQR ত্রিভুজের S, QR এর মধ্যবিন্দু। P, S যোগ করা হলো যা P বিন্দু হতে QR এর উপর মধ্যমা।

প্রমাণ করতে হবে যে, $PQ^2 + PR^2 = 2(PS^2 + QS^2)$

অঙ্কন: P বিন্দু হতে QR এর উপর PE লম্ব অঙ্কন করি।

প্রমাণ: ΔPQS এর $\angle PSQ$ স্থূলকোণ এবং QS রেখার বর্ধিতাংশের উপর PS রেখার লম্ব অভিক্ষেপ SE

$\therefore$ স্থূল কোণের ক্ষেত্রে পীথাগোরাসের উপপাদ্যের বিবৃতি অনুসারে আমরা পাই,

$PQ^2 = PS^2 + QS^2 + 2QS.SE$ .... (i)

আবার, Δ PRS-এর $\angle PSR$ সূক্ষকোণ এবং SR রেখার উপর PS রেখার লম্ব অভিক্ষেপ SE.

সূক্ষকোণের ক্ষেত্রে পীথাগোরাসের উপপাদ্যের বিবৃতি অনুসারে পাই,

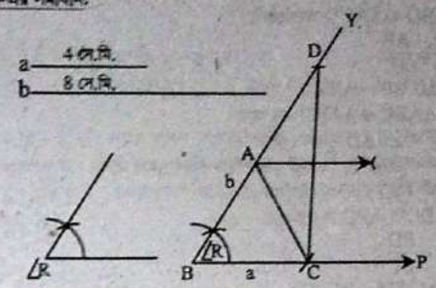
$PR^2 = PS^2 + RS^2 - 2RS.SE$ .... (ii)

এখন সমীকরণ (i) ও (ii) যোগ করে পাই,

$$PQ^2 + PR^2 = 2PS^2 + QS^2 + RS^2 + 2QS.SE - 2RS.SE$$
$$= 2PS^2 + (QS^2 + QS^2) + 2QS.SE - 2QS.SE \quad [\because QS = RS]$$
$$= 2PS^2 + 2QS^2$$

$\therefore PQ^2 + PS^2 = 2(PS^2 + QS^2)$ [প্রমাণিত]

(গ)-এর সমাধান:



শর্তানুযায়ী একটি ত্রিভুজের ভূমি $a = QR \div 2 = (8 \div 2)$ সে.মি. $= 4$ সে.মি. ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন: BP যে কোন রশ্মি থেকে BC = a কেটে নেই। B বিন্দুতে $\angle R = \angle CBY$ আঁকি। BY থেকে BD = b অংশ কেটে নেই। C, D যোগ করি। CD এর সমদ্বিখণ্ডক আঁকি যা BD কে A বিন্দুতে ছেদ করে। A, C যোগ করি। CD এর সমদ্বিখণ্ডক আঁকি যা BD কে A বিন্দুতে ছেদ করে। A, C যোগ করি। তাহলে ABC নির্ণেয় ত্রিভুজ।

প্রশ্ন নং- ৪ 3 সে.মি. ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তে ABCD অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় AC ও BD.

(ক) বৃত্তটির পরিধি নির্ণয় কর।

(খ) প্রমাণ কর যে, AC.BD = AB.CD + BC.AD

(গ) এমন একটি ত্রিভুজ অঙ্কন করতে হবে, যার ভূমি বৃত্তের ব্যাসের সমান, অপর বাহুদ্বয়ের অন্তর বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান এবং শিরঃকোণ 30.

[অঙ্কনের চিহ্ন ও বিবরণ আবশ্যক] [চট্টগ্রাম বোর্ড-২০১৬]

(ক)-এর সমাধান:

দেওয়া আছে, ABCD বৃত্তের ব্যাসার্ধ 3 সে.মি.

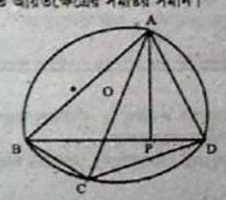
সুতরাং, বৃত্তটির পরিধি $= 2\pi r$

$= (2 \times 3.1416 \times 3)$ সে.মি.

$= 18.849$ সে.মি.

(খ)-এর সমাধান:

বৃত্তে অন্তর্লিখিত কোনো চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র ঐ চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের সমষ্টির সমান।



বিশেষ নির্বচন: মনে করি বৃত্তে অন্তর্লিখিত ABCD চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলো যথাক্রমে AB ও CD এবং BC ও AD। AC এবং BD চতুর্ভুজটির দুইটি কর্ণ।

প্রমাণ করতে হবে যে, AC.BD = AB.CD + BC.AD.

অঙ্কন: $\angle BAC$ কে $\angle DAC$ থেকে ছোট ধরে নিয়ে A বিন্দুতে AD রেখাংশের সাথে $\angle BAC$ এর সমান করে $\angle DAP$ আঁকি যেন AP রেখা BD কর্ণকে P বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ: অঙ্কন অনুসারে $\angle BAC = \angle DAP$

উভয়পক্ষে $\angle CAP$ যোগ করে পাই,

$\angle BAC + \angle CAP = \angle DAP + \angle CAP$

অর্থাৎ, $\angle BAP = \angle CAD$

এখন ΔABP ও ΔACD এর মধ্যে

$\angle BAP = \angle CAD$

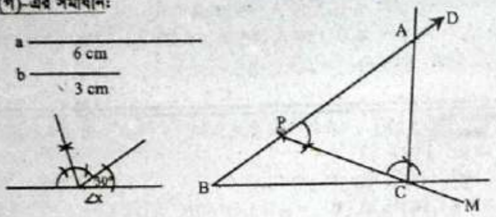
$\angle ABD = \angle ACD$ [একই বৃত্তাংশস্থিত কোণ সমান বলে]

Jewel's Care Life is for motto lesson

এবং অবশিষ্ট $\angle APB$ = অবশিষ্ট $\angle ADC$
$\therefore \Delta ABD$ ও ΔACD সদৃশকোণী।
$\therefore \frac{BP}{CD} = \frac{AB}{AC}$
অর্থাৎ, $AC.BP = AB.CD$ .... (১)
আবার, ΔABC ও ΔAPD এর মধ্যে
$\angle BAC = \angle PAD$ [অঙ্কন অনুসারে]
$\angle ADP = \angle ACB$ [একটি বৃত্তাংশস্থিত কোণ সমান বলে]
এবং অবশিষ্ট $\angle ABC$ = অবশিষ্ট $\angle APD$
$\therefore \Delta ABC$ ও APD সদৃশকোণী।
$\therefore \frac{AD}{AC} = \frac{PD}{BC}$

অর্থাৎ, $AC.PD = BC.AD$ .... (২)
এখন সমীকরণ (1) ও (2) যোগ করে পাই,
$AC.BP + AC.PB = AB.CD + B.AD$
বা, $AC(BP + PD) = AB.CD + BC.AD$
অর্থাৎ, $AC.BD = AB.CD + BC.AD$ [যেহেতু $BP + PD = BD$] [প্রমাণিত]

(গ)-এর সমাধান:



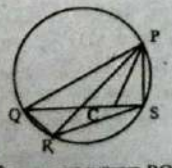
ত্রিভুজের ভূমি a (ABCD বৃত্তের ব্যাস $= 2r = 2 \times 3 = 6$ সে.মি.) অপর দুই বাহুর অন্তর d (বৃত্তের ব্যাসার্ধ $= 3$ সে.মি.) এবং শিরঃকোণ $\angle x = 30^\circ$ দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কন করতে হবে।

অঙ্কনের বিবরণ:
যেকোনো রশ্মি BD থেকে $BP = d$ অংশ কেটে নিই। P বিন্দুতে $\angle X$ এর সম্পূরক কোণের অর্ধেকের সমান $\angle DPM$ অঙ্কন করি। B- কে কেন্দ্র করে a- এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত বৃত্তচাপ PM সরলরেখাকে C বিন্দুতে ছেদ করে। B, C যোগ করি। আবার, C বিন্দুতে $\angle DPC = \angle PCA$ কোণ অঙ্কন করি যেন CA রেখাংশ BD-কে A বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে, ABC-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

প্রশ্ন নং- ৫ *PQRS* একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ এবং *PR* ও *QS* উহার দুটি কর্ণ।
(ক) নববিন্দু বৃত্তের কেন্দ্রের অবস্থান কোথায় এবং এর ব্যাসার্ধ কত?
(খ) প্রমাণ কর যে, $PR \cdot QS = PQ \cdot RS + QR \cdot PS$.
(গ) ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, *PQRS* চতুর্ভুজের সন্নিহিত বাহুগুলোর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাসমূহ একটি সামান্তরিক উৎপন্ন করে।
[সিলেট বোর্ড-২০১৬]

(ক)-এর সমাধান:
নববিন্দু বৃত্তের কেন্দ্র: ত্রিভুজের লম্ববিন্দু ও পরিকেন্দ্র সংযোজন করে উৎপন্ন সসীম সরলরেখার মধ্যবিন্দুই নববিন্দুবৃত্তের কেন্দ্র।
নববিন্দুবৃত্তের ব্যাসার্ধ: ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধের অর্ধেকের সমান।

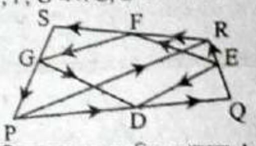
(খ)-এর সমাধান:



PQRS বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ বিপরীত বাহুগুলো যথাক্রমে PQ ও RS এবং QR ও SP।
প্রমাণ করতে হবে যে, $PR.\ QS = PQ.RS + QR.PS$
অঙ্কন: $\angle QPR$ কে $\angle SPR$ এর চেয়ে ছোট ধরে নিয়ে $\angle SPR$ থেকে $\angle QPR$ এর সমান করে $\angle SPC$ আঁকি। PC রেখা QS কে C বিন্দুতে ছেদ করে।
প্রমাণ: অঙ্কন অনুসারে,
$\angle QPR = \angle SPC$
বা, $\angle QPR + \angle CPR = \angle SPC + \angle CPR$
বা, $\angle QPC = \angle SPR$

এখন, ΔPQC এবং ΔPRS এর মধ্যে
$\angle QPC = \angle SPR$
$\angle PQC = \angle PRS$ [একই চাপ PS এর উপর অবস্থিত বৃত্তস্থ কোণ]
এবং অবশিষ্ট $\angle PCQ$ = অবশিষ্ট $\angle PSR$
$\therefore \Delta PQC$ এবং ΔPRS সদৃশকোণী
সুতরাং $\frac{QC}{RS} = \frac{PQ}{PR}$
বা, $QC.PR = PQ.RS$ .... (i)
আবার, ΔPCS এবং ΔPQR এর মধ্যে
$\angle SPC = \angle QPR$ [অঙ্কন অনুসারে]
$\angle PSC = \angle PRQ$ [একই চাপ PQ এর উপর অবস্থিত বৃত্তস্থ কোণ]
এবং অবশিষ্ট $\angle PCS$ = অবশিষ্ট $\angle PQR$
$\therefore \Delta PCS$ এবং ΔPQR সদৃশকোণী
$\therefore \frac{CS}{QR} = \frac{PS}{PR}$
বা, $CR.PR = QR.PS$ .... (ii)
(i) ও (ii) নং হতে পাই, $QC.PR + CS.PR = PQ.RS + QR.PS$
বা, $PR\,(QC + CS) = PQ.RS + QR.PS$
বা, $PR.\ QS = PQ.RS + QR.PS$ [প্রমাণিত]

(গ)-এর সমাধান:
মনে করি, PQRS চতুর্ভুজের PQ, QR, RS ও PS বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু D, E, F ও G। D, E; E, F; F, G এবং G, D যোগ করি।



PQRS চতুর্ভুজের সন্নিহিত বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে A, B, C ও D, A, B; B, C; C, D এবং A, D যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, ABCD চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক।

প্রমাণ: মনে করি, $\overrightarrow{PQ} = \underline{p}$, $\overrightarrow{QR} = \underline{q}$, $\overrightarrow{RS} = \underline{r}$, $\overrightarrow{SP} = \underline{s}$

ΔDBQ থেকে ভেক্টর যোগের ত্রিভুজবিধি অনুসারে পাই,

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QB} = \frac{1}{2}\underline{p} + \frac{1}{2}\underline{q} = \frac{1}{2}(\underline{p} + \underline{q})$

অনুরূপভাবে, $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\underline{q} + \underline{r})$, $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}(\underline{r} + \underline{s})$ এবং $\overrightarrow{DA} = \frac{1}{2}(\underline{s} + \underline{p})$

এখানে, $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \vec{p} + \vec{q}$ ও $\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{SP} = \vec{r} + \vec{s}$

এখন, $(\underline{p} + \underline{q}) + (\underline{r} + \underline{s}) = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RP} = \overrightarrow{PR} - \overrightarrow{RP} = 0$ [$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$]

বা, $\underline{p} + \underline{q}) = -(\underline{r} + \underline{s})$

বা, $\frac{1}{2}(\underline{p} + \underline{q}) = -\frac{1}{2}(\underline{r} + \underline{s}$

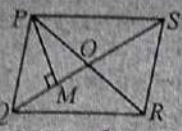
বা, $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$

বা, $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{DC}$

বা, $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{DC}|$
$\therefore AB = DC$

আবার $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{CD}$ ভেক্টরদ্বয়ের ধারকরেখা একই অথবা সমান্তরাল। কিন্তু এরা একই হওয়া সম্ভব নয়।
$\therefore AB \parallel DC$
$\therefore ABCD$ একটি সামান্তরিক।

প্রশ্ন নং- ৬ ।

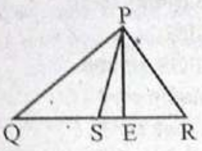


চিত্রে $PQRS$ একটি সামান্তরিক ।
(ক) এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্যটি বিবৃত কর ।
(খ) প্রমাণ কর যে, $PQ^2 + PS^2 = 2(PO^2 + QO^2)$.
(গ) ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, $PO = RO$ এবং $QO = SO$.
[দিনাজপুর বোর্ড-২০১৬]

(ক)-এর সমাধানঃ

অ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্যঃ ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের সমষ্টি, তৃতীয় বাহুর অর্ধেকের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল এবং ঐ বাহুর সমদ্বিখণ্ডক মধ্যমার উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির দ্বিগুণ ।

(খ)-এর সমাধানঃ

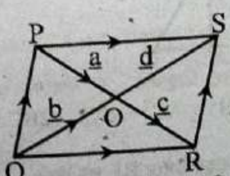


Jewel's Care Collected

বিশেষ নির্বচনঃ PQR ত্রিভুজের S, QR এর মধ্যবিন্দু । P, S যোগ করা হলো যা P বিন্দু হতে QR এর উপর মধ্যমা ।
প্রমাণ করতে হবে যে, $PQ^2 + PR^2 = 2(PS^2 + QS^2)$
অঙ্কনঃ P বিন্দু হতে QR এর উপর PE লম্ব অঙ্কন করি ।
প্রমাণঃ ΔPQS এর $\angle PSQ$ স্থূলকোণ এবং QS রেখার বর্ধিতাংশের উপর PS রেখার লম্ব অভিক্ষেপ SE
∴ স্থূল কোণের ক্ষেত্রে পীথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি অনুসারে আমরা পাই,
$PQ^2 = PS^2 + QS^2 + 2QS.SE$ .... (i)
আবার, Δ PRS-এর $\angle PSR$ সূক্ষ্মকোণ এবং SR রেখার উপর PS রেখার লম্ব অভিক্ষেপ SE.
সূক্ষ্মকোণের ক্ষেত্রে পীথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি অনুসারে পাই,
$PR^2 = PS^2 + RS^2 - 2RS.SE$ .... (ii)
এখন সমীকরণ (i) ও (ii) যোগ করে পাই,

$$PQ^2 + PR^2 = 2PS^2 + QS^2 + RS^2 + 2QS.SE - 2RS.SE$$
$$= 2PS^2 + (QS^2 + QS^2) + 2QS.SE - 2QS.SE \quad [\because QS = RS]$$
$$= 2PS^2 + 2QS^2$$
$$\therefore PQ^2 + PS^2 = 2(PS^2 + QS^2)$$ [প্রমাণিত]

(গ)-এর সমাধানঃ

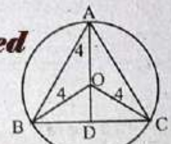


PQRS সামান্তরিকের PR ও QS কর্ণদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করেছে । মনে করি, $\overrightarrow{PO} = \underline{a}$, $\overrightarrow{QO} = \underline{b}$, $\overrightarrow{OR} = \underline{c}$ এবং $\overrightarrow{OS} = \underline{d}$ প্রমাণ করতে হবে যে, $|\underline{a}| = |\underline{c}|$ এবং $|\underline{b}| = |\underline{d}|$

প্রমাণঃ $\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OS} = \overrightarrow{PS}$ এবং $\overrightarrow{QO} + \overrightarrow{OR} = \overrightarrow{QR}$ যেহেতু, সামান্তরিকের বিপরীত বাহুগুলো পরস্পর সমান ও সমান্তরাল
$\therefore \overrightarrow{PS} = \overrightarrow{QR}$
বা, $\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OS} = \overrightarrow{QO} + \overrightarrow{OR}$
বা, $\underline{a} + \underline{d} = \underline{b} + \underline{c}$
বা, $\underline{a} - \underline{c} = \underline{b} - \underline{c}$ [উভয়পক্ষে $\underline{c} - \underline{d}$ যোগ করে]
এখানে, $\underline{a}$ ও $\underline{d}$ এর ধারক QS ∴ $\underline{b} - \underline{d}$ এর ধারক QS ∴ $\underline{b} - \underline{d}$ এর ধারক QS
$\underline{a} - \underline{c}$ ও $\underline{b} - \underline{d}$ দুটি সমান সমান অশূন্য ভেক্টর হলে তাদের ধারক রেখা একই অথবা সমান্তরাল হবে । কিন্তু PR ও QS দুটি পরস্পরচ্ছেদী অসমান্তরাল সরলরেখা । সুতরাং, $\underline{a} - \underline{c}$ ও $\underline{b} - \underline{d}$ ভেক্টরদ্বয় অশূন্য হতে পারে না বিধায় এদের মান শূন্য হবে ।
$\therefore \underline{a} - \underline{c} = 0$, এবং $\underline{b} - \underline{d} = 0$
বা, $\underline{a} = \underline{c}$ এবং $\underline{b} = \underline{d}$
$\therefore |\underline{a}| = |\underline{c}|$ এবং $|\underline{b}| = |\underline{d}|$
অর্থাৎ, PO = OR ও QO = OS [প্রমাণিত]

প্রশ্ন নং- ৭ । O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে অন্তর্লিখিত ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজঃ যার পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ 4 সে.মি. এবং $AD \perp BC$.
(ক) AD এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর ।
(খ) বক্সাগুপ্তের উপপাদ্য ব্যবহার করে ABC ত্রিভুজটির বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর ।
(গ) ত্রিভুজক্ষেত্র ABC এবং বৃত্তক্ষেত্র ABC-এর ক্ষেত্রফলদ্বয়ের অনুপাত নির্ণয় কর । [বরিশাল বোর্ড- ২০১৫]

(ক) এর সমাধানঃ



যেহেতু ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ তাই ত্রিভুজটির পরিকেন্দ্র, ভরকেন্দ্র এবং লম্বকেন্দ্র একই বিন্দু। যেহেতু O পরিকেন্দ্র তাই $\angle ABO = \angle OBD$
[∵ ত্রিভুজের কোণগুলোর সমদ্বিখণ্ডকের ছেদবিন্দুই পরিকেন্দ্র ।]

$$= \frac{1}{2}\angle ABD$$
$$= \frac{1}{2} \times 60^\circ \quad [\because \text{ সমবাহু ত্রিভুজের প্রতিটি কোণের মান } 60^\circ]$$
$$= 30^\circ$$

এখন, $\sin\angle OBD = \frac{OD}{OB}$

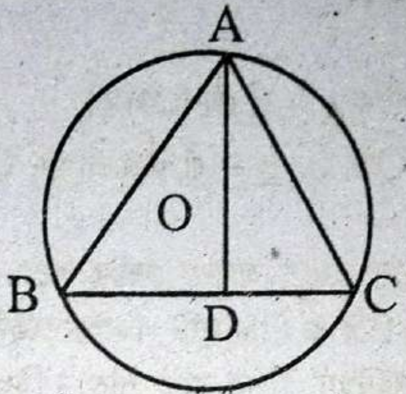
$$\therefore OD = OB \sin\angle OBD$$
$$= 4 \sin 30^\circ$$
$$= 4 \times \frac{1}{2} = 2$$
$$\therefore AD = OA + OD$$
$$= (4 + 2) \text{ c.m} = 6 \text{ c.m.}$$

বিকল্প পদ্ধতিঃ
যেহেতু ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ তাই ত্রিভুজটির পরিকেন্দ্র ,ভরকেন্দ্র এবং লম্বকেন্দ্র একই অর্থাৎ O। তাই ΔABCএর পরিব্যাসার্ধ AO এবং মধ্যমা AD। আমরা জানি, মধ্যমাত্রয় ভরকেন্দ্রে 2:1 অনুপাতে বিভক্ত করে।

$$\frac{AO}{OD} = \frac{2}{1}$$
বা, $\frac{AO}{AO + OD} = \frac{2}{2+1}$
বা, $\frac{AO}{AD} = \frac{2}{3}$
বা, $AD = \frac{3}{2}AO$
$$= \frac{3}{2} \times 4 = 6 \text{ c.m.}$$ [Ans.]

উচ্চতর গণিত : তৃতীয় অধ্যায় (জ্যামিতি)

৯ (খ) এর সমাধান:



ব্রহ্মগুপ্তের উপপাদ্য: কোনো ত্রিভূজে যে কোন দুই বাহুর অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল ত্রিভূজের পরিবৃত্তের ব্যাস এবং ঐ বাহুর সাধারণ বিন্দু থেকে ভূমির উপর অঙ্কিত লম্বের আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান। অর্থাৎ ΔABC এর ক্ষেত্রে,

$AB.AC = 2AO.AD$

বা, $AB^2 = 2 \times 4 \times 6$ c.m.

$\therefore AB^2 = 48$ c.m.

বা, $AB = \sqrt{48}$ c.m.

$= 4\sqrt{3}$ c.m. [Ans.]

৯ (গ) এর সমাধান:

আমরা জানি, সমবাহু ত্রিভূজের এক বাহুর দৈর্ঘ্য a হলে এর ক্ষেত্রফল $= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times (4\sqrt{3})^2$ c.m^2

$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4^2 \times 3$ c.m^2

$= 12\sqrt{3}$ c.m^2.

বৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \pi r^2$

$= \pi \times 4^2$ c.m^2 $= 16\pi$ c.m^2

$\therefore \frac{\text{ত্রিভূজক্ষেত্র ABC}}{\text{বৃত্তক্ষেত্র ABC}} = \frac{12\sqrt{3}}{16\times\pi}$

$= \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$ **[Ans.]**

সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর

বিগত এসএসসি পরীক্ষার সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর

প্রশ্ন নং-১: $K = y^2 - y - 1$, $L = \frac{2m}{m-1}$, $M = \left(1 - \frac{x}{2}\right)^n$ যেখানে n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

(ক) $K = 0$ হলে সমীকরণটির নিশ্চায়ক নির্ণয় কর।

(খ) M এর বিস্তৃতিতে x^2 এর সহগ $\frac{6}{8}$ হলে n এর মান নির্ণয় কর।

(গ) $6\sqrt{L} + \frac{5}{\sqrt{L}} - 13 = 0$ হলে, m এর মান নির্ণয় কর। [দিনাজপুর বোর্ড-২০১৬]

প্র (ক)-এর উত্তর:

দেওয়া আছে,

$k = y^2 - y - 1$

আবার, $k = 0$

$\therefore y^2 - y - 1 = 0$

আদর্শ দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2 + bx + c = 0$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

$a = 1, b = -1, c = -1$

$\therefore$ সমীকরণটির নিশ্চায়ক $b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4.1(-1)$
$= 1 + 4 = 5$

প্র (খ)-এর উত্তর:

দেওয়া আছে,

$M = \left(1 - \frac{x}{2}\right)^n$

দ্বিপদী বিস্তৃতির সাহায্যে পাই,

$$\left(1-\frac{x}{2}\right)^n = \binom{n}{0}\left(-\frac{x}{2}\right)^0 + \binom{n}{1}\left(-\frac{x}{2}\right) + \binom{n}{2}\left(-\frac{x}{2}\right)^2 + \ldots$$
$$= 1 - \binom{n}{1}\left(\frac{x}{2}\right) + \binom{n}{2}\left(\frac{x^2}{4}\right) + \ldots\ldots$$

প্রশ্নমতে,

$\binom{n}{2}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{6}{8}$

বা, $\frac{n(n-1)}{2} = \frac{24}{8}$

বা, $n^2 - n = \frac{24}{8} \times 2$

বা, $n^2 - n = 6$

বা, $n^2 - n - 6 = 0$

বা, $n^2 - 3n + 2n - 6 = 0$

বা, $n(n-3) + 2(n-3) = 0$

বা, $(n-3)(n+2) = 0$

$\therefore n - 3 = 0$

বা, $n = 3$

অথবা, $n + 2 = 0$

বা, $n = -2$

কিন্তু $n = -2$ গ্রহণযোগ্য নয়। কারণ n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

সুতরাং, $n = 3$

প্র (গ)-এর উত্তর:

দেওয়া আছে,

$L = \frac{2m}{m-1}$

আবার, $6\sqrt{L} + \frac{5}{\sqrt{L}} - 13 = 0$

বা, $\frac{6L + 5}{\sqrt{L}} = 13$

বা, $6L + 5 = 13\sqrt{L}$

বা, $(6L+5)^2 = (13\sqrt{L})^2$

বা, $36L^2 + 60L + 25 = 169L$

বা, $36L^2 + 60L + 25 - 169L = 0$

বা, $36L^2 - 109L + 25 = 0$

বা, $36L^2 - 100L - 9L + 25 = 0$

বা, $4L(9L - 25) - 1(9L - 25) = 0$

বা, $(9L - 25)(4L - 1) = 0$

$\therefore 9L - 25 = 0$ অথবা, $4L - 1 = 0$

বা, $9L = 25$	বা, $4L = 1$
বা, $L = \frac{25}{9}$	বা, $L = \frac{1}{4}$
বা, $\frac{2m}{m-1} = \frac{25}{9}$	বা, $\frac{2m}{m-1} = \frac{1}{4}$
বা, $18m = 25m - 25$	বা, $8m = m - 1$
বা, $25m - 18m = 25$	বা, $8m = m - 1$
বা, $7m = 25$	বা, $8m - m = -1$
$\therefore m = \frac{25}{7}$	বা, $7m = -1$
	$\therefore m = -\frac{1}{7}$

$\therefore m$ এর মান $\frac{25}{7}$ ও $-\frac{1}{7}$

অতিরিক্ত সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর

২। $\sqrt{\frac{x}{x+16}} + \sqrt{\frac{x+16}{x}} = \frac{25}{12}$ একটি সমীকরণ এবং $P = \sqrt{\frac{x}{x+16}}$ (VVI)

(ক) প্রদত্ত সমীকরণটিকে P এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ রূপে প্রকাশ কর।

(খ) প্রাপ্ত দ্বিঘাত সমীকরণ থেকে x এর মান নির্ণয় কর।

(গ) প্রাপ্ত x এর মান প্রদত্ত সমীকরণের মূল কী না? যুক্তি পরীক্ষা কর।

সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর

বিগত এসএসসি পরীক্ষার সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর

প্রশ্ন নং-১: কোনো ধারার n তম পদ $Un = (1+x)^{n-2}$ হলে।

(ক) ধারাটি নির্ণয় কর।

(খ) x এর উপর কি শর্ত আরোপ করলে ধারাটির অসীমতক পদের সমষ্টি থাকবে এবং সেই সমষ্টি নির্ণয় কর।

(গ) ধারাটির অষ্টম পদ নির্ণয় কর। উক্ত পদের বিস্তৃতিতে মধ্যপদের মান 540 হলে, x এর মান কত হবে? [চট্টগ্রাম বোর্ড-২০১৬]

(ক)-এর উত্তর:

দেওয়া আছে, কোনো ধারার n তম পদ $U_n = (1+x)^{n-2}$

$\therefore$ ধারাটি হলো: $U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + \ldots\ldots$

$= (1+x)^{1-2} + (1+x)^{2-2} + (1+x)^{3-2} + (1+x)^{4-2} + \ldots\ldots$

$= \frac{1}{1+x} + 1 + (1+x) + (1+x)^2 + \ldots\ldots$

(খ)-এর উত্তর:

'ক' থেকে পাই,

ধারাটি হলো, $\frac{1}{1+x} + 1 + (1+x) + (1+x)^2 + \ldots\ldots$

এখানে, প্রথম পদ, $a = \frac{1}{1+x}$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = 1 \div \frac{1}{1+x} = 1+x$

ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি $|r| < 1$ হয়,

অর্থাৎ, $|1+x| < 1$

এখন, $|1+x|$ অঋণাত্মক হলে, $x+1<1$ বা, $x < 1-1$ বা, $x<0$

আবার, $|1+x|$ ঋণাত্মক হলে, $-(x+1) < 1$ বা, $x > -2$

$\therefore$ নির্ণেয় শর্ত হচ্ছে : $x<0$ অথবা, $x>-2$

এবং অসীমতক সমষ্টি, $S = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{1+x}}{1-1-x} = -\frac{1}{x(1+x)}$

(গ)-এর উত্তর:

'ক' থেকে পাই, $\frac{1}{1+x} + 1 + (1+x) + (1+x)^2 + \ldots\ldots$

এখানে, প্রথম পদ, $a = \frac{1}{1+x}$

সাধারণ অনুপাত, $r = 1+x$

আমরা জানি, গুণোত্তর ধারার n তম পদ $= ar^{n-1}$

$\therefore$ ধারাটির অষ্টম পদ $= \frac{1}{1+x}\cdot(1+x)^{8-1}$

$= \frac{1}{1+x}\cdot(1+x)^7$

$= (1+x)^6$

এখন, $(1+x)^6$ কে দ্বিপদী উপপাদ্যের সাহায্যে বিস্তৃতি করে পাই,

$(1+x)^6 = 1 + {}^6c_1.1.x + {}^6c_2.1.x^2 + {}^6c_3.1.x^3 + {}^6c_4.1.x^4 + {}^6c_5.1.x^5 + {}^6c_6.1.x^6$

$= 1 + {}^6c_1x + {}^6c_2x^2 + {}^6c_3x^3 + {}^6c_4x^4 + {}^6c_5x^5 + x^6$

এখানে, মধ্যপদ $= \left(\frac{n}{2}+1\right) = \left(\frac{6}{2}+1\right) = 4$র্থ পদ

$\therefore$ ৪র্থ পদ বিস্তৃতির মধ্যপদ এবং এটি $T_4 = T_{3+1} = {}^6c_3.1.x^3 = {}^6c_3x^3$

শর্তানুসারে, ${}^6c_3x^3 = 540$

বা, $20x^3 = 540$

বা, $x^3 = \frac{540}{20}$

বা, $x^3 = 27$

বা, $x^3 = (3)^3$

$\therefore x = 3$

সুতরাং x এর মান 3

প্রশ্ন নং-২: $\frac{1}{3x-1} + \frac{1}{(3x-1)^2} + \frac{1}{(3x-1)^3} + \ldots\ldots$ একটি ধারা

এবং $\left(x - \frac{k}{x^2}\right)^8$ একটি দ্বিপদী রাশি।

(ক) $x = 1$ হলে, ধারাটি নির্ণয় করে প্রাপ্ত ধারাটির সাধারণ অনুপাত বের কর।

(খ) "x" এর উপর যে শর্ত আরোপ করলে ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে তা নির্ণয় করে উক্ত শর্তসাপেক্ষে ধারাটির সমষ্টি নির্ণয় কর।

(গ) রাশিটির বিস্তৃতিতে x^2 এর সহগ 252 হলে 'k' এর মান নির্ণয় কর। [বরিশাল বোর্ড-২০১৬]

(ক)-এর উত্তর:

ধারাটি দেওয়া আছে,

$\frac{1}{3x-1} + \frac{1}{(3x-1)^2} + \frac{1}{(3x-1)^3} + \ldots\ldots$

এখন, $x = 1$ হলে ধারাটি হবে,

$\frac{1}{3.1-1} + \frac{1}{(3.1-1)^2} + \frac{1}{(3.1-1)^3} + \ldots\ldots$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{(2)^2} + \frac{1}{(2)^3} + \ldots\ldots$

প্রাপ্ত ধারাটির সাধারণ অনুপাত–

$r = \frac{\frac{1}{2^2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}\times 2 = \frac{1}{2}$

$\therefore r = \frac{1}{2}$

Jewel's Care Collected

(খ)-এর উত্তর:

$\frac{1}{3x-1} + \frac{1}{(3x-1)^2} + \frac{1}{(3x-1)^3} + \ldots\ldots$

ধারাটির প্রথম পদ, $a = \frac{1}{3x-1}$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{1}{(3x-1)^2} \div \frac{1}{3x-1}$

$= \frac{1}{(3x-1)^2} \times \frac{3x-1}{1} = \frac{1}{3x-1}$

এখন প্রদত্ত ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে, যদি এবং কেবল যদি $|r|<1$ হয়

অর্থাৎ, $-1<r<1$ হয়

বা, $-1 < \frac{1}{3x-1} < 1$ হয় $[r = \frac{1}{3x-1}$ বসিয়ে$]$

বা, $-1 > 3x-1 > 1$ [বিপরীতকরণ করে]

বা, $-1+1 > 3x-1+1 > 1+1$ [উভয়পক্ষে 1 যোগ করে]

বা, $0 > x > \frac{2}{3}$ [উভয়পক্ষকে 3 দ্বারা ভাগ করে]

$\therefore$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি $x<0$ অথবা $x > \frac{2}{3}$ হয়।

$\therefore$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{3x-1}}{1-\frac{1}{3x-1}}$

$= \frac{\frac{1}{3x-1}}{\frac{3x-1-1}{3x-1}} = \frac{1}{3x-2}$

$\therefore$ নির্ণেয় শর্তটি হবে $x<0$ অথবা $x>\frac{2}{3}$

অসীমতক সমষ্টি হবে $= \frac{1}{3x-2}$

(গ)-এর উত্তর:

দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে $\left(x-\frac{K}{x^2}\right)^8$ এর বিস্তৃতি

$$\left(x-\frac{k}{x^2}\right)^8 = x^8 + 8_{C_1}x^{8-1}\left(-\frac{k}{x^2}\right) + 8_{C_2}x^{8-2}\left(-\frac{k}{x^2}\right)^2 + \ldots\ldots$$

$$= x^8 + 8_{C_1}x^7\left(-\frac{k}{x^2}\right) + 8_{C_2}x^6.\frac{k^2}{x^4} + \ldots\ldots$$

$$\therefore \left(x-\frac{k}{x^2}\right)^8 = x^8 - 8x^5k + 28x^2k^2 + \ldots\ldots$$

এখানে, বিস্তৃতিতে x^2 এর সহগ $= 28k^2$

প্রশ্নানুসারে,

$28k^2 = 252$

বা, $k^2 = \frac{252}{28}$

বা, $k^2 = 9$

বা, $k = \sqrt{9}$

$\therefore k = 3$

সুতরাং, k এর মান 3.

প্রশ্ন নং-৩ $a = \frac{1}{4x+1} = r, 5\cdot\dot{0}2\dot{3}$

(ক) একটি অনুক্রম ও একটি অসীম ধারার উদাহরণ দাও।

(খ) আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশটিকে অনন্ত গুণোত্তর ধারার মাধ্যমে মূলদীয় ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

(গ) অসীম গুণোত্তর ধারাটি গঠন কর। x এর উপর প্রযোজ্য শর্তসহ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি নির্ণয় কর।

[সিলেট বোর্ড- ২০১৫]

(ক) এর সমাধান:

অনুক্রম: $1, 4, 9, 16, 25, \ldots\ldots\ldots, n^2, \ldots\ldots\ldots\ldots$

অসীম ধারা: $\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \ldots\ldots\ldots\ldots$

(খ) এর সমাধান:

আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশটি হলো, $5.0\dot{2}\dot{3}$

$= 5.0232323232323 \ldots\ldots\ldots$

$= 5 + (.023 + .00023 + .0000023 + \ldots\ldots\ldots)$

এখানে বন্ধনীর অভ্যন্তরের ধারাটি একটি অসীমগুণোত্তর ধারা।

ধারাটির ১ম পদ, $a = .023$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{.00023}{.023}$

$= .01$

$\therefore 5.0\dot{2}\dot{3} = 5 + \frac{a}{1-r}$

$= 5 + \frac{.023}{1-0.01}$

$= 5 + \frac{.023}{0.99}$

$= 5 + \frac{.023 \times 1000}{0.99 \times 1000}$

$= 5 + \frac{23}{990}$

$= \frac{4950+23}{990}$

$= 5\frac{23}{990}$ **(Ans:)**

(গ) এর সমাধান:

এখানে, ১ম পদ $a = \frac{1}{4x+1}$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{1}{4x+1}$

$\therefore$ ধারাটি $= a + ar + ar^2 + \ldots\ldots\ldots$

$= \frac{1}{4x+1} + \frac{1}{(4x+1)^2} + \frac{1}{(4x+1)^3} + \ldots\ldots\ldots$

$\therefore$ গুণোত্তর ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি

$|r| < 1$ হয়

অর্থাৎ, $-1 < r < 1$

বা, $-1 < \frac{1}{4x+1} < 1$

এখন, $-1 < \frac{1}{4x+1}$ হলে,

বা, $(4x+1) < -1$

বা, $4x + 1 - 1 < -1 - 1$

বা, $4x < -2$

বা, $x < -\frac{1}{2}$

আবার,

$1 > \frac{1}{4x+1}$

বা, $4x + 1 > 1$

বা, $4x + 1 - 1 > 1 - 1$

বা, $4x > 0$

$\therefore x > 0$

সুতরাং অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি $x < -\frac{1}{2}$ এবং $x > 0$ হয়

$\therefore$ প্রদত্ত গুণোত্তর ধারার সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1-r}$

$$= \frac{\frac{1}{4x+1}}{1-\frac{1}{4x+1}}$$

$$= \frac{1}{4x+1} \times \frac{4x+1}{4x} = \frac{1}{4x}$$ **(Ans:)**

প্রশ্ন নং-৪ $1 + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+y)^3} + \ldots\ldots\ldots\ldots$

(ক) উদাহরণসহ সমান্তর ধারার সংজ্ঞা দাও।

(খ) $y = 2$ হলে, ধারাটির ১ম 10 পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

(গ) y এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে এবং সমষ্টি নির্ণয় কর।

[দিনাজপুর বোর্ড- ২০১৫]

(ক) এর সমাধান:

সমান্তর ধারা: কোনো ধারার যে কোন পদ ও এর পূর্ববর্তী পদের পার্থক্য সব সময় সমান হলে, সেই ধারাটিকে সমান্তর ধারা বলে। যেমন: $2 + 4 + 6 + 8 + \ldots\ldots + (2r)$ একটি সমান্তর ধারা। কারণ এর যে কোন পদ ও পূর্ববর্তী পদের পার্থক্য সবসময় 2।

(খ) এর সমাধান:

$y = 1$ হলে ধারাটি হয়

$1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{(1+2)^2} + \frac{1}{(1+2)^2} + \ldots\ldots = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots\ldots\ldots$

ধারাটির ১ম পদ, $a = 1$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{\frac{1}{3}}{1} = \frac{1}{3}$

$\therefore$ ধারাটির ১ম ১০পদের সমষ্টি $= S_{10} = a\frac{1-r^n}{1-r}$

$$= 1\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{10}}{1-\frac{1}{3}}$$ **(Ans.)**

উচ্চতর গণিত : সপ্তম অধ্যায় (অসীম ধারা)

৯ (গ) এর সমাধান:

গুণোত্তর ধারার অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি $|r| < 1$ হয়

প্রদত্ত ধারায় সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{1}{1+y}$

$\therefore$ প্রদত্ত ধারার অসীমতক সমষ্টি থাকার শর্ত $|r| < 1$

বা, $\left|\frac{1}{1+y}\right| < 1$

বা, $-1 < \frac{1}{1+y} < 1$

বা, $-1 > 1 + y$, $1+y > 1$

বা, $y < -2$ বা, $y > 0$

সুতরাং $y < -2$ বা $y > 0$ হলে, প্রদত্ত ধারার অসীমতক সমষ্টি থাকবে।

$\therefore$ অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1-r}$

$$= \frac{1}{1-\left(\frac{1}{1+y}\right)}$$

$$= \frac{1}{\frac{1+y-1}{1+y}}$$

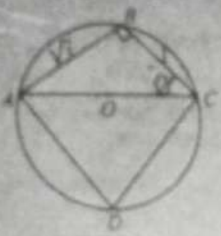
$$= \frac{1+y}{y}$$

Jewel's Care Life is for motto lesson

সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর

বিগত এসএসসি পরীক্ষার সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর

প্রশ্ন-১



O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে ABCD একটি অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজ।

(ক) θ এর বৃত্তীয় মান নির্ণয় কর।

(খ) ΔABC এর ক্ষেত্রে দেখাও যে, $\cos(B + C) = \cos B \cos C - \sin B \sin C$

(গ) ABCD যদি একটি বৃত্তাকার চাকা হয় এবং চাকাটি প্রতি সেকেন্ডে 10 বার আবর্তিত হয়, তাহলে চাকাটির পরিভ্রমণ ঘণ্টায় কত হবে? [সিলেট বোর্ড-২০২৪]

(ক)-এর উত্তর

উদ্দীপক থেকে, ΔABC-এ

$\therefore \tan \angle ACB = \dfrac{\text{বিপরীত বাহু}}{\text{সন্নিহিত বাহু}} = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{\sqrt{3}}{1}$

বা, $\tan\theta = \sqrt{3} = \tan 60^\circ$

$\therefore \theta = 60^\circ$

আমরা জানি, $1^\circ = \dfrac{\pi}{180}$ রেডিয়ান

$\therefore 60^\circ = \left(\dfrac{\pi}{180} \cdot 60\right)$ রেডিয়ান

$= \dfrac{\pi}{3}$ রেডিয়ান

$\therefore$ θ এর বৃত্তীয় মান $\dfrac{\pi}{3}$ রেডিয়ান

(খ)-এর উত্তর

উদ্দীপক থেকে, ΔABC এর ক্ষেত্রে,

$\angle B = 90^\circ$ এবং 'ক' থেকে পাই, $\angle C = \theta = 60^\circ$

দেখাতে হবে যে, $\cos(B + C) = \cos B\cos C - \sin B\sin C$

বামপক্ষ, $= \cos(B + C)$

$= \cos(90^\circ + 60^\circ)$

$= -\sin 60^\circ$

$= -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

ডানপক্ষ $= \cos B \cos C - \sin B \sin C$

$= \cos 90^\circ \cos 60^\circ - \sin 90^\circ \sin 60^\circ$

$= 0 - 1 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$= -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \cos(B + C) = \cos B \cos C - \sin B \sin C$ [দেখানো হলো]

(গ)-এর উত্তর

উদ্দীপক থেকে, ΔABC-এর $\angle B = 90^\circ$

পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে,

$AC^2 = AB^2 + BC^2 = (\sqrt{3})^2 + (1)^2 = 4$

$\therefore AC = \sqrt{4} = 2$

ABCD বৃত্তাকার চাকার ব্যাসার্ধ $= \dfrac{2}{2} = 1$ একক

চাকাটি 1 বার ঘুরে অতিক্রম করে $= 2\pi r$

$= (2 \times 3.1416 \times 1)$ একক

$= 6.283$ একক দূরত্ব

আমরা জানি, 1 ঘণ্টা = 3600 সেকেন্ড

চাকাটি 1 সেকেন্ডে আবর্তিত হয় 10 বার

$\therefore$ 3600 সেকেন্ডে আবর্তিত হয় (10×3600) বার = 36,000 বার

চাকাটি 1 বার ঘুরে অতিক্রম করে 6.283 একক দূরত্ব

$\therefore$ চাকাটি 36000 বার ঘুরে অতিক্রম করবে (6.283×36000) একক দূরত্ব

$= 226188$ একক দূরত্ব

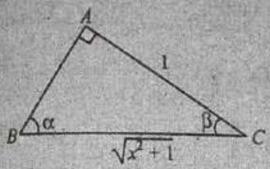
$= 266.188$ কিলো একক দূরত্ব

সুতরাং, চাকাটির পরিভ্রমণ ঘণ্টায় 226.188 কিলো একক।

সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর

বিগত এসএসসি পরীক্ষার সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর

প্রশ্ন নং-১:



(ক) $\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+\beta)$ এর মান কত?

(খ) উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর যে, $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=1-2\sin\alpha.\cos\alpha$.

(গ) $x^2+\frac{1}{x^2}=2$ হলে, α এর মান কত? [ঢাকা বোর্ড-২০১৬]

(ক)-এর উত্তর:

উদ্দীপকের চিত্রে,

ΔABC-এ $\angle A=90^\circ$

$\angle B=\alpha$

$\angle C=\beta$

এখানে,

$\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$

বা, $90^\circ+\alpha+\beta=180^\circ$

বা, $\alpha+\beta=90^\circ$

প্রদত্ত রাশি $=\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+\beta)$

$=\sin 90^\circ+\cos 90^\circ$

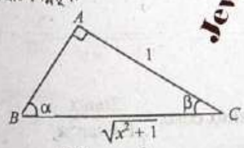
$=1+0$

$=1$

∴ নির্ণেয় মান 1

(খ)-এর উত্তর:

উদ্দীপকের চিত্রটি নিম্নরূপ:



চিত্র থেকে, $\sin\alpha=\frac{AC}{BC}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

এবং $\cos\alpha=\frac{AB}{BC}$

$=\frac{\sqrt{BC^2-AC^2}}{BC}$ [∵ Δ ABC-এ∠A = 90° ∴ $BC^2=AB^2+AC^2$]

$=\frac{\sqrt{(\sqrt{x^2+1})^2-(1)^2}}{\sqrt{x^2+1}}$

$=\frac{\sqrt{x^2+1-1}}{\sqrt{x^2+1}}$

$=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

বামপক্ষ $=(\sin\alpha-\cos\alpha)^2$

$=\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)^2$ [মান বসিয়ে]

$=\left(\frac{1-x}{\sqrt{x^2+1}}\right)^2$

$=\frac{(1-x)^2}{x^2+1}$

$=\frac{1-2x+x^2}{1+x^2}$

$=\frac{1+x^2-2x}{1+x^2}$

$=\frac{1+x^2}{1+x^2}-\frac{2x}{1+x^2}$

$=1-2.\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^2}}$

$=1-2.\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)}}.\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$=1-2\sin\alpha.\cos\alpha$

∴ $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=1-2\sin\alpha.\cos\alpha$ [প্রমাণিত]

(গ)-এর উত্তর:

দেওয়া আছে, $x^2+\frac{1}{x^2}=2$

বা, $x^4+1=2x^2$

বা, $x^4-2x^2+1=0$

বা, $(x^2-1)^2=0$

বা, $x^2-1=0$

বা, $x=\pm1$

এখানে, $x=-1$ গ্রহণযোগ্য নয়

∴ $x=1$

'খ' এর চিত্র থেকে,

$\sin\alpha=\frac{AB}{BC}$

বা, $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

বা, $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{1^2+1}}$

বা, $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$

বা, $\sin\alpha=\sin 45^\circ$

বা, $\alpha=45^\circ$

∴ নির্ণেয় মান $\alpha=45^\circ$

প্রশ্ন নং-২: $P=a\cos\theta$ এবং $Q=b\sin\theta$.

(ক) $\frac{P^2}{a^2}+\frac{Q^2}{b^2}$ এর মান নির্ণয় কর।

(খ) $P-Q=c$ হলে, প্রমাণ কর যে, $a\sin\theta+b\cos\theta=\pm\sqrt{a^2+b^2-c^2}$.

(গ) $a^2=3, b^2=7$ এবং $Q^2+P^2=4$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\tan\theta=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

[যশোর বোর্ড-২০১৬]

(ক)-এর উত্তর:

দেওয়া আছে,

$P=a\cos\theta$ বা, $\frac{P}{a}=\cos\theta$ বা, $\frac{P^2}{a^2}=\cos^2\theta$

এবং $Q=b\sin\theta$ বা, $\frac{Q}{b}=\sin\theta$ বা, $\frac{Q^2}{b^2}=\sin^2\theta$

প্রদত্ত রাশি, $\frac{P^2}{a^2}+\frac{Q^2}{b^2}=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$

∴ নির্ণেয় মান 1

(খ)-এর উত্তর:

দেওয়া আছে, $P=a\cos\theta$ এবং $Q=b\sin\theta$

আবার, $P-Q=c$

∴ $a\cos\theta-b\sin\theta=c$

ধরি, $a\sin\theta+b\cos\theta=y$

এখন, $c^2+y^2=(a\cos\theta-b\sin\theta)^2+(a\sin\theta+b\cos\theta)^2$

Jewel's Care Life is for motto lesson

বা, $c^2 + y^2 = a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta - 2ab\sin\theta\cos\theta + a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta + 2ab\sin\theta\cos\theta$

বা, $c^2 + y^2 = a^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + b^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$

বা, $y^2 = a^2 + b^2 - c^2$

বা, $y = \pm\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$ [বর্গমূল করে]

$\therefore a\sin\theta + b\cos\theta = \pm\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$ [প্রমাণিত]

(গ)-এর উত্তর:

দেওয়া আছে,

$P = a\cos\theta$ এবং $Q = b\sin\theta$

$a^2 = 3, b^2 = 7$

এবং $Q^2 + P^2 = 4$

এখন, $Q^2 + P^2 = 4$

$b^2\sin^2\theta + a^2\cos^2\theta = 4$

$7\sin^2\theta + 3\cos^2\theta = 4$

$7\sin^2\theta + 3(1 - \sin^2\theta) = 4$

$7\sin^2\theta + 3 - 3\sin^2\theta = 4$

$4\sin^2\theta = 4 - 3$

$\sin^2\theta = \frac{1}{4}$

আবার, $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

$= 1 - \frac{1}{4}$

$= \frac{4-1}{4}$

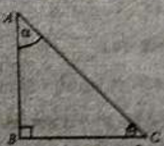
$= \frac{3}{4}$

$\therefore \tan^2\theta = \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$ $[\because \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}]$

$= \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$

$\therefore \tan\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

প্রশ্ন নং-৩:



(ক) $-700°$ এর অবস্থান কোন চতুর্ভাগে আছে, চিত্রসহ নির্ণয় কর।

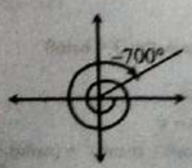
(খ) $\left(\frac{AC}{BC}\right)^2 + \left(\frac{AB}{BC}\right)^2 = \frac{5}{3}$ হলে θ এর মান নির্ণয় কর।

(গ) উদ্দীপকের আলোকে দেখাও যে, $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$

[চট্টগ্রাম বোর্ড-২০১৭]

(ক)-এর উত্তর:

$-700°$ একটি ঋণাত্মক কোণ। $-700°$ কোণটি উৎপন্ন করতে কোনো রশ্মিকে ঘড়ির কাঁটার দিকে একবার সম্পূর্ণ ঘুরে একই দিক আরও তিন সমকোণ এবং $70°$ ঘুরে প্রথম চতুর্ভাগে আসতে হয়েছে। সুতরাং $-700°$ কোণটি প্রথম চতুর্ভাগে অবস্থান করেছে।



(খ)-এর উত্তর:

উদ্দীপকের চিত্র থেকে পাই,

$\frac{AC}{BC} = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{ভূমি}} = \sec\theta$

এবং $\frac{AB}{BC} = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \tan\theta$

দেওয়া আছে,

$\left(\frac{AC}{BC}\right)^2 + \left(\frac{AB}{BC}\right)^2 = \frac{5}{3}$

বা, $\sec^2\theta + \tan^2\theta = \frac{5}{3}$

বা, $1 + \tan^2\theta + \tan^2\theta = \frac{5}{3}$ $[\because \sec^2\theta - \tan^2\theta = 1]$

বা, $2\tan^2\theta = \frac{5}{3} - 1$

বা, $2\tan^2\theta = \frac{2}{3}$

বা, $\tan^2\theta = \frac{1}{3}$

বা, $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\tan\theta = \tan\frac{\pi}{6}$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}$

$\therefore$ θ এর মান $\frac{\pi}{6}$

(গ)-এর উত্তর:

'খ' থেকে পাই, $\theta = \frac{\pi}{6} = \frac{180°}{6} = 30°$

এখন, উদ্দীপকের চিত্র থেকে, $\triangle ABC$-এ

$B + \alpha + \theta = 180°$

$90° + \alpha + 30° = 180°$

$\alpha = 180° - 120°$

$\alpha = 60°$

দেখাতে হবে যে, $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$

এখন, $\sin 2\alpha = \sin 2 \times 60°$

$= \sin 120°$

$= \sin(90° + 30°)$

$= \cos 30°$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}$

আবার, $2\sin\alpha\cos\alpha = 2\sin 60°\cos 60° = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

এবং $\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \frac{2\tan 60°}{1+(\tan 60°)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{1+(\sqrt{3})^2} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$

প্রশ্ন নং-৪:

(ক) $\sin(\theta + \alpha)$ এর মান নির্ণয় কর।

(খ) উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর যে, $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + 2$ ...

(গ) $x + \sqrt{x^2+1} = \sqrt{3}$ হলে, θ এর মান নির্ণয় কর। ...

৯ (ক) এর সমাধান:

ΔABC একটি কোণ সমকোণ বলে, $\alpha + \theta = 180 - 90 = 90^\circ$

$\therefore \sin(\alpha + \theta) = \sin 90^\circ = 1$

৯ (খ) এর সমাধান:

উদ্দীপকে, ΔABC এ α কোণের সাপেক্ষে

ভূমি, $AC = 1$

অতিভুজ, $BC = \sqrt{x^2 + 1}$

লম্ব, $AB = \sqrt{(\text{অতিভুজ})^2 - (\text{ভূমি})^2}$

$= \sqrt{x^2 + 1 - 1^2} = x$

$\therefore \sin\alpha = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

$\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

এখন, $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha$

$= \dfrac{x^2}{x^2 + 1} + \dfrac{1}{x^2 + 1} + 2\sin\alpha\cos\alpha$

$= \dfrac{x^2 + 1}{x^2 + 1} + 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\therefore (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + 2\sin\alpha\cos\alpha$ **[দেখানো হলো]**

৯ (গ) এর সমাধান:

$x + \sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{3}$

বা, $\sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{3} - x$

বা, $x^2 + 1 = 3 - 2\sqrt{3}x + x^2$

বা, $2\sqrt{3}x = 3 - 1$

$\therefore x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

এখন, $\sin\theta = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

$\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{1}{3} + 1}}$

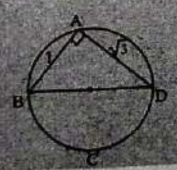
$= \dfrac{1}{\sqrt{\frac{4}{3}}}$

$= \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \sin\theta = \sin 60^\circ$

$\therefore \theta = 60^\circ$

প্রশ্ন নং- ৫ ।



এবং $P = \dfrac{\cot B + \operatorname{cosec} B - 1}{\cot B - \operatorname{cosec} B + 1}$; $Q = \dfrac{1 + \sin D}{\cos D}$

... বৃত্তটির ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

... $\cos(B - D) = \cos B \cos D + \sin B \sin D$

... $P = Q$ ।

৯ (ক) এর সমাধান:

আমরা জানি, অর্ধবৃত্তস্থ কোণ এক সমকোণ। যেহেতু BD ব্যাস সুতরাং $\angle BAD$ = এক সমকোণ অতএব BAD সমকোণী ত্রিভুজ হতে পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুযায়ী পাই,

$BD^2 = AB^2 + AD^2$

$\therefore BD = \sqrt{AB^2 + AD^2}$

$= \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}$

$= \sqrt{4}$

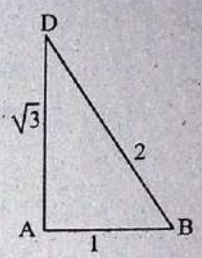
$= 2$

$\therefore ABCD$ বৃত্তটির ব্যাসার্ধ $= \dfrac{1}{2} \times BD$

$= \dfrac{1}{2} \times 2$

$= 1$ **[Ans.]**

৯ (খ) এর সমাধান:



ABD সমকোণী ত্রিভুজ হতে পাই,

$\tan\angle ABD = \dfrac{AD}{AB}$

$= \sqrt{3}$

$\therefore \angle B = \tan^{-1}(\sqrt{3})$

$= 60^\circ$

$\tan\angle BDA = \dfrac{AB}{AD}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore \angle D = \tan^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$= 30^\circ$

$L.H.S = \cos(B - D)$

$= \cos(60^\circ - 30^\circ)$

$= \cos 30^\circ$

$= \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$R.H.S. = \cos B.\cos D + \sin B.\sin D$

$= \cos 60^\circ.\cos 30^\circ + \sin 30^\circ.\sin 60^\circ$

$= \dfrac{1}{2}.\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}.\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

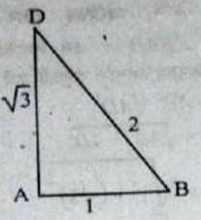
$= 2 \times \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

$= \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore L.H.S. = R.H.S.$ **[Proved]**

৯ (গ) এর সমাধান:

$P = \dfrac{\cot B + \operatorname{cosec} B - 1}{\cot B - \operatorname{cosec} B + 1}$



$= \dfrac{\dfrac{AB}{AD} + \dfrac{BD}{AD} - 1}{\dfrac{AB}{AD} - \dfrac{BD}{AD} + 1}$

$= \dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dfrac{2}{\sqrt{3}} - 1}{\dfrac{1}{\sqrt{3}} - \dfrac{2}{\sqrt{3}} + 1}$

$= \dfrac{\dfrac{1+2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}}{\dfrac{1-2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}}$

$= \dfrac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \times \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$

$= \dfrac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$

$= \dfrac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}-1}$

$= \sqrt{3}$

$Q = \dfrac{1+\sin D}{\cos D}$

$= \dfrac{1+\dfrac{1}{2}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

$= \dfrac{\dfrac{3}{2}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

$= \dfrac{3}{2} \times \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

$= \sqrt{3}$

$\therefore P = Q$ [Showed]

প্রশ্ন নং- ৬। যদি $\cot\theta + \operatorname{cosec}\theta = a$ হয়—

(ক) $\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta$ এর মান নির্ণয় কর।

(খ) প্রমাণ কর যে, $\cos\theta = \dfrac{a^2-1}{a^2+1}$

(গ) দেখাও যে, $(a^2+1)\cos\theta + (a^2+1)\sin\theta = (a+1)^2 - 2$ [চট্টগ্রাম বোর্ড ২০১৫]

(ক) এর সমাধান:

আমরা জানি, $\operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$

বা, $(\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta)(\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta) = 1$

বা, $\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta = \dfrac{1}{\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta}$

$= \dfrac{1}{a}$ [Ans.]

(খ) এর সমাধান:

দেওয়া আছে,

$\cot\theta + \operatorname{cosec}\theta = a$

বা, $\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} + \dfrac{1}{\sin\theta} = a$

বা, $\dfrac{\cos\theta + 1}{\sin\theta} = a$

বা, $\dfrac{(\cos\theta+1)^2}{\sin^2\theta} = a^2$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে।]

বা, $\dfrac{(\cos\theta+1)^2}{1-\cos^2\theta} = a^2$

বা, $\dfrac{(\cos\theta+1)(\cos\theta+1)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)} = a^2$

বা, $\dfrac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta} = a^2$

বা, $\dfrac{1+\cos\theta-1+\cos\theta}{1+\cos\theta+1-\cos\theta} = \dfrac{a^2-1}{a^2+1}$ [যোজন – বিয়োজন করে।]

বা, $\dfrac{2\cos\theta}{2} = \dfrac{a^2-1}{a^2+1}$

$\therefore \cos\theta = \dfrac{a^2-1}{a^2+1}$ [প্রমাণিত]

(গ) এর সমাধান:

'খ' হতে, $\cos\theta = \dfrac{a^2-1}{a^2+1}$

বা, $(a^2+1)\cos\theta = a^2 - 1$ ……… (1)

আবার, $\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta = a$

$\dfrac{1}{\sin\theta} + \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} = a$

$a\sin\theta = (1+\cos\theta)$

$\sin\theta = \dfrac{1}{a}(1+\cos\theta)$

$= \dfrac{1}{a}\left(1 + \dfrac{a^2-1}{a^2+1}\right)$

$= \dfrac{1}{a}\left(\dfrac{a^2+1+a^2-1}{a^2+1}\right)$

$= \dfrac{1}{a} \times \dfrac{2a^2}{a^2+1}$

$\therefore \sin\theta = \dfrac{2a}{a^2+1}$

বা, $(a^2+1)\sin\theta = 2a$ ……… (2)

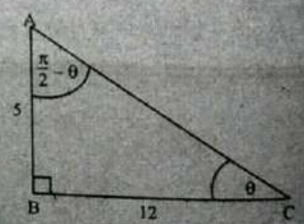
1 ও 2 যোগ করে,

$(a^2+1)\cos\theta + (a^2+1)\sin\theta = 2a + a^2 - 1$

বা, $(a^2+1)\cos\theta + (a^2+1)\sin\theta = (a^2+2a+1) - 2$

বা, $(a^2+1)\cos\theta + (a^2+1)\sin\theta = (a+1)^2 - 2$ [প্রমাণিত]

প্রশ্ন নং- ৭।



(ক) $2{\cdot}0071^C$ কে ডিগ্রীতে প্রকাশ কর।

(খ) সকল অনুপাতের মানকে ধনাত্মক বিবেচনায় নিয়ে উদ্দীপকের

$\dfrac{\sin(-\theta)+\cos(-\theta)}{\sec(-\theta)+\tan\theta}$ এর মান নির্ণয় কর।

(গ) নিচের চিত্র ব্যবহার করে A এর চিহ্নিত কোণের ত্রিকোণমিতিক

নির্ণয় কর।

৯.(ক) এর সমাধান

$D = \frac{180}{\pi} \times R$

$= \frac{180}{3.14} \times 2.0071$

$= 115.06^\circ$ [Ans.]

৯.(খ) এর সমাধান

$AB = 5, BC = 12$

ABC সমকোণী ত্রিভুজ হতে পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুযায়ী পাই,

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$AC = \sqrt{5^2 + 12^2}$

$= 13$

$\frac{\sin(-\theta) + \cos(-\theta)}{\sec(-\theta) + \tan\theta}$

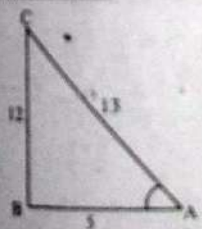
$= \frac{-\sin\theta + \cos\theta}{\sec\theta + \tan\theta}$

$= \frac{-\frac{AB}{AC} + \frac{BC}{AC}}{\frac{AC}{BC} + \frac{AB}{BC}}$

$= \frac{-\frac{5}{13} + \frac{12}{13}}{\frac{13}{12} + \frac{5}{12}}$

$= \frac{-5+12}{13} \times \frac{12}{13+5} = \frac{7 \times 12}{13 \times 18} = \frac{14}{39}$ [Ans.]

৯.(গ) এর সমাধান



এখানে, ভূমি, $AB = 5$

লম্ব, $BC = 12$

অতিভুজ, $AC = 13$

$\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{12}{13}$

$\operatorname{cosec} A = \frac{AC}{BC} = \frac{13}{12}$

$\cos A = \frac{5}{13}$

$\sec A = \frac{13}{5}$

$\tan A = \frac{12}{5}$

$\cot A = \frac{5}{12}$

অনুশীলনীর সৃজনশীল প্রশ্ন ও উত্তর

৮। $\sec\theta - \tan\theta = p$ একটি গাণিতিক বাক্য।

(ক) $\sec\theta + \tan\theta$ এর মান নির্ণয় কর।

(খ) প্রমাণ কর যে, $\sin\theta = \frac{1-p^2}{1+p^2}$

(গ) দেখাও যে, $(1+p^2)\cos\theta + (1+p^2)\sin\theta + 2p^2 = (1+p)^2$

[বগুড়া জিলা স্কুল]

(ক) এর সমাধান

দেওয়া আছে, $\sec\theta - \tan\theta = p$

বা, $(\sec\theta - \tan\theta)(\sec\theta + \tan\theta) = p(\sec\theta + \tan\theta)$

বা, $\sec^2\theta - \tan^2\theta = p(\sec\theta + \tan\theta)$

বা, $p(\sec\theta + \tan\theta) = 1$ $[\because \sec^2\theta - \tan^2\theta]$

$\therefore \sec\theta + \tan\theta = \frac{1}{p}$

(খ) এর সমাধান

'ক' হতে পাই, $\sec\theta + \tan\theta = \frac{1}{p}$

বা, $\frac{1}{\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{p}$

বা, $\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{p}$

বা, $\left(\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2 = \frac{1}{p^2}$ [বর্গ করে]

বা, $\frac{(1+\sin\theta)^2}{1-\sin^2\theta} = \frac{1}{p^2}$

বা, $\frac{(1+\sin\theta)(1+\sin\theta)}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)} = \frac{1}{p^2}$

বা, $\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta} = \frac{1}{p^2}$

বা, $\frac{1+\sin\theta-1+\sin\theta}{1+\sin\theta+1-\sin\theta} = \frac{1-p^2}{1+p^2}$ [বিয়োজন-যোজন করে]

বা, $\frac{2\sin\theta}{2} = \frac{1-p^2}{1+p^2}$

$\therefore \sin\theta = \frac{1-p^2}{1+p^2}$ [প্রমাণিত]

(গ) এর সমাধান

'খ' হতে পাই, $\sin\theta = \frac{1-p^2}{1+p^2}$

বা, $(1+p^2)\sin\theta = 1-p^2$ .... (i)

দেওয়া আছে, $\sec\theta - \tan\theta = p$

বা, $\frac{1}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = p$

বা, $\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta} = p$

বা, $\cos\theta = \frac{1}{p}(1-\sin\theta)$

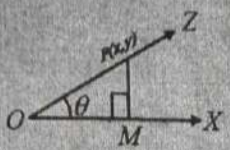
বা, $\cos\theta = \frac{1}{p}\left(1 - \frac{1-p^2}{1+p^2}\right)$ ['খ' হতে]

বা, $\cos\theta = \frac{1}{p} \times \frac{1+p^2-1+p^2}{1+p^2}$

সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর

বিগত এসএসসি পরীক্ষার সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর

প্রশ্ন নং-১



(ক) $\sec\theta$-এর মান নির্ণয় কর।
(খ) $x = 1, y = \sqrt{3}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\sin^3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$.
(গ) $\sqrt{x^2+y^2} + x = \sqrt{3}\, y$ হলে, θ এর মান নির্ণয় কর। [রাজশাহী বোর্ড-২০১৬]

(ক)-এর উত্তর:
উদ্দীপকের চিত্র থেকে $P(x,y)$ হলে,
ভূমি $= OM = x$ এবং লম্ব $= PM = y$
এখন, ΔOPM থেকে
বা, $OP^2 = PM^2 + OM^2$
$OP^2 = y^2 + x^2$
$\therefore OP = \sqrt{x^2+y^2}$
$\therefore \sec\theta = \dfrac{OP}{OM} = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}$

(খ)-এর উত্তর:
উদ্দীপকের চিত্রে ভূমি, $OM = x$
লম্ব, $PM = y$
অতিভুজ, $OP = \sqrt{x^2+y^2}$
এখন, $\sin\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$
$= \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{1+(\sqrt{3})^2}}$ $[\because x = 1, y = \sqrt{3}]$
$= \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
$= \sin 60^\circ$
$\therefore \theta = 60^\circ$

প্রমাণ করতে হবে যে, $\sin^3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$
বামপক্ষ $= \sin^3\theta$
$= \sin 3 \times 60^\circ$
$= \sin 180^\circ$
$= \sin(90^\circ + 90^\circ)$
$= \cos 90^\circ$
$= 0$

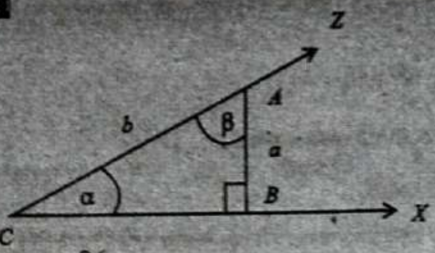
ডানপক্ষ $= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$
$= 3\sin 60^\circ - 4(\sin 60^\circ)^3$
$= 3.\dfrac{\sqrt{3}}{2} - 4.\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$
$= \dfrac{3\sqrt{3}}{2} - \dfrac{12\sqrt{3}}{8}$
$= \dfrac{12\sqrt{3} - 12\sqrt{3}}{8}$
$= 0$
$\therefore \sin^3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$ [প্রমাণিত]

(গ)-এর উত্তর:
দেওয়া আছে,
$\sqrt{x^2+y^2} + x = \sqrt{3}\, y$
বা, $\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{y} + \dfrac{x}{y} = \sqrt{3}$ [y দ্বারা ভাগ করে]
বা, $\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta = \sqrt{3}$ [উদ্দীপকে চিত্র থেকে, $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{OP}{PM} = \dfrac{\sqrt{x^2 ...}}{y}$
এবং $\cot\theta = \dfrac{OM}{PM} = ...$
বা, $\dfrac{1}{\sin\theta} + \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} = \sqrt{3}$
বা, $1 + \cos\theta = \sqrt{3}\sin\theta$
বা, $1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta = 3\sin^2\theta$ [বর্গ করে]
বা, $1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta = 3(1 - \cos^2\theta)$
বা, $1 - 3 + 2\cos\theta + \cos^2\theta + 3\cos^2\theta = 0$
বা, $4\cos^2\theta + 2\cos\theta - 2 = 0$
বা, $2(2\cos^2\theta + \cos\theta - 1) = 0$
বা, $2\cos^2\theta + \cos\theta - 1 = 0$
বা, $2\cos^2\theta + 2\cos\theta - \cos\theta - 1 = 0$
বা, $2\cos\theta(\cos\theta + 1) - 1(\cos\theta + 1) = 0$
বা, $(\cos\theta + 1)(2\cos\theta - 1) = 0$

হয়, $\cos\theta = -1$	অথবা, $2\cos\theta - 1 = 0$
বা, $\cos\theta = \cos\pi$	বা, $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$
বা, $\theta = \pi$	বা, $\cos\theta = \cos\dfrac{\pi}{3}$
	বা, $\theta = \dfrac{\pi}{3}$

কিন্তু উদ্দীপক অনুযায়ী, $\theta = \pi$ গ্রহণযোগ্য নয়। কারণ সূক্ষ্মকোণ।
$\therefore$ θ এর মান $\dfrac{\pi}{3}$

প্রশ্ন নং-২



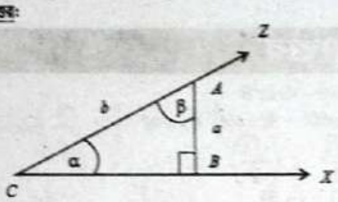
(ক) secα-এর মান নির্ণয় কর।

(খ) $a = 1$ এবং $b = 2$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\cos 3\beta = 4\cos^3\beta - 3\cos\beta$

(গ) $a + \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{2}\,b$ হলে, β এর মান নির্ণয় কর।

[কুমিল্লা বোর্ড-২০১৬]

(ক)-এর উত্তর:



চিত্র থেকে, ΔABC-এ

$AB^2 + BC^2 = AC^2$ [পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে]

বা, $BC^2 = AC^2 - AB^2$

বা, $BC^2 = b^2 - a^2$ [$\because AB = a$ এবং $AC = b$]

$\therefore BC = \sqrt{b^2 - a^2}$

এখন, ΔABC-এ

$\sec\alpha = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{ভূমি}} = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{\sqrt{b^2 - a^2}}$

$\therefore \sec\alpha = \frac{b}{\sqrt{b^2 - a^2}}$

(খ)-এর উত্তর:

'ক' এর চিত্র থেকে

$\cos\beta = \frac{a}{b}$

বা, $\cos\beta = \frac{1}{2}$ [$\because a = 1$ এবং $b = 2$]

বা, $\cos\beta = \cos\frac{\pi}{3}$

$\therefore \beta = \frac{\pi}{3}$

প্রমাণ করতে হবে যে, $\cos^3\beta = 4\cos^2\beta - 3\cos\beta$

বামপক্ষ $= \cos 3\beta$

$= \cos 3.\frac{\pi}{3}$

$= \cos\pi$

$= \cos 180°$

$= \cos(90° + 90°)$

$= -\sin 90$

$= -1$

ডানপক্ষ $= 4\cos^3\beta - 3\cos\beta$

$= 4(\cos\beta)^3 - 3\cos\beta$

$= 4\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)^3 - 3\cos\frac{\pi}{3}$

$= 4\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3\frac{1}{2}$ [$\because \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$]

$= \frac{4}{8} - \frac{3}{2}$

$= \frac{1}{2} - \frac{3}{2}$

$= \frac{-2}{2}$

$= -1$

$\therefore \cos^3\beta = 4\cos^2\beta - 3\cos\beta$ [প্রমাণিত]

(গ)-এর উত্তর:

দেওয়া আছে,

$a + \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{2}b$

বা, $\frac{a}{b} + \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b} = \frac{\sqrt{2}b}{b}$ [উভয় পক্ষকে b দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\cos\beta + \sin\beta = \sqrt{2}$ ['ক' এর চিত্র থেকে $\because BC = \sqrt{b^2 - a^2}$

$\therefore \cos\beta = \frac{a}{b}$ এবং $\sin\beta = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}$]

বা, $\cos\beta + \sin\beta = \sqrt{2}$

বা, $\sin\beta = \sqrt{2} - \cos\beta$

বা, $\sin^2\beta = (\sqrt{2} - \cos\beta)^2$ [বর্গ করে]

বা, $1 - \cos^2\beta = 2 - 2\sqrt{2}\cos\beta + \cos^2\beta$

বা, $\cos^2\beta + \cos^2\beta - 2\sqrt{2}\cos\beta + 2 - 1 = 0$

বা, $2\cos^2\beta - 2\sqrt{2}\cos\beta + 1 = 0$

বা, $(\sqrt{2}\cos\beta - 1)^2 = 0$

বা, $\sqrt{2}\cos\beta - 1 = 0$

বা, $\sqrt{2}\cos\beta = 1$

$\cos\beta = \cos\frac{\pi}{4}$

$\therefore \beta = \frac{\pi}{4}$

$\therefore \beta$ এর মান $\frac{\pi}{4}$

প্রশ্ন নং-৩। মনে কর, $P = \frac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1}$ এবং $Q = \sec\theta + \tan\theta$.

(ক) $\tan 10x = \cot 5x$ হলে

(খ) দেখাও যে $P = Q$

(গ) যদি $Q = \sqrt{3}$ এবং $0 < \theta < 2\pi$ হয়, তবে θ এর মান নির্ণয় কর।

[বরিশাল বোর্ড-২০১৬]

(ক)-এর উত্তর:

দেওয়া আছে,

$\tan 10x = \cot 5x$

বা, $\frac{\sin 10x}{\cos 10x} = \frac{\cos 5x}{\sin 5x}$

বা, $\cos 10x \cos 5x = \sin 10x \sin 5x$

বা, $\cos 10x \cos 5x - \sin 10x \sin 5x = 0$

বা, $\cos(10x + 5x) = 0$

বা, $\cos 15x = \cos 90°$

বা, $15x = 90°$

$\therefore x = 6°$

(খ)-এর উত্তর:
উদ্দীপক হতে,
মনে করি, $P=\dfrac{\sin\theta-\cos\theta+1}{\sin\theta+\cos\theta-1}$
এবং $Q=\sec\theta+\tan\theta$
দেখাতে হবে, $P=Q$

এখন, $\dfrac{\sin\theta-\cos\theta+1}{\sin\theta+\cos\theta-1}=\dfrac{\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}-\dfrac{\cos\theta}{\cos\theta}+\dfrac{1}{\cos\theta}}{\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\cos\theta}-\dfrac{1}{\cos\theta}}$

$=\dfrac{\tan\theta-1+\sec\theta}{\tan\theta+1-\sec\theta}$

$=\dfrac{\tan\theta+\sec\theta-1}{\tan\theta-\sec\theta+1}$

$=\dfrac{\tan\theta+\sec\theta-(\sec^2\theta-\tan^2\theta)}{\tan\theta-\sec\theta+1}$

$=\dfrac{(\sec\theta+\tan\theta)-(\sec\theta+\tan\theta)(\sec-\tan\theta)}{(\tan\theta-\sec\theta+1)}$

$=\dfrac{(\sec\theta+\tan\theta)(\tan\theta-\sec\theta+1)}{(\tan\theta-\sec\theta+1)}$

$=(\sec\theta+\tan\theta)$

$\therefore \dfrac{\sin\theta-\cos\theta+1}{\sin\theta+\cos\theta-1}=\sec\theta+\tan\theta$

$\therefore P=Q$ [দেখানো হলো]

(গ)-এর উত্তর:
দেওয়া আছে,

$Q=\sqrt{3}$

বা, $\sec\theta+\tan\theta=\sqrt{3}$ [$\because Q=\sec\theta+\tan\theta$]

বা, $\dfrac{1}{\cos\theta}+\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\sqrt{3}$

বা, $\dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}=\sqrt{3}$

বা, $(1+\sin\theta)^2=(\sqrt{3}\cos\theta)^2$

বা, $1+2\sin\theta+\sin^2\theta=3\cos^2\theta$

বা, $1+2\sin\theta+\sin^2\theta=3(1-\sin^2\theta)$

বা, $2\sin\theta+\sin^2\theta+3\sin^2\theta=3-1$

বা, $4\sin^2\theta+2\sin\theta=2$

বা, $2\sin^2\theta+\sin\theta-1=0$

বা, $2\sin^2\theta+2\sin\theta-\sin\theta-1=0$

বা, $2\sin\theta(\sin\theta+1)-1(\sin\theta+1)=0$

বা, $(2\sin\theta-1)(\sin\theta+1)=0$

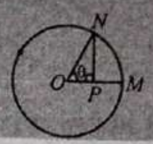
হয়,
$2\sin\theta-1=0$
বা, $\sin\theta=\dfrac{1}{2}$
বা, $\sin\theta=\sin\dfrac{\pi}{6}$
$\therefore \theta=\dfrac{\pi}{6}$

অথবা,
$\sin\theta+1=0$
বা, $\sin\theta=-1$
বা, $\sin\theta=\sin\dfrac{3\pi}{2}$
$\therefore \theta=\dfrac{3\pi}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $\theta=\dfrac{\pi}{6}$

অনুশীলনী-৮.৩ (সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর)

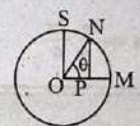
প্রশ্ন নং-৪ ।



চিত্রে O বৃত্তটির কেন্দ্র এবং $OM=$ চাপ MN
(ক) θ কে ডিগ্রিতে প্রকাশ কর।
(খ) প্রমাণ কর যে, θ একটি ধ্রুব কোণ।
(গ) θ এর কোন মানের জন্য $\dfrac{PN}{ON}+\dfrac{OP}{ON}=\sqrt{2}$ হবে, যেখানে $0<\theta<2\pi$ তা নির্ণয় কর। [দিনাজপুর বোর্ড-২০১৬]

(ক)-এর উত্তর:
যেহেতু, O কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধ OM = চাপ MN
আমরা জানি, বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান চাপ বৃত্তের। 1 কেন্দ্রে রেডিয়ান কোণ উৎপন্ন করে।
$\therefore$ কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ $\theta=1^c$
$\therefore$ ডিগ্রিতে প্রকাশ করলে, $\theta=\left(\dfrac{180}{\pi}\right)^\circ=57.296^\circ$

(খ)-এর উত্তর:



O কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তে, $\angle MON=\theta$ একটি রেডিয়ান কোণ প্রমাণ করতে হবে যে, θ একটি ধ্রুবকোণ।
অঙ্কন: OM এর উপর OS লম্ব আঁকি।
প্রমাণ: OS লম্ব বৃত্তের পরিধিকে S বিন্দুতে ছেদ করে।
তাহলে চাপ SM = পরিধির এক চতুর্থাংশ
$=\dfrac{1}{4}\times 2\pi r=\dfrac{\pi r}{2}$
এবং চাপ, MN = ব্যাসার্ধ OM = r [$\angle MON$ = এক রেডিয়ান]
আবার, আমরা জানি, বৃত্তের কোনো চাপের উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ ঐ বৃত্তচাপের সমানুপাতিক
$\therefore \dfrac{\angle MON}{\angle SOM}=\dfrac{\text{চাপ } MN}{\text{চাপ } SM}$

বা, $\angle MON=\dfrac{\text{চাপ } MN}{\text{চাপ } SM}\times\angle SOM$

বা, $\theta=\dfrac{r}{\dfrac{\pi r}{2}}\times$ এক সমকোণ [$\because$ OM ব্যাসার্ধের উপর OS লম্ব]

$\therefore \theta=\dfrac{2}{\pi}\times$ এক সমকোণ

যেহেতু, সমকোণ ও π ধ্রুবক সেহেতু θ কোণ একটি ধ্রুবক কোণ।

(গ)-এর উত্তর:
প্রদত্ত চিত্রানুসারে,
$\dfrac{PN}{ON}=\sin\theta$
$\dfrac{OP}{ON}=\cos\theta$
আবার, $\dfrac{PN}{ON}+\dfrac{OP}{ON}=\sqrt{2}$
বা, $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}$
বা, $\sin\theta=\sqrt{2}-\cos\theta$
বা, $\sin^2\theta=2-2\sqrt{2}\cos\theta+\cos^2\theta$
বা, $1-\cos^2\theta=2-2\sqrt{2}\cos\theta+\cos^2\theta$
বা, $2\cos^2\theta-2\sqrt{2}\cos\theta+1=0$
বা, $(\sqrt{2}\cos\theta-1)^2=0$

বা, $\sqrt{2}\cos\theta - 1 = 0$

বা, $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

বা, $\cos\theta = \cos\frac{\pi}{4}$

যেহেতু, $\cos\theta$ এর মান ধনাত্মক এবং $0 < \theta < 2\pi$

যেহেতু, θ এর অবস্থান হবে প্রথম চতুর্ভাগে অথবা, চতুর্থ চতুর্ভাগে θ এর অবস্থান প্রথম চতুর্ভাগে হলে,

$\cos\theta = \cos\frac{\pi}{4}$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{4}$

θ এর অবস্থান চতুর্থ চতুর্ভাগে হলে,

$\cos\theta = \cos\theta\left(3\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$

$\cos\theta = \cos\theta\left(\frac{6\pi + \pi}{4}\right)$

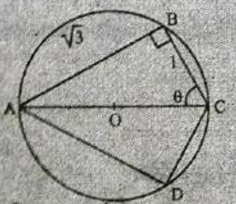
$\cos\theta = \cos\theta\left(\frac{7\pi}{4}\right)$

Jewel's Care Collected

$\therefore \theta = \frac{7\pi}{4}$

$\therefore$ প্রদত্ত শর্তানুসারে θ এর নির্ণেয় মান: $\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

প্রশ্ন নং- ৫ ।



উল্লেখিত চিত্রের আলোকে নিম্নের প্রশ্নের উত্তর দাও:

(ক) চিত্রে O বৃত্তের কেন্দ্র হলে AC নির্ণয় কর।

(খ) প্রমাণ কর যে, $\tan A + \tan B + \tan C + \tan D = 0$.

(গ) $\sec\theta + \cos\theta = x$ হলে x-এর মান নির্ণয় কর ও সমীকরণটির সমাধান কর।

[ঢাকা বোর্ড- ২০১৫]

(ক) এর সমাধান:

চিত্রে O বৃত্তের কেন্দ্র বিধায় AC ব্যাস এবং $\angle ABC$ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ। যেহেতু অর্ধবৃত্তস্থ কোণ এক সমকোণ সুতরাং ABC সমকোণী ত্রিভূজ হতে পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুযায়ী পাই,

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$= (\sqrt{3})^2 + 1^2$

$= 4$

$\therefore AC = \sqrt{4}$

$= 2$ [Ans.]

(খ) এর সমাধান:

আমরা জানি,

বৃত্তের অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজের বিপরীত কোণগুলোর সমষ্টি 2 সমকোণ বা $180°$

$\therefore \angle A + \angle C = 180°$

এবং $\angle B + \angle D = 180°$

এখন, বামপক্ষ $= \tan A + \tan B + \tan C + \tan D$

$= \tan A + \tan(180° - D) + \tan(180° - A) + \tan D$

$= \tan A + \tan(2\times 90° - D) + \tan(2\times 90° - A) + \tan D$

$= \tan A - \tan D - \tan A + \tan D$ $[\because \tan(\pi - \theta) = -\tan\theta]$

$= 0$

$=$ ডানপক্ষ

$\therefore \tan A + \tan B + \tan C + \tan D = 0$ (প্রমাণিত)

(গ) এর সমাধান:

দেওয়া আছে,

$\sec\theta + \cos\theta = x$ .... (i)

ΔABC সমকোণী ত্রিভুজ এর অতিভুজ AC এবং θ কোণের ... ও লম্ব AB.

এখানে, $\sec\theta = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{ভূমি}} = \frac{AC}{BC} = \frac{2}{1} = 2$ ['ক' হতে]

আবার, $\cos\theta = \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}} \frac{BC}{AC} = \frac{1}{2}$

$\sec\theta$ এবং $\cos\theta$ এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$2 + \frac{1}{2} = x$

বা, $\frac{4+1}{2} = x$

বা, $x = \frac{5}{2}$

$\therefore x$ এর নির্ণেয় মান $= \frac{5}{2}$

এখন, (i) নং থেকে,

$\sec\theta + \cos\theta = \frac{5}{2}$

বা, $\frac{1}{\cos\theta} + \cos\theta = \frac{5}{2}$

বা, $\frac{1 + \cos^2\theta}{\cos\theta} = \frac{5}{2}$

বা, $2 + 2\cos^2\theta = 5\cos\theta$

বা, $2\cos^2\theta - 5\cos\theta + 2 = 0$

বা, $2\cos^2\theta - 4\cos\theta - \cos\theta + 2 = 0$

বা, $2\cos\theta(\cos\theta - 2) - 1(\cos\theta - 2) = 0$

বা, $(2\cos\theta - 1)(\cos\theta - 2) = 0$

হয়, $2\cos\theta - 1 = 0$　　অথবা, $\cos\theta - 2 = 0$

বা, $2\cos\theta = 1$　　$\therefore \cos\theta = 2$

বা, $\cos\theta = \frac{1}{2}$

কিন্তু, $\cos\theta \neq 2$ কারণ, $\cos\theta$ এর মান 1 অপেক্ষা বৃহত্তর হতে পারে না।

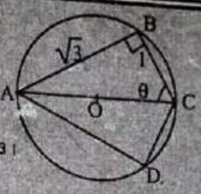
$\therefore \cos\theta = \frac{1}{2}$

বা, $\cos\theta = \cos\frac{\pi}{3}$ $\left[\because \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\right]$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $\theta = \frac{\pi}{3}$

প্রশ্ন নং-৬।



উল্লিখিত চিত্রের আলোকে নিম্নের প্রশ্নের উত্তর দাও।

(ক) চিত্রে O বৃত্তের কেন্দ্র হলে AC নির্ণয় কর।

(খ) প্রমাণ কর যে, $\tan A + \tan B + \tan C + \tan D = 0$

(গ) $\sec\theta + \cos\theta = x$ হলে x-এর মান নির্ণয় কর ও সমীকরণটির সমাধান কর। [ঢাকা বোর্ড-২০১৫]

(ক) এর সমাধান:

চিত্র, $\angle B = 90^\circ$ হওয়ার, $\angle ABC$ কোণটি অর্ধবৃত্তস্থ কোণ।
আমরা জানি, অর্ধবৃত্তস্থ কোণ 1 সমকোণ।

$\therefore \angle B = 90^\circ$

$\therefore \Delta ABC$ সমকোণী ত্রিভুজ।

$\therefore$ পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে,

$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$

বা, $AC = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2}$

বা, $AC = \sqrt{3+1} = \sqrt{4}$

$\therefore AC = 2$ একক [Ans.]

(খ) এর সমাধান:

O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABCD বৃত্তে ABCD চতুর্ভুজটি অন্তর্লিখিত।
আমরা জানি, বৃত্তে অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টি 180°

$\therefore \angle A + \angle C = 180^\circ$

এবং $\angle B + \angle D = 180^\circ$

বামপক্ষ $= \tan A + \tan B + \tan C + \tan D$

$= \tan A + \tan(180^\circ - D) + \tan(180^\circ - A) + \tan D$

$= \tan A - \tan D - \tan A + \tan D$ [$\because$ ২য় চতুর্ভাগে tan ঋণাত্মক]

$= 0 =$ ডানপক্ষ

$\therefore \tan A + \tan B + \tan C + \tan D = 0$ [প্রমাণিত]

(গ) এর সমাধান:

দেওয়া আছে, $\sec\theta + \cos\theta = x$ ……… (i)

সমকোণী ΔABC, $\sec\theta = \frac{AC}{BC} = \frac{2}{1} = 2$ [$\because AC = 2$ এবং $BC = 1$]

আবার, $\cos\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{2}$

$\sec\theta$ এবং $\cos\theta$ এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$2 + \frac{1}{2} = x$

বা, $\frac{4+1}{2} = x$

বা, $x = \frac{5}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় x এর মান $\frac{5}{2}$

এখন, (i) নং থেকে $\sec\theta + \cos\theta = \frac{5}{2}$

বা, $\frac{1}{\cos\theta} + \cos\theta = \frac{5}{2}$

বা, $\frac{1 + \cos^2\theta}{\cos\theta} = \frac{5}{2}$

বা, $2\cos^2\theta + 2 = 5\cos\theta$

বা, $2\cos^2\theta - 5\cos\theta + 2 = 0$

বা, $2\cos^2\theta - 4\cos\theta - \cos\theta + 2 = 0$

বা, $2\cos\theta(\cos\theta - 2) - 1(\cos\theta - 2) = 0$

বা, $(\cos\theta - 2)(2\cos\theta - 1) = 0$ হয় $\cos\theta - 2 = 0$

অথবা, $2\cos\theta - 1 = 0$

এখন, $\cos\theta - 2 = 0$ হলে, $\cos = 2$

কিন্তু $\cos = 2$ হতে পারে না। কারণ $-1 \leq \cos\theta \leq 1$

$\therefore 2\cos\theta - 1 = 0$

বা, $\cos\theta = \frac{1}{2}$

বা, $\cos\theta = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$ [$\because$ চিত্রে θ সূক্ষ্মকোণ]

$\therefore \theta = \frac{\pi}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $\frac{\pi}{3}$

প্রশ্ন নং- ৭। $\tan\theta = \frac{3}{4}$ এবং $\cos\theta$ ঋণাত্মক।

(ক) $\sec\theta$ এর মান কত?

(খ) $(\text{cosec}\theta - \cot\theta)^{\frac{1}{2}}$ এর মান নির্ণয় কর।

(গ) প্রমাণ কর যে, $\frac{\sin\theta + \cos(-\theta)}{\sec(-\theta) + \tan\theta} = \frac{14}{5}$. [দিনাজপুর বোর্ড- ২০১৫]

(ক) এর সমাধান:

দেওয়া আছে, $\tan\theta = \frac{3}{4}$

বা, $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{3}{4}$

বা, $\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2$ [বর্গ করে।]

বা, $\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{9}{16}$

বা, $\frac{1 - \cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{9}{16}$

বা, $16 - 16\cos^2\theta = 9\cos^2\theta$

বা, $25\cos^2\theta = 16$

বা, $\cos^2\theta = \frac{16}{25}$

বা, $\cos\theta = -\frac{4}{5}$ [$\because \cos\theta$ ঋণাত্মক]

$\therefore \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$

$= \frac{1}{-\frac{4}{5}} = -\frac{5}{4}$ [Ans.]

(খ) এর সমাধান:

আমরা জানি,

$\tan\theta = \frac{3}{4}$

বা, $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{3}{4}$

বা, $\sin\theta = \frac{3}{4} \times \cos\theta$

$= \frac{3}{4}\left(-\frac{4}{5}\right)$

$= \frac{-3}{5}$

এখন, $(\text{cosec}\theta - \cot\theta)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{\sin\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)^{\frac{1}{2}}$

$= \left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)^{\frac{1}{2}}$

$= \left\{\frac{1-\left(-\frac{4}{5}\right)}{\frac{-3}{5}}\right\}^{\frac{1}{2}}$

$= \left\{\frac{1+\frac{4}{5}}{\frac{-3}{5}}\right\}^{\frac{1}{2}}$

$= \left\{\frac{\frac{9}{5}}{\frac{-3}{5}}\right\}^{\frac{1}{2}}$

$= \left(\frac{9}{5} \times \frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$

$= (-3)^{\frac{1}{2}}$

৯. (গ) এর সমাধান:

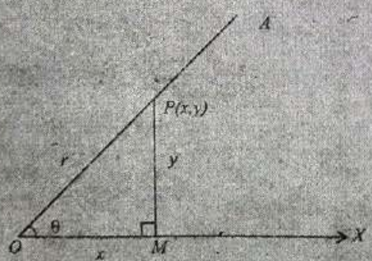
$\text{L.H.S.} = \frac{\sin\theta + \cos(-\theta)}{\sec(-\theta) + \tan\theta}$

$= \frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sec\theta + \tan\theta}$

$= \frac{-\frac{3}{5} - \frac{4}{5}}{-\frac{5}{4} + \frac{3}{4}} = \frac{-\frac{7}{5}}{-\frac{2}{4}} = \frac{7\times4}{5\times2}$

$= \frac{28}{10} = \frac{14}{5} = \text{R.H.S.}$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন নং- ৮।



(ক) $x = y$ হলে প্রমাণ কর যে, $r = \sqrt{2}\,x$.

(খ) উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর যে, $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$.

(গ) $\frac{2y^2}{x^2+y^2} - \frac{3x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$ হলে θ এর মান নির্ণয় কর। (যখন $0° < \theta < \frac{\pi}{2}$).

[কুমিল্লা বোর্ড- ২০১৫]

৯. (ক) এর সমাধান:

চিত্র থেকে পাই, OX এর উপর PM লম্ব।

সুতরাং, ΔPMO সমকোণী ত্রিভুজ হতে পাই, $OP^2 = PM^2 + OM^2$

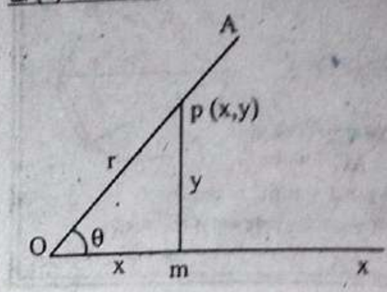
বা, $r^2 = x^2 + y^2$

বা, $r^2 = x^2 + x^2$ [$\because x = y$]

বা, $r^2 = 2x^2$

$\therefore r = \sqrt{2}\,x$ (প্রমাণিত)

৯. (খ) এর সমাধান:



চিত্র হতে পাই, $\sec\theta = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{ভূমি}} = \frac{r}{x}$

$\tan\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \frac{y}{x}$

এবং $r^2 = x^2 + y^2$

$\therefore \text{L.S.H} = \sec^2\theta - \tan^2\theta$

$= \left(\frac{r}{x}\right)^2 - \left(\frac{y}{x}\right)^2$

$= \frac{r^2}{x^2} - \frac{y^2}{x^2}$

$= \frac{r^2 - y^2}{x^2}$

$= \frac{x^2 + y^2 - y^2}{x^2}$

$= \frac{x^2}{x^2}$

$= 1$

$= \text{R.S}$

$\therefore \text{L.S.H} = \text{R.S.H}$ [প্রমাণিত]

৯. (গ) এর সমাধান:

দেওয়া আছে,

$\frac{2y^2}{x^2+y^2} - \frac{3x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$

বা, $2\frac{y^2}{r^2} - \frac{3x}{\sqrt{r^2}} = 0$ [$\because x^2 + y^2 = r^2$]

বা, $2\sin^2\theta - 3\cos\theta = 0$ [$\because \sin\theta = \frac{y}{r}, \cos\theta = \frac{x}{r}$]

বা, $2(1 - \cos^2\theta) - 3\cos\theta = 0$ [$\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$, বা, $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$]

বা, $2 - 2\cos^2\theta - 3\cos\theta = 0$

বা, $2\cos^2\theta + 3\cos\theta - 2 = 0$

বা, $2\cos^2\theta + 4\cos\theta - \cos\theta - 2 = 0$

বা, $2\cos\theta(\cos\theta + 2) - 1(\cos\theta + 2) = 0$

$\therefore$ হয়, $\cos\theta + 2 = 0$ বা, $2\cos\theta = 1$

বা, $\cos\theta = -2$ বা, $2\cos\theta = 1$

[কিন্তু $\cos\theta$ এর মান -1 হতে ছোট হতে পারে না বিধায় এটি গ্রহণযোগ্য নয়।]

$\cos\theta = \cos\frac{\pi}{3}$

$\therefore \theta = 60°$ [Ans.]

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $\theta = \frac{\pi}{3}$

প্রশ্ন নং- ৯। $A = 1 - \sin\theta$, $B = \sec\theta - \tan\theta$ এবং $C = 1 + \sin\theta$

(ক) দেখাও যে, $B = A\sec\theta$.

(খ) $B = (\sqrt{3})^{-1}$ হলে, θ এর মান নির্ণয় কর, যেখানে θ সূক্ষ্মকোণ।

(গ) প্রমাণ কর যে, $AC^{-1} = B^2$.

১. (ক) এর সমাধান:

দেওয়া আছে, $A = 1 - \sin\theta$

$B = \sec\theta - \tan\theta$

$= \frac{1}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$= \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$

বা, $B = \frac{A}{\cos\theta}$

$\therefore B = A\sec\theta$ **[Showed]**

১. (খ) এর সমাধান:

দেওয়া আছে,

$B = (\sqrt{3})^{-1}$

বা, $\sec\theta - \tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\frac{1}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\frac{(1-\sin\theta)^2}{\cos^2\theta} = \frac{1}{3}$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $\frac{1-2\sin\theta+\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta} = \frac{1}{3}$

বা, $3 - 6\sin\theta + 3\sin^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

বা, $4\sin^2\theta - 6\sin\theta + 2 = 0$

বা, $2\sin^2\theta - 3\sin\theta + 1 = 0$

বা, $2\sin^2\theta - 2\sin\theta - \sin\theta + 1 = 0$

বা, $2\sin\theta(\sin\theta - 1) - 1(\sin\theta - 1) = 0$

বা, $(\sin\theta - 1)(2\sin\theta - 1) = 0$

$\therefore$ হয় $\sin\theta - 1 = 0$ অথবা, $2\sin\theta - 1 = 0$

বা, $\sin\theta = 1$ বা, $2\sin\theta = 1$

বা, $\sin\theta = \sin\frac{\pi}{2}$, বা, $\sin\theta = \frac{1}{2}$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{2}$ বা, $\sin\theta = \sin\frac{\pi}{6}$

যেহেতু θ সূক্ষ্মকোণ তাই $\frac{\pi}{2}$ গ্রহণযোগ্য নয়।

$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}$ **[Ans.]**

১. (গ) এর সমাধান:

$L.H.S = AC^{-1}$

$= (1 - \sin\theta).\frac{1}{1+\sin\theta}$

$= \frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}$

$= \frac{(1-\sin\theta)^2}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}$ [লব ও হরকে $(1-\sin\theta)$ দ্বারা গুণ করে]

$= \frac{(1-\sin\theta)^2}{1-\sin^2\theta}$

$= \left(\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2$

$= \left(\frac{1}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2$

$= (\sec\theta - \tan\theta)^2$

$= B^2$

$= R.H.S.$

$\therefore L.H.S. = R.H.S.$ [প্রমাণিত]

অতিরিক্ত সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর

প্রশ্ন-১৬। $a - b = \sqrt{2}b$ এবং $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}$.

(ক) কোনো বৃত্তের ব্যাসার্ধ r হলে প্রমাণ কর যে, ঐ বৃত্তের পরিধি $2\pi r$। যেখানে π একটি সমানুপাতিক ধ্রুবক।

(খ) $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ হলে, সংশ্লিষ্ট সমীকরণটি সমাধান কর।

(গ) $a = \cos A$ এবং $b = \sin A$ হলে, প্রমাণ কর যে, $b = (\sqrt{2} - 1)a$.

[ভিকারুননিসা নূন স্কুল এন্ড কলেজ, ঢাকা]

(ক) এর সমাধান:

এখানে, বৃত্তের ব্যাসার্ধ, r

$\therefore$ বৃত্তের ব্যাস $d = 2r$

আমরা জানি, কোনো বৃত্তের পরিধি ও ব্যাসের অনুপাত ধ্রুবক। অর্থাৎ বৃত্তের পরিধি c হলে,

$\frac{c}{d} = \pi$, যেখানে π একটি সমানুপাতিক ধ্রুবক

বা, $\frac{c}{2r} = \pi$

$\therefore c = 2\pi r$

$\therefore$ কোনো বৃত্তের ব্যাসার্ধ r হলে, ঐ বৃত্তের পরিধি $= 2\pi r$ [প্রমাণিত]

(খ) এর সমাধান:

এখানে, $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}$

বা, $\sin\theta = \sqrt{2} - \cos\theta$

বা, $\sin^2\theta = (\sqrt{2} - \cos\theta)^2$ [বর্গ করে]

বা, $\sin^2\theta = (\sqrt{2}^2) - 2.\sqrt{2}.\cos\theta + \cos^2\theta$

বা, $1 - \cos^2\theta = 2 - 2\sqrt{2}\cos\theta + \cos^2\theta$

বা, $\cos^2\theta - 2\sqrt{2}\cos\theta + 2 - 1 + \cot^2\theta = 0$

বা, $2\cos^2\theta - 2\sqrt{2}\cos\theta + 1 = 0$

বা, $(\sqrt{2}\cos\theta)^2 - 2.\sqrt{2}\cos\theta.1 + 1^2 = 0$

বা, $(\sqrt{2}\cos\theta - 1)^2 = 0$

বা, $\sqrt{2}\cos\theta - 1 = 0$

বা, $\sqrt{2}\cos\theta = 1$

বা, $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

বা, $\cos\theta = \cos\frac{\pi}{4}$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{4}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $\theta = \frac{\pi}{4}$

Jewel's Care Life is for motto lesson

সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর

বিগত এসএসসি পরীক্ষার সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর

১। $a^x = b^y = c^z$, যেখানে $a \neq b \neq c$.

(ক) যদি $p^{p\sqrt{p}} = (p\sqrt{p})^p$ হয়, তবে p এর মান নির্ণয় কর।

(খ) যদি $ab = c^2$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z}$.

(গ) $abc = 1$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} = \frac{3}{xyz}$

[যশোর বোর্ড-২০১৫]

(ক) এর সমাধান:

দেওয়া আছে, $p^{p\sqrt{p}} = (p\sqrt{p})^p$

বা, $p^{p\sqrt{p}} = \left(p^1 . p^{\frac{1}{2}}\right)^p$

বা, $p^{p\sqrt{p}} = \left(p^{1+\frac{1}{2}}\right)^p$

বা, $p^{p\sqrt{p}} = p^{\frac{3}{2}p}$

বা, $(p^p)^{\sqrt{p}} = (p^p)^{\frac{3}{2}}$

বা, $\sqrt{p} = \frac{3}{2}$ [$\because a^m = a^n$ হলে, $m = n$]

$\therefore p = \frac{9}{4}$

Ans: $p = \frac{9}{4}$.

(খ) এর সমাধান:

দেওয়া আছে, $a^x = b^y = c^z$

$\therefore a^x = c^z$ বা, $a = c^{\frac{z}{x}}$

এবং $b^y = c^z$ বা, $b = c^{\frac{z}{y}}$

আবার, $ab = c^2$

বা, $c^{\frac{z}{x}} . c^{\frac{z}{y}} = c^2$

বা, $c^{\frac{z}{x} + \frac{z}{y}} = c^2$

বা, $\frac{z}{x} + \frac{z}{y} = 2$

বা, $z\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 2$

$\therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z}$ [প্রমাণিত]

(গ) এর সমাধান:

ধরি, $a^x = b^y = c^z = k$

তাহলে, $a = k^{\frac{1}{x}}$, $b = k^{\frac{1}{y}}$ এবং $c = k^{\frac{1}{z}}$

প্রদত্ত শর্ত, $abc = 1$

বা, $k^{\frac{1}{x}} . k^{\frac{1}{y}} . k^{\frac{1}{z}} = 1$

বা, $k^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}} = k^0$

$\therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$

বা, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = -\frac{1}{z}$

বা, $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)^3 = \left(-\frac{1}{z}\right)^3$ [ঘন করে]

বা, $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + 3.\frac{1}{x}\frac{1}{y}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = -\frac{1}{z^3}$

বা, $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + 3.\frac{1}{x}\frac{1}{y}\left(-\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{z^3}$

বা, $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} - 3.\frac{1}{x}\frac{1}{y}\frac{1}{z} = -\frac{1}{z^3}$

$\therefore \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} = \frac{3}{xyz}$ [দেখানো হলো]

২। $P = \frac{x^a}{x^b}$, $Q = \frac{x^b}{x^c}$, এবং $R = \frac{x^c}{x^a}$.

(ক) $Q = 1$ হলে, দেখাও যে, $b = c$.

(খ) দেখাও যে, $P^{a+b-c} . Q^{b+c-a} . R^{c+a-b} = 1$

(গ) প্রমাণ কর যে, $(a^2 + ab + b^2) \log_k P + (b^2 + bc + c^2) \log_k Q (c^2 + ca + a^2) \log_k R = 0$

[বরিশাল বোর্ড-২০১৫]

(ক) এর সমাধান:

দেওয়া আছে, $Q = \frac{x^b}{x^c} = x^{b-c}$

যদি $Q = 1$ হয়,

$1 = x^{b-c}$

বা, $x^0 = x^{b-c}$

বা, $0 = b - c$

$\therefore b = c$ (দেখানো হলো)

(খ) এর সমাধান:

দেওয়া আছে, $P^{a+b-c} . Q^{b+c-a} . R^{c+a-b}$

$= \left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{a+b-c} \left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{b+c-a} \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{c+a-b}$

$= (x^{a-b})^{a+b-c} . (x^{b-c})^{b+c-a} . (x^{c-a})^{c+a-b}$

$= x^{a^2+ab-ac-ab-b^2+bc} . x^{b^2+bc-ab-bc-c^2+ac} . x^{c^2+ac-bc-ac-a^2+ab}$

$= x^{a^2-ac-b^2+bc} . x^{b^2-ab-c^2+ac} . x^{c^2-bc-a^2+ab}$

$= x^{a^2-ac-b^2+bc+b^2-ab-c^2+ac+c^2-bc-a^2+ab}$

$= x^0$

$= 1$

$\therefore P^{a+b-c} . Q^{b+c-a} . R^{c+a-b} = 1$ [দেখানো হলো]

(গ) এর সমাধান:

দেওয়া আছে,

$(a^2+ab+b^2)\log_k P + (b^2+bc+c^2)\log_k Q + (c^2+ca+a^2)\log_k R$

$= (a^2+ab+b^2)\log_k \frac{x^a}{x^b} + (b^2+bc+c^2)\log_k \frac{x^b}{x^c} + (c^2+ca+a^2)\log_k \frac{x^c}{x^a}$

$= (a^2+ab+b^2)\log_k x^{a-b} + (b^2+bc+c^2)\log_k x^{b-c} + (c^2+ca+a^2)\log_k x^{c-a}$

$= (a-b)(a^2+ab+b^2)\log_k x + (b^2+bc+c^2)(b-c)\log_k x + (c^2+ca+a^2)(c-a)\log_k x$

$= (a^3 - b^3) \log_k x + (b^3 - c^3) \log_k x + (c^3 - a^3) \log_k x$

$= (a^3 - b^3 + b^3 - c^3 + c^3 - a^3) \log_k x$

$= 0.\log_k x$

$= 0$

$\therefore (a^2+ab+b^2)\log_k P + (b^2+bc+c^2)\log_k Q + (c^2+ca+a^2)\log_k R = 0$ প্রমাণিত

সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর

বিগত এসএসসি পরীক্ষার সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর

প্রশ্ন নং - ১। $a = xy^{p-1}, b = xy^{q-1}, c = xy^{r-1}$ এবং $f(x) = \ln\frac{4+x}{4-x}$

(ক) $(16)^{2x} = 4^{x+1}$ হলে, x = কত?

(খ) প্রমাণ কর যে, $(q-r)\log_k a + (r-p)\log_k b + (p-q)\log_k c = 0$.

(গ) $f(x) = \ln\frac{4+x}{4-x}$ ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর।

[সিলেট বোর্ড-২০১৬]

(ক) এর সমাধান:

দেওয়া আছে,

$(16)^{2x} = 4^{x+1}$

বা, $4^{4x} = 4^{x+1}$

বা, $4x = x + 1$

বা, $4x - x = 1$

বা, $3x = 1$

$\therefore x = \frac{1}{3}$

(খ) এর সমাধান:

এখানে, $a = xy^{p-1}, b = xy^{q-1}, c = xy^{r-1}$

বামপক্ষ $= (q-r)\log_k a + (r-p)\log_k b + (p-q)\log_k c$

$= \log_k a^{q-r} + \log_k b^{r-p} + \log_k c^{p-q}$

$= \log_k a^{q-r} . b^{r-p} . c^{p-q}$

$= \log_k (xy^{p-1})^{q-r} . (xy^{q-1})^{r-p} . (xy^{r-1})^{p-q}$ [a, b, c এর মান বসিয়ে]

$= \log_k x^{q-r} . y^{(p-1)(q-r)} . x^{r-p} . y^{(q-1)(r-p)} . x^{p-q} . y^{(r-1)(p-q)}$

$= \log_k x^{q-r+r-p+p-q} . y^{(p-1)(q-r)+(q-1)(r-p)+(r-1)(p-q)}$

$= \log_k x^0 . y^{pq-pr-q+r+qr-pq-r+p+pr-qr-p+q}$

$= \log_k x^0 . y^0 = \log_k 1.1 = \log_k 1 = 0$ = ডানপক্ষ

$\therefore (q-r)\log_k a + (r-p)\log_k b + (p-q)\log_k c = 0$. (প্রমাণিত)

(গ) এর সমাধান:

প্রদত্ত ফাংশনটি: $f(x) = ln\frac{4+x}{4-x}$

যেহেতু লগারিদম শুধুমাত্র ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার জন্য সংজ্ঞায়িত হয়।

$\therefore \frac{4+x}{4-x} > 0$ হবে

যদি $4 + x > 0$ এবং $4 - x > 0$ হয়

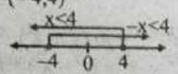
বা, $x > -4$ এবং $4 > x$

বা, $-4 < x$ এবং $x < 4$

$\therefore$ ডোমেন $= \{x : -4 < x\} \cap \{x : x > 4\}$

$= (-4, \infty) \cap (4, \infty)$

$= (-4, 4)$



আবার, $\frac{4+x}{4-x} > 0$ হবে

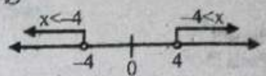
যদি, $4 + x \leq 0$ এবং $4 - x < 0$ হয়

বা, $x < -4$ এবং $x > 4$

$\therefore$ ডোমেন $= \{x : x < -4\} \cap \{x : x > 4\}$

$= (-\infty, -4) \cap (4, \infty)$

$= \varnothing$



$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেন

D_f = উভয় ক্ষেত্রে প্রাপ্ত ডোমেনের সংযোগ $= (-4, 4) \cup \varnothing$

$= (-4, 4)$

ধরি, $y = f(x) = \ln\frac{4+x}{4-x}$

বা, $e^y = \frac{4+x}{4-x}$

বা, $4 + x = 4e^y - xe^y$

বা, $x + xe^y = 4e^y - 4$

বা, $x(1 + e^y) = 4e^y - 4$

বা, $x = \frac{4e^y - 4}{1 + e^y}$

y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বাস্তব হয়

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের রেঞ্জ $R_f = R$.

অতিরিক্ত সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর

প্রশ্ন নং - ২। $\frac{\log_k p}{y-z} = \frac{\log_k q}{z-x} = \frac{\log_k r}{x-y}$

(ক) দেখাও যে $pqr = 1$

(খ) প্রমান কর যে, $p^{y+z} . q^{z+x} . r^{x+y} = 1$

(গ) $p^{y^2+yz+z^2} . q^{z^2+zx+x^2} . r^{x^2+xy+y^2}$. এর মান নির্ণয় কর।

(ক) এর সমাধান:

ধরি, $\frac{\log_k p}{y-z} = \frac{\log_k q}{z-x} = \frac{\log_k r}{x-y} = c$

$\therefore \log_k p = c(y-z)$ ……… (i)

একই ভাবে, $\log_k q = c(z-x)$ ……… (ii)

$\log_k r = c(x-y)$ ……… (iii)

(i), (ii) ও (iii) নং যোগ করে পাই,

বা, $\log_k p + \log_k q + \log_k r = c(y-z) + c(z-x) + c(x-y)$

বা, $\log_k (p.q.r.) = k \times 0 = \log_k 1$

$\therefore pqr = 1$ (প্রমাণিত)

(খ) এর সমাধান:

সমীকরণ (i), (ii) ও (iii) কে যথাক্রমে $(y + z)$, $(z + x)$ ও $(x + y)$ দ্বারা গুণ করার পর যোগ করে পাই,

$(y+z)\log_k p + (z+x)\log_k q + (x+y)\log_k r = c(y+z)(y-z) + c(z+x)(z-x) + c(x+y)(x-y)$

$= k(y^2 - z^2 + z^2 - x^2 + x^2 - y^2)$

বা, $\log_k p^{(y+z)} + \log_k q^{(z+x)} + \log_k r^{(x+y)}$

বা, $\log_k (p^{y+z} . q^{z+y} . r^{x+y}) = \log_k k \times 0$

বা, $\log_k (p^{y+z} . q^{z+x} . r^{x+y}) = \log_k 1$

$\therefore p^{y+z} . q^{z+x} . r^{x+y} = 1$ (প্রমাণিত)

সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর

বিগত এসএসসি পরীক্ষার সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর

প্রশ্ন-১: $A = \left(1-\frac{x}{3}\right)^4$, $B = (p+qx)^6$ এবং $C = (q-px)^7$.

(ক) প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে A এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর।
(খ) $p = 1, q = 2$ হলে, BC এর বিস্তৃতিতে x^6 এর সহগ নির্ণয় কর।
(গ) x-এর ঘাতের ঊর্ধ্বক্রমানুসারে $A\left(1+\frac{x}{3}\right)^5$ কে x^5 পর্যন্ত বিস্তৃত করে $1.01 \times (0.9999)^5$ এর মান নির্ণয় কর। [রাজশাহী বোর্ড-২০১৬]

(ক)-এর উত্তর:

দেওয়া আছে, $A = \left(1-\frac{x}{3}\right)^4$

প্যাসকেলের ত্রিভুজ ব্যবহার করে,

```
        1
      1   1
    1   2   1
  1   3   3   1
1   4   6   4   1
```

$$\therefore \left(1-\frac{x}{3}\right)^4 = 1 + 4\left(-\frac{x}{3}\right)^1 + 6\left(-\frac{x}{3}\right)^2 + 4\left(-\frac{x}{3}\right)^3 + 1\left(-\frac{x}{3}\right)^4$$
$$= 1 - \frac{4}{3}x + 6\cdot\frac{x^2}{9} - 4\cdot\frac{x^3}{27} + 1\cdot\frac{x^4}{81}$$
$$= 1 - \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{27}x^3 + \frac{1}{81}x^4$$

(খ)-এর উত্তর:

$p = 1, q = 2$ হলে,

$$B = (1+2x)^6 = \binom{6}{0}(2x)^0 + \binom{6}{1}(2x)^1 + \binom{6}{2}(2x)^2 + \binom{6}{3}(2x)^3 + \binom{6}{4}(2x)^4 + \binom{6}{5}(2x)^5 + \binom{6}{6}(2x)^6$$
$$= 1.1 + 12x + \frac{6.5}{1.2}\cdot 4x^2 + \frac{6.5.4}{1.2.3}8x^3 + \frac{6.5.4.3}{1.2.3.4}16x^4 + \frac{6.5.4.3.2}{1.2.3.4.5}\cdot 32x^5 + 1.64x^6$$
$$= 1 + 12x + 60x^2 + 160x^3 + 240x^4 + 192x^5 + 64x^6$$

এবং $C = (2-x)^7$
$$= \left\{2\left(1-\frac{x}{2}\right)\right\}^7$$
$$= 2^7\left(1-\frac{x}{2}\right)^7$$

$$\therefore C = 2^7\left(1-\frac{x}{2}\right)^7$$
$$= 2^7\left[\binom{7}{0}\left(-\frac{x}{2}\right)^0 + \binom{7}{1}\left(-\frac{x}{2}\right)^1 + \binom{7}{2}\left(-\frac{x}{2}\right)^2 + \binom{7}{3}\left(-\frac{x}{2}\right)^3 + \binom{7}{4}\left(-\frac{x}{2}\right)^4 + \binom{7}{5}\left(-\frac{x}{2}\right)^5 + \binom{7}{6}\left(-\frac{x}{2}\right)^6 + \binom{7}{7}\left(-\frac{x}{2}\right)^7\right]$$
$$= 2^7\left[1.1 + 7\left(-\frac{x}{2}\right) + \frac{7.6}{1.2}\cdot\frac{x^2}{4} + \frac{7.6.5}{1.2.3}\left(-\frac{x^3}{8}\right) + \frac{7.6.5.4}{1.2.3.4}\cdot\frac{x^4}{16} + \frac{7.6.5.4.3}{1.2.3.4.5}\left(-\frac{x^5}{32}\right) + \frac{7.6.5.4.3.2}{1.2.3.4.5.6}\cdot\frac{x^6}{64} + 1\cdot\left(-\frac{x^7}{128}\right)\right]$$
$$= 2^7\left[1 - \frac{7}{2}x + \frac{21}{4}x^2 - \frac{35}{8}x^3 + \frac{35}{16}x^4 - \frac{21}{32}x^5 + \frac{7}{64}x^6 - \frac{1}{128}x^7\right]$$
$$= 128 - 448x + 672x^2 - 560x^3 + 280x^4 - 84x^5 + 14x^6 - x^7$$

$$\therefore BC = (1 + 12x + 60x^2 + 160x^3 + 240x^4 + 192x^5 + 64x^6)(128 - 448x + 672x^2 - 560x^3 + 280x^4 - 84x^5 + 14x^6 - x^7)$$
$$= 14x^6 - 12.84x^6 + 60.280x^6 - 160.560x^6 + 240.672x^6 - 448.192x^6 + 64.128x^6$$ [শুধু x^6 যুক্ত পদগুলো নিয়ে]
$$= 9662x^6$$

সুতরাং, BC এ x^6 এর সহগ, 9662.

(গ)-এর উত্তর:

উদ্দীপকে দেওয়া আছে, $A = \left(1-\frac{x}{3}\right)^4$

$$\therefore A\left(1+\frac{x}{3}\right)^5 = \left(1-\frac{x}{3}\right)^4\left(1+\frac{x}{3}\right)^5$$
$$= \left(1+\frac{x}{3}\right)\left(1-\frac{x}{3}\right)^4\left(1+\frac{x}{3}\right)^4$$
$$= \left(1+\frac{x}{3}\right)\left(1-\frac{x^2}{9}\right)^4$$

এখন, $\left(1+\frac{x}{3}\right)\left(1-\frac{x^2}{9}\right)^4$ কে দ্বিপদী বিস্তৃতিতে ব্যবহার করে পাই,

$$\left(1+\frac{x}{3}\right)\left(1-\frac{x^2}{9}\right)^4 = \left(1+\frac{x}{3}\right)\left[\binom{4}{0}\left(-\frac{x^2}{9}\right)^0 + \binom{4}{1}\left(-\frac{x^2}{9}\right)^1 + \binom{4}{2}\left(-\frac{x^2}{9}\right)^2 + \binom{4}{3}\left(-\frac{x^2}{9}\right)^3 + \ldots\right]$$
$$= \left(1+\frac{x}{3}\right)\left[1 - \frac{4x^2}{9} + \frac{6x^4}{81} - \frac{4x^6}{729} + \ldots\right]$$
$$= \left(1 - \frac{4x^2}{9} + \frac{6x^4}{81} - \frac{4x^6}{729} + \ldots\right) + \left(\frac{x}{3} - \frac{4x^3}{27} + \frac{2x^5}{81} - \frac{4x^7}{2187}\right)$$
$$= \left(1+\frac{x}{3}\right)\left(1-\frac{x^2}{9}\right)^4$$
$$= 1 + \frac{x}{3} - \frac{4x^2}{9} - \frac{4x^3}{27} + \frac{6x^4}{81} + \frac{2x^5}{81} - \ldots$$

এখন, উক্ত বিস্তৃতিতে $x = 0.03$ বসিয়ে পাই,

$$\left(1+\frac{0.03}{3}\right)\times\left(1-\frac{0.03\times0.03}{9}\right)^4 = 1 + \frac{0.03}{3} - \frac{4\times(0.03)^2}{9} - \frac{4\times(0.03)^3}{27} + \frac{6(0.03)^4}{81} + \frac{2(0.03)^5}{81}\ldots$$

বা, $(1+0.01)\times(0.9999)^4 = 1 + 0.01 - 0.0004 - 0.000004 + 0.00000006 + 0.000000000\ldots$

$\therefore 1.01\times(0.9999)^4 = 1.0096$ (চার দশমিক স্থান পর্যন্ত)

প্রশ্ন-২: $A = (1-x)^8$ এবং $B = (1+x)^7$.

(ক) B কে x^4 পর্যন্ত বিস্তৃত কর।
(খ) A কে চতুর্থ পদ পর্যন্ত বিস্তৃত কর এবং উক্ত ফলাফল ব্যবহার করে $(0.9)^8$ এর মান চার দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় কর।
(গ) দেখাও যে, AB এর বিস্তৃতিতে x^7 এর সহগ 35. [যশোর বোর্ড-২০১৬]

(ক)-এর উত্তর:

দেওয়া আছে,
$B = (1+x)^7$

Jewel's Care Life is for motto lesson

এখন, দ্বিপদী বিস্তৃতির সাহায্যে পাই,

$$(1+x)^7 = \binom{7}{0}(x)^0 + \binom{7}{1}(x)^1 + \binom{7}{2}(x)^2 + \binom{7}{3}(x)^3 + \binom{7}{4}(x)^4 + \ldots$$
$$= 1 + 7x + 21x^2 + 35x^3 + 35x^4 + \ldots.$$

B কে x^4 পর্যন্ত বিস্তৃত করা হলো।

(খ)-এর উত্তর:

দেওয়া আছে, $A = (1-x)^8$

বিস্তৃতির উপপাদ্য অনুসারে পাই,

$$(1-x)^8 = \binom{8}{0}(-x)^0 + \binom{8}{1}(-x)^1 + \binom{8}{2}(-x)^2 + \binom{8}{3}(-x)^3 + \ldots..$$
$$= 1 - 8x + 28x^2 - 56x^3 + \ldots\ldots$$

এখন, উক্ত বিস্তৃতিতে $x = 0.1$ বসিয়ে পাই,

$(1-0.1)^8 = 1 - 8(0.1) + 28(0.1)^2 - 56(0.1)^3 + \ldots.$

বা, $(0.9) = 1 - 0.8 + 0.28 - 0.056 + \ldots..$

$= 0.4240$ (চার দশমিক স্থান পর্যন্ত)

$\therefore$ নির্ণেয় মান $(0.9)^8 = 0.4240$

(গ)-এর উত্তর:

দেওয়া আছে,

$A = (1-x)^8$

এবং $B = (1+x)^7$

$$AB = (1-x)^8(1+x)^7$$
$$= (1-x)(1-x)^7(1+x)^7$$
$$= (1-x)(1-x^2)^7$$
$$= (1-x)\left[\binom{7}{0}(-x^2)^0 + \binom{7}{1}(-x^2)^1 + \binom{7}{2}(-x^2)^2 + \binom{7}{3}(-x^2)^3 + \binom{7}{4}(-x^2)^4 \ldots\ldots\right]$$
$$= (1-x)[1 - 7x^2 + 21x^4 - 35x^6 + 35x^8 \ldots\ldots]$$
$$= (1 - 7x^2 + 21x^4 - 35x^6 + 35x^8 + \ldots.) + (-x + 7x^3 - 21x^5 + 35x^7 - 35x^9 \ldots..)$$
$$= 1 - x - 7x^2 + 7x^3 + 21x^4 - 21x^5 - 35x^6 + 35x^7 + 35x^8 - 35x^9 + \ldots..$$

$\therefore$ AB এর বিস্তৃতিতে x^7 এর সহগ 35 [দেখানো হলো]

অতিরিক্ত সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর