 Jewel's Care Life is for motto lesson

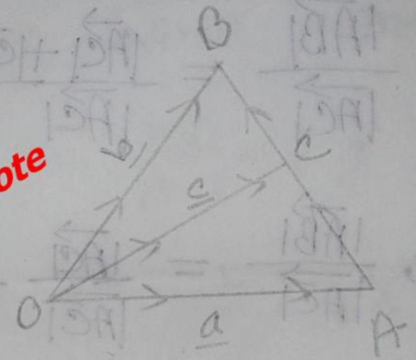
Higher Math Hand Note By Jewel's Sir For Vector

ভেক্টর

* যদি A, B, C বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ হয় এবং C বিন্দু যদি AB রেখাংশকে $m:n$ অনুপাতে বিভক্ত করে, তবে দেখাও যে,

$$\underline{c} = \frac{m\underline{b}+n\underline{a}}{m+n}$$

সমাধানঃ



দেওয়া আছে, A, B, C বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$।

এবং $|\overrightarrow{AC}| : |\overrightarrow{CB}| = m:n$

এখন, $|\overrightarrow{AC}| : |\overrightarrow{CB}| = m:n$

বা, $\frac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{CB}|} = \frac{m}{n}$

Jewel’s Care Life is for motto lesson

বা, $\dfrac{|\vec{CB}|}{|\vec{AC}|} = \dfrac{n}{m}$

$\therefore \dfrac{|\vec{CB}|}{|\vec{AC}|} = \dfrac{n}{m}$

আবার,

$$\frac{|\vec{AB}|}{|\vec{AC}|} = \frac{|\vec{AC}| + |\vec{CB}|}{|\vec{AC}|}$$

বা, $\dfrac{|\vec{AB}|}{|\vec{AC}|} = \dfrac{|\vec{AC}|}{|\vec{AC}|} + \dfrac{|\vec{CB}|}{|\vec{AC}|}$

বা, $\dfrac{|\vec{AB}|}{|\vec{AC}|} = 1 + \dfrac{n}{m}$

বা, $\dfrac{|\vec{AB}|}{|\vec{AC}|} = \dfrac{m+n}{m}$

বা, $\dfrac{|\vec{AC}|}{|\vec{AB}|} = \dfrac{m}{m+n}$

বা, $\vec{AC} = \left(\dfrac{m}{m+n}\right) \times \vec{AB}$

বা, $\underline{c} - \underline{a} = \left(\dfrac{m}{m+n}\right) \times \underline{b} - \underline{a}$

Jewel's Care Life is for motto lesson

বা, $\underline{c} - \underline{a} = \frac{m(\underline{b}-\underline{a})}{m+n}$

বা, $\underline{c} = \frac{m\underline{b} - m\underline{a}}{m+n} + \underline{a}$

বা, $\underline{c} = \frac{m\underline{b}}{m+n} - \frac{m\underline{a}}{m+n} + \underline{a}$

বা, $\underline{c} = \frac{m\underline{b}}{m+n} + \underline{a} - \frac{m\underline{a}}{m+n}$

বা, $\underline{c} = \frac{m\underline{b}}{m+n} + \underline{a}\left(1 - \frac{m}{m+n}\right)$

বা, $\underline{c} = \frac{m\underline{b}}{m+n} + \underline{a} \times \left(\frac{m+n-m}{m+n}\right)$

বা, $\underline{c} = \frac{m\underline{b}}{m+n} + \frac{n\underline{a}}{m+n}$

বা, $\underline{c} = \frac{m\underline{b}+n\underline{a}}{m+n}$।

$\therefore \underline{c} = \frac{m\underline{b}+n\underline{a}}{m+n}$।

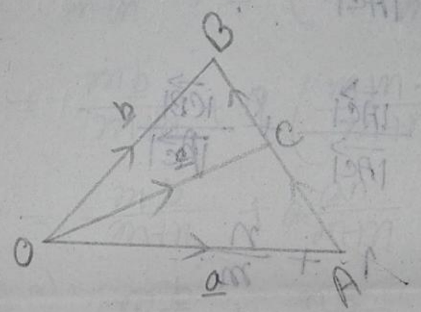
(Showed)

Jewel's Care Life is for motto lesson

ভেক্টর

① A, B, C বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ হলে, $\underline{c}$ বিন্দু যদি AB রেখাংশকে $m:n$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে, তবে প্রমাণ করো যে, $\underline{c} = \frac{m\underline{b}+n\underline{a}}{m+n}$।

সমাধানঃ



দেওয়া আছে,

A, B, C বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$,

এবং $|\vec{AC}| : |\vec{CB}| = m:n$

~~প্রমাণ করতে হবে যে,~~ $\cancel{\underline{c} = \frac{m\underline{b}+n\underline{a}}{m+n}}$,

এখন, $|\vec{AC}| : |\vec{CB}| = m:n$

বা, $\frac{|\vec{AC}|}{|\vec{CB}|} = \frac{m}{n}$

বা, $\frac{|\vec{CB}|}{|\vec{AC}|} = \frac{n}{m}$

$$\therefore \frac{|\overrightarrow{CB}|}{|\overrightarrow{AC}|} = \frac{n}{m}$$

আবার,

$$\frac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AC}|} = \frac{|\overrightarrow{AC}| + |\overrightarrow{CB}|}{|\overrightarrow{AC}|}$$

বা, $\frac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AC}|} = \frac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AC}|} + \frac{|\overrightarrow{CB}|}{|\overrightarrow{AC}|}$

বা, $\frac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AC}|} = 1 + \frac{n}{m}$

বা, $\frac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AC}|} = \frac{m+n}{m}$

বা, $\frac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{m}{m+n}$

বা, $\overrightarrow{AC} = \frac{m}{m+n} \times \overrightarrow{AB}$

বা, $\underline{c} - \underline{a} = \frac{m}{m+n} \times (\underline{b} - \underline{a})$

বা, $\underline{c} = \frac{m(\underline{b} - \underline{a})}{m+n} + \underline{a}$

বা, $\underline{c} = \frac{m\underline{b} - m\underline{a}}{m+n} + \underline{a}$

Jewel’s Care Life is for motto lesson

বা, $\underline{c} = \frac{m\underline{b}}{m+n} - \frac{m\underline{a}}{m+n} + \underline{a}$

বা, $\underline{c} = \frac{m\underline{b}}{m+n} + \underline{a} - \frac{m\underline{a}}{m+n}$

বা, $\underline{c} = \frac{m\underline{b}}{m+n} + \underline{a}\left(1 - \frac{m}{m+n}\right)$

বা, $\underline{c} = \frac{m\underline{b}}{m+n} + \underline{a}\left(\frac{m+n-m}{m+n}\right)$

বা, $\underline{c} = \frac{m\underline{b}}{m+n} + \frac{\underline{a}n}{m+n}$

বা, $\underline{c} = \frac{m\underline{b}}{m+n} + \frac{n\underline{a}}{m+n}$

$\therefore \underline{c} = \frac{m\underline{b}+n\underline{a}}{m+n}$।

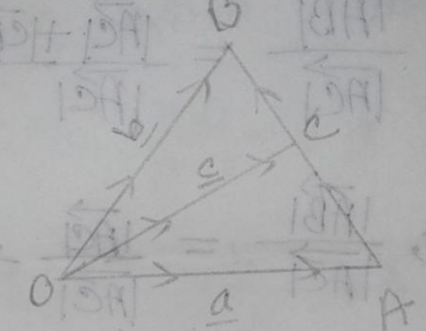
(প্রমাণিত)

ভেক্টর

* যদি A, B, C বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ হয় এবং C বিন্দু যদি AB রেখাংশকে $m:n$ অনুপাতে বিভক্ত করে, তবে দেখাও যে,

$$\underline{c} = \frac{m\underline{b} + n\underline{a}}{m+n}$$

<u>সমাধানঃ</u>



দেওয়া আছে, A, B, C বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$।

এবং $|\vec{AC}| : |\vec{CB}| = m:n$

এখন, $|\vec{AC}| : |\vec{CB}| = m:n$

বা, $\frac{|\vec{AC}|}{|\vec{CB}|} = \frac{m}{n}$

বা, $\underline{a} + \underline{d} = \underline{b} + \underline{c}$

বা, $\underline{a} + \underline{d} - \underline{c} - \underline{d} = \underline{b} + \underline{c} - \underline{c} - \underline{d}$ [উভয়পক্ষে $-\underline{c} - \underline{d}$ যোগ করে]

বা, $\underline{a} - \underline{c} = \underline{b} - \underline{d}$।

এখন, $\underline{a}$ ও $\underline{c}$ এর ধারক রেখা AC

∴ $\underline{a} - \underline{c}$ এর ধারক রেখাও AC

আবার, $\underline{b}$ ও $\underline{d}$ এর ধারক রেখা BD

∴ $\underline{b} - \underline{d}$ এর ধারক রেখাও BD

$\underline{a} - \underline{c}$ ও $\underline{b} - \underline{d}$ দুইটি সমান অশূন্য ভেক্টর হলে তাদের ধারক রেখা একই ও সমান্তরাল হবে, কিন্তু AC ও BD দুটি পৃথক অসমান্তরাল রেখা।

সুতরাং, $\underline{a} - \underline{c}$ ও $\underline{b} - \underline{d}$ দুইটি ভেক্টর অশূন্য হতে পারে না।

∴ $\underline{a} - \underline{c} = 0$ এবং $\underline{b} - \underline{d} = 0$

বা, $\underline{a} = \underline{c}$ এবং বা, $\underline{b} = \underline{d}$

Jewel's Care Life is for motto lesson

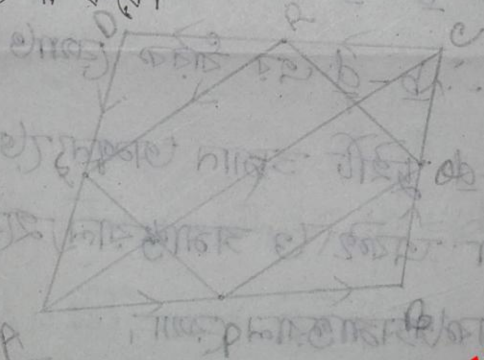
$\therefore |\underline{a}| = |\underline{c}|$ এবং $|\underline{b}| = |\underline{d}|$

সুতরাং সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

(প্রমাণিত)

⑥ ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, কোন চতুর্ভুজের সন্নিহিত বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু সংযোজক রেখাসমূহ একটি সামান্তরিক উৎপন্ন করে।

সমাধানঃ



বিশেষ নির্বচনঃ মনে করি, ABCD চতুর্ভুজের বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P, Q, R, S। P ও Q, ~~Q, R ও R~~ Q ও R, R ও S, S ও P এবং A ও C যোগ করি।

প্রমাণ করতে হবে যে, PQRS একটি সামান্তরিক।

Jewel's Care Life is for motto lesson

প্রমাণঃ মনে করি, $\vec{AB}=\underline{a}$, $\vec{BC}=\underline{b}$, $\vec{CD}=\underline{c}$, $\vec{DA}=\underline{d}$

তাহলে, $\vec{PQ}=\vec{PB}+\vec{BQ}$

$=\frac{1}{2}\vec{AB}+\frac{1}{2}\vec{BC}$

$=\frac{1}{2}\underline{a}+\frac{1}{2}\underline{b}$

$=\frac{1}{2}(\underline{a}+\underline{b})$

∴ অনুরূপভাবে, $\vec{QR}=\frac{1}{2}(\underline{b}+\underline{c})$ এবং $\vec{RS}=\frac{1}{2}(\underline{c}+\underline{d})$

এবং $\vec{SP}=\frac{1}{2}(\underline{d}+\underline{a})$।

কিন্তু, $(\underline{a}+\underline{b})+(\underline{c}+\underline{d})=\vec{AC}+\vec{CA}=\vec{AC}-\vec{AC}=\underline{0}$

$\therefore (\underline{a}+\underline{b})+(\underline{c}+\underline{d})=\underline{0}$

বা, $(\underline{a}+\underline{b})=-(\underline{c}+\underline{d})$

$\therefore \vec{PQ}=\frac{1}{2}(\underline{a}+\underline{b})=-\frac{1}{2}(\underline{c}+\underline{d})=-\vec{RS}=\vec{SR}$

$\therefore \vec{PQ}=\vec{SR}$

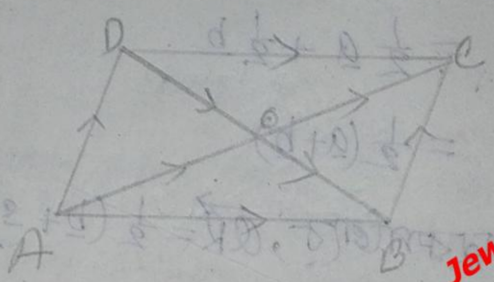
∴ PQ এবং SR সমান ও সমান্তরাল।

অনুরূপভাবে, QR এবং PS সমান ও সমান্তরাল।

∴ PQRS একটি সামান্তরিক।
(Proved)

(৪) প্রমান করো যে কোন চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডক করলে তা একটি সামান্তরিক হবে।

সমাধানঃ



মনে করি, ABCD একটি চতুর্ভুজের $\vec{AC}$ ও $\vec{DB}$ কর্ণদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমান করতে হবে যে, ABCD একটি সামান্তরিক।

প্রমানঃ ভেক্টরের ত্রিভুজ বিধি অনুযায়ী,

$$\vec{AO}+\vec{OB}=\vec{AB} \text{ এবং } \vec{DO}+\vec{OC}=\vec{DC}$$

এখন, $\vec{AO}=\vec{OC}=\frac{1}{2}\vec{AC}$

এবং $\vec{DO}=\vec{OB}=\frac{1}{2}\vec{DB}$

$\therefore \vec{AB}=\vec{AO}+\vec{OB}$

$=\frac{1}{2}\vec{AC}+\frac{1}{2}\vec{DB}$

$=\frac{1}{2}(\vec{AC}+\vec{DB})$

$\therefore \vec{DC} = \vec{DO} + \vec{OC}$

$= \frac{1}{2}\vec{DB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$

$= \frac{1}{2}(\vec{AC} + \vec{DB})$

$\therefore \vec{AB} = \vec{DC}$

$\therefore AB \parallel DC$ এবং $AB = DC$।

অর্থাৎ, AB ও DC সমান ও সমান্তরাল।

তাহলে এদের ধারক রেখাও সমান ও সমান্তরাল।

অনুরূপভাবে, $\vec{AD} = \vec{BC}$ ~~এবং~~

$\therefore \vec{AD} = BC$ এবং $AD \parallel BC$

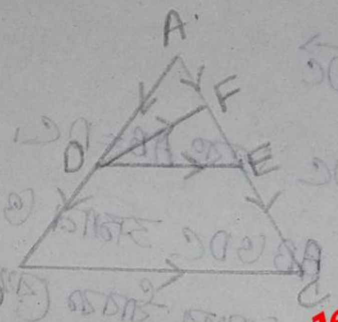
অর্থাৎ, AD ও BC ও সমান ও সমান্তরাল

সুতরাং, ABCD একটি সামান্তরিক।

(প্রমাণিত)

(৬) ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের এক বাহুর মধ্যবিন্দু থেকে অঙ্কিত অপর বাহুর সমান্তরাল রেখা তৃতীয় বাহুর মধ্যবিন্দুগামী।

সমাধানঃ



মনে করি, ABC ত্রিভুজের D, AB বাহুর মধ্যবিন্দু এবং $DE \parallel BC$।

প্রমাণ করতে হবে যে, E, AC বাহুর মধ্যবিন্দু।

প্রমাণঃ ধরা যাক, E, AC বাহুর মধ্যবিন্দু না। এক্ষেত্রে F, AC বাহুর মধ্যবিন্দু ধরি।

তাহলে, ভেক্টর বিয়োগের ত্রিভুজের বিধি অনুযায়ী

$$\vec{AF} - \vec{AD} = \vec{DF}$$

বা, $2(\vec{AF} - \vec{AD}) = 2\vec{DF}$ [2 দ্বারা গুণ করে]

বা, $2\vec{AF} - 2\vec{AD} = 2\vec{DF}$

Jewel's Care Life is for motto lesson

কিন্তু, $\vec{AC} = 2\vec{AF}$ এবং $\vec{AB} = 2\vec{AD}$

$\therefore \vec{AC} - \vec{AB} = 2\vec{DF}$

আবার, ভেক্টর বিয়োগের ত্রিভুজ বিধি অনুযায়ী,

$\vec{AC} - \vec{AB} = \vec{BC}$

$\therefore \vec{BC} = 2\vec{DF}$

অর্থাৎ, $BC = 2DF$

কিন্তু, $BC \parallel DE$.

সুতরাং, DF ও DE অভিন্ন রেখা। অর্থাৎ, E ও F অভিন্ন বিন্দু।

সুতরাং E, AC-এর মধ্যবিন্দু।

(প্রমাণিত)