জ্যামিতি বৃত্ত

উপপাদ্য ১। বৃত্তের কেন্দ্র ও ব্যাস ভিন্ন কোনো জ্যা এর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাংশ ঐ জ্যা এর ওপর লম্ব।

উপপাদ্য ২। বৃত্তের সমান সমান জ্যা কেন্দ্র থেকে সমদূরবর্তী।

উপপাদ্য ৩। বৃত্তের কেন্দ্র থেকে সমদূরবর্তী সকল জ্যা পরস্পর সমান।

উপপাদ্য ৪

বৃত্তের একই চাপের ওপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ।

উপপাদ্য ৫

বৃত্তের একই চাপের উপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণগুলো পরস্পর সমান।

উপপাদ্য ৬

অর্ধবৃত্তস্থ কোণ এক সমকোণ

উপপাদ্য ৭

বৃত্তে অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজের যেকোনো দুইটি বিপরীত কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ।

উপপাদ্য ৮

কোনো চতুর্ভুজের দুইটি বিপরীত কোণ সম্পূরক হলে তার শীর্ষবিন্দু চারটি সমবৃত্ত হয়।

উপপাদ্য ৯

বৃত্তের যেকোনো বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক স্পর্শকবিন্দুগামী ব্যাসার্ধের ওপর লম্ব।

উপপাদ্য ১০

বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু থেকে বৃত্তে দুইটি স্পর্শক টানলে, ঐ বিন্দু থেকে স্পর্শ বিন্দুদ্বয়ের দূরত্ব সমান।

উপপাদ্য ১১

দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে বহিঃস্পর্শ করলে, তাদের কেন্দ্রদ্বয় ও স্পর্শ বিন্দু সমরেখ।

Helped By : Laisa Khan (Student of Salauddin High School)

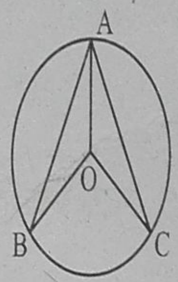
10 minute school

অনুশীলনী ৮·১

১। প্রমাণ কর যে, কোনো বৃত্তের দুইটি জ্যা পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করলে তাদের ছেদবিন্দু বৃত্তটির কেন্দ্র হবে।

২। প্রমাণ কর যে, দুইটি সমান্তরাল জ্যা এর মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা কেন্দ্রগামী এবং জ্যাদ্বয়ের ওপর লম্ব।

৩। কোনো বৃত্তের AB ও AC জ্যা দুইটি A বিন্দুগামী ব্যাসার্ধের সাথে সমান কোণ উৎপন্ন করে। প্রমাণ কর যে, $AB = AC$.



৪। চিত্রে O বৃত্তের কেন্দ্র এবং জ্যা AB = জ্যা AC.
প্রমাণ কর যে, $\angle BAO = \angle CAO$.

৫। কোনো বৃত্ত একটি সমকোণী ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলো দিয়ে যায়। দেখাও যে, বৃত্তটির কেন্দ্র অতিভুজের মধ্যবিন্দু।

৬। দুইটি সমকেন্দ্রিক বৃত্তের একটির AB জ্যা অপর বৃত্তকে C ও D বিন্দুতে ছেদ করে।
প্রমাণ কর যে, $AC = BD$.

৭। বৃত্তের দুইটি সমান জ্যা পরস্পরকে ছেদ করলে দেখাও যে, তাদের একটির অংশদ্বয় অপরটির অংশদ্বয়ের সমান।

৮। প্রমাণ কর যে, বৃত্তের সমান জ্যা এর মধ্যবিন্দুগুলো সমবৃত্ত।

৯। দেখাও যে, ব্যাসের দুই প্রান্ত থেকে তার বিপরীত দিকে দুইটি সমান জ্যা অঙ্কন করলে তারা সমান্তরাল হয়।

১০। দেখাও যে, ব্যাসের দুই প্রান্ত থেকে তার বিপরীত দিকে দুইটি সমান্তরাল জ্যা আঁকলে তারা সমান হয়।

১১। দেখাও যে, বৃত্তের দুইটি জ্যা এর মধ্যে বৃহত্তর জ্যা-টি ক্ষুদ্রতর জ্যা অপেক্ষা কেন্দ্রের নিকটতর।

অনুশীলনী ৮.২

১। O কেন্দ্রবিশিষ্ট কোনো বৃত্তে $ABCD$ একটি অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজ। AC, BD কর্ণদ্বয় E বিন্দুতে ছেদ করলে প্রমাণ কর যে, $\angle AOB + \angle COD = 2\angle AEB$.

২। $ABCD$ বৃত্তে AB ও CD জ্যা দুইটি পরস্পর E বিন্দুতে ছেদ করেছে। দেখাও যে, ΔAED ও ΔBEC সদৃশকোণী।

৩। O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে $\angle ADB + \angle BDC =$ এক সমকোণ। প্রমাণ কর যে, A ও B এবং C এক সরলরেখায় অবস্থিত।

৪। AB ও CD দুইটি জ্যা বৃত্তের অভ্যন্তরে E বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ কর যে, AC ও BD চাপদ্বয় কেন্দ্রে যে দুইটি কোণ উৎপন্ন করে, তাদের সমষ্টি $\angle AEC$ এর দ্বিগুণ।

৫। দেখাও যে, বৃত্তস্থ ট্রাপিজিয়ামের তির্যক বাহুদ্বয় পরস্পর সমান।

৬। AB ও CD কোনো বৃত্তের দুইটি জ্যা এবং P ও Q যথাক্রমে তাদের দ্বারা ছিন্ন উপচাপ দুইটির মধ্যবিন্দু। PQ জ্যা AB ও CD জ্যাকে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে। দেখাও যে, $AD = AE$.

অনুশীলনী ৮.৪

১। O কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু P থেকে বৃত্তে দুইটি স্পর্শক টানা হল। প্রমাণ কর যে, OP সরলরেখা স্পর্শ-জ্যা এর লম্বদ্বিখণ্ডক।

২। দেওয়া আছে, O বৃত্তের কেন্দ্র এবং PA ও PB স্পর্শকদ্বয় বৃত্তকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে স্পর্শ করেছে। প্রমাণ কর যে, PO, $\angle APB$ কে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

৩। প্রমাণ কর যে, দুইটি বৃত্ত এককেন্দ্রিক হলে এবং বৃহত্তর বৃত্তটির কোনো জ্যা ক্ষুদ্রতর বৃত্তটিকে স্পর্শ করলে উক্ত জ্যা স্পর্শবিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

৪। AB কোনো বৃত্তের ব্যাস এবং BC ব্যাসার্ধের সমান একটি জ্যা। যদি A ও C বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয় পরস্পর D বিন্দুতে মিলিত হয়, তবে প্রমাণ কর যে, ACD একটি সমবাহু ত্রিভুজ।

৫। প্রমাণ কর যে, কোনো বৃত্তের পরিলিখিত চতুর্ভুজের যেকোনো দুইটি বিপরীত বাহু কেন্দ্রে যে দুইটি কোণ ধারণ করে, তারা পরস্পর সম্পূরক।

বৃত্ত

উপপাদ্য:

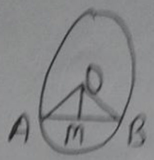
① সাধারণ নির্বচন (প্রশ্ন)
② চিত্র।
③ বিশেষ নির্বচন
④ অঙ্কন/অঙ্কনের বিবরণ। → সম্পাদ্য
⑤ প্রমাণ।

সর্বসমহ

১। তিনটি বাহুই সমান। ≡
২। " কোণই " । ≡
৩। দুই বাহু এক কোণ সমান। ≡
৪। এক " দুই " " । ≡

উদাহরণ-১

Hints-1



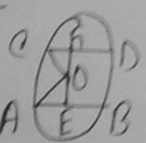
=> O, A এবং O, C (Δ)

=> ≅

=> রৈখিক যুগল কোণ।

Hints:2 O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে AB জ্যা, OM সংযোজক রেখা। যার OA, OC বৃত্তের ব্যাসার্ধ, এবং $\Delta AOM \cong \Delta BOM$, সেই সাথে $\angle OMA$, $\angle OMB$ রৈখিক যুগল ও সমান। $\therefore OM \perp AB$। (Proved)

উদাহরণ-(২,৩)



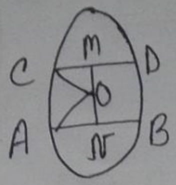
Hints-1

=> O, A, O, C

=> $AE = CF$, $OA = OC$, $\angle AEO = \angle CFO$, ≅

Hints-2 O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে $AB = CD$ জ্যা $OE \perp AB$ এবং $OF \perp CD$। যার ফলে $AE = CF$, $OA = OC$, $\angle OEA = \angle OFC$, $\therefore OE = OF$ অসমদূরবর্তী।

উপপাদ্য-২



প্রমাণ:

$ON \perp AB$ হওয়ায়, $AN = BN$

বা, $AN = \frac{1}{2} AB$

$OM \perp CD$ হওয়ায়, $CM = DM$

বা, $CM = \frac{1}{2} CD$

$\therefore AN = CM$ [$\because AB = CD$]

এখন, সমকোণী ত্রিভুজ OAN এবং OCM এর ক্ষেত্রে

$\angle ONA = \angle OMC$

এবং, $OA = OC$ [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

$\therefore \Delta OAN \cong \Delta OCM$

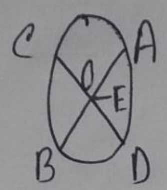
অর্থাৎ, $OM = ON$

সুতরাং, AB ও CD জ্যাদ্বয় কেন্দ্র থেকে সমদূরবর্তী।

(Proved)

অনু-৮.১

১।



প্রমাণ:

এখন, $OE \perp CD$ হওয়ায়,

$\angle COE = 1$ সমকোণ

এবং $OE \perp AB$ হওয়ায়,

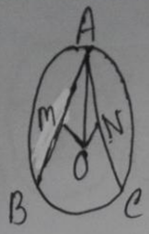
$\angle AOE = 1$ সমকোণ।

$\therefore \angle COE + \angle AOE \neq$ দুই সমকোণ

$\therefore$ E বিন্দুটি বৃত্তের কেন্দ্র নয়।

$\therefore$ O-ই হবে বৃত্তের নির্দিষ্ট কেন্দ্র।

গ।



প্রমাণ: ΔOMA এবং ΔONA এর ক্ষেত্রে,

$\angle OMA = \angle ONA = 1$ সমকোণ

$\angle MAO = \angle NAO$ [কল্পনা]

$AO = AO$ [সাধারণ বাহু]

$\therefore \Delta OMA \cong \Delta ONA$

অতএব, $AM = AN$

কিন্তু, $\frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} AC$

$\therefore AB = AC$

(Proved)

গ)

প্রমাণ :

$\triangle OBD$ এবং $\triangle ODC$ - এ

$OD = OD$ [সাধারণ বাহু]

$BD = DC$ [BC এর মধ্যবিন্দু]

$\angle ODB = \angle ODC = 1$ সমকোণ,

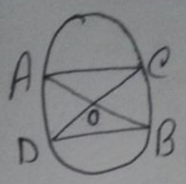
$\therefore \triangle OBD \cong \triangle ODC$

$\therefore OB = OC$

অতএব, $OB = OC = OA$ [AC এর মধ্যবিন্দু O]

(Proved)

১০।



প্রমাণ: ΔOAC এবং ΔOBD -এ

$OA = OB$

$OD = OC$

এবং $\angle BAC = \angle ABD = 1$ সমকোণ

$\therefore \Delta OAC \cong \Delta OBD$

$\therefore AC = BD$

(Proved)

উপপাদ্য: ৪

প্রমাণ:

$\triangle AOB$ এর ক্ষেত্রে,

বহিঃস্থ $\angle BOD = \angle BAO + \angle OBA$

$OA = OB$

$\therefore \angle BOD = \angle BAO + \angle BAO$

$\therefore \angle BOD = 2\angle BAO$

অনুরূপভাবে, $\angle COD = 2\angle CAO$

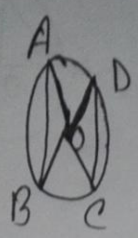
$\therefore \angle BOD + \angle COD = 2\angle BAO + 2\angle CAO$

বা, $\angle BOC = 2(\angle BAO + \angle CAO)$

বা, $\angle BOC = 2\angle BAC$ (Proved)

বা, $\frac{1}{2}\angle BOC = \angle BAC$ (Proved) (অনুরূপ)

উপপাদ্য-৫



প্রমাণ:

BC চাপের উপর দন্ডায়মান,

কেন্দ্রস্থ $\angle BOC = 2\angle BAC$

আবার, একইভাবে,

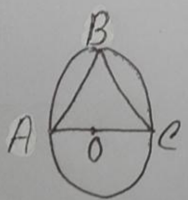
কেন্দ্রস্থ $\angle BOC = 2\angle BDC$

$\therefore 2\angle BAC = 2\angle BDC$

$\therefore \angle BAC = \angle BDC$

(Proved)

উপপাদ্য-৬



প্রমাণ:

AC চাপের উপর দন্ডায়মান,

কেন্দ্রস্থ $\angle AOC$ = বৃত্তস্থ $2\angle ABC$

বা, 2 সমকোণ = $2\angle ABC$

বা, $\angle ABC$ = ১ সমকোণ

অনু-৮.২

২

প্রমাণ:

BD চাপের ক্ষেত্রে,

$\angle DAB = \angle BCD$

বা, $\angle DAE = \angle BCE$

AC চাপের ক্ষেত্রে,

$\angle ABC = \angle CDA$

বা, $\angle EBC = \angle EDA$

$\therefore \Delta ADE$ এবং ΔBCE এর ক্ষেত্রে,

1) $\angle DAE = \angle DCE$

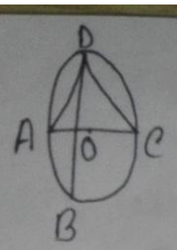
2) $\angle EBC = \angle EDA$

3) $\angle AED = \angle BEC$ [বিপ্রতীপ কোণ]

$\therefore \Delta AED$ এবং, ΔBEC সদৃশকোণী ত্রিভুজ।

(Proved)

(৬)



প্রমাণ:

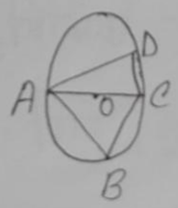
$\angle ADB + \angle BDC =$ ১ সমকোণ

$\therefore \angle ADC =$ ১ সমকোণ

যা, O কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তের AC ব্যাসের উপর দণ্ডায়মান।

$\therefore$ A, O, C একই সরলরেখায় অবস্থিত।

উপপাদ্য - ৭



প্রমাণ:

AC চাপের ক্ষেত্রে,

কেন্দ্রস্থ $\angle AOC =$ বৃত্তস্থ $2\angle ADC$

আবার,

কেন্দ্রস্থ $\angle AOC =$ বৃত্তস্থ $2\angle ABC$

$\therefore \angle AOC + \angle AOC = 2(\angle ADC + \angle ABC)$

বা, ৪ সমকোণ $= 2(\angle ADC + \angle ABC)$

$\therefore \angle ADC + \angle ABC = 2$ সমকোণ

$\therefore$ অনুরূপভাবে $\angle BAD + \angle BCD = 2$ সমকোণ.

(Proved)

বিকল্প:

প্রমাণ: অর্ধবৃত্ত ADC - এর ক্ষেত্রে,

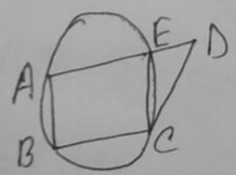
$\angle ADC = 1$ সমকোণ

আবার, অর্ধবৃত্ত ABC এর ক্ষেত্রে,

$\angle ABC = 1$ সমকোণ.

$\therefore \angle ADC + \angle ABC = 2$ সমকোণ.

উদাহরণ - ৮



প্রমাণ: ABC বৃত্তের ক্ষেত্রে,

$\angle ABC + \angle ADC = 2$ সমকোণ

আবার,

$\angle ABC + \angle AEC =$ দুই সমকোণ.

$\therefore \angle AEC = \angle ADC$

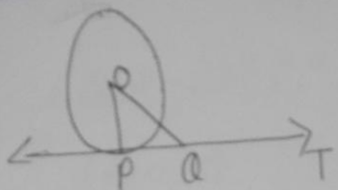
কিন্তু, $\angle AEC > \angle ADC$

অর্থাৎ, D বিন্দুটি E বিন্দুর সাথে মিলিত হবে।

∴ ABCD উল্লিখিত চতুর্ভুজটিই হবে বৃত্তস্থ।

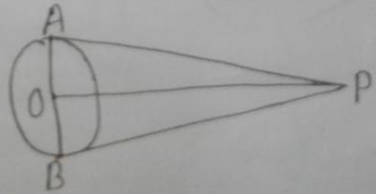
(Proved)

উদাহরণ-৯



প্রমাণ: O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে PT লম্ব এবং তা বৃত্তের উপরস্থ P বিন্দুতে পড়ে। কিন্তু, Q বিন্দুটি বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু এবং $OQ > OP$। অর্থাৎ, ক্ষুদ্রতম রেখা OP ই হবে স্পর্শক বিন্দুগামী ব্যাসার্ধ যার উপর PT লম্ব।

উদাহরণ-১০



প্রমাণ: সমকোণী ΔAOP এবং ΔBOP-এর ক্ষেত্রে,

$\angle OAP = \angle OBP =$ ১ সমকোণ

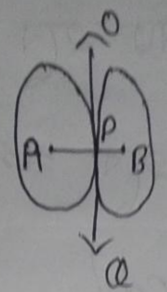
$OA = OB$

$OP = OP$

$\therefore \Delta AOP \cong \Delta BOP$

$\therefore AP = BP$ (Proved)

উদাহরণ-১১



প্রমাণ: A কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে AP স্পর্শক বিন্দুগামী ব্যাসার্ধ এবং, OPQ স্পর্শক,

∴ $OPQ \perp AP$

∴ $\angle APO$ = ১ সমকোণ

∴ তদ্রূপ, $\angle BPO$ = ১ সমকোণ

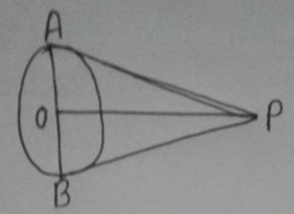
∴ $\angle APO + \angle BPO$ = ২ সমকোণ

∴ A, P, B সমরেখ।

(Proved)

অনু - ৮.৪

২|



প্রমাণ: সমকোণী ΔAOP এবং ΔBOP -এর ক্ষেত্রে,

$\angle OAP = \angle OBP =$ ১ সমকোণ

$OA = OB$

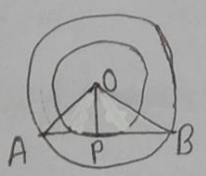
$OP = OP$

$\therefore \Delta AOP \cong \Delta BOP$

$\therefore \angle APO = \angle BPO$

(Proved)

৩|



প্রমাণ: ক্ষুদ্রতর বৃত্তের ক্ষেত্রে, OP স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ এবং APB লম্ব বা স্পর্শক,

$\therefore APB \perp OP$

$\therefore \angle APO = \angle BPO =$ ১ সমকোণ

∴ বৃহত্তর বৃত্তের ক্ষেত্রে,

$OA = OB$

$OP = OP$

এবং, $\angle APO = \angle BPO =$ ১ সমকোণ

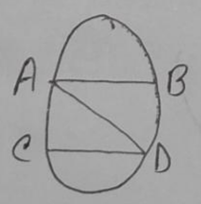
∴ $\triangle APO \cong \triangle BPO$

∴ $AP = BP$

(Proved)

— অনু - ৮.৫

১৪|



প্রমাণ:

AC চাপের ক্ষেত্রে, $\angle ADC$

BD চাপের ক্ষেত্রে, $\angle BAD$

এবং, $AB \parallel CD$

∴ $\angle ADC = \angle BAD$ [একান্তর]

∴ AC চাপ = BD চাপ