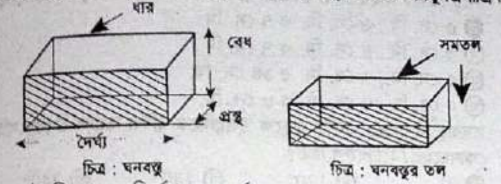
▸▸| ষষ্ঠ অধ্যায় : রেখা, কোণ ও ত্রিভুজ
(Lines, Angles and Triangles)

▸▸| অনুশীলনী ৬·১

১. স্থান, তল, রেখা এবং বিন্দুর ধারণা দাও।

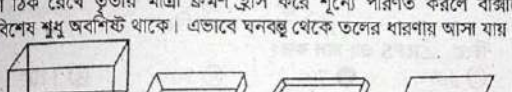
উত্তর : স্থান : আমাদের চারপাশে বিস্তৃত স্থান সীমাহীন। স্থান বলতে কোনো নির্দিষ্ট আকারের বস্তু যতটুকু জায়গা দখল করে তা বোঝায়। বিভিন্ন বস্তু স্থানের যে অংশ জুড়ে থাকে সে স্থানটুকু আকার, আকৃতি, অবস্থান, বৈশিষ্ট্য থেকেই জ্যামিতিক ধ্যান–ধারণার উদ্ভব

তল : যে বস্তুর দৈর্ঘ্য প্রস্থ ও বেধ আছে তা হলো ঘনবস্তু। অর্থাৎ ঘনবস্তু ত্রিমাত্রিক।



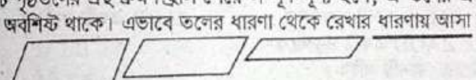
চিত্র : ঘনবস্তু   চিত্র : ঘনবস্তুর তল

ঘনবস্তুর উপরিভাগ তল নির্দেশ করে অর্থাৎ প্রত্যেক ঘনবস্তু এক বা একাধিক তল দ্বারা সীমাবদ্ধ থাকে। যেমন– একটি বাক্সের ছয়টি পৃষ্ঠ ছয়টি তলের অংশ। তল দ্বিমাত্রিক; এর শুধু দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ আছে, কোনো বেধ নাই। একটি বাক্সের দুইটি মাত্রা ঠিক রেখে তৃতীয় মাত্রা ক্রমশ হ্রাস করে শূন্যে পরিণত করলে বাক্সটির পৃষ্ঠবিশেষ শুধু অবশিষ্ট থাকে। এভাবে ঘনবস্তু থেকে তলের ধারণায় আসা যায়।



চিত্র : ঘনবস্তু থেকে তলের ধারণা

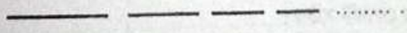
রেখা : দুইটি তল পরস্পরকে ছেদ করলে ছেদস্থলে একটি রেখা বা রেখার উৎপত্তি হয়। যেমন–বাক্সের দুইটি পৃষ্ঠতল একাধারে বাক্সের একটি রেখায় মিলিত হয়। রেখা একমাত্রিক; এর শুধু দৈর্ঘ্য আছে, প্রস্থ বা বেধ নাই। বাক্সের একটি পৃষ্ঠতলের প্রস্থ ক্রমশ হ্রাস পেয়ে সম্পূর্ণ শূন্য হলে, ঐ তলের একটিমাত্র রেখা অবশিষ্ট থাকে। এভাবে তলের ধারণা থেকে রেখার ধারণায় আসা যায়।



চিত্র : তলের ধারণা থেকে রেখার ধারণা

বিন্দু : দুইটি রেখা পরস্পর ছেদ করলে বিন্দুর উৎপত্তি হয়। অর্থাৎ দুইটি রেখার ছেদস্থান বিন্দু দ্বারা নির্দিষ্ট হয়।

বিন্দুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও বেধ নেই, শুধু অবস্থান আছে। একটি রেখার দৈর্ঘ্য ক্রমশ হ্রাস পেয়ে অবশেষে শূন্য হলে, একটি বিন্দুমাত্র অবশিষ্ট থাকে।



চিত্র : রেখার ধারণা থেকে বিন্দুর ধারণা।

২. ইউক্লিডের পাঁচটি স্বীকার্য বর্ণনা কর।

উত্তর : নিচে ইউক্লিড প্রদত্ত পাঁচটি স্বীকার্য বর্ণনা করা হলো :

স্বীকার্য ১ : একটি বিন্দু থেকে অন্য একটি বিন্দু পর্যন্ত একটি সরলরেখা আঁকা যায়।

স্বীকার্য ২ : খণ্ডিত রেখাকে যথেচ্ছভাবে বাড়ানো যায়।

স্বীকার্য ৩ : যেকোনো কেন্দ্র ও যেকোনো ব্যাসার্ধ নিয়ে বৃত্ত আঁকা যায়।

স্বীকার্য ৪ : সকল সমকোণ পরস্পর সমান।

স্বীকার্য ৫ : একটি সরলরেখা দুইটি সরলরেখাকে ছেদ করলে এবং ছেদকের একই পাশের অন্তঃস্থ কোণদ্বয়ের সমষ্টি দুই সমকোণের চেয়ে কম হলে, রেখা দুইটিকে যথেচ্ছভাবে বর্ধিত করলে যেদিকে কোণের সমষ্টি দুই সমকোণের চেয়ে কম, সেদিকে মিলিত হয়।

৩. পাঁচটি আপতন স্বীকার্য বর্ণনা কর।

উত্তর : পাঁচটি আপতন স্বীকার্য হলো :

স্বীকার্য ১ : জগত (Space) সকল বিন্দুর সেট এবং সমতল ও সরলরেখা এই সেটের উপসেট।

স্বীকার্য ২ : দুইটি ভিন্ন বিন্দুর জন্য একটি ও কেবল একটি সরলরেখা আছে, যাতে উভয় বিন্দু অবস্থিত।

স্বীকার্য ৩ : একই সরলরেখায় অবস্থিত নয় এমন তিনটি ভিন্ন ভিন্ন বিন্দুর জন্য একটি ও কেবল একটি সমতল আছে, যাতে বিন্দু তিনটি অবস্থিত।

স্বীকার্য ৪ : কোনো সমতলের দুইটি ভিন্ন বিন্দু দিয়ে যায় এমন সরলরেখা ঐ সমতলে অবস্থিত।

স্বীকার্য ৫ : (ক) জগতে একাধিক সমতল বিদ্যমান। (খ) প্রত্যেক সমতলে একাধিক সরলরেখা অবস্থিত। (গ) প্রত্যেক সরলরেখার বিন্দুসমূহ এবং বাস্তব সংখ্যাসমূহকে এমনভাবে সম্পর্কিত করা যায় যেন, রেখাটির প্রত্যেক বিন্দুর সঙ্গে একটি অনন্য বাস্তব সংখ্যা সংশ্লিষ্ট হয় এবং প্রত্যেক বাস্তব সংখ্যার সঙ্গে রেখাটির একটি অনন্য বিন্দু সংশ্লিষ্ট হয়।

৪. দূরত্ব স্বীকার্যটি বর্ণনা কর।

উত্তর : দূরত্ব স্বীকার্য *নিম্নরূপ :*

(ক) P ও Q বিন্দুযুগল একটি অনন্য বাস্তব সংখ্যা নির্দিষ্ট করে থাকে। সংখ্যাটিকে P বিন্দু থেকে Q বিন্দুর দূরত্ব বলা হয় এবং PQ দ্বারা সূচিত করা হয়।

(খ) P ও Q ভিন্ন বিন্দু হলে PQ সংখ্যাটি ধনাত্মক। অন্যথায় $PQ = 0$।

(গ) P থেকে Q এর দূরত্ব এবং Q থেকে P এর দূরত্ব একই। অর্থাৎ $PQ = QP$।

$PQ = QP$ হওয়াতে এই দূরত্বকে সাধারণত P বিন্দু ও Q বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব বলা হয়। ব্যবহারিকভাবে, এই দূরত্ব পূর্ব নির্ধারিত এককের সাহায্যে পরিমাপ করা হয়।

৫. রুলার স্বীকার্যটি বর্ণনা কর।

উত্তর : স্বীকার্য ৭ কে রুলার স্বীকার্য বলা হয়।

রুলার সীকার্য : কোনো সরলরেখায় অবস্থিত বিন্দুসমূহের সেট এবং বাস্তব সংখ্যার সেটের মধ্যে এমনভাবে এক–এক মিল স্থাপন করা যায়, যেন রেখাটির যেকোনো বিন্দু P, Q এর জন্য $PQ = |a - b|$ হয়, যেখানে মিলকরণের ফলে P ও Q এর সঙ্গে যথাক্রমে a ও b বাস্তব সংখ্যা সংশ্লিষ্ট হয়।

৬. সংখ্যারেখা বর্ণনা কর।

উত্তর : সংখ্যারেখা : বাস্তবসংখ্যাকে সরলরেখার উপর বিন্দুর সাহায্যে চিত্রের মাধ্যমে দেখানো হলে ঐ সরলরেখাকে সংখ্যারেখা বলে। অর্থাৎ যে রেখার বিন্দুর সাথে সংখ্যার এক–এক মিল দেখানো যায়, তাকে সংখ্যারেখা বলে।

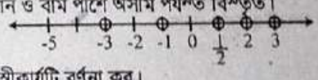
বৈশিষ্ট্য নিম্নরূপ :

i. একটি সংখ্যারেখার একটি মূল বিন্দু থাকে যাকে 0 (শূন্য) দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

ii. সংখ্যারেখার ডানদিকের সংখ্যাগুলো ধনাত্মক সংখ্যা।

iii. সংখ্যারেখার বামদিকের সংখ্যাগুলো ঋণাত্মক সংখ্যা।

iv. সংখ্যারেখা ডান ও বাম পাশে অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত।

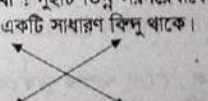


৭. রুলার স্থাপন স্বীকার্যটি বর্ণনা কর।

উত্তর : স্বীকার্য ৮ কে রুলার স্থাপন স্বীকার্য বলা হয়। **রুলার স্থাপন স্বীকার্য :** যে কোনো সরলরেখা AB কে এমনভাবে সংখ্যারেখায় পরিণত করা যায় যে, A এর স্থানাঙ্ক O এবং B এর স্থানাঙ্ক ধনাত্মক হয়।

৮. পরস্পরছেদী সরলরেখা ও সমান্তরাল সরলরেখার সংজ্ঞা দাও।

উত্তর : পরস্পরচ্ছেদী সরলরেখা : দুইটি ভিন্ন সরলরেখাকে পরস্পরচ্ছেদী বলা হয় যদি উভয় রেখায় অবস্থিত একটি সাধারণ বিন্দু থাকে।

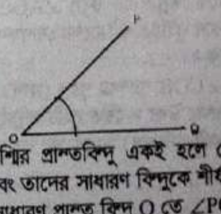


সমান্তরাল সরলরেখা : সমতলস্থ দুইটি ভিন্ন সরলরেখাকে সমান্তরাল বলা হয়, যদি তাদের কোনো সাধারণ বিন্দু না থাকে।

▸▸| অনুশীলনী ৬·২

১. কোণের অভ্যন্তর ও বহির্ভাগের সংজ্ঞা দাও।

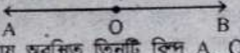
সমাধান



একই সমতলে দুইটি রশ্মির প্রান্তবিন্দু একই হলে কোণ তৈরি হয়। রশ্মি দুইটিকে কোণের বাহু এবং তাদের সাধারণ বিন্দুকে শীর্ষবিন্দু বলে। চিত্রে, OP ও OQ রশ্মিদ্বয় তাদের সাধারণ প্রান্ত বিন্দু O তে $\angle POQ$ উৎপন্ন হয়েছে। O বিন্দুটি $\angle POQ$ এর শীর্ষবিন্দু। OP এর যে পার্শ্বে Q আছে সেই পার্শ্বে এবং OQ এর যে পার্শ্বে P আছে সেই পার্শ্বে অবস্থিত সকল বিন্দুর সেটকে $\angle POQ$ এর অভ্যন্তর বলা হয়। কোণটির অভ্যন্তরে অথবা কোনো বাহুতে অবস্থিত নয় এমন সকল বিন্দুর সেটকে এর বহির্ভাগ বলা হয়।

২. যদি একই সরলরেখাস্থ তিনটি ভিন্ন বিন্দু হয়, তবে চিত্রের উৎপন্ন কোণগুলোর নামকরণ কর।

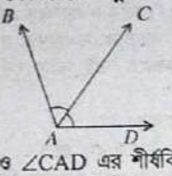
সমাধান একই সরলরেখাস্থ তিনটি ভিন্ন বিন্দু একটি সরল কোণ উৎপন্ন করে।



চিত্রে, একই সরলরেখায় অবস্থিত তিনটি বিন্দু A, O এবং B সরল কোণ উৎপন্ন করেছে।

৩. সন্নিহিত কোণের সংজ্ঞা দাও এবং এর বাহুগুলো চিহ্নিত কর।

সমাধান সন্নিহিত কোণ : সমতলস্থ দুইটি কোণের যদি একই শীর্ষবিন্দু হয় ও তাদের একটি সাধারণ রশ্মি থাকে এবং কোণদ্বয় সাধারণ বিন্দুর রশ্মির বিপরীত পাশে অবস্থান করে। তবে ঐ কোণদ্বয়কে সন্নিহিত কোণ বলে।



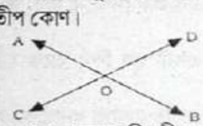
চিত্রে, A বিন্দুটি ∠BAC ও ∠CAD এর শীর্ষবিন্দু। A বিন্দু ∠BAC ও ∠CAD এর শীর্ষবিন্দু। A বিন্দু ∠BAC ও ∠CAD উৎপন্নকারী রশ্মিগুলোর মধ্যে AC সাধারণ রশ্মি।

∴ সন্নিহিত ∠BAC ও ∠CAD এর বাহুগুলো হলো AB, AC ও AD; যেখানে AC সাধারণ বাহু।

৪. চিত্রসহ সংজ্ঞা দাও :

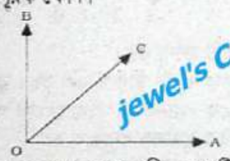
বিপ্রতীপ কোণ, পূরক কোণ, সম্পূরক কোণ, সমকোণ, সূক্ষ্মকোণ এবং স্থূলকোণ।

বিপ্রতীপ কোণ : কোনো কোণের বাহুদ্বয়ের বিপরীত রশ্মিদ্বয় যে কোণ তৈরি করে তা ঐ কোণের বিপ্রতীপ কোণ।



চিত্রে ∠BOD ও ∠AOC পরস্পর বিপ্রতীপ কোণ।

পূরক কোণ : দুইটি কোণের পরিমাপের যোগফল এক সমকোণ হলে কোণ দুইটির একটি অপরটির পূরক কোণ।



চিত্রে ∠AOB একটি সমকোণ। OC রশ্মি কোণটির বাহুদ্বয়ের অভ্যন্তরে অবস্থিত। এর ফলে ∠AOC এবং ∠COB এই দুইটি কোণ উৎপন্ন হলো। কোণ দুইটির পরিমাপের যোগফল ∠AOB এর পরিমাপের সমান অর্থাৎ এক সমকোণ।

সুতরাং ∠AOC এবং ∠COB পরস্পর পূরক কোণ।

সম্পূরক কোণ : দুইটি কোণের পরিমাপের যোগফল দুই সমকোণ হলে কোণ দুইটি পরস্পর সম্পূরক কোণ।

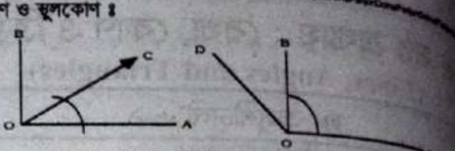
চিত্রে, AB একটি সরলরেখায় O অন্তঃস্থ বিন্দু। OC একটি রশ্মি যা OA রশ্মি ও OB রশ্মি থেকে ভিন্ন। এর ফলে ∠AOC এবং ∠COB এ দুইটি কোণ উৎপন্ন হলো। কোণ দুইটির পরিমাপের যোগফল ∠AOB এর পরিমাপের সমান, অর্থাৎ দুই সমকোণ।

সুতরাং ∠AOC এবং ∠COB পরস্পর পূরক কোণ।

সমকোণ : যদি একই রেখার উপর অবস্থিত দুইটি সন্নিহিত কোণ পরস্পর সমান হয় তবে কোণ দুইটির প্রত্যেকটি সমকোণ। সমকোণের বাহু দুইটি পরস্পরের উপর লম্ব।

চিত্রে, ∠BAC এবং ∠CAD পরস্পর সমান হলে তাদের প্রত্যেকটিকে সমকোণ বলে।

সূক্ষ্মকোণ ও স্থূলকোণ :



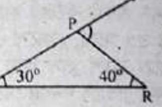
এক সমকোণ থেকে ছোট কোণকে সূক্ষ্মকোণ এবং এক সমকোণ থেকে বড় কিন্তু দুই সমকোণ থেকে ছোট কোণকে স্থূলকোণ বলে। চিত্রে ∠AOC সূক্ষ্মকোণ এবং ∠AOD স্থূলকোণ।

▶▶ অনুশীলনী ৬.৩

১. নিচে তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য দেওয়া হলো। কোন ক্ষেত্রে ত্রিভুজ অঙ্কন সম্ভব?
- (ক) ৫ সে. মি., ৬ সে. মি. ও ৭ সে. মি.
- (খ) ৩ সে. মি., ৪ সে. মি. ও ৭ সে. মি.
- (গ) ৫ সে. মি., ৭ সে. মি. ও ১৪ সে. মি.
- (ঘ) ২ সে. মি., ৪ সে. মি. ও ৮ সে. মি.

২. সমবাহু ত্রিভুজের একটি বাহুকে উভয়দিকে বর্ধিত করলে উৎপন্ন বহিঃস্থ কোণদ্বয়ের বিয়োগফল কত?

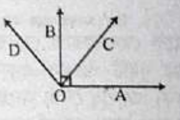
(ক) 0° (খ) 120° (গ) 180° (ঘ) 240°



৩. চিত্রে, ∠RPS এর মান কত?

(ক) 40° (খ) 70° (গ) 90° (ঘ) 110°

৪.



উপরের চিত্রে —

i. ∠AOC একটি সূক্ষ্মকোণ ii. ∠AOB একটি সমকোণ

iii. ∠AOD একটি প্রবৃদ্ধকোণ

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i (খ) ii (গ) i ও ii (ঘ) ii ও iii

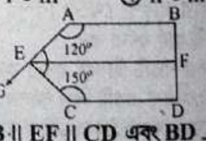
৫. একটি ত্রিভুজকে অপর একটি ত্রিভুজের উপর স্থাপন করলে যদি ত্রিভুজ দুটি সর্বতোভাবে মিলে যায় তবে–

i. ত্রিভুজ দুটি সর্বসম ii. ত্রিভুজ দুটির অনুরূপ বাহু সমান

iii. অনুরূপ কোণ সমান

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii



চিত্রে AB ∥ EF ∥ CD এবং BD ⊥ CD

৬. ∠AEF এর মান কত?

(ক) 30° (খ) 60° (গ) 240° (ঘ) 270°

৭. ∠BFE এর মান নিচের কোনটি?

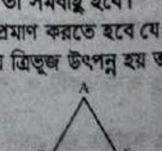
(ক) 30° (খ) 60° (গ) 90° (ঘ) 120°

৮. ∠CEF + ∠CEG = কত?

(ক) 60° (খ) 120° (গ) 180° (ঘ) 210°

৯. প্রমাণ কর যে, সমবাহু ত্রিভুজের বাহুগুলোর মধ্যবিন্দুসমূহ যোগ করলে যে ত্রিভুজ উৎপন্ন হয়, তা সমবাহু হবে।

সমাধান সাধারণ নির্বচন : প্রমাণ করতে হবে যে, সমবাহু ত্রিভুজের বাহুগুলোর মধ্যবিন্দুসমূহ যোগ করলে যে ত্রিভুজ উৎপন্ন হয় তা সমবাহু হবে।



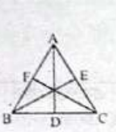
বিশেষ নির্বচন : মনে করি, সমবাহু ΔABC এর AB, BC ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E ও F; D, E; E, F ও D, F যোগ করি। ফলে ΔDEF উৎপন্ন হলো। প্রমাণ করতে হবে যে, ΔDEF সমবাহু।

প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
১. ΔBDE ও ΔCFE-এ $BE = CE$ $BD = CF$ এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle B$ = অন্তর্ভুক্ত $\angle C$ $\therefore \Delta BDE \cong \Delta CFE$ $\therefore DE = EF$	[E, BC এর মধ্যবিন্দু] [সমান সমান বাহুর অর্ধেক] [সমবাহু ত্রিভুজের প্রত্যেক কোণ সমান।] [বাহু–কোণ–বাহু উপপাদ্য]
২. অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় $\therefore \Delta BDE \cong \Delta ADF$ $\therefore DE = DF$	
৩. (১) ও (২) থেকে পাই, $DE = EF = DF$ অর্থাৎ ΔDEF সমবাহু। (প্রমাণিত)	

১০. প্রমাণ কর যে, সমবাহু ত্রিভুজের মধ্যমা তিনটি পরস্পর সমান।

সমাধান **সাধারণ নির্বচন :** প্রমাণ করতে হবে যে, সমবাহু ত্রিভুজের মধ্যমা তিনটি পরস্পর সমান।



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ΔABC সমবাহু অর্থাৎ $AB = BC = CA$. AD, BE এবং CF যথাক্রমে BC, CA এবং AB বাহুর উপর মধ্যমা। প্রমাণ করতে হবে, $AD = BE = CF$.

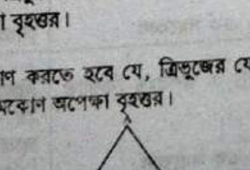
প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
১. ΔABD ও ΔACF-এ $AB = AC$ $BD = AF$ এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle B$ = অন্তর্ভুক্ত $\angle A$ $\Delta ABD \cong \Delta ACF$ $\therefore AD = CF$	[সমবাহু ত্রিভুজের সমান সমান বাহু] [সমান সমান বাহুর অর্ধেক] [সমবাহু ত্রিভুজের প্রত্যেক কোণ সমান] [বাহু–কোণ–বাহু উপপাদ্য]
২. ΔBCF ও ΔACF-এ $BC = AC$ $CE = AF$ এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle C$ = অন্তর্ভুক্ত $\angle A$ $\Delta BCE \cong \Delta ACF$ $\therefore BE = CF$	[সমবাহু ত্রিভুজের সমান সমান বাহু] [সমান সমান বাহুর অর্ধেক] [সমবাহু ত্রিভুজের প্রত্যেক কোণ সমান] [বাহু–কোণ–বাহু উপপাদ্য]
৩. (১) ও (২) থেকে পাই, $AD = BE = CF$ (প্রমাণিত)	

১১. প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের যেকোনো দুইটি বহিঃস্থ কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর।

সমাধান

সাধারণ নির্বচন : প্রমাণ করতে হবে যে, ত্রিভুজের যে কোনো দুইটি বহিঃস্থ কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর।

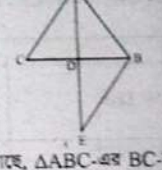


বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ΔABC এর BC বাহুকে D ও E পর্যন্ত বর্ধিত করা হলো। ফলে বহিঃস্থ $\angle ACD$ ও $\angle ABE$ উৎপন্ন হলো। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle ABE + \angle ACD >$ দুই সমকোণ।

ধাপ	যথার্থতা
১. $\angle ABE = \angle ACB + \angle A$ এবং $\angle ACD = \angle ABC + \angle A$ $\therefore \angle ABE + \angle ACD = \angle ACB + \angle A = \angle ABC + \angle A$	[ত্রিভুজের একটি বাহু বর্ধিত করলে উৎপন্ন বহিঃস্থ কোণ অন্তঃস্থ বিপরীত কোণ দুটির সমষ্টির সমান] [অনুরূপ]
২. ΔABC-এ $\angle ABC + \angle A + \angle ACB$ = দুই সমকোণ	[ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ]
৩. (১) ও (২) থেকে পাই, $\angle ABE + \angle ACD$ = দুই সমকোণ + $\angle A$ $\therefore \angle ABE + \angle ACD >$ দুই সমকোণ (প্রমাণিত)	

১২. ΔABC এর BC বাহুর মধ্যবিন্দু D হলে, প্রমাণ কর যে, $AB + AC > 2AD$

সমাধান



বিশেষ নির্বচন : দেওয়া আছে, ΔABC-এর BC-বাহুর মধ্যবিন্দু D। A, D যোগ করা হলো। প্রমাণ করতে হবে যে, $AB + AC > 2AD$।

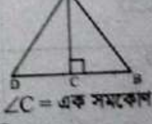
অঙ্কন : AD-কে E পর্যন্ত করি যেন, $DE = AD$ হয়। B, E যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
১. ΔADC এবং ΔBDE-এ $AD = DE$ $\therefore CD = BD$ এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle ADC$ = অন্তর্ভুক্ত $\angle BDE$ $\therefore \Delta ADC \cong \Delta BDE$ $\therefore AC = BE$	[অঙ্কনানুসারে] [D, BC-এর মধ্যবিন্দু] [বিপ্রতীপ কোণ] [বাহু–কোণ–বাহু উপপাদ্য]
২. ΔABE-এ, $AB + BE > AE$ বা, $AB + AC > AD + DE$ বা, $AB + AC > AD + AD$ $\therefore AB + AC > 2AD$ (প্রমাণিত)	[ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর সমষ্টি উহার তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর।] [$\because BE = AC$ এবং $AE = AD + DE$] [$\because DE = AD$]

১৩. চিত্রে, দেওয়া আছে, $\angle C$ = এক সমকোণ এবং $\angle B = 2\angle A$ প্রমাণ কর যে, $AB = 2BC$.

সমাধান



বিশেষ নির্বচন : ΔACB-এ $\angle C$ = এক সমকোণ এবং $\angle B = 2\angle A$। প্রমাণ করতে হবে যে, $AB = 2BC$.

অঙ্কন : BC কে D পর্যন্ত বর্ধিত করি যেন $CD = BC$ হয় এবং D, A যোগ করি।

প্রমাণ :

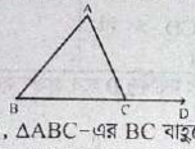
ধাপ	যথার্থতা
১. ΔACD এবং ΔACB-এ $CD = BC$ AC সাধারণ বাহু এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle ACD$ = অন্তর্ভুক্ত $\angle ACB$ $\therefore \Delta ACD \cong \Delta ACB$ $\therefore \angle ADC = \angle ABC$ এবং $\angle DAC = \angle BAC$	[অঙ্কন অনুসারে] [$\because$ প্রত্যেকে এক সমকোণ]

(২) এখন, $\angle B = \angle ABC = 2\angle A = 2\angle BAC = \angle BAC + \angle DAC = \angle BAD$	
$\therefore \Delta ABD$-এর	
$\angle ADB = \angle ABD = \angle BAD$	
$\therefore AB = AD = BD$	
কিন্তু $BD = 2BC$	[$\because$ C, BD এর মধ্যবিন্দু]
$\therefore AB = BD = 2BC$	
অর্থাৎ, $AB = 2BC$ (প্রমাণিত)	

১৪. প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের একটি বাহু বর্ধিত করলে যে বহিঃস্থ কোণ উৎপন্ন হয়, তা বিপরীত অন্তঃস্থ কোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান।

সমাধান

সাধারণ নির্বচন : প্রমাণ করতে হবে যে, ত্রিভুজের একটি বাহু বর্ধিত করলে যে বহিঃস্থ কোণ উৎপন্ন হয় তা বিপরীত অন্তঃস্থ কোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান।



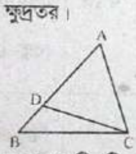
বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ΔABC–এর BC বাহুকে D পর্যন্ত বর্ধিত করায় বহিঃস্থ $\angle ACD$ উৎপন্ন হয়। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle ACD = \angle A + \angle B$

প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
১. ΔABC-এ $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$	[ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি = 180°]
২. $\angle ACD + \angle ACB = 180°$ বা, $\angle ACD + \angle C = 180°$	[রৈখিক যুগল কোণ]
৩. (১) ও (২) থেকে পাই, $\angle ACD + \angle C = \angle A + \angle B + \angle C$ $\therefore \angle ACD = \angle A + \angle B$. (প্রমাণিত)	[উভয় পক্ষ থেকে $\angle C$ বাদ দিয়ে]

১৫. প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর অন্তর তার তৃতীয় বাহু অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

সমাধান সাধারণ নির্বচন : প্রমাণ করতে হবে যে, ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর অন্তর তার তৃতীয় বাহু অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।



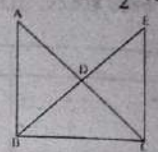
বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ΔABC-এর তিনটি বাহু AB, BC এবং AC যেখানে $AB > BC > AC$ অর্থাৎ AC ক্ষুদ্রতম বাহু। সুতরাং প্রমাণ করায় যথেষ্ট হবে যে, $AB - BC < AC$

অঙ্কন : AB বাহু থেকে AC-এর সমান করে AD অংশ কাটি। C, D যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
১. ΔADC-এ $AC = AD$ $\therefore \angle ADC = \angle ACD$	[অঙ্কনানুসারে] [সমান সমান বাহুর বিপরীত কোণ]
২. $\angle BDC > \angle ACD$ এবং $\angle ADC > \angle BCD$ $\therefore \angle BDC + \angle ADC > \angle ACD + \angle BCD$ বা, $\angle BDC + \angle ACD > \angle ACD + \angle BCD$ বা, $\angle BDC > \angle BCD$ $\therefore BC > BD$ বা, $BD < BC$ বা, $AB - AD < BC$ $\therefore AB - AC < BC$. (প্রমাণিত)	[ত্রিভুজের বহিঃস্থ কোণ অন্তঃস্থ বিপরীত কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর] [$\because \angle ADC = \angle ACD$] [ত্রিভুজের বৃহত্তর কোণের বিপরীত বাহু ক্ষুদ্রতম কোণের বিপরীত বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর] [$\because AD = AC$]

১৬. চিত্রে, ABC ত্রিভুজের $\angle B$ = এক সমকোণ এবং D, অতিভুজ এর মধ্যবিন্দু। প্রমাণ কর যে, $BD = \frac{1}{2}AC$



সমাধান বিশেষ নির্বচন : দেওয়া আছে, ABC ত্রিভুজের $\angle B$ = এক সমকোণ এবং D অতিভুজ AC এর মধ্যবিন্দু। B, D যোগ করা হলো। প্রমাণ করতে হবে যে, $BD = \frac{1}{2}AC$

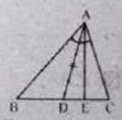
অঙ্কন : BD-কে E পর্যন্ত এরূপভাবে বর্ধিত করি যেন, $DE = BD$ হয়। C, E যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
১. ΔABD ও ΔCDE-এ $AD = DC$ $BD = DE$ এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle ADB$ = অন্তর্ভুক্ত $\angle CDE$ $\Delta ABD \cong \Delta CDE$ $\therefore AB = CE$ এবং $\angle DAB = \angle DCE$ অর্থাৎ $\angle CAB = \angle ACE$.	[$\because$ D, AC-এর মধ্যবিন্দু] [অঙ্কনানুসারে] [বিপ্রতীপ কোণ] [বাহু–কোণ–বাহু উপপাদ্য]
২. কিন্তু $\angle CAB$ এবং $\angle ACE$ একান্তর কোণ। সুতরাং $CE \parallel BA$ এবং BC এদের ছেদক। যেহেতু $\angle ABC$ = এক সমকোণ। $\therefore \angle BCE$ = এক সমকোণ।	
৩. ΔABC ও ΔBCE–এ $AB = EC$ $BC = BC$ এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle ABC$ = অন্তর্ভুক্ত $\angle BCE$ $\therefore \Delta ABC \cong \Delta BCE$ $\therefore BE = AC$ বা, $BD + DE = AC$ বা, $BD + BD = AC$ বা, $2BD = AC$ $\therefore BD = \frac{1}{2}AC$ (প্রমাণিত)	 [সাধারণ বাহু] [প্রত্যেক সমকোণ] [বাহু–কোণ–বাহু উপপাদ্য] [$\because BD = DE$]

১৭. ΔABC এ $AB > AC$ এবং $\angle A$ এর সমদ্বিখণ্ডক AD, BC বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $\angle ADB$ স্থূলকোণ।

সমাধান



বিশেষ নির্বচন : ΔABC এর $AB > AC$. $\angle BAC$-এর সমদ্বিখণ্ডক AD, BC কে D বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle ADB$ স্থূলকোণ।

অঙ্কন : A বিন্দু হতে $AE \perp BC$ আঁকি যা BC কে E বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ :

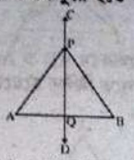
ধাপ	যথার্থতা
১. $AE \perp BC$ $\therefore \angle AED$ = এক সমকোণ	[অঙ্কনানুসারে]
২. ΔADE-এর বহিঃস্থ $\angle ADB$ > অন্তঃস্থ বিপরীত $\angle AED$. $\therefore \angle ADB$ > এক সমকোণ।	[ত্রিভুজের বহিঃস্থ কোণ অন্তঃস্থ বিপরীত কোণ দুটির প্রত্যেকটি অপেক্ষা বৃহত্তর] [$\angle AED$ = এক সমকোণ]
৩. $\angle ADB + \angle ADC$ = দুই সমকোণ $\therefore \angle ADB$ < দুই সমকোণ।	[রৈখিক যুগল কোণ]
৪. যেহেতু, $\angle ADB$ > এক সমকোণ ও $\angle ADB$ > দুই সমকোণ।	

সুতরাং $\angle ADB$ স্থূলকোণ। (প্রমাণিত)

১৮. প্রমাণ কর যে, কোনো রেখাংশের লম্বদ্বিখণ্ডকের উপরিস্থিত যেকোনো বিন্দু উক্ত রেখাংশের প্রান্ত বিন্দুদ্বয় হতে সমদূরবর্তী।

সমাধান

সাধারণ নির্বচন : প্রমাণ করতে হবে যে, কোনো রেখাংশের লম্বদ্বিখণ্ডকের যে কোনো বিন্দু উক্ত রেখাংশের প্রান্ত বিন্দুদ্বয় হতে সমদূরবর্তী।



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, AB রেখাংশের লম্বদ্বিখণ্ডক CD এর উপর একটি বিন্দু P এবং CD, AB কে Q বিন্দুতে ছেদ করে। P, A ও P, B যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, P থেকে A ও B বিন্দুর দূরত্ব সমান।

প্রমাণ :

১. CD রেখা AB-এর মধ্যবিন্দু Q দিয়ে যায়। $\therefore AQ = BQ$ তদুপরি $\angle AQP = \angle BQP = 1$ সমকোণ	[∵ CD, AB-এর লম্বদ্বিখণ্ডক]
২. P বিন্দু AB রেখাংশের উপর অবস্থিত হলে, P ও Q একই বিন্দু হবে। অর্থাৎ P বিন্দু A ও B থেকে সমদূরবর্তী। $\therefore PA = PB$	
৩. P বিন্দু AB রেখাংশের বাইরে হলে, ΔPAQ ও ΔPBQ-এ $AQ = BQ$ PQ উভয় ত্রিভুজের সাধারণ বাহু। এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle AQP$ = অন্তর্ভুক্ত $\angle BQP$ $\Delta PAQ \cong \Delta PBQ$ $\therefore PA = PB$ (প্রমাণিত)	[বাহু-কোণ-বাহু উপপাদ্য]

১৯. ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ যার $\angle A$ = এক সমকোণ। BC বাহুর মধ্যবিন্দু D.

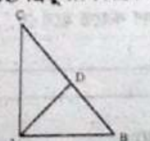
ক. প্রদত্ত তথ্য অনুযায়ী ABC ত্রিভুজটি অঙ্কন কর। ২

খ. দেখাও যে, $AB + AC > 2AD$ ৪

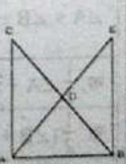
গ. প্রমাণ কর যে, $AD = \frac{1}{2} BC$. ৪

✔ ১৯ নং প্রশ্নের উত্তর ▸

ক প্রদত্ত তথ্য অনুযায়ী ABC ত্রিভুজটি নিম্নরূপ :



খ বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABC একটি ত্রিভুজ যার BC বাহুর মধ্যবিন্দু D. দেখাতে হবে যে, $AB + AC > 2AD$.

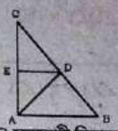


অঙ্কন : A, D যোগ করি এবং AD কে E পর্যন্ত বর্ধিত করি যেন AD = DE হয়। B, E যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
(১) ΔADC ও ΔBDE এ $BD = CD$ $AD = DE$ এ অন্তর্ভুক্ত $\angle ADC$ = অন্তর্ভুক্ত $\angle EDB$ $\therefore \Delta ADC \cong \Delta BDE$ $\therefore AC = BE$	[∵ D, BC এর মধ্যবিন্দু] [অঙ্কনানুসারে] [বিপ্রতীপ কোণ]
(২) এখন, ΔABE এ $AB + BE > AE$	
বা, $AB + AC > AD + DE$	[∵ AC = BE এবং AE = AD + DE]
বা, $AB + AC > AD + AD$ $\therefore AB + AC > 2\,AD$ (দেখানো হলো)	[∵ DE = AD]

গ



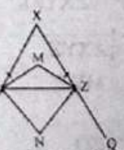
বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABC সমকোণী ত্রিভুজে $\angle A$ = এক সমকোণ এবং D, BC এর মধ্যবিন্দু। প্রমাণ করতে হবে যে, $AD = \frac{1}{2} BC$

অঙ্কন : AC এর মধ্যবিন্দু E নিই। A, D; D, E যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
(১) ED, BC ও AC এর মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা।	[ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোগ সরলরেখাংশ তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল।
$\therefore ED \parallel AB$ AB, AC এর উপর লম্ব বলে ED, AC এর উপর লম্ব।	
(২) ΔCED ও ΔAED এ $AE = CE$. ED সাধারণ বাহু।	[∵ E, AC এর মধ্যবিন্দু]
$\angle CED = \angle AED$ $\therefore \Delta CED \cong \Delta AED$ $\therefore AD = DC$	[উভয়ে সমকোণ] [বাহু-কোণ-বাহু উপপাদ্য]
বা, $AD = \frac{1}{2} BC$ $\therefore AD = \frac{1}{2} BC$ (প্রমাণিত)	[∵ D, BC এর মধ্যবিন্দু]

২০.



চিত্রে YM ও ZM যথাক্রমে $\angle Y$ ও $\angle Z$ এর অন্তর্দ্বিখণ্ডক এবং YN ও ZN যথাক্রমে $\angle Y$ ও $\angle Z$ এর বহির্দ্বিখণ্ডক।

ক. দেখাও যে, $\angle MYZ + \angle NYZ = 90°$. ২

খ. প্রমাণ কর যে, $\angle YNZ = 90° - \frac{1}{2}\angle X$. ৪

গ. প্রমাণ কর যে, Y, M, Z ও N বিন্দু চারটি সমবৃত্ত। ৪

✔ ২০ নং প্রশ্নের উত্তর ▸

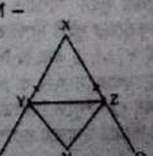
ক চিত্র হতে পাই, $\angle MYZ + \angle NYZ = \frac{1}{2}\angle XYZ + \frac{1}{2}\angle PYZ$

$$= \frac{1}{2}(\angle XYZ + \angle PYZ)$$

$$= \frac{1}{2}\angle XYP = \frac{1}{2} \times 180°$$

$= 90°$ (দেখানো হলো)

খ প্রদত্ত চিত্রে আলোচ্য অংশ –

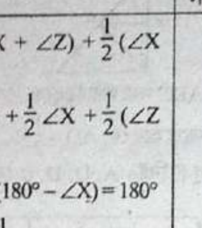


বিশেষ নির্বচন : চিত্রে, ΔXYZ এর $\angle Y$ ও $\angle Z$ এর বহির্দ্বিখণ্ডকদ্বয় পরস্পর N বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle YNZ = 90° - \frac{1}{2}\angle X$

প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
ΔYNZ হতে পাই, $\angle YNZ + \angle NYZ + \angle NZY = 180^\circ$	[ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি 180°]
বা, $\angle YNZ + \frac{1}{2}\angle PYZ + \frac{1}{2}\angle QZY = 180^\circ$	[$\because$ YN ও ZN যথাক্রমে $\angle PYZ$ ও $\angle QYZ$ এর সমদ্বিখণ্ডক]
বা, $\angle YNZ + \frac{1}{2}(\angle X + \angle Z) + \frac{1}{2}(\angle X + \angle Y) = 180^\circ$ বা, $\angle YNZ + \frac{1}{2}\angle X + \frac{1}{2}\angle X + \frac{1}{2}(\angle Z + \angle Y) = 180^\circ$ বা, $\angle YNZ + \angle X + \frac{1}{2}(180^\circ - \angle X) = 180^\circ$ বা, $\angle YNZ + 90^\circ + \frac{1}{2}\angle X = 180^\circ$ $\therefore \angle YNZ = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle X$ (প্রমাণিত)	

গ



বিশেষ নির্বচন : দেওয়া আছে, ΔXYZ এর $\angle XYZ$ ও $\angle XZY$ এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় M বিন্দুতে এবং বহিঃখণ্ডকদ্বয় N বিন্দুতে মিলিত হয়। প্রমাণ করতে হবে যে, Y, M, Z এবং N বিন্দু চারটি সমবৃত্ত।

অঙ্কন: M ও N যোগ করি।

প্রমাণ:

ধাপ	যথার্থতা
(১) $\angle ZYN = \frac{1}{2}\angle ZYP$ $= \frac{1}{2}(180^\circ - \angle XYZ)$ $= 90^\circ - \frac{1}{2}\angle XYZ$ $= 90^\circ - \angle MYZ$	[যেহেতু ΔXYZ এর বহিঃর্দ্বিখণ্ডকদ্বয় N বিন্দুতে মিলিত হয়।] [$\angle MYZ = \frac{1}{2}\angle XYZ$]
আবার, $\angle YZN = \frac{1}{2}\angle YZQ$ $= \frac{1}{2}(180^\circ - \angle XYZ)$ $= 90^\circ - \frac{1}{2}\angle XZY$ $= 90^\circ - \angle MZY$	[একই কারণে] [$\angle MZY = \frac{1}{2}\angle XZY$]
(২) ΔYZN-এ $\angle YNZ + \angle ZYN + \angle YZN = 180^\circ$ বা, $\angle YNZ + 90^\circ - \angle MYZ + 90^\circ - \angle MZY = 180^\circ$ বা, $\angle YNZ + 180^\circ - (\angle MYZ + \angle MZY) = 180^\circ$ বা, $\angle YNZ - (180^\circ - \angle YMZ) = 0$ বা, $\angle YNZ + \angle YMZ = 180^\circ$	[মান বসিয়ে]

আমরা জানি, বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের দুইটি বিপরীত কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ। যেহেতু এখানে, YMZN চতুর্ভুজের দুইটি বিপরীত কোণ $\angle YMZ$ এবং $\angle YNZ$ এর সমষ্টি দুই সমকোণ তাই Y, M, Z এবং N বিন্দু চারটি সমবৃত্ত। (প্রমাণিত)

২১. ΔABC এর D ও E যথাক্রমে AB ও AC এর মধ্যবিন্দু এবং $\angle B$ ও $\angle C$ এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় O বিন্দুতে মিলিত হয়েছে।

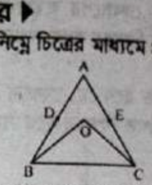
ক. উদ্দীপকের তথ্যগুলো চিত্রের মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $DE \parallel BC$ এবং $DE = \frac{1}{2}BC$. ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $\angle BOC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A$. ৪

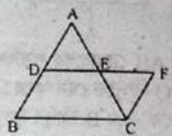
✔ ২১ নং প্রশ্নের উত্তর ▶

ক উদ্দীপকের তথ্যগুলো নিম্নে চিত্রের মাধ্যমে প্রকাশ করা হলো –



অঙ্কিত ΔABC-এ D ও E যথাক্রমে AB ও AC এর মধ্যবিন্দু এবং $\angle B$ ও $\angle C$ এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় O বিন্দুতে মিলিত হয়েছে।

খ



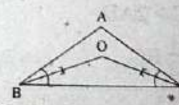
বিশেষ নির্বচন : ΔABC এর D ও E যথাক্রমে AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু। প্রমাণ করতে হবে যে, $DE \parallel BC$ এবং $DE = \frac{1}{2}BC$.

অঙ্কন: D ও E যোগ করে বর্ধিত করি যেন EF = DE হয়। C, F যোগ করি।

প্রমাণ:

ধাপ	যথার্থতা
১. ΔADE ও ΔCEF এর মধ্যে $AE = EC$, $DE = EF$ $\angle AED = \angle CEF$ $\Delta ADE \cong \Delta CEF$ $\therefore \angle ADE = \angle EFC$ এবং $\angle DAE = \angle ECF$. $\therefore DF \parallel BC$ এবং $DE \parallel BC$.	[দেওয়া আছে] [অঙ্কনানুসারে] [বিপ্রতীপ কোণ] [বাহু-কোণ-বাহু উপপাদ্য] [একান্তর কোণ]
(২) আবার, $DF = BC$ বা, $DE + EF = BC$ বা, $DE + DE = BC$ বা, $2DE = BC$ বা, $DE = \frac{1}{2}BC$ (প্রমাণিত)	

গ



বিশেষ নির্বচন : ΔABC-এর $\angle B$ ও $\angle C$ এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle BOC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A$

প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
(১) ΔABC-এ $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$	[$\because$ ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি 180°]
বা, $\frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B + \frac{1}{2}\angle C = 90^\circ$	
বা, $\frac{1}{2}(\angle B + \angle C) = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A$	
(২) ΔBOC হতে পাই, $\angle BOC + \angle OBC + \angle OCB = 180^\circ$ বা, $\angle BOC + \frac{1}{2}\angle B + \frac{1}{2}\angle C = 180^\circ$ বা, $\angle BOC + \frac{1}{2}(\angle B + \angle C) = 180^\circ$ বা, $\angle BOC + 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A = 180^\circ$ $\therefore \angle BOC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A$ (প্রমাণিত)	[$\because$ ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ] [$\because$ OB ও OC যথাক্রমে $\angle B$ ও $\angle C$ এর সমদ্বিখণ্ডক]

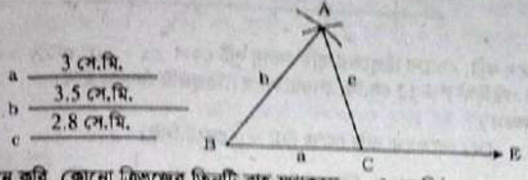
▸▸| সপ্তম অধ্যায় : ব্যবহারিক জ্যামিতি
(Practical Geometry)

▸▸| অনুশীলনী ৭.১

১. নিম্নে প্রদত্ত উপাত্ত নিয়ে ত্রিভুজ অঙ্কন কর :

ক. তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 3 সে.মি., 3.5 সে.মি., 2.8 সে.মি.।

সমাধান



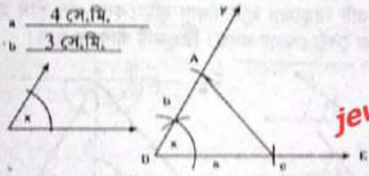
মনে করি, কোনো ত্রিভুজের তিনটি বাহু যথাক্রমে a = 3 সে.মি., b = 3.5 সে.মি. এবং c = 2.8 সে.মি. দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন :

১. যেকোনো রশ্মি BE থেকে BC = a অংশ কেটে নিই।
২. BC এর B ও C বিন্দুকে কেন্দ্র করে যথাক্রমে b ও c সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে BC এর একই পাশে দুটি বৃত্তচাপ আঁকি। মনে করি, বৃত্তচাপদ্বয় পরস্পর A বিন্দুতে ছেদ করে।
৩. A, B ও A, C যোগ করি। তাহলে, ΔABC-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

খ. দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য 4 সে.মি., 3 সে.মি. এবং অন্তর্ভুক্ত কোণ 60°।

সমাধান



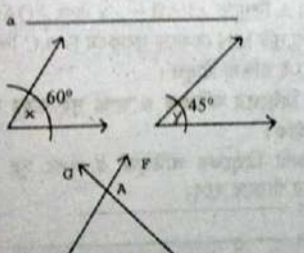
মনে করি, কোনো ত্রিভুজের দুটি বাহু a = 4 সে.মি. ও b = 3 সে.মি. এবং a ও b বাহুর অন্তর্ভুক্ত কোণ ∠x = 60° দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন :

১. যেকোনো রশ্মি BE থেকে BC = a কেটে নিই। BC এর B বিন্দুতে ∠CBF = ∠x আঁকি।
২. BF থেকে BA = b অংশ কেটে নিই।
৩. A, C যোগ করি। তাহলে ΔABC-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

গ. দুইটি কোণ 60° ও 45° এবং এদের সংলগ্ন বাহুর দৈর্ঘ্য 5 সে.মি.।

সমাধান



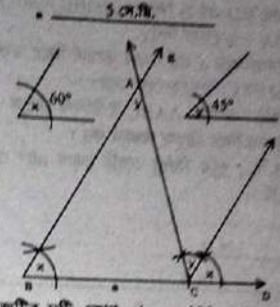
মনে করি, কোনো ত্রিভুজের একটি বাহু a = 5 সে.মি. এবং এই বাহু সংলগ্ন দুটি কোণ ∠x = 60° ও ∠y = 45° দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন :

১. যেকোনো রশ্মি BE থেকে BC = a কেটে নিই। BC এর B ও C বিন্দুতে যথাক্রমে ∠CBF = ∠x ও ∠BCG = ∠y আঁকি।
২. BF ও CG রশ্মিদ্বয় পরস্পর A বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে ΔABC-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

ঘ. দুইটি কোণ 60° ও 45° এবং 45° কোণের বিপরীত বাহুর দৈর্ঘ্য 5 সে.মি.।

সমাধান



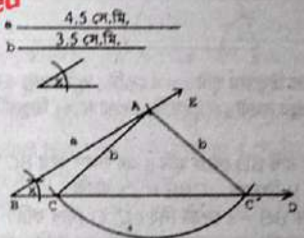
মনে করি, ত্রিভুজটির দুটি কোণ ∠x = 60°, ∠y = 45° এবং ∠y এর বিপরীত বাহু a = 5 সে.মি. দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন :

১. যেকোনো রশ্মি BD থেকে BC = a অংশ কেটে নিই।
২. BC রেখাংশের B ও C বিন্দুতে যথাক্রমে ∠CBE = ∠x ও ∠DCF = ∠x আঁকি।
৩. CF রেখাংশের C বিন্দুতে ∠FCA = ∠y আঁকি।
৪. CA, BE রেখাংশের A বিন্দুতে ছেদ করে।
তাহলে, ΔABC-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

ঙ. দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 4.5 সে.মি. ও 3.5 সে.মি. এবং দ্বিতীয় বাহুর বিপরীত কোণ 30°।

সমাধান



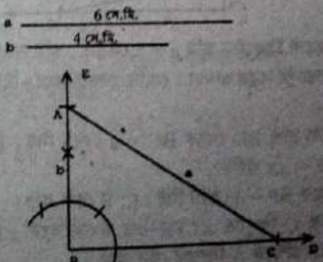
মনে করি, a = 4.5 সে.মি. ও b = 3.5 সে.মি. যথাক্রমে একটি ত্রিভুজের দুটি বাহু এবং b বাহুর বিপরীত কোণ ∠x = 30° দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন :

১. যেকোনো রশ্মি BD এর B বিন্দুতে ∠DBE = ∠x আঁকি। BE থেকে BA = a কেটে নিই।
২. A বিন্দুকে কেন্দ্র করে b এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ আঁকি। বৃত্তচাপটি BD কে C ও C' বিন্দুতে ছেদ করে।
৩. A, C ও A, C' যোগ করি।
তাহলে, ΔABC বা ΔABC'–ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

চ. সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও একটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 6 সে.মি. ও 4 সে.মি.।

সমাধান



মনে করি, a = 6 সে.মি. ও b = 4 সে.মি. যথাক্রমে কোনো সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ এবং একটি বাহুর দৈর্ঘ্য। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন :

১. যে কোনো রশ্মি BD এর B বিন্দুতে $\angle DBE = 90^\circ$ আঁকি।

২. BE থেকে BA = b কেটে নিই।

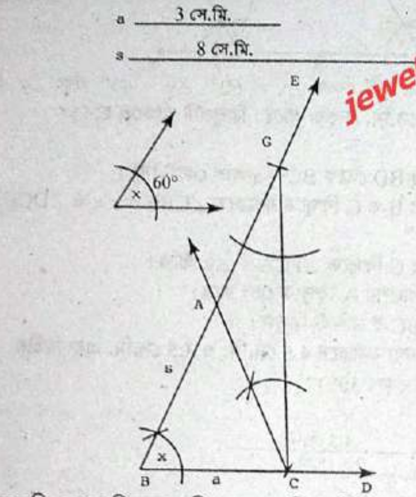
৩. A বিন্দুকে কেন্দ্র করে a এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ আঁকি। বৃত্তচাপটি BD কে C বিন্দুতে ছেদ করে।

৪. A, C যোগ করি। তাহলে, ΔABC-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

২. নিম্নে প্রদত্ত উপাত্ত নিয়ে ত্রিভুজ অঙ্কন কর :

ক. ভূমি 3·5 সে.মি., ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ 60° ও অপর দুই বাহুর সমষ্টি 8 সে.মি.।

সমাধান



মনে করি, কোনো ত্রিভুজের ভূমি a = 4 সে.মি., ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ $\angle x = 60^\circ$ এবং অপর দুই বাহুর সমষ্টি s = 8 সে.মি. দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন :

১. যেকোনো রশ্মি BD থেকে ভূমি a এর সমান করে BC অংশ কেটে নিই।

২. BC-এর B বিন্দুতে $\angle CBE = \angle x$ আঁকি।

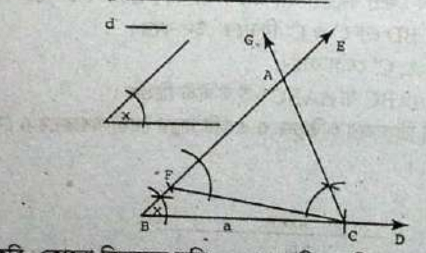
৩. BE থেকে BG = s কেটে নিই। C, G যোগ করি।

৪. CG-এর C বিন্দুতে $\angle GCA = \angle BGC$ আঁকি। CA রশ্মি BG কে A বিন্দুতে ছেদ করে।

তাহলে, ΔABC-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

খ. ভূমি 5 সে.মি., ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ 45° ও অপর দুই বাহুর অন্তর 1 সে.মি.।

সমাধান



মনে করি, কোনো ত্রিভুজের ভূমি a = 5 সে.মি., ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ $\angle x = 45^\circ$ এবং অপর দুই বাহুর অন্তর 1 সে.মি. দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন :

১. যেকোনো রশ্মি BD থেকে BC = a কেটে নিই। BC-এর B বিন্দুতে $\angle CBE = \angle x$ আঁকি।

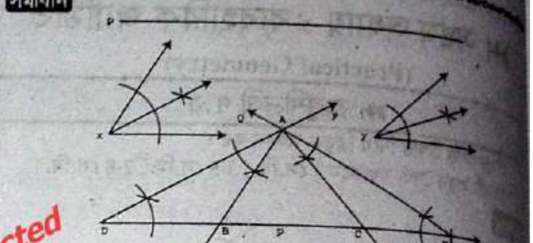
২. BE থেকে BF = d কেটে নিই। C, F যোগ করি।

৩. CF–এর C বিন্দুতে $\angle CFE$–এর সমান করে $\angle FCG$ আঁকি। CG রশ্মি BE রশ্মিকে A বিন্দুতে ছেদ করে।

তাহলে, ΔABC-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

গ. ভূমি সংলগ্ন কোণ দুইটি যথাক্রমে 60° ও 45° ও পরিসীমা 12 সে.মি.।

সমাধান



মনে করি, কোনো ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন দুটি কোণ $\angle x = 60^\circ$ ও $\angle y$ = ও পরিসীমা P = 12 সে.মি. দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন :

১. DG যেকোনো রশ্মি থেকে DE = p কেটে নিই।

২. DE-এর D ও E বিন্দুতে যথাক্রমে $\angle EDF = \frac{1}{2}\angle x$ এবং $\angle DEQ = \frac{1}{2}\angle y$ আঁকি।

৩. মনে করি, DF ও EQ পরস্পর A বিন্দুতে ছেদ করে।

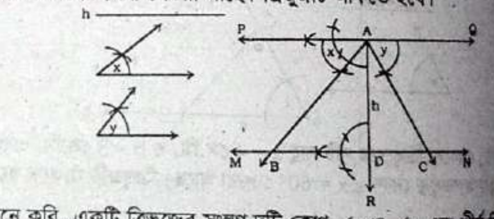
৪. DA এর A বিন্দুতে $\angle DAB = \angle ADE$ এবং EA এর A বিন্দুতে $\angle EAC = \angle AED$ আঁকি।

৫. AB এবং AC রশ্মিদ্বয় DE কে যথাক্রমে B ও C বিন্দুতে ছেদ করে।

তাহলে, ΔABC-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

৩. একটি ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন দুইটি কোণ এবং শীর্ষ থেকে ভূমির উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁক।

সমাধান একটি ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন দুটি কোণ এবং শীর্ষ হতে ভূমির উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।



মনে করি, একটি ত্রিভুজের সংলগ্ন দুটি কোণ $\angle x$ ও $\angle y$ এবং শীর্ষ বিন্দু থেকে ভূমির উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য h দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন :

১. যেকোনো রশ্মি AR হতে AD = h কেটে নিই।

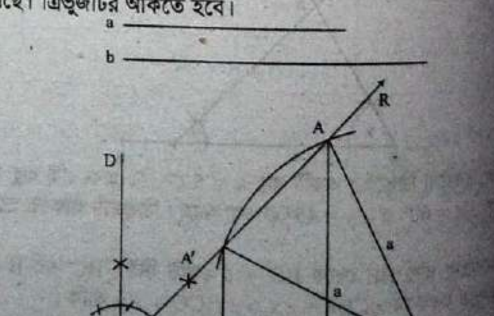
২. AD রেখাংশের A ও D বিন্দুতে যথাক্রমে PAQ ও MDN লম্ব অঙ্কন করি।

৩. PQ রেখার A বিন্দুতে $\angle PAB = \angle x$ এবং $\angle QAC = \angle y$ আঁকি। AB ও AC রশ্মি দুটি MN রেখাকে যথাক্রমে B ও C বিন্দুতে ছেদ করে।

তাহলে, ΔABC-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

৪. সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও অপর দুই বাহুর সমষ্টি দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁক।

সমাধান সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও অপর দুই বাহুর সমষ্টি দেওয়া আছে। ত্রিভুজটির আঁকতে হবে।



মনে করি, সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ a এবং ওপর দুই বাহুর সমষ্টি b দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কনের বিবরণ :

১. যেকোনো রশ্মি PQ থেকে PC = b কেটে নেই।

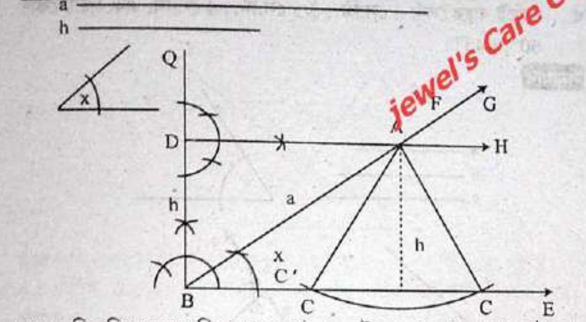
২. PC রেখার P বিন্দুতে $\angle CPR = 45°$ আঁকি। এখন, C-কে কেন্দ্র করে অতিভুজ a এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ আঁকি। মনে করি, বৃত্তচাপটি PR রশ্মিকে A ও A′ বিন্দুতে ছেদ করে।

৩. A, C ও A′, C যোগ করি। এখন A ও A, থেকে PC এর উপর যথাক্রমে AB ও A′B′ লম্ব টানি। যা PC কে B ও B′ বিন্দুতে ছেদ করে।

তাহলে ΔABC এবং $\Delta A'B'C$–ই নির্ণেয় ত্রিভুজ অঙ্কিত হলো।

৫. ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ, উচ্চতা ও অপর দুই বাহুর সমষ্টি দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁক।

সমাধান



মনে করি, ত্রিভুজের ভূমিসংলগ্ন কোণ $\angle x$, উচ্চতা h এবং অপর দুই বাহুর সমষ্টি a দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন :

১. যেকোনো রশ্মি BE –এর B বিন্দুতে $\angle EBG = \angle x$ আঁকি।

২. BG রশ্মি থেকে a এর সমান করে BF অংশ কেটে নেই।

৩. এবার B বিন্দুতে BE–এর উপর BQ লম্ব টানি।

৪. BQ থেকে উচ্চতা h-এর সমান করে BD অংশ কেটে নেই।

৫. আবার, D বিন্দুতে DH লম্ব টানি। মনে করি, DH রশ্মি BG রশ্মিকে A বিন্দুতে ছেদ করে।

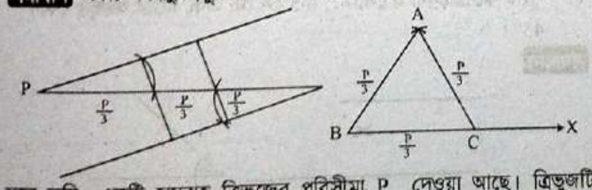
৬. অতঃপর A কে কেন্দ্র করে AF-এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ আঁকি। মনে করি, বৃত্তচাপটি BE কে C′ ও C বিন্দুতে ছেদ করে।

৭. A, C′ ও A, C যোগ করি।

তাহলে ABC′, এবং ABC উভয়ই নির্ণেয় ত্রিভুজ অঙ্কিত হলো।

৬. সমবাহু ত্রিভুজের পরিসীমা দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁক।

সমাধান একটি সমবাহু ত্রিভুজের পরিসীমা দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।



মনে করি, একটি সমবাহু ত্রিভুজের পরিসীমা P দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন :

১. পরিসীমা P কে সমান তিন ভাগে ভাগ করি।

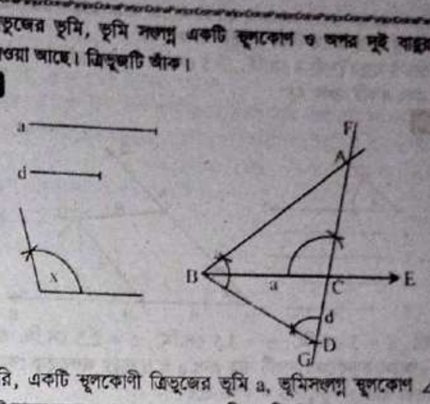
২. যেকোনো রশ্মি BX হতে $BC = \frac{P}{3}$ নিই।

৩. B ও C বিন্দুকে কেন্দ্র করে BC এর একই পাশে BC এর সমান অর্থাৎ $\frac{P}{3}$ এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে দুটি বৃত্তচাপ আঁকি। উহারা পরস্পর A বিন্দুতে ছেদ করে। A, B ও A, C যোগ করি।

$\therefore \Delta ABC$–ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

৭. ত্রিভুজের ভূমি, ভূমি সংলগ্ন একটি স্থূলকোণ ও অপর দুই বাহুর অন্তর দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁক।

সমাধান



মনে করি, একটি স্থূলকোণী ত্রিভুজের ভূমি a, ভূমিসংলগ্ন স্থূলকোণ $\angle x$ এবং অপর দুই বাহুর অন্তর d দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন :

১. যেকোনো রশ্মি BE থেকে BC = a কেটে নিই।

২. BC-এর C বিন্দুতে $\angle x$ এর সমান করে $\angle BCF$ আঁকি এবং FC কে G পর্যন্ত বর্ধিত করি।

৩. CG রশ্মি থেকে CD = d অংশ কেটে নিই এবং B, D যোগ করি।

৪. BD রেখাংশের B বিন্দুতে $\angle CDB$ এর সমান $\angle DBA$ আঁকি। BA রশ্মি CF রশ্মিকে A বিন্দুতে ছেদ করে।

তাহলে, ΔABC-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

▸▸ অনুশীলনী ৭.২

০১. সমকোণী ত্রিভুজের অপর দুইটি কোণের পরিমাণ দেওয়া থাকলে নিম্নের কোন ক্ষেত্রে ত্রিভুজ অঙ্কন করা সম্ভব।

(ক) 63° ও 36° (খ) 30° ও 70° ● (গ) 40° ও 50° (ঘ) 80° ও 20°

২. একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 4 সে.মি. ও 9 সে.মি. হলে তৃতীয় বাহুর দৈর্ঘ্য নিচের কোনটি?

(ক) 4 সে.মি. (খ) 5 সে.মি. ● (গ) 6 সে.মি. (ঘ) 13 সে.মি.

৩. একটি সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজের সমান বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য 18 সে.মি. হলে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নিচের কোনটি?

(ক) 36 বর্গ সে.মি. (খ) 81 বর্গ সে.মি.

● (গ) 162 বর্গ সে.মি. (ঘ) 324 বর্গ সে.মি.

৪. নির্দিষ্ট একটি চতুর্ভুজ আঁকা সম্ভব যদি দেওয়া থাকে–

i. চারটি বাহু ও একটি কোণ

ii. তিনটি বাহু ও তাদের অন্তর্ভুক্ত দুইটি কোণ

iii. দুইটি বাহু ও তিনটি কোণ

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i (খ) ii (গ) i ও ii ● (ঘ) i, ii ও iii

৫. রম্বসের —

i. চারটি বাহু পরস্পর সমান

ii. বিপরীত কোণ সমান

iii. কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii ● (ঘ) i, ii ও iii

৬. BF দৈর্ঘ্য কত সে.মি.?

(ক) 1 ● (খ) $\sqrt{5}$ (গ) $\sqrt{13}$ (ঘ) 5

৭. AB = কত সে.মি.?

(ক) 2 ● (খ) $2\sqrt{5}$ (গ) $5\sqrt{2}$ (ঘ) 10

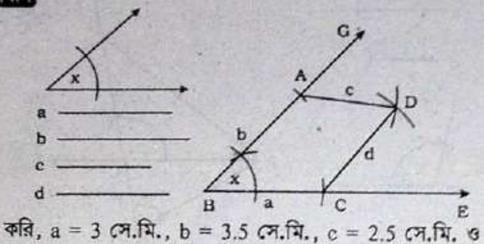
৮. ABCD এর ক্ষেত্রফল কত বর্গ সে.মি.?

● (ক) $8\sqrt{5}$ (খ) 20 (গ) $12\sqrt{5}$ (ঘ) $32\sqrt{5}$

৯. **নিম্নে প্রদত্ত উপাত্ত নিয়ে চতুর্ভুজ অঙ্কন কর :**

ক. চারটি বাহুর দৈর্ঘ্য 3 সে.মি., 3·5 সে.মি., 2.5 সে.মি. ও 3 সে.মি. এবং একটি কোণ 45°।

সমাধান



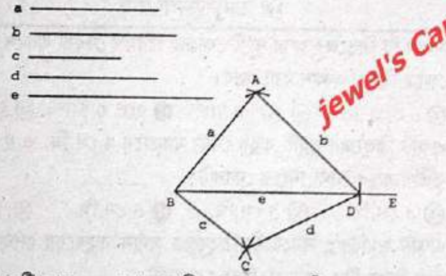
মনে করি, a = 3 সে.মি., b = 3.5 সে.মি., c = 2.5 সে.মি. ও d = 3 সে.মি. কোনো চতুর্ভুজের চারটি বাহু এবং a ও b বাহুর অন্তর্ভুক্ত কোণ $\angle x$ = 45° দেওয়া আছে। চতুর্ভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন :

১. যেকোনো রশ্মি BE থেকে BC = a কেটে নিই এবং BC-এর B বিন্দুতে $\angle CBG = \angle x$ আঁকি।
২. BG থেকে BA = b কেটে নিই।
৩. এখন, A ও C বিন্দুকে কেন্দ্র করে যথাক্রমে c ও d এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে $\angle ABC$-এর অভ্যন্তরভাগে দুটি বৃত্তচাপ আঁকি। বৃত্তচাপদ্বয় পরস্পর D বিন্দুতে ছেদ করে।
৪. A, D ও C, D যোগ করি। তাহলে ABCD-ই উদ্দিষ্ট চতুর্ভুজ।

খ. চারটি বাহুর দৈর্ঘ্য 3.5 সে.মি, 4 সে.মি., 2·5 সে.মি. ও 3.5 সে.মি. এবং একটি কর্ণ 5 সে.মি.।

সমাধান



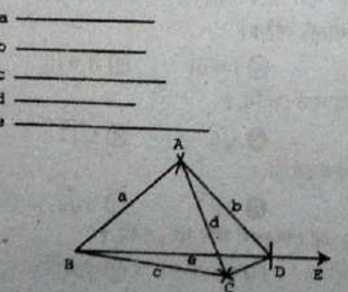
মনে করি, চারটি বাহু a = 3.5 সে.মি., b = 4 সে.মি., c = 2.5 সে.মি. ও d = 3.5 সে.মি. এবং একটি কর্ণ e = 5 সে.মি. যেখানে a + b > e এবং c + d > e দেওয়া আছে। চতুর্ভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন :

১. BE যেকোনো রশ্মি থেকে BD = e কেটে নিই।
২. B ও D বিন্দুকে কেন্দ্র করে যথাক্রমে a ও b সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে BD এর একই পাশে দুটি বৃত্তচাপ আঁকি। বৃত্তচাপদ্বয় পরস্পর A বিন্দুতে ছেদ করে। A, B ও A, D যোগ করি।
৩. আবার B ও D কে কেন্দ্র করে যথাক্রমে c ও d এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে BD এর যে পাশে A আছে তার বিপরীত পাশে আরও দুটি বৃত্তচাপ আঁকি। মনে করি, বৃত্তচাপদ্বয় C বিন্দুতে ছেদ করে।
৪. B, C ও D, C যোগ করি। তাহলে ABCD-ই উদ্দিষ্ট চতুর্ভুজ।

গ. তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য 3·2 সে.মি., 3 সে.মি., 3·5 সে.মি. এবং দুইটি কর্ণ 2·8 সে.মি. ও 4.5 সে.মি.।

সমাধান



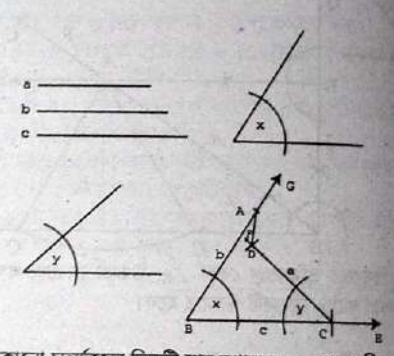
মনে করি, কোনো চতুর্ভুজের তিনটি বাহু a = 3.2 সে.মি., b = 3 সে.মি., c = 3.5 সে.মি., এবং দুটি কর্ণ d = 2.8 সে.মি. ও e = 4.5 সে.মি. দেওয়া আছে। চতুর্ভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন :

১. যেকোনো রশ্মি BE থেকে BD = e অংশ কেটে নিই। BD এর B ও D বিন্দুকে কেন্দ্র করে যথাক্রমে a ও b এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে BD-এর একই পাশে দুটি বৃত্তচাপ আঁকি।
২. মনে করি, বৃত্তচাপদ্বয় পরস্পর A বিন্দুতে ছেদ করে। A, B ও A, D যোগ করি।
৩. আবার B ও A কে কেন্দ্র করে যথাক্রমে c ও d এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে BD এর যে পাশে A আছে তার বিপরীত পাশে আরও দুটি বৃত্তচাপ আঁকি। বৃত্তচাপদ্বয় পরস্পর C বিন্দুতে ছেদ করে।
৪. B, C; A, C ও C, D যোগ করি। তাহলে ABCD-ই উদ্দিষ্ট চতুর্ভুজ।

ঘ. তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য 3 সে.মি., 3·5 সে.মি., 4 সে.মি. এবং দুইটি কোণ 60° ও 45°।

সমাধান



মনে করি, কোনো চতুর্ভুজের তিনটি বাহু যথাক্রমে a = 3 সে.মি., b = 3.5 সে.মি., c = 4 সে.মি. এবং b ও c বাহুর অন্তর্ভুক্ত কোণ $\angle x$ = 60° ও a ও c বাহুর অন্তর্ভুক্ত কোণ $\angle y$ = 45° দেওয়া আছে। চতুর্ভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন :

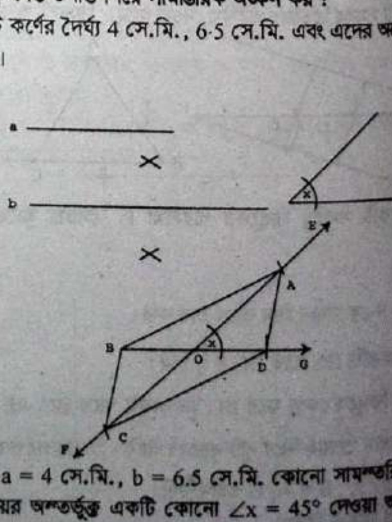
১. BE যেকোনো রশ্মি থেকে BC = c অংশ কেটে নিই।
২. BC রেখাংশের B ও C বিন্দুতে যথাক্রমে $\angle x$ ও $\angle y$ এর সমান করে $\angle CBG$ ও $\angle BCF$ আঁকি।
৩. BG থেকে BA = a এবং CF থেকে CD = b কেটে নিই। A, D যোগ করি।

তাহলে ABCD-ই উদ্দিষ্ট চতুর্ভুজ।

১০. **নিম্নে প্রদত্ত উপাত্ত নিয়ে সামান্তরিক অঙ্কন কর :**

ক. দুইটি কর্ণের দৈর্ঘ্য 4 সে.মি., 6·5 সে.মি. এবং এদের অন্তর্ভুক্ত কোণ 45°।

সমাধান



মনে করি, a = 4 সে.মি., b = 6.5 সে.মি. কোনো সামান্তরিকের দুটি কর্ণ এবং কর্ণদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত একটি কোণ $\angle x$ = 45° দেওয়া আছে। সামান্তরিকটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন :

১. BG যে কোনো রশ্মি থেকে BD = a অংশ কেটে নিই। BD এর মধ্যবিন্দু O নির্ণয় করি।

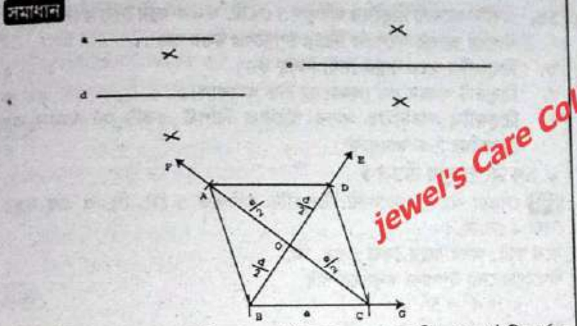
২. OD এর O বিন্দুতে $\angle x$ এর সমান করে $\angle DOE$ আঁকি। OE কে বিপরীত দিকে OF পর্যন্ত বর্ধিত করি।

৩. OE এবং OF থেকে $\frac{1}{2}b$ এর সমান করে যথাক্রমে OA এবং OC অংশ কেটে নিই।

৪. A, B; A, D; B, C ও C, D যোগ করি।
তাহলে ABCD-ই নির্ণেয় সামান্তরিক।

৫. একটি বাহুর দৈর্ঘ্য 4 সে.মি. এবং দুইটি কর্ণের দৈর্ঘ্য 5 সে.মি., 6·5 সে.মি.।

সমাধান



মনে করি, কোনো সামান্তরিকের একটি বাহু a = 4 সে.মি. এবং দুইটি কর্ণ d = 5 সে.মি. ও e = 6.5 সে.মি. দেওয়া আছে। সামান্তরিকটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন :

১. BG যেকোনো রশ্মি থেকে BC = a অংশ কেটে নিই। BC এর B ও C কে কেন্দ্র করে যথাক্রমে $\frac{d}{2}$ ও $\frac{e}{2}$ এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে BC এর একই পাশে দুটি বৃত্তচাপ আঁকি।

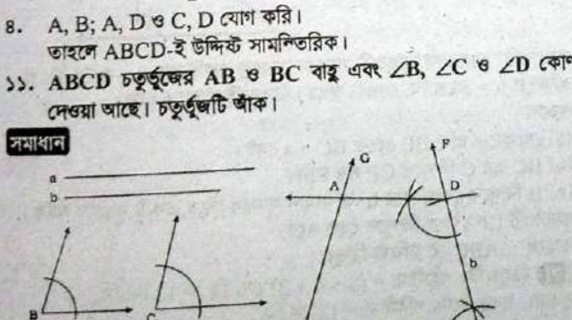
২. মনে করি, বৃত্তচাপদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করে। O, B ও O, C যোগ করি।

৩. এখন BO কে E পর্যন্ত এবং CO কে F পর্যন্ত বর্ধিত করি। OE ও OF থেকে $OD = \frac{1}{2}d$ ও $OA = \frac{1}{2}e$ কেটে নিই।

৪. A, B; A, D ও C, D যোগ করি।
তাহলে ABCD-ই উদ্দিষ্ট সামান্তরিক।

১১. ABCD চতুর্ভুজের AB ও BC বাহু এবং $\angle B$, $\angle C$ ও $\angle D$ কোণ দেওয়া আছে। চতুর্ভুজটি আঁক।

সমাধান



মনে করি, ACBD চতুর্ভুজের দুটি বাহু BC = a, CD = b এবং $\angle B$, $\angle C$ ও $\angle D$ তিনটি কোণ দেওয়া আছে। চতুর্ভুজটি আঁকতে হবে।

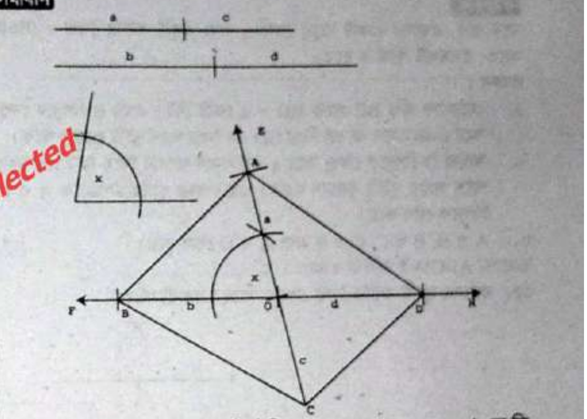
অঙ্কন :

১. BE যে কোনো রশ্মি থেকে BC = a কেটে নিই। BC রেখাংশের B ও C বিন্দুতে যথাক্রমে $\angle B$ ও $\angle C$–এর সমান করে $\angle CBG$ ও $\angle BCF$ আঁকি।

২. CF থেকে CD = b অংশ কেটে নিই। CD রেখাংশের D বিন্দুতে $\angle D$ এর সমান করে $\angle CDA$ আঁকি। DA রশ্মি BG রশ্মিকে A বিন্দুতে ছেদ করে।
তাহলে, ABCD-ই উদ্দিষ্ট চতুর্ভুজ।

১২. ABCD চতুর্ভুজের কর্ণ দুইটির ছেদবিন্দু দ্বারা কর্ণ দুইটির চারটি খণ্ডিত অংশ এবং তাদের অন্তর্ভুক্ত একটি কোণ যথাক্রমে OA = 4 সে.মি., OB = 5 সে.মি., OC = 3·5 সে.মি., OD = 4·5 সে.মি. ও $\angle AOB = 80°$. চতুর্ভুজটি আঁক।

সমাধান



মনে করি, একটি চতুর্ভুজের কর্ণ দুইটি পরস্পরকে OA = a = 4 সে.মি., OC = c = 3.5 সে.মি., OB = b = 5 সে.মি. ও OD = d = 4.5 সে.মি. এই চারটি অংশে বিভক্ত করে এবং কর্ণ দুইটির ছেদ বিন্দুতে উৎপন্ন একটি কোণ $\angle x = 80°$. চতুর্ভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন :

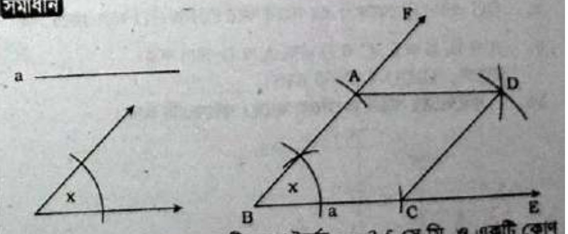
১. যেকোনো রেখা FH এর উপর একটি বিন্দু O নিই এবং O বিন্দুতে $\angle FOE = \angle x$ আঁকি।

২. FH রেখার O বিন্দুর দুই পাশে B ও D বিন্দু এমনভাবে নিই যেন OB = b ও OD = d হয়। আবার OE থেকে OA = a অংশ কেটে নিই।

৩. AO কে C পর্যন্ত বর্ধিত করি যেন OC = c হয়। A, B; A, D; B, C ও C, D যোগ করি।
তাহলে ABCD-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

১৩. রম্বসের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য 3·5 সে.মি. ও একটি কোণ 45°, রম্বসটি আঁক।

সমাধান



মনে করি, কোনো রম্বসের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য a = 3.5 সে.মি. ও একটি কোণ $\angle x = 45°$ দেওয়া আছে। রম্বসটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন :

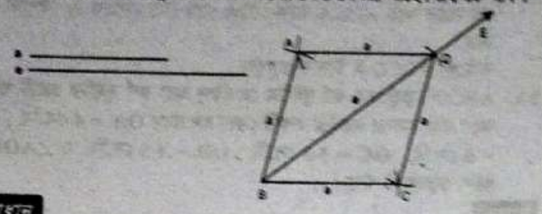
১. যেকোনো রশ্মি BE থেকে BC = a কেটে নিই। BC রেখাংশের B বিন্দুতে $\angle CBF = \angle x$ আঁকি। BF রশ্মি থেকে BA = a কেটে নিই।

২. A ও C বিন্দুকে কেন্দ্র করে a এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে $\angle ABC$ এর অভ্যন্তরভাগে দুটি বৃত্তচাপ আঁকি।

৩. মনে করি, বৃত্তচাপদ্বয় পরস্পর D বিন্দুতে ছেদ করে। A, D ও C, D যোগ করি।

তাহলে, ABCD-ই উদ্দিষ্ট রম্বস।

১৪. রম্বসের একটি বাহু এবং একটি কর্ণের দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে। রম্বসটি আঁক।



সমাধান

মনে করি, রম্বসের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য a এবং একটি কর্ণের দৈর্ঘ্য e দেওয়া আছে। রম্বসটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন :

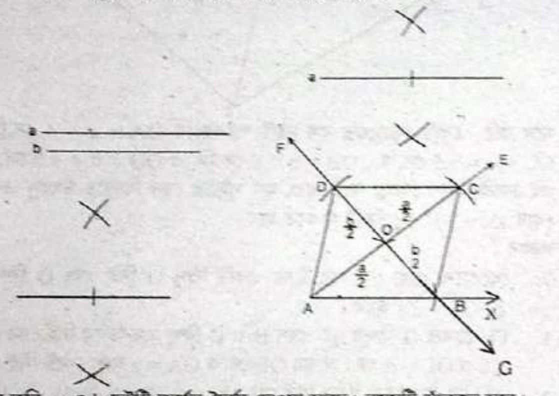
১. যেকোনো রশ্মি BE থেকে BD = e কেটে নিই। এখন B বিন্দুকে কেন্দ্র করে a এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে BD এর উভয় পাশে দুইটি বৃত্তচাপ আঁকি।

২. আবার D বিন্দুকে কেন্দ্র করে a এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে BD এর উভয় পাশে আরও দুইটি বৃত্তচাপ আঁকি। এই চাপদ্বয় পূর্বের চাপদ্বয়কে A ও C বিন্দুকে ছেদ করে।

৩. A ও B, B ও C, C ও B এবং A ও D যোগ করি।

তাহলে, ABCD-ই উদ্দিষ্ট রম্বস।

১৫. রম্বসের দুইটি কর্ণের দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে। রম্বসটি আঁক।



মনে করি, a ও b দুইটি কর্ণের দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে। রম্বসটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন :

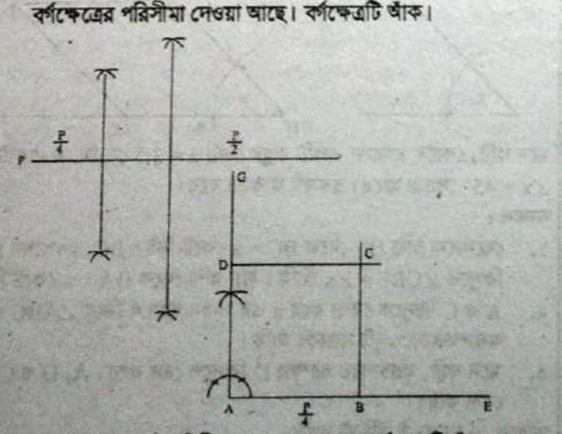
১. যেকোনো রশ্মি AE থেকে AC = a অংশ কেটে নিই।

২. AC–এর লম্ব সমদ্বিখণ্ডক GF আঁকি। মনে করি AC ও GF পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করে।

৩. OG এবং OF থেকে $\frac{b}{2}$ এর সমান করে OB ও OD অংশ কেটে নিই।

৪. A ও B, B ও C, C ও D এবং A ও D যোগ করি।
তাহলে, ABCD-ই উদ্দিষ্ট রম্বস।

১৬. বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা দেওয়া আছে। বর্গক্ষেত্রটি আঁক।



মনে করি, একটি বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা P দেওয়া আছে। বর্গক্ষেত্রটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন :

১. পরিসীমা P কে প্রথমে সমান দুই ভাগে ভাগ করে তার অর্ধেককে পুনরায় সমান দুই ভাগে ভাগ করি। ফলে প্রতিটি অংশ $\frac{P}{4}$ এর সমান হবে।

২. এখন, যেকোনো রশ্মি AE থেকে AB = $\frac{P}{4}$ কেটে নিই এবং A বিন্দুতে AB –এর উপর AG লম্ব টানি।

৩. B ও D বিন্দুকে কেন্দ্র করে $\frac{P}{4}$ এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে ∠EAG এর অভ্যন্তরে দুটি বৃত্তচাপ আঁকি। মনে করি, বৃত্তচাপদ্বয় পরস্পরকে C বিন্দুতে ছেদ করে।

৪. B, C ও C, D যোগ করি।
তাহলে ABCD বর্গক্ষেত্রটি অঙ্কিত হলো।

১৭. একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ 5 সে.মি. ও এক বাহুর দৈর্ঘ্য 4 সে.মি.। উপরের তথ্যের আলোকে নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও :

ক. ত্রিভুজটির অপর বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

খ. ত্রিভুজটি অঙ্কন কর (অঙ্কনের চিহ্ন আবশ্যক)।

গ. ত্রিভুজটির পরিসীমার সমান পরিসীমা বিশিষ্ট একটি বর্গ অঙ্কন কর (অঙ্কনের চিহ্ন আবশ্যক)।

১৭ নং প্রশ্নের উত্তর ▸

ক দেওয়া আছে, সমকোণী ত্রিভুজটির অতিভুজ 5 সে. মি. ও এক বাহুর দৈর্ঘ্য 4 সে.মি.।

মনে করি, অপর বাহুর দৈর্ঘ্য x সে. মি.

পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে পাই,

$x^2 + 4^2 = 5^2$

বা, $x^2 = 5^2 - 4^2$

বা, $x^2 = 25 - 16$

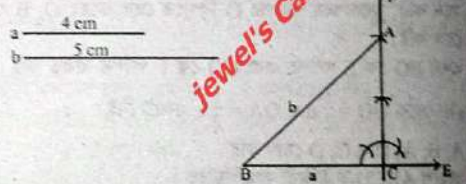
বা, $x^2 = 9$

বা, $x = \sqrt{9}$

$\therefore x = 3$

∴ ত্রিভুজটির অপর বাহুর দৈর্ঘ্য 3 সে. মি.

খ



মনে করি, সমকোণী ত্রিভুজটি সমকোণ সংলগ্ন একটি বাহু a = 4 সে.মি. ও অতিভুজ b = 5 সে.মি. দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন :

(১) যেকোনো রশ্মি BE থেকে BC = a নেই।

(২) BC এর C বিন্দুতে CF লম্ব টানি।

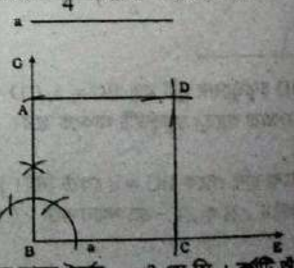
(৩) B বিন্দুকে কেন্দ্র করে b এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ আঁকি। বৃত্তচাপটি CF কে A বিন্দুতে ছেদ করে।

তাহলে, ΔABC–ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

গ ত্রিভুজটির পরিসীমা = (5 + 4 + 3) সে. মি. = 12 সে.মি.

সুতরাং, প্রদত্ত বর্গের পরিসীমা = 12 সে.মি.

$\therefore$ বর্গের এক বাহুর দৈর্ঘ্য = $\frac{12}{4}$ সে.মি. = 3 সে. মি.



মনে করি, বর্গটির এক বাহুর দৈর্ঘ্য a = 3 সে.মি.। বর্গটি আঁকতে হবে।

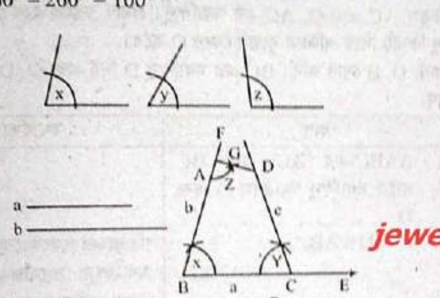
অঙ্কন :
(১) BE যেকোনো রশ্মি থেকে BC = a কেটে নিই। BC রেখাংশের B বিন্দুতে BG লম্ব আঁকি।
(২) BG থেকে BA = a কেটে নেই। A ও C কে কেন্দ্র করে a এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে ∠ABC এর অভ্যন্তরভাগে দুটি বৃত্তচাপ আঁকি। মনে করি, বৃত্তচাপদ্বয় পরস্পর D বিন্দুতে ছেদ করে।
(৩) A, D ও C, D যোগ করি।
তাহলে, ABCD–ই উদ্দিষ্ট বর্গ।

১৮. ABCD চতুর্ভুজের AB = 4 সে. মি., BC = 5 সে.মি., ∠A = 85°, ∠B = 80° এবং ∠C = 95°.
ওপরের তথ্যের আলোকে নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও।
ক. ∠D এর মান নির্ণয় কর। ২
খ. প্রদত্ত তথ্য অনুযায়ী ABCD চতুর্ভুজটি অঙ্কন কর (অঙ্কনের চিহ্ন আবশ্যক)। ৪
গ. প্রদত্ত বাহু দুইটিকে একটি সামান্তরিকের বাহু এবং ∠B = 80° ধরে সামান্তরিকটি অঙ্কন কর (অঙ্কনের চিহ্ন আবশ্যক)। ৪

✔ ১৮ নং প্রশ্নের উত্তর ▸

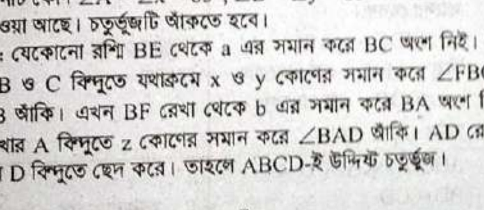
ক দেওয়া আছে, ∠A = 85°, ∠B = 80° এবং ∠C = 90°
∴ ∠A + ∠B + ∠C = 85° + 80° + 95° = 260°
আমরা জানি, চতুর্ভুজের চার কোণের সমষ্টি = 360°
∴ ∠A + ∠B + ∠C + ∠D = 360°
বা, 260° + ∠D = 360° [∵ ∠A + ∠B + ∠C = 260°]
∴ ∠D = 360° − 260° = 100°

খ



মনে করি চতুর্ভুজের দুইটি বাহু AB = a = 4 সে.মি. ও BC = b = 5 সে.মি. এবং তিনটি কোণ ∠A = ∠x = 85°, ∠B = ∠y = 80° এবং ∠C = ∠z = 95° দেওয়া আছে। চতুর্ভুজটি আঁকতে হবে।
অঙ্কন : যেকোনো রশ্মি BE থেকে a এর সমান করে BC অংশ নিই। BC রেখার B ও C বিন্দুতে যথাক্রমে x ও y কোণের সমান করে ∠FBC ও ∠GCB আঁকি। এখন BF রেখা থেকে b এর সমান করে BA অংশ নিই। BA রেখার A বিন্দুতে z কোণের সমান করে ∠BAD আঁকি। AD রেখাংশ CG এর D বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে ABCD-ই উদ্দিষ্ট চতুর্ভুজ।

গ

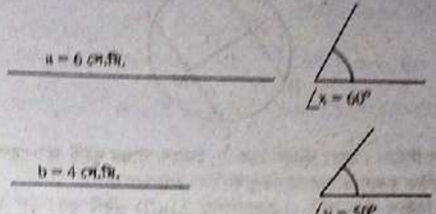


মনে করি, সামান্তরিকের বাহু দুইটি a = 4 সে.মি. এবং b = 5 সে.মি. এবং বাহুদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত একটি কোণ ∠B = ∠x = 80° দেওয়া আছে। সামান্তরিকটি আঁকতে হবে।
অঙ্কনের বিবরণ :
১. যেকোনো রশ্মি BE থেকে b এর সমান করে BC রেখাংশ নিই।
২. BC রেখাংশের B বিন্দুতে ∠x এর সমান করে ∠CBF আঁকি।
৩. BF রশ্মি থেকে a এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে BA অংশ কেটে নিই।
৪. A ও C বিন্দুকে কেন্দ্র করে b ও a এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে ∠B এর অভ্যন্তরে দুটি বৃত্তচাপ আঁকি। বৃত্তচাপদ্বয় D বিন্দুতে ছেদ করে।
৫. A, D এবং C, D যোগ করি।
সুতরাং ABCD-ই উদ্দিষ্ট সামান্তরিক।

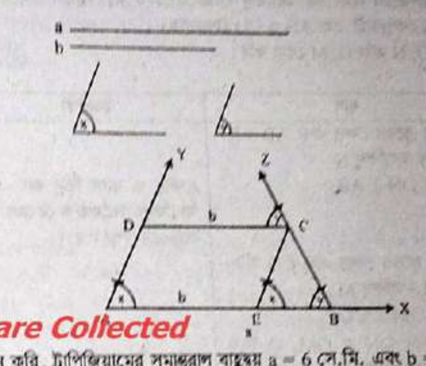
১৯. একটি ট্রাপিজিয়ামের সমান্তরাল দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য 4 সে.মি. ও 6 সে.মি. এবং বৃহত্তর বাহু সংলগ্ন দুইটি কোণ ∠x = 60° এবং ∠y = 50°।
ক. প্রদত্ত তথ্যগুলো চিত্রের মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২
খ. ট্রাপিজিয়ামটি আঁক। (অঙ্কনের চিহ্ন ও বিবরণ আবশ্যক) ৪
গ. উদ্দীপকের বাহু দুটিকে সামান্তরিকের দুইটি কর্ণ ও ∠y কে অন্তর্ভুক্ত কোণ বিবেচনা করে সামান্তরিক আঁক। (অঙ্কনের চিহ্ন ও বিবরণ আবশ্যক) ৪

✔ ১৯ নং প্রশ্নের উত্তর ▸

ক

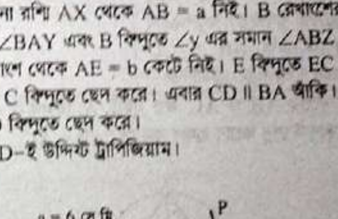


খ



মনে করি, ট্রাপিজিয়ামের সমান্তরাল বাহুদ্বয় a = 6 সে.মি. এবং b = 4 সে.মি. যেখানে, a > b এবং বৃহত্তর বাহু a সংলগ্ন কোণদ্বয় ∠x = 60° ও ∠y = 50°। ট্রাপিজিয়ামটি আঁকতে হবে।
অঙ্কন: যেকোনো রশ্মি AX থেকে AB = a নিই। B রেখাংশের A বিন্দুতে ∠x এর সমান ∠BAY এবং B বিন্দুতে ∠y এর সমান ∠ABZ আঁকি। এবার AB রেখাংশ থেকে AE = b কেটে নিই। E বিন্দুতে EC ∥ AY আঁকি যা BZ রশ্মিকে C বিন্দুতে ছেদ করে। এবার CD ∥ BA আঁকি। CD রেখাংশ AY রশ্মিকে D বিন্দুতে ছেদ করে।
তাহলে, ABCD–ই উদ্দিষ্ট ট্রাপিজিয়াম।

গ



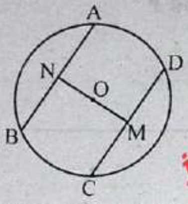
মনে করি, সামান্তরিকের কর্ণ দুইটি a = 6 সে.মি. ও b = 4 সে.মি. এবং কর্ণদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত একটি কোণ ∠y = 50° দেওয়া আছে। সামান্তরিকটি আঁকতে হবে।
অঙ্কন: যেকোনো রশ্মি AM থেকে a এর সমান AC রেখাংশ নিই। AC এর মধ্যবিন্দু O নির্ণয় করি। O বিন্দুতে ∠y = 50° এর সমান ∠AOP আঁকি। OP এর বিপরীত রশ্মি OQ অঙ্কন করি। OP ও OQ রশ্মিদ্বয় থেকে $\frac{1}{2}$b এর সমান যথাক্রমে OB ও OD রেখাংশদ্বয় নিই। A, B; A, D; C, B ও C, D যোগ করি। তাহলে, ABCD–ই উদ্দিষ্ট সামান্তরিক।

⏭ অষ্টম অধ্যায় : বৃত্ত (Circle)

⏭ অনুশীলনী ৮.১

১. প্রমাণ কর যে, দুইটি সমান্তরাল জ্যা এর মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা কেন্দ্রগামী এবং জ্যাদ্বয়ের ওপর লম্ব।

সমাধান



সাধারণ নির্বচন : প্রমাণ করতে হবে যে, কোনো বৃত্তের দুইটি জ্যা পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করলে তাদের ছেদবিন্দু বৃত্তটির কেন্দ্র হবে।

বিশেষ নির্বচন: মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABCD একটি বৃত্ত। এর AB ও CD সমান্তরাল জ্যাদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে N ও M। প্রমাণ করতে হবে যে, MN কেন্দ্রগামী এবং AB ও CD উপর লম্ব।

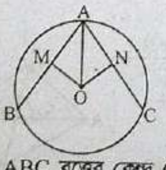
অঙ্কন: O, N এবং O, M যোগ করি।

প্রমাণ:

ধাপ	যথার্থতা
১. O বৃত্তের কেন্দ্র এবং AB জ্যা-এর মধ্যবিন্দু N $\therefore ON \perp AB.$	[কেন্দ্র ও ব্যাস ভিন্ন জ্যা-এর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাংশ ঐ জ্যা-এর উপর লম্ব।]
২. O বৃত্তের কেন্দ্র এবং CD জ্যা-এর মধ্যবিন্দু M. $\therefore OM \perp CD.$	
৩. সুতরাং ON ও OM, O বিন্দু থেকে যথাক্রমে AB ও CD সমান্তরাল জ্যাদ্বয়ের উপর লম্ব। সুতরাং ON ও OM একই সরলরেখায় অবস্থিত। অর্থাৎ MN কেন্দ্রগামী এবং AB ও CD জ্যাদ্বয়ের উপর লম্ব। (প্রমাণিত)	

২. কোনো বৃত্তের AB ও AC জ্যা দুইটি A বিন্দুগামী ব্যাসার্ধের সাথে সমান কোণ উৎপন্ন করে। প্রমাণ কর যে, AB = AC.

সমাধান



বিশেষ নির্বচন: মনে করি, ABC বৃত্তের কেন্দ্র O। AB ও AC জ্যা দুটি OA ব্যাসার্ধের সাথে $\angle BAO = \angle CAO$ উৎপন্ন করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, AB = AC.

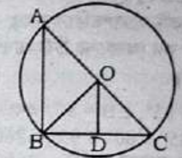
অঙ্কন: O হতে AB-এর উপর OM এবং AC-এর উপর ON লম্ব আঁকি।

প্রমাণ:

ধাপ	যথার্থতা
১. $OM \perp AB$ $\therefore$ OM, AB-এর সমদ্বিখণ্ডক। $AM = \frac{1}{2}AB$ অনুরূপভাবে, $AN = \frac{1}{2}AC.$	[$\because$ কেন্দ্র থেকে ব্যাস ভিন্ন জ্যা এর উপর অঙ্কিত লম্ব ঐ জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।]
২. এখন, ΔAOM ও ΔAON-এ $\angle AMO = \angle ANO$ $\angle MAO = \angle NAO$ এবং $AO = AO$ $\therefore \Delta AOM \cong \Delta AON$ অতএব, $AM = AN$ বা, $\frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}AC$ $\therefore AB = AC$ (প্রমাণিত)	[উভয়ে সমকোণ।] [কল্পনা] [সাধারণ বাহু।] [কোণ-বাহু-কোণ উপপাদ্য]

৩. কোনো বৃত্ত একটি সমকোণী ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলো দিয়ে যায়। দেখাও যে, বৃত্তটির কেন্দ্র অতিভুজের মধ্যবিন্দু।

সমাধান



সাধারণ নির্বচন : কোনো বৃত্ত একটি সমকোণী ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলো দিয়ে যায়। দেখাতে হবে যে, বৃত্তটির কেন্দ্র অতিভুজের মধ্যবিন্দু।

বিশেষ নির্বচন: মনে করি, সমকোণী ΔABC-এর $\angle ABC$ = এক সমকোণ, অতিভুজ AC এবং O, AC এর মধ্যবিন্দু। প্রমাণ করতে হবে যে, A, B, C বিন্দু তিনটি দিয়ে অঙ্কিত বৃত্তের কেন্দ্র O হবে।

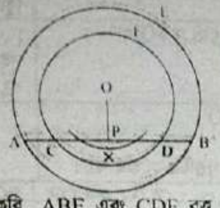
অঙ্কন: O, B যোগ করি। BC-এর মধ্যবিন্দু D নিই এবং O, D যোগ করি।

প্রমাণ:

ধাপ	যথার্থতা
১. ΔABC-এর AC এবং BC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে O এবং D. $\therefore OD \parallel AB.$	[ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা উহার তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল।]
২. এখন, $OD \parallel AB$ এবং BC তাদের ছেদক। $\therefore \angle ODC = \angle ABC$ কিন্তু $\angle ABC$ = এক সমকোণ $\therefore \angle ODC$ = এক সমকোণ অর্থাৎ $OD \perp BC.$	[অনুরূপ কোণ] [কল্পনা]
৩. ΔOBD এবং ΔOCD-এ $BD = CD$ OD সাধারণ বাহু এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle ODB$ = অন্তর্ভুক্ত $\angle ODC$ $\therefore \Delta ODB \cong \Delta OCD$ $\therefore OB = OC$ আবার, $OA = OC$ $\therefore OA = OB = OC$ সুতরাং O কে কেন্দ্র করে OA এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত বৃত্ত, A, B, C বিন্দু দিয়ে যাবে। অর্থাৎ সমকোণী ΔABC-এর শীর্ষবিন্দুত্রয় দিয়ে অঙ্কিত বৃত্তের কেন্দ্র অতিভুজ AC-এর মধ্যবিন্দু O তে অবস্থিত। (প্রমাণিত)	[$\because$ অঙ্কনানুসারে, D, BC-এর মধ্যবিন্দু।] [উভয়ে সমকোণ] [বাহু-কোণ-বাহু উপপাদ্য] [$\because$ O, AC অতিভুজের মধ্যবিন্দু]

৪. দুইটি সমকেন্দ্রিক বৃত্তের একটির AB জ্যা অপর বৃত্তকে C ও D বিন্দুতে ছেদ করে।
প্রমাণ কর যে, AC = BD.

সমাধান



বিশেষ নির্বচন: মনে করি, ABE এবং CDF বৃত্ত দুটির কেন্দ্র O. ABE বৃত্তের AB জ্যা CDF বৃত্তকে C ও D বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, AC = BD

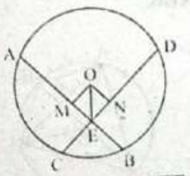
অঙ্কন: $OP \perp AB$ বা $OP \perp CD$ আঁকি।

প্রমাণ:

ধাপ	যথার্থতা
১. O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABE বৃত্তে AB ব্যাস ভিন্ন একটি জ্যা এবং OP, AB-এর উপর লম্ব। $\therefore AP = BP$	[∵ বৃত্তের কেন্দ্র থেকে ব্যাস ভিন্ন অন্য কোনো জ্যা-এর উপর অঙ্কিত লম্ব ঐ জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।]
২. O কেন্দ্রবিশিষ্ট CDF বৃত্তে CD ব্যাস ভিন্ন একটি জ্যা এবং OP, CD-এর উপর লম্ব। $\therefore CP = PD$	[একই কারণ]
৩. এখন, $AP - CP = BP - PD$ বা, $AC = BD$ অতএব, $AC = BD$ (প্রমাণিত)	[ধাপ-১ ও ধাপ-২ হতে] [∵ $AP - CP = AC$ এবং $BP - PD = BD$]

৫. বৃত্তের দুইটি সমান জ্যা পরস্পরকে ছেদ করলে দেখাও যে, তাদের একটির অংশদ্বয় অপরটির অংশদ্বয়ের সমান।

সমাধান



সাধারণ নির্বচন : বৃত্তের দুটি সমান জ্যা পরস্পরকে ছেদ করলে, প্রমাণ করতে হবে যে, তাদের একটি অংশদ্বয় অপরটির অংশদ্বয়ের সমান।

বিশেষ নির্বচন: মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ACBD বৃত্তে AB ও CD দুটি সমান জ্যা পরস্পরকে E বিন্দুতে ছেদ করেছে। দেখাতে হবে যে, AE = DE এবং BE = CE

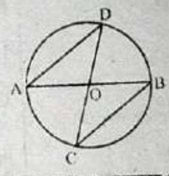
অঙ্কন: কেন্দ্র O থেকে AB ও CD জ্যা এর উপর যথাক্রমে OM ও ON লম্ব টানি। O, E যোগ করি।

প্রমাণ:

ধাপ	যথার্থতা
১. O কেন্দ্রবিশিষ্ট ACBD বৃত্তে AB ব্যাস ভিন্ন একটি জ্যা এবং OM, AB এর উপর লম্ব। $\therefore AM = BM = \frac{1}{2} AB$	[∵ বৃত্তের কেন্দ্র থেকে ব্যাস ভিন্ন অন্য কোনো জ্যা-এর উপর অঙ্কিত লম্ব ঐ জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।]
২. O কেন্দ্রবিশিষ্ট ACBD বৃত্তে CD ব্যাস ভিন্ন একটি জ্যা এবং ON, CD এর উপর লম্ব। $\therefore CN = DN = \frac{1}{2} CD$	[একই কারণ]
৩. এখন, $AB = CD$ $\therefore \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} CD$ $\therefore AM = DN$	[ধাপ-১ ও ২ হতে]
৪. আবার, ΔMOE এবং ΔNOE সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে OE উভয় ত্রিভুজের সাধারণ অতিভুজ এবং $OM = ON$ $\therefore \Delta MOE \cong \Delta NOE$ সুতরাং $ME = NE$	[সমান [illegible] জ্যা কেন্দ্র থেকে সমদূরবর্তী বলে] [সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ বাহু সর্বসমতা]
৫. এখন, $AM + ME = DN + NE$ $\therefore AE = DE$	[ধাপ (৩) ও (৪) থেকে]
৬. আবার, $AB - AE = CD - DE$ $\therefore BE = CE$ সুতরাং পরস্পরছেদী সমান জ্যাদ্বয়ের একটির অংশদ্বয় অপরটির অংশদ্বয়ের সমান। (প্রমাণিত)	[ধাপ (১) ও (৫) থেকে]

৬. দেখাও যে, ব্যাসের দুই প্রান্ত থেকে তার বিপরীত দিকে দুইটি সমান জ্যা অঙ্কন করলে তারা সমান্তরাল হয়।

সমাধান



সাধারণ নির্বচন : প্রমাণ করতে হবে যে, ব্যাসের দুই প্রান্ত থেকে তার বিপরীত দিকে দুইটি সমান জ্যা অঙ্কন করলে তারা সমান্তরাল হবে।

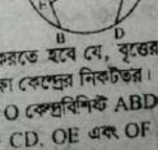
বিশেষ নির্বচন: মনে করি AB, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাস। AD ও BC যথাক্রমে ব্যাসের প্রান্তবিন্দু A ও B থেকে বিপরীত দিকে দুটি জ্যা এবং AD = BC। প্রমাণ করতে হবে যে, AD ∥ CB

অঙ্কন: O, C এবং O, D যোগ করি।

ধাপ	যথার্থতা
১. ΔAOD এবং ΔBOC-এ $OA = OB$ $OD = OC$ এবং $AD = CB$ $\therefore \Delta AOD \cong \Delta BOC$ $\therefore \angle OAD = \angle OBC$ অর্থাৎ $\angle BAD = \angle ABC$	[একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ] [একই কারণে] [কল্পনা] [বাহু-বাহু-বাহু উপপাদ্য]
২. কিন্তু $\angle BAD$ ও $\angle ABC$ একান্তর কোণ সুতরাং AD ∥ CD (প্রমাণিত)	

৭. দেখাও যে, বৃত্তের দুইটি জ্যা এর মধ্যে বৃহত্তর জ্যা-টি ক্ষুদ্রতর জ্যা অপেক্ষা কেন্দ্রের নিকটতর।

সমাধান



সাধারণ নির্বচন : প্রমাণ করতে হবে যে, বৃত্তের দুটি জ্যা-এর মধ্যে বৃহত্তর জ্যা-টি ক্ষুদ্রতর জ্যা অপেক্ষা কেন্দ্রের নিকটতর।

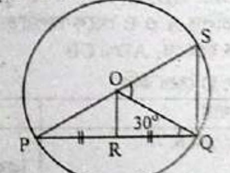
বিশেষ নির্বচন: মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABDC একটি বৃত্ত। AB ও CD-এর দুটি জ্যা এবং AB > CD. OE এবং OF কেন্দ্র থেকে যথাক্রমে AB ও CD-এর উপর লম্ব।
প্রমাণ করতে হবে, OE < OF

অঙ্কন: O, A এবং O, C যোগ করি।

প্রমাণ:

ধাপ	যথার্থতা
১. O বৃত্তের কেন্দ্র এবং $OE \perp AB$. $\therefore AE = \frac{1}{2}AB$.	[কেন্দ্র থেকে ব্যাস ভিন্ন যেকোনো জ্যা–এর উপর অঙ্কিত লম্ব জ্যা–কে সমদ্বিখণ্ডিত করে।]
২. আবার, O বৃত্তের কেন্দ্র এবং $OF \perp CD$ $\therefore CF = \frac{1}{2}CD$	[একই কারণে]
৩. এখন, সমকোণী ΔOAE এবং ΔOCF–এর অতিভুজ যথাক্রমে OA এবং OC. ΔOAE এর $OA^2 = OE^2 + AE^2$ এবং ΔOCF এর $OC^2 = OF^2 + CF^2$	[পিথাগোরাসের উপপাদ্য]
৪. কিন্তু $OA = OC$ $\therefore OA^2 = OC^2$ $\therefore OE^2 + AE^2 = OF^2 + CF^2$	[একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলে] [ধাপ (৩) হতে]
৫. আবার, $AB > CD$ বা, $\frac{1}{2}AB > \frac{1}{2}CD$ বা, $AE > CF$	[কল্পনা] [উভয়পক্ষকে $\frac{1}{2}$ দ্বারা গুণ করে] [$\because AE = \frac{1}{2}AB$ এবং $CF = \frac{1}{2}CD$]
বা, $AE^2 > CF^2$ সুতরাং $OE^2 < OF^2$ $\therefore OE < OF$. [দেখানো হলো]	[ধাপ (৪) হতে] [উভয়পক্ষকে বর্গমূল করে]

৮. O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে জ্যা $PQ = x$ সে.মি. এবং $OR \perp PQ$.



ক. $\angle QOS$ কোণের পরিমাণ কত? ২

খ. প্রমাণ কর যে, PS জ্যা বৃত্তটির বৃহত্তম জ্যা। ৪

গ. $OR = \left(\frac{x}{2} - 2\right)$ সে.মি. হলে, x এর মান নির্ণয় কর। ৪

৮ নং প্রশ্নের উত্তর

ক $\angle PQS$ হলো অর্ধবৃত্তস্থ কোণ,

ফলে $\angle PQS = 1$ সমকোণ।

বা, $\angle OQS + \angle OQP = 90°$

বা, $\angle OQS = 90° - 30° = 60°$

চিত্রে $OQ = OS$ = বৃত্তের ব্যাসার্ধ

$\therefore \angle OSQ = \angle OQS = 60°$ [$\because$ ত্রিভুজের সমান সমান বাহুর বিপরীত সমান]

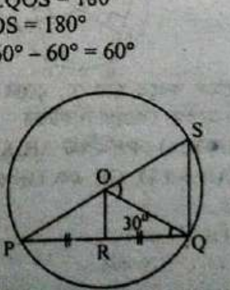
ΔOQS হতে পাই,

$\angle OQS + \angle OSQ + \angle QOS = 180°$

বা, $60° + 60° + \angle QOS = 180°$

$\therefore \angle QOS = 180° - 60° - 60° = 60°$

খ



বিশেষ নির্বচন : প্রদত্ত PQS বৃত্তে PS ব্যাস এবং SQ ব্যাস ভিন্ন একটি জ্যা। প্রমাণ করতে হবে যে, $PS > SQ$।

প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
$PO = QO = SO$	[বৃত্তের ব্যাসার্ধ]
ΔOQS–এ $OQ + OS > SQ$	[$\because$ ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর]
বা, $PO + OS > SQ$ বা, $PS > SQ$ $\therefore$ PS জ্যা–ই হলো বৃত্তটির বৃহত্তম জ্যা।	

গ দেওয়া আছে, $PQ = x$ সে.মি. এবং $OR \perp PQ$

এবং $OR = \left(\frac{x}{2} - 2\right)$ সে.মি.

আমরা জানি, বৃত্তের কেন্দ্র হতে জ্যা–এর উপর অঙ্কিত লম্ব ঐ জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

$\therefore PR = RQ = \frac{1}{2}PQ = \frac{x}{2}$

এখন, ΔORQ হতে পাই,

$\tan 30° = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \frac{OR}{RQ} = \frac{\frac{x}{2} - 2}{\frac{x}{2}}$

বা, $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{x - 4}{x}$

বা, $x = \sqrt{3}x - 4\sqrt{3}$

বা, $(\sqrt{3} - 1)x = 4\sqrt{3}$

$\therefore x = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1}$

অনুশীলনী ৮·২

১. O কেন্দ্রবিশিষ্ট কোনো বৃত্তে ABCD একটি অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজ। AB, CD কর্ণদ্বয় E বিন্দুতে ছেদ করলে প্রমাণ কর যে, $\angle AOB + \angle COD = 2\angle AEB$.

সমাধান

বিশেষ নির্বচন: মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট কোনো বৃত্তে ABCD একটি অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজ। এর AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পর E বিন্দুতে ছেদ করেছে। O, A; O, B; O, C এবং O, D যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle AOB + \angle COD = 2\angle AEB$.

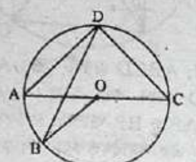
প্রমাণ:

ধাপ	যথার্থতা
১. একই চাপ AB–এর উপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ $\angle ACB$ এবং কেন্দ্রস্থ $\angle AOB$ $\therefore \angle ACB = \frac{1}{2}\angle AOB$ $\therefore \angle AOB = 2\angle ACB$	[বৃত্তের একই চাপের উপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণ কেন্দ্রস্থ কোণের অর্ধেক।]
২. একই চাপ CD এর উপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ $\angle CBD$ এবং কেন্দ্রস্থ $\angle COD$ $\therefore \angle CBD = \frac{1}{2}\angle COD$ $\therefore \angle COD = 2\angle CBD$	[একই কারণে]
৩. এখন, $\angle AOB + \angle COD = 2\angle ACB + 2\angle CBD$	[ধাপ–১ ও ধাপ–২ হতে]

$\therefore \angle AOB + \angle COD = 2(\angle ACB + \angle CBD)$ $\therefore \angle AOB + \angle COD = 2(\angle ECB + \angle EBC)$	
৪. আবার, CBE ত্রিভুজের বহিঃস্থ $\angle AEB$ = বিপরীত অন্তঃস্থ $(\angle ECB + \angle EBC)$ সুতরাং $\angle AOB + \angle COD = 2\angle AEB$ (প্রমাণিত)	

২. O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে $\angle ADB + \angle BDC$ = এক সমকোণ। প্রমাণ কর যে, A ও O এবং C একই সরলরেখায় অবস্থিত।

সমাধান



বিশেষ নির্বচন: মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABCD বৃত্তে $\angle ADB + \angle BDC$ = এক সমকোণ। প্রমাণ করতে হবে যে, A, O এবং C একই সরলরেখায় অবস্থিত।

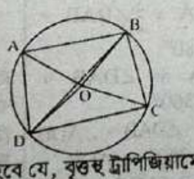
অঙ্কন: A, O; B, O এবং C, O যোগ করি।

প্রমাণ:

ধাপ	যথার্থতা
১. একই চাপ AB-এর উপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ $\angle ADB$ এবং কেন্দ্রস্থ $\angle AOB$. $\therefore \angle ADB = \frac{1}{2}\angle AOB$	[বৃত্তের একই চাপের উপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণ কেন্দ্রস্থ কোণের অর্ধেক।]
২. একই চাপ BC-এর উপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ $\angle BDC$ এবং কেন্দ্রস্থ $\angle BOC$. $\therefore \angle BDC = \frac{1}{2}\angle BOC$	[একই কারণে]
৩. এখন, $\angle ADB + \angle BDC = \frac{1}{2}\angle AOB + \frac{1}{2}\angle BOC$	[ধাপ–১ ও ধাপ–২ হতে]
বা, 1 সমকোণ $= \frac{1}{2}(\angle AOB + \angle BOC)$ বা, $\angle AOB + \angle BOC = 2 \times 1$ সমকোণ $\therefore \angle AOB + \angle BOC = 2$ সমকোণ কিন্তু $\angle AOB$ এবং $\angle BOC$ দুটি সন্নিহিত কোণ এবং তাদের সমষ্টি দুই সমকোণ। আবার, $\angle AOB$ এবং $\angle BOC$ এর বহিঃস্থ বাহুদ্বয় যথাক্রমে OA এবং OC $\therefore$ OA এবং OC একই সরলরেখায় অবস্থিত। অর্থাৎ A, O এবং C একই সরলরেখায় অবস্থিত। (প্রমাণিত)	[কল্পনা]

৩. দেখাও যে, বৃত্তস্থ ট্রাপিজিয়ামের তির্যক বাহুদ্বয় পরস্পর সমান।

সমাধান



সাধারণ নির্বচন : দেখাতে হবে যে, বৃত্তস্থ ট্রাপিজিয়ামের তির্যক বাহুদ্বয় পরস্পর সমান।

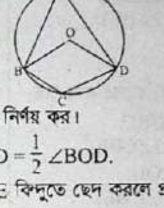
বিশেষ নির্বচন: মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে ABCD একটি বৃত্তস্থ ট্রাপিজিয়াম। উহার AB ∥ DC এবং AD ও BC তির্যক বাহু। প্রমাণ করতে হবে যে, AD = BC.

অঙ্কন : O, A; O, B; O, C; O, D এবং A, C যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
১. একই চাপ AD এর উপর দণ্ডায়মান $\angle AOD$ কেন্দ্রস্থ কোণ এবং $\angle ACD$ বৃত্তস্থ কোণ। $\therefore \angle ACD = \frac{1}{2}\angle AOD$ $\therefore \angle AOD = 2\angle ACD$ BC চাপের ক্ষেত্রে, $\angle BOC = 2\angle ACD$	[একই চাপে.. উপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণ কেন্দ্রস্থ কোণের অর্ধেক]
২. সুতরাং $\angle AOD = \angle BOC$ এখন, $\Delta\angle AOD = \angle BOC$ এর $\therefore OD = OC, AO = OB$ এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle AOD$ = অন্তর্ভুক্ত $\angle BOC$ $\therefore \Delta AOD \cong \Delta BOC$ $\therefore AD = BC$ (প্রমাণিত)	[ধাপ–১ হতে]

৪. চিত্রে O বৃত্তের কেন্দ্র এবং OB = 2.5 সে.মি.



ক. ABCD বৃত্তটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $\angle BAD = \frac{1}{2}\angle BOD$. ৪

গ. AC ও BD পরস্পর E বিন্দুতে ছেদ করলে প্রমাণ কর যে, $\angle AOB + \angle COD = 2\angle AEB$. ৪

✔ ৪ নং প্রশ্নের উত্তর ▸

ক দেওয়া আছে, বৃত্তের ব্যাসার্ধ, r = 2.5 সে.মি.

$\therefore$ ABCD বৃত্তের দৈর্ঘ্য = বৃত্তের পরিধি

$= 2\pi r$

$= (2 \times 3.1416 \times 2.5)$ সে.মি.

$= 15.708$ সে.মি.

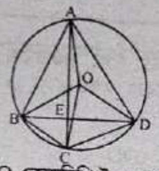
খ

বিশেষ নির্বচন: মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABCD একটি বৃত্ত এবং তার একই উপচাপ BD এর ওপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ $\angle BAD$ এবং কেন্দ্রস্থ $\angle BOD$। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle BOD = 2\angle BAD$.

অঙ্কন: মনে করি, AD রেখাংশ কেন্দ্রগামী নয়। এক্ষেত্রে A বিন্দু দিয়ে কেন্দ্রগামী রেখাংশ AE আঁকি।

প্রমাণ:

ধাপসমূহ	যথার্থতা
১. ΔAOB এর বহিঃস্থ কোণ $\angle BOE = \angle BAO + \angle ABO$	[ত্রিভুজের বহিঃস্থ কোণ বিপরীত অন্তঃস্থ কোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান]
২. ΔAOB-এ OA = OB অতএব, $\angle BAO = \angle ABO$	[একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ] [সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন কোণ দুটি সমান]
৩. ধাপ (১) ও (২) থেকে $\angle BOE = 2\angle BAO$.	
৪. একইভাবে ΔAOD থেকে $\angle DOE = 2\angle DAO$	
৫. ধাপ (৩) ও (৪) থেকে $\angle BOE + \angle DOE$ $= 2\angle BAO + 2\angle DAO$ $= 2(\angle BAO + \angle DAO)$ অর্থাৎ $\angle BOD = 2\angle BAD$. (প্রমাণিত)	[যোগ করে]



বিশেষ নির্বচন: মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABCD একটি বৃত্ত এবং AC ও BD পরস্পর E বিন্দুতে ছেদ করলে প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle AOB + \angle COD = 2\angle AEB$।

অঙ্কন : A, O এবং C, O যোগ করি।

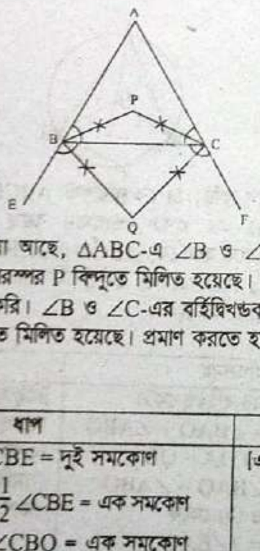
প্রমাণ :

ধাপসমূহ	যথার্থতা
১. ΔBCE এর বহিঃস্থ $\angle AEB = \angle BCE + \angle CBE$	[ত্রিভুজের বহিঃস্থ কোণ অন্তঃস্থ বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান]
২. AB চাপের উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ $\angle AOB$ এবং বৃত্তস্থ $\angle ACB$ $\therefore \angle AOB = 2\angle ACB$ বা, $\angle AOB = 2\angle BCE$	[একই চাপের উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ]
৩. অনুরূপভাবে, CD চাপের জন্য পাই, $\angle COD = 2\angle CBD$ বা, $\angle COD = 2\angle CBE$	
৪. $\angle AOB + \angle COD$ $= 2(\angle BCE + \angle CBE)$ $= 2\angle AEB$ (প্রমাণিত)	

অনুশীলনী ৮.৩

১. ΔABC এ $\angle B$ ও $\angle C$ এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় P বিন্দুতে এবং বহির্দ্বিখণ্ডকদ্বয় Q বিন্দুতে মিলিত হলে, প্রমাণ কর যে, B, P, C, Q বিন্দু চারটি সমবৃত্ত।

সমাধান



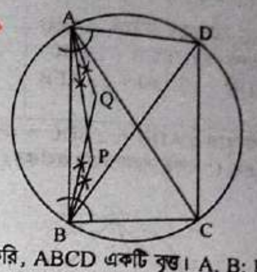
বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, ΔABC-এ $\angle B$ ও $\angle C$-এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় যথাক্রমে BP ও CP পরস্পর P বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। AB কে E এবং AC কে F পর্যন্ত বর্ধিত করি। $\angle B$ ও $\angle C$-এর বহির্দ্বিখণ্ডকদ্বয় যথাক্রমে BQ ও CQ পরস্পর Q বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। প্রমাণ করতে হবে যে, B, P, C, Q বিন্দু চারটি সমবৃত্ত।

প্রমাণ:

ধাপ	যথার্থতা
১. $\angle ABC + \angle CBE =$ দুই সমকোণ $\therefore \frac{1}{2}\angle ABC + \frac{1}{2}\angle CBE =$ এক সমকোণ $\therefore \angle PBC + \angle CBQ =$ এক সমকোণ $\therefore \angle PBQ =$ এক সমকোণ অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে, $\angle PCQ =$ এক সমকোণ	[এক সরলকোণ]
২. PBQC চতুর্ভুজে $\angle PBQ + \angle PCQ =$ দুই সমকোণ $\therefore$ PBQC একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ। $\therefore$ B, P, C, Q বিন্দু চারটি সমবৃত্ত। (প্রমাণিত)	

২. ABCD একটি বৃত্ত। $\angle CAB$ ও $\angle CBA$ এর সমদ্বিখণ্ডক দুটি P বিন্দুতে এবং $\angle DBA$ ও $\angle DAB$ কোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডক দুটি Q বিন্দুতে মিলিত হলে, প্রমাণ কর যে, A, Q, P, B বিন্দু চারটি সমবৃত্ত।

সমাধান



বিশেষ নির্বচন: মনেকরি, ABCD একটি বৃত্ত। A, B; B, C; C, D; D, A এবং A, C ও B, D যোগ করা হলো। $\angle CAB$ এবং $\angle CBA$-এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় যথাক্রমে AP ও BP পরস্পর P বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। আবার $\angle DBA$ এবং $\angle DAB$-এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় যথাক্রমে BQ ও AQ পরস্পর Q বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। প্রমাণ করতে হবে যে, A, Q, P, B বিন্দু চারটি সমবৃত্ত।

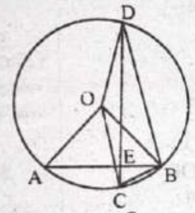
প্রমাণ:

ধাপ	যথার্থতা
১. $\angle ABP = \frac{1}{2}\angle CBA$	[$\because$ BP, $\angle CBA$-এর সমদ্বিখণ্ডক]
এবং $\angle BAP = \frac{1}{2}\angle CAB$	[$\because$ AP, $\angle CAB$-এর সমদ্বিখণ্ডক।]
এখন, ΔABP-এর $\angle ABP + \angle BAP + \angle APB = 180°$	[$\because$ ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ]
বা, $\frac{1}{2}\angle CBA + \frac{1}{2}\angle CAB + \angle APB = 180°$	
বা, $\angle CBA + \angle CAB + 2\angle APB = 360°$	[উভয় পক্ষকে 2 দ্বারা গুণ করে।]
বা, $\angle CBA + \angle CAB + \angle ACB + 2\angle APB = 360° + \angle ACB$	[উভয়পক্ষে $\angle ACB$ যোগ করে]
বা, $180° + 2\angle APB = 360° + \angle ACB$	[$\because$ ΔABC-এর তিন কোণের সমষ্টি 180°]
বা, $2\angle APB = 360° + \angle ACB - 180°$ বা, $\angle ACB = 2\angle APB - 180°$ .... (i)	
২. আবার, $\angle ABQ = \frac{1}{2}\angle DBA$	[$\because$ BQ, $\angle DBA$-এর সমদ্বিখণ্ডক]
এবং $\angle BAQ = \frac{1}{2}\angle DAB$	[$\because$ AQ, $\angle DAB$-এর সমদ্বিখণ্ডক]
এখন, ΔABQ-এর $\angle ABQ + \angle BAQ + \angle AQB = 180°$	
বা, $\frac{1}{2}\angle DBA + \frac{1}{2}\angle DAB + \angle AQB = 180°$	
বা, $\angle DBA + \angle DAB + 2\angle AQB = 360°$	[উভয় পক্ষকে 2 দ্বারা গুণ করে]
বা, $\angle DBA + \angle DAB + \angle ADB + 2\angle AQB = 360° + \angle ADB$	[উভয়পক্ষে $\angle ADB$ যোগ করে।]
বা, $180° + 2\angle AQB = 360° + \angle ADB$ বা, $2\angle AQB = 180° + \angle ADB$ $\therefore \angle ADB = 2\angle AQB - 180°$ .... (ii)	

৩. কিন্তু $\angle ACB = \angle ADB$	[উভয়ই একই চাপের উপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণ।]
বা, $2\angle APB - 180^\circ = 2\angle AQB - 180^\circ$ বা, $2\angle APB = 2\angle AQB$ $\therefore \angle APB = \angle AQB$	[(i) ও (ii) এর সাহায্যে]
৪. এখন, $\angle APB$ এবং $\angle AQB$ কোণদ্বয় A, B বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাংশ AB এর একই পার্শ্বস্থ দুই বিন্দু P ও Q-এ উৎপন্ন এবং সমান। $\therefore$ A, Q, P, B বিন্দু চারটি সমবৃত্ত। (প্রমাণিত)	

৬. **O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের AB ও CD জ্যা দুইটি বৃত্তের অভ্যন্তরে অবস্থিত কোনো বিন্দুতে সমকোণে মিলিত হয়েছে। প্রমাণ কর যে, $\angle AOD + \angle BOC$ = দুই সমকোণ।**

সমাধান



বিশেষ নির্বচন: মনে করি, ABCD একটি বৃত্ত। O তার কেন্দ্র। AB, CD জ্যাদ্বয় বৃত্তের অভ্যন্তরে পরস্পর E বিন্দুতে সমকোণে মিলিত হয়েছে। A, O; O, B; O, C; O, D যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle AOD + \angle BOC$ = দুই সমকোণ।

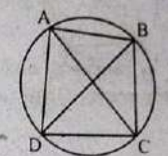
অঙ্কন: B, D যোগ করি।

প্রমাণ:

ধাপ	যথার্থতা
১. একই চাপ AD-এর উপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ $\angle ABD$ এবং কেন্দ্রস্থ $\angle AOD$ $\therefore \angle ABD = \frac{1}{2}\angle AOD$ $\therefore \angle AOD = 2\angle ABD$	[বৃত্তের একই চাপের উপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণ কেন্দ্রস্থ কোণের অর্ধেক।]
২. আবার, একই চাপ BC-এর উপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ $\angle BDC$ এবং কেন্দ্রস্থ $\angle BOC$ $\therefore \angle BDC = \frac{1}{2}\angle BOC$ $\therefore \angle BOC = 2\angle BDC$	
৩. এখন, $\angle AOD + \angle BOC = 2\angle ABD + 2\angle BDC$ $\therefore \angle AOD + \angle BOC = 2(ABD + \angle BDC)$ $\therefore \angle AOD + \angle BOC = 2(\angle EBD + \angle BDE)$	[ধাপ-১ ও ধাপ-২ হতে]
(৪) কিন্তু BDE সমকোণী ত্রিভুজে $\angle EBD + \angle BDE$ = এক সমকোণ। $\therefore \angle AOD + \angle BOC = 2 \times$ এক সমকোণ $\therefore \angle AOD + \angle BOC$ = দুই সমকোণ। (প্রমাণিত)	

৪. **ABCD চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয় পরস্পর সম্পূরক। AC রেখা যদি $\angle BAD$ এর সমদ্বিখণ্ডক হয়, তবে প্রমাণ কর যে, BC = CD।**

সমাধান



বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, ABCD চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয় পরস্পর সম্পূরক। AC রেখা, $\angle BAD$-এর সমদ্বিখণ্ডক। প্রমাণ করতে হবে যে, BC = CD.

অঙ্কন: B, D যোগ করি।

প্রমাণ:

ধাপ	যথার্থতা
১. ABCD চতুর্ভুজ $\angle BAC = \angle DAC$ ....(i)	[AC রেখা $\angle BAD$ এর সমদ্বিখণ্ডক।]
২. এখন, একই চাপ CD-এর উপর দণ্ডায়মান $\therefore \angle DAC = \angle DBC$	[একই চাপের উপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণদ্বয় পরস্পর সমান]
আবার, একই চাপ BC-এর উপর দণ্ডায়মান $\therefore \angle BAC = \angle BDC$ কিন্তু $\angle DAC = \angle BAC$ $\therefore \angle DBC = \angle BDC$	[ধাপ-১ হতে]
অর্থাৎ $\triangle$ BDC-এর $\angle DBC = \angle BDC$ $\therefore$ CD = BC $\therefore$ BC = CD. (প্রমাণিত)	[ত্রিভুজের সমান সমান কোণের বিপরীত বাহুদ্বয় পরস্পর সমান]

৫. O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধ 2.5 সে.মি., AB = 3 সে.মি. এবং BD, $\angle ADC$ এর সমদ্বিখণ্ডক।

ক. AD দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $\angle ADC + \angle ABC = 180^\circ$. ৪

গ. প্রমাণ কর যে, AB = BC. ৪

✔ ৫ নং প্রশ্নের উত্তর ▶

ক চিত্রে ABD সমকোণী ত্রিভুজ। কারণ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ এক সমকোণ। চিত্রে ABD সমকোণী ত্রিভুজের $\angle BAD$ = এক সমকোণ। সুতরাং BD হলো অতিভুজ।

এখন, অতিভুজ BD = BO + DO

= (2.5 + 2.5) সে.মি.

[$\because$ বৃত্তের ব্যাসার্ধ = 2.5 সে.মি.]

= 5 সে.মি.

আবার, AB = 3 সে.মি.

$\triangle ABD$ হতে পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে পাই,

$AB^2 + AD^2 = BD^2$

বা, $3^2 + AD^2 = 5^2$

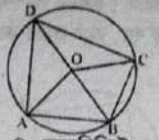
$\therefore AD = \sqrt{5^2 - 3^2}$

$= \sqrt{16}$

$= 4$

$\therefore$ AD-এর দৈর্ঘ্য 4 সে.মি.

৯২



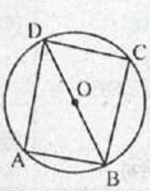
বিশেষ নির্বচন: প্রদত্ত চিত্রে, O কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত ABCD চতুর্ভুজটি অন্তর্লিখিত হয়েছে। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle ABC + \angle ADC = 180°$

অঙ্কন: O, C যোগ করি।

প্রমাণ:

ধাপ	যথার্থতা
১. একই চাপ ADC এর উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ প্রবৃদ্ধ কোণ $\angle AOC = 2$(বৃত্তস্থ $\angle ABC$) অর্থাৎ প্রবৃদ্ধ কোণ $\angle AOC = 2\angle ABC$	[∵ একই চাপের উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ]
২. আবার, একই চাপ ABC এর উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ $\angle AOC = 2$(বৃত্তস্থ $\angle ADC$) অর্থাৎ $\angle AOC = 2\angle ADC$ (৩) সুতরাং, $\angle AOC$ + প্রবৃদ্ধ কোণ $\angle AOC = 2(\angle ADC + \angle ABC)$ কিন্তু $\angle AOC$ + প্রবৃদ্ধ কোণ $\angle AOC$ = চার সমকোণ বা, $2(\angle ABC + \angle ADC) = 360°$ $\therefore \angle ABC + \angle ADC = 180°$ (প্রমাণিত)	[একই কারণে]

৯৩



বিশেষ নির্বচন : O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABCD বৃত্তে ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ। BD, $\angle ADC$ এর সমদ্বিখণ্ডক। প্রমাণ করতে হবে যে, AB = BC

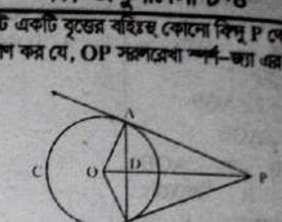
প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
(১) ABCD বৃত্তে $\angle BAD$ ও $\angle BCD$ উভয় অর্ধবৃত্তস্থ কোণ। সুতরাং $\angle BAD = \angle BCD$ = এক সমকোণ অর্থাৎ ΔBAD ও ΔBCD উভয়ই সমকোণী ত্রিভুজ।	[∵ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ এক সমকোণ]
(২) এখন, BD রেখাংশ $\angle ADC$ কে সমদ্বিখণ্ডিত করে। ফলে $\angle ADB = \angle BDC$ তাহলে ত্রিভুজদ্বয়ের তৃতীয় কোণ দুইটি ও পরস্পর সমান হবে। অর্থাৎ ΔBAD ও ΔBCD সদৃশকোণী ত্রিভুজ।	
(৩) এখন, সদৃশকোণী ΔABD ও ΔBCD হতে পাই, BD = BD $\angle BAD = \angle BCD$ $\angle ABD = \angle DBC$ $\therefore \Delta ABD \cong \Delta BCD$ অর্থাৎ AB = BC (প্রমাণিত)	[সাধারণ বাহু] [∵ যদি একটি ত্রিভুজের দুইটি কোণ ও তাদের সংলগ্ন বাহু যথাক্রমে অপর একটি ত্রিভুজের দুইটি কোণ ও তাদের সংলগ্ন বাহুর সমান হয়, তবে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম]

অনুশীলনী ৮.৪

১. O কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু P থেকে বৃত্তে দুটি স্পর্শক টানা হলো। প্রমাণ কর যে, OP সরলরেখা স্পর্শ-জ্যা এর লম্বদ্বিখণ্ডক।

সমাধান



বিশেষ নির্বচন: মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABC বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু P থেকে দুটি স্পর্শক PA ও PB বৃত্তকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে স্পর্শ করেছে। O, P এবং A, B যোগ করি।

প্রমাণ করতে হবে যে, OP, AB-এর লম্বদ্বিখণ্ডক।

অঙ্কন: O, A এবং O, B যোগ করি।

প্রমাণ:

ধাপ	যথার্থতা
১. যেহেতু বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু P থেকে PA ও PB দুটি স্পর্শক। $\therefore PA = PB$	[∵ বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো নির্দিষ্ট বিন্দু হতে বৃত্তে দুটি স্পর্শক টানলে ঐ বিন্দু হতে স্পর্শবিন্দুদ্বয়ের দূরত্ব সমান]
২. এখন, ΔPOA ও ΔPOB–এ PA = PB, OA = OB এবং OP বাহু সাধারণ। $\therefore \Delta POA \cong \Delta POB$ $\therefore \angle POA = \angle POB$ $\therefore \angle AOP = \angle BOP$ অর্থাৎ $\angle AOD = \angle BOD$	[∴ একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]
৩. এখন, ΔAOD ও ΔBOD –এ OA = OB OD বাহু সাধারণ এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle AOD$ = অন্তর্ভুক্ত $\angle BOD$ $\therefore \Delta AOD \cong \Delta BOD$ সুতরাং AD = BD এবং $\angle ADO = \angle BDO$. যেহেতু কোণ দুটি রৈখিক যুগল কোণ এদের এদের পরিমাণ সমান, সুতরাং এরা প্রত্যেকে এক সমকোণ। অর্থাৎ $\angle ADO = \angle BDO$ = এক সমকোণ। ∴ OP রেখা AB রেখাংশের লম্বদ্বিখণ্ডক অর্থাৎ OP রেখা, স্পর্শ জ্যা AB-এর লম্বদ্বিখণ্ডক। (প্রমাণিত)	[∴ একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ] [ধাপ–২ হতে]

২. প্রমাণ কর যে, দুইটি বৃত্ত এককেন্দ্রিক হলে এবং বৃহত্তর বৃত্তের কোনো জ্যা ক্ষুদ্রতর বৃত্তটিকে স্পর্শ করলে উক্ত জ্যা স্পর্শবিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

সমাধান

সাধারণ নির্বচন : প্রমাণ করতে হবে যে, দুইটি বৃত্ত এককেন্দ্রিক হলে এবং বৃহত্তর বৃত্তের কোনো জ্যা ক্ষুদ্রতর বৃত্তটিকে স্পর্শ করলে উক্ত জ্যা স্পর্শবিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABC ও PQR বৃত্ত দুইটি এককেন্দ্রিক অর্থাৎ উভয় বৃত্তের কেন্দ্র O। বৃত্ত ABC বৃত্ত RPQ হতে বৃহত্তর। ABC বৃত্তের জ্যা AB, RPQ বৃত্তকে P বিন্দুতে স্পর্শ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, P বিন্দুতে AB সমদ্বিখণ্ডিত হয়।
অর্থাৎ PA = PB

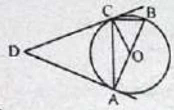
অঙ্কন : O, A; O, B এবং O, P যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ	যথার্থতা
১. OP, RPQ বৃত্তের স্পর্শ বিন্দুগামী ব্যাসার্ধ এবং AB স্পর্শক। সুতরাং $\angle OPB$ = এক সমকোণ = $\angle OPA$।	
২. সমকোণী $\triangle OPB$ এবং সমকোণী $\triangle OPA$ এর মধ্যে	[∵ বৃত্তের যেকোনো বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধের উপর লম্ব]
অতিভুজ OA = অতিভুজ OB OP বাহু সাধারণ	[একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলে]
অতএব, ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম।	[সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ বাহু সর্বসমতা]
∴ AP = BP অর্থাৎ AB, P বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়। (প্রমাণিত)	

৩. **AB কোনো বৃত্তের ব্যাস এবং BC ব্যাসার্ধের সমান একটি জ্যা। যদি A ও C বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয় পরস্পর D বিন্দুতে মিলিত হয়, তবে প্রমাণ কর যে, ACD একটি সমবাহু ত্রিভুজ।**

সমাধান



বিশেষ নির্বচন : O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাস AB এবং BC জ্যা ব্যাসার্ধ OB অথবা OA-এর সমান। A ও C বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক AD ও CD পরস্পর D বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। A, C যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, ACD একটি সমবাহু ত্রিভুজ।

অঙ্কন: C, O যোগ করি।

প্রমাণ:

ধাপ	যথার্থতা
১. AB ব্যাস হওয়ায় $\angle ACB = 90°$	[অর্ধবৃত্তস্থ কোণ]
আবার, $\triangle BCO$-এ BO = CO	[একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]
∴ BO = CO = BC ∴ $\triangle BCO$ একটি সমবাহু ত্রিভুজ ∴ $\angle BCO = 60°$ তাহলে, $\angle ACO = 90° - 60° = 30°$	[কল্পনা]
২. এখন $\triangle AOC$-এ AO = CO ∴ $\angle CAO = \angle ACO = 30°$	[একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ] [∴ সমান সমান বাহুর বিপরীত কোণ সমান]
AD স্পর্শক এবং OA স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ হওয়ায়, $\angle DAO = 90°$ সুতরাং $\angle DAC = \angle DAO - \angle CAO$ $= 90° - 30°$ $= 60°$ একই কারণে, $\angle DCO = 90°$ অতএব, $\angle ACD = \angle DCO - \angle ACO$ $= 90° - 30°$ $= 30°$	
৩. $\triangle ACD$-এ $\angle DAC = \angle ACD = 60°$ ∴ $\angle ADC = 60°$ অতএব, $\triangle ACD$ একটি সমবাহু ত্রিভুজ। (প্রমাণিত)	

৪. **প্রমাণ কর যে, কোনো বৃত্তের পরিলিখিত চতুর্ভুজের যেকোনো দুইটি বিপরীত বাহু কেন্দ্রে যে দুইটি কোণ ধারণ করে, তারা পরস্পর সম্পূরক।**

সমাধান

সাধারণ নির্বচন : প্রমাণ করতে হবে যে, কোনো বৃত্তের পরিলিখিত চতুর্ভুজের যে কোনো দুটি বিপরীত বাহু কেন্দ্রে যে দুটি কোণ ধারণ করে, তারা পরস্পর সম্পূরক।

মনে করি, ABCD চতুর্ভুজটি O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে পরিলিখিত। চতুর্ভুজের AB ও CD বিপরীত বাহু দুইটি কেন্দ্রে $\angle AOB$ এবং $\angle COD$ ধারণ করেছে।

প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle AOB + \angle COD = 2$ সমকোণ বা সম্পূরক কোণ।

অঙ্কন: O, S; O, Q; O, R এবং O, P যোগ করি।

প্রমাণ:

ধাপ	যথার্থতা
১. $\triangle AOP$ ও $\triangle AOQ$ এর মধ্যে AP = AQ	[∵ বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু থেকে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয় পরস্পর সমান।]
OP = OQ এবং OA সাধারণ বাহু। ∴ $\triangle AOP \cong \triangle AOQ$ ∴ $\angle AOP = \angle AOQ$ একইভাবে প্রমাণ করা যায় যে, $\angle POB = \angle ROB$, $\angle COR = \angle COS$ এবং $\angle DOQ = \angle DOS$	[একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলে]
২. এখন, $\angle AOB + \angle BOC + \angle COD + \angle AOD = 4$ সমকোণ বা, $\angle AOB + \angle BOR + \angle COR + \angle COD + \angle AOQ + \angle DOQ = 4$ সমকোণ বা, $\angle AOB + \angle POB + \angle COS + \angle COD + \angle AOP + \angle DOS = 4$ সমকোণ বা, $\angle AOB + (\angle POB + \angle AOP) + (\angle COS + \angle DOS) + \angle COD = 4$ সমকোণ। বা, $\angle AOB + \angle AOB + \angle COD + \angle COD = 4$ সমকোণ বা, $2(\angle AOB + \angle COD) = 4$ সমকোণ ∴ $\angle AOB + \angle COD = 2$ সমকোণ বা সম্পূরক কোণ। (প্রমাণিত)	

৫. O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু P থেকে বৃত্তে PA ও PB দুইটি স্পর্শক।

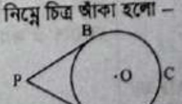
ক. উদ্দীপকের আলোকে চিত্র আঁক। ২

খ. প্রমাণ কর যে, PA = PB. ৪

গ. প্রমাণ কর যে, OP রেখাংশ স্পর্শ-জ্যা এর লম্ব সমদ্বিখণ্ডক। ৪

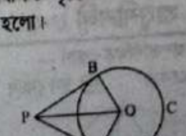
✔ ৫ নং প্রশ্নের উত্তর ▸

ক উদ্দীপকের আলোকে নিম্নে চিত্র আঁকা হলো –



চিত্রে P হলো O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের বহিঃস্থ একটি বিন্দু। P হতে দুইটি স্পর্শক PA ও PB আঁকা হলো।

খ



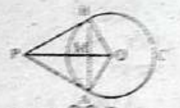
বিশেষ নির্বচন: মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABC বৃত্তের P একটি বহিঃস্থ বিন্দু এবং PA ও PB রশ্মিদ্বয় বৃত্তের A ও B বিন্দুতে দুইটি স্পর্শক। প্রমাণ করতে হবে যে, PA = PB

অঙ্কন: O, A; O, B এবং O, P যোগ করি।

প্রমাণ:

ধাপ	যথার্থতা
১. যেহেতু PA স্পর্শক এবং OA স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ, সেহেতু PA ⊥ OA. $\therefore \angle PAO$ = এক সমকোণ।	[স্পর্শক স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধের ওপর লম্ব]
অনুরূপ, $\angle PBO$ = এক সমকোণ। $\therefore \triangle PAO$ এবং $\triangle PBO$ উভয়ই সমকোণী ত্রিভুজ।	
২. এখন, $\triangle PAO$ ও $\triangle PBO$ সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ে অতিভুজ	
PO = অতিভুজ PO	[সাধারণ বাহু]
এবং OA = OB	[একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]
OA = OB	[সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ-বাহু সর্বসমতা]
$\therefore \triangle PAO \cong \triangle PBO$ $\therefore$ PA = PB. (প্রমাণিত)	

৩



বিশেষ নির্বচন: মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABC বৃত্তে একটি জ্যা AB। O, P যোগ করি। তাহলে, OP রেখাংশ AB জ্যাকে M বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করতে হবে যে, OP রেখাংশ AB জ্যা এর লম্ব সমদ্বিখণ্ডক।

অঙ্কন: O, A এবং O, B যোগ করি।

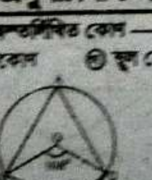
প্রমাণ:

ধাপসমূহ	যথার্থতা
১. $\triangle OAP$ এবং $\triangle OBP$-এ	
AP = BP	['খ' হতে পাই]
OA = OB	[উভয়ে একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]
এবং OP = OP	[সাধারণ বাহু]
সুতরাং $\triangle OAP \cong \triangle OBP$	[বাহু-কোণ-বাহু উপপাদ্য]
$\therefore \angle OPA = \angle OPB$	
অর্থাৎ $\angle APM = \angle BPM$	['খ' হতে পাই]
২. $\triangle APM$ ও $\triangle BPM$ এ	[সাধারণ বাহু]
AP = BP	
PM = PM	
এবং $\angle APM = \angle BPM$	
$\therefore \triangle APM \cong \triangle BPM$	[বাহু-কোণ-বাহু উপপাদ্য]
$\therefore$ AM = BM	
অর্থাৎ AB জ্যা M বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়।	[বৃত্তের কেন্দ্র ও ব্যাস ভিন্ন কোনো জ্যা-এর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাংশ ঐ জ্যা-এর উপর লম্ব]
সুতরাং OM ⊥ AB	
অর্থাৎ OP ⊥ AB	
অতএব, OP রেখাংশ AB জ্যা এর লম্ব সমদ্বিখণ্ডক। (প্রমাণিত)	

অনুশীলনী ৮-৩

০১. কোনো বৃত্তের অধিচাপে অন্তর্লিখিত কোণ —

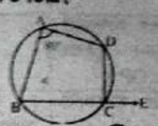
● সূক্ষ্মকোণ ⓑ সমকোণ ⓒ স্থূল কোণ ⓓ পূরককোণ



২. O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে x এর মান কত?

● 126° ⓑ 108° ⓒ 72° ⓓ 54°

৩. চিত্রে $\frac{1}{2}\angle ECD$ = কত ডিগ্রি?



● 40° ⓑ 50° ⓒ 80° ⓓ 100°

৪. দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে বহিঃস্পর্শ করে। তাদের একটির ব্যাস 8 সে.মি. এবং অপরটির ব্যাসার্ধ 4 সে.মি. হলে তাদের কেন্দ্রদ্বয়ে মধ্যবর্তী দূরত্ব কত?

ⓐ 0 সে.মি. ⓑ 4 সে.মি. ● 8 সে.মি. ⓓ 12 সে.মি.

৫. O কেন্দ্রবিশিষ্ট কোনো বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু P থেকে বৃত্তে দুইটি স্পর্শক PQ ও PR টানা হলে $\triangle PQR$ হবে–

i. সমবাহু ii. সমদ্বিবাহু iii. সমকোণী

নিচের কোনটি সঠিক?

ⓐ i ⓑ i ও ii ⓒ ii ও iii ⓓ i, ii ও iii

[বি.দ্র. : সঠিক উত্তর হবে (ii)]

নিচের উদ্দীপকটি লক্ষ কর এবং ৬ – ৮ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

AB ও AC রেখাদ্বয় BCD বৃত্তের স্পর্শক। বৃত্তের কেন্দ্র O এবং $\angle BAC = 60°$

৬. $\angle BOC$ এর মান কত?

ⓐ 300° ⓑ 270° ● 120° ⓓ 90°

৭. D, BDC চাপের মধ্যবিন্দু হলে–

i. $\angle BDC = \angle BAC$ ii. $\angle BAC = \frac{1}{2}\angle BOC$

iii. $\angle BOC = \angle DBC + \angle BCD$

নিচের কোনটি সঠিক?

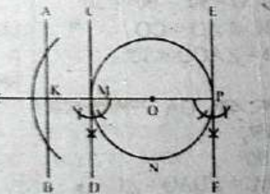
ⓐ i ও ii ⓑ i ও iii ⓒ ii ও iii ● i, ii ও iii

৮. ABC সমবাহু ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র O হলে, $\angle BOC$ = কত ডিগ্রি?

ⓐ 30° ⓑ 60° ⓒ 90° ● 120°

৯. কোনো বৃত্তে এমন একটি স্পর্শক আঁক যেন তা নির্দিষ্ট সরলরেখার সমান্তরাল হয়।

সমাধান



বিশেষ নির্বচন : মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট MNP একটি বৃত্ত এবং AB একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা। MNP বৃত্তে এমন একটি স্পর্শক আঁকতে হবে যা, AB সরলরেখার সমান্তরাল হবে।

অঙ্কন :

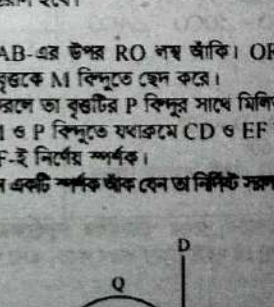
(১) O বিন্দু থেকে AB-এর উপর RO লম্ব আঁকি। OR, AB রেখাকে K বিন্দুতে এবং MNP বৃত্তকে M বিন্দুতে ছেদ করে।

(২) RO-কে বর্ধিত করলে তা বৃত্তটির P বিন্দুর সাথে মিলিত হয়।

(৩) MP-এর উপর M ও P বিন্দুতে যথাক্রমে CD ও EF লম্ব টানি। তাহলে CD অথবা EF-ই নির্ণেয় স্পর্শক।

১০. কোনো বৃত্তে এমন একটি স্পর্শক আঁক যেন তা নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর লম্ব হয়।

সমাধান



সাধারণ নির্বচন : কোনো বৃত্তে এমন একটি স্পর্শক আঁকতে হবে যেন তা কোনো নির্দিষ্ট সরল রেখার উপর লম্ব হয়।

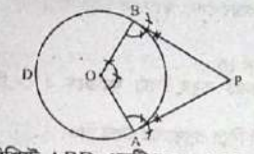
মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট PQR একটি বৃত্ত, এবং AB একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা। PQR বৃত্তে এমন একটি স্পর্শক আঁকতে হবে যা নির্দিষ্ট সরলরেখা AB এর উপর লম্ব।

অঙ্কনের বিবরণ: AB রেখার উপর যেকোনো একটি বিন্দু E নেই। O, E যোগ করি। O বিন্দু দিয়ে AB এর সমান্তরাল POR টানি, যা বৃত্তের পরিধিকে R বিন্দুতে ছেদ করে। এখন, R বিন্দুতে CD স্পর্শক টানি। যা AB কে C বিন্দুতে ছেদ করে।

তাহলে CD–ই নির্ণেয় স্পর্শক, যা নির্দিষ্ট AB রেখার উপর লম্ব হয়।

১১. কোনো বৃত্তে এমন দুইটি স্পর্শক আঁক যেন তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ 60° হয়।

সমাধান



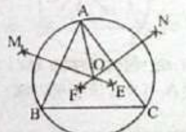
মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABD একটি বৃত্ত। ABD বৃত্তে এমন দুটি স্পর্শক আঁকতে হবে, যাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ 60° হয়।

অঙ্কনের বিবরণ: বৃত্তের উপরস্থ A একটি বিন্দু নিই। A, O যোগ করি। AO এর O বিন্দুতে $\angle AOB = 120^\circ$ । OB বৃত্তটিকে B বিন্দুতে ছেদ করে। এখন, OA রেখার উপর A বিন্দুতে এবং OB রেখার উপর B বিন্দুতে দুটি লম্ব টানি। মনে করি, লম্বদ্বয় পরস্পরকে P বিন্দুতে ছেদ করে। এখন, A, P ও B, P যোগ করি।

তাহলে AP ও BP–ই নির্ণেয় স্পর্শকদ্বয়, যাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ 60° অর্থাৎ $\angle APB = 60^\circ$।

১২. 3 সে.মি., 4 সে.মি. ও 4.5 সে.মি. বাহুবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজের পরিবৃত্ত আঁক এবং এই বৃত্তের ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

সমাধান



মনে করি, ABC একটি ত্রিভুজ যার তিনটি বাহু AB, BC ও AC বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 3 সে.মি., 4 সে.মি. ও 4.5 সে.মি.। ত্রিভুজটির পরিবৃত্ত আঁকতে হবে। অর্থাৎ এমন একটি বৃত্ত আঁকতে হবে, যা ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দু A, B ও C বিন্দু দিয়ে যায়।

অঙ্কন:

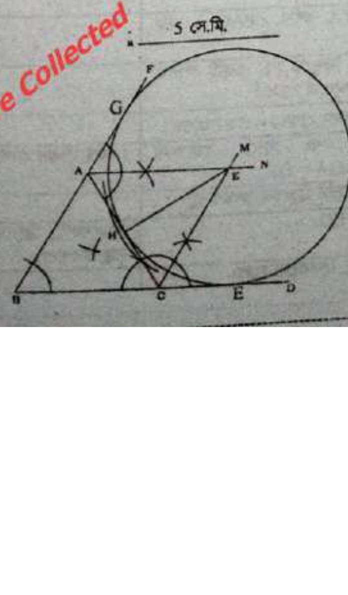
১. AB ও AC রেখাংশের লম্ব সমদ্বিখণ্ডক যথাক্রমে EM ও FN রেখাংশ আঁকি। মনে করি, তারা পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে।

২. A,O যোগ করি। O কে কেন্দ্র করে OA এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকি।

তাহলে, বৃত্তটি A,B ও C বিন্দুগামী হবে এবং এই বৃত্তটিই ΔABC এর নির্ণেয় পরিবৃত্ত।

১৩. 5 সে.মি. বাহুবিশিষ্ট একটি সমবাহু ত্রিভুজ ABC এর AC বাহুকে স্পর্শ করিয়ে একটি বহির্বৃত্ত আঁক।

সমাধান



সাধারণ নির্বচন: মনে করি, ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ যার বাহুর দৈর্ঘ্য, a = 5 সে.মি.। এর AC বাহুকে স্পর্শ করিয়ে একটি বহির্বৃত্ত আঁকতে হবে। অর্থাৎ এমন একটি বৃত্ত আঁকতে হবে যা ত্রিভুজ ABC এর AC বাহুকে এবং অপর দুই বাহুর বর্ধিতাংশকে স্পর্শ করে।

অঙ্কন:

১. AB ও BC বাহুদ্বয়কে যথাক্রমে F ও D পর্যন্ত বর্ধিত করি।

২. ∠DCA ও ∠FAC-এর সমদ্বিখণ্ডক যথাক্রমে CM এবং AN আঁকি। সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় পরস্পর E বিন্দুতে ছেদ করেছে।

৩. E থেকে AC এর উপর EH লম্ব আঁকি। ইহা AC কে H বিন্দুতে ছেদ করে।

৪. E কে কেন্দ্র করে EH এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকি। যা AB ও BC বাহুর বর্ধিতাংশকে G ও K বিন্দুতে ছেদ করে।

তাহলে, GHK বৃত্তটিই নির্ণেয় বহির্বৃত্ত।

১৪. একটি বর্গের অন্তর্বৃত্ত ও পরিবৃত্ত আঁক।

সমাধান

সাধারণ নির্বচন : একটি বর্গের অন্তর্বৃত্ত ও পরিবৃত্ত আঁকতে হবে।

মনে করি, ABCD একটি বর্গ। এর অর্ন্তবৃত্ত এবং পরিবৃত্ত আঁকতে হবে।

অঙ্কনের বিবরণ: A, C ও B, D যোগ করি। AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করে। O হতে AB এর উপর OE লম্ব টানি। এখন, O কে কেন্দ্র করে OE এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকি। বৃত্তটি AB, BC, CD ও DA বাহুকে যথাক্রমে E, F, G, H বিন্দুতে স্পর্শ করে। তাহলে EFGH-ই ABCD বর্গের অন্তর্বৃত্ত।

আবার, O বিন্দুকে কেন্দ্র করে OA বা OC এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকি যা বর্গের A, B, C, D শীর্ষবিন্দু দিয়ে যায়। সুতরাং O কেন্দ্রিক ABCD বৃত্তই বর্গটিই পরিবৃত্ত।

১৫. O কেন্দ্রবিশিষ্ট কোনো বৃত্তের AB ও CD জ্যা দুইটি বৃত্তের অভ্যন্তরস্থ E বিন্দুতে ছেদ করলে প্রমাণ কর যে, $\angle AEC = \frac{1}{2}(\angle BOD + \angle AOC)$.

সমাধান

বিশেষ নির্বচন: প্রদত্ত তথ্যানুযায়ী, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ACBD বৃত্তের AB ও CD জ্যা দুইটি বৃত্তের অভ্যন্তরস্থ E বিন্দুতে ছেদ করেছে। O, A; O, D; O, B এবং O, C যোগ করা হলো। AC ও BD চাপদ্বয় কেন্দ্রে যথাক্রমে ∠AOC এবং ∠BOD উৎপন্ন করে। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle AEC = \frac{1}{2}(\angle BOD + \angle AOC)$.

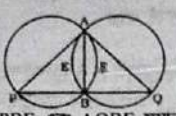
অঙ্কন: A, D যোগ করি।

প্রমাণ:

ধাপ	যথার্থতা
১. বৃত্তের AC চাপের উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ ∠AOC এবং বৃত্তস্থ ∠ADC. $\therefore \angle ADC = \frac{1}{2}\angle AOC$	[∵ বৃত্তের একই চাপের উপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণ কেন্দ্রস্থ কোণের অর্ধেক]
আবার, বৃত্তের BD চাপের উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ ∠BOD এবং বৃত্তস্থ ∠BAD. $\therefore \angle BAD = \frac{1}{2}\angle BOD$	[একই কারণে]
২. এখন, ΔADE এর বহিস্থ ∠AEC = ∠ADE + ∠DAE বা, ∠AEC = ∠ADC + ∠BAD বা, $\angle AEC = \frac{1}{2}\angle AOC + \frac{1}{2}\angle BOD$. $\therefore \angle AEC = \frac{1}{2}(\angle BOD + \angle AOC)$. (প্রমাণিত)	[∵ ত্রিভুজের বহিস্থ কোণ অন্তস্থ বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান।] [(i) ও (ii) অনুসারে]

১৬. দুইটি সমান ব্যাসবিশিষ্ট বৃত্তের সাধারণ জ্যা AB। B বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত কোনো সরলরেখা যদি বৃত্তে দুইটির সাথে P ও Q বিন্দুতে মিলিত হয়, তবে প্রমাণ কর যে, ΔPAQ সমদ্বিবাহু।

সমাধান

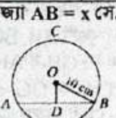


বিশেষ নির্বচন: মনে করি, APBF এবং AQBE সমান ব্যাসবিশিষ্ট দুটি বৃত্ত। AB তাদের সাধারণ জ্যা। B বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত PQ সরলরেখা APBF বৃত্তকে P বিন্দুতে ও AQBE বৃত্তকে Q বিন্দুতে ছেদ করে। A, P এবং A, Q যোগ করা হলো। প্রমাণ করতে হবে যে, ΔPAQ সমদ্বিবাহু।

প্রমাণ:

ধাপ	যথার্থতা
১. APBF এবং AQBE বৃত্ত দুটির সাধারণ জ্যা AB. চাপ AFB = চাপ AEB.	[∵ সমান সমান ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তে সমান সমান জ্যা সমান চাপ ছিন্ন করে।]
২. সমান সমান চাপ AFB এবং AEB এর উপর দণ্ডায়মান $\angle APB = \angle AQB$. $\therefore \angle APQ = \angle AQP$	[∵ সমান সমান বৃত্তে সমান সমান চাপের উপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণগুলো পরস্পর সমান।]
৩. এখন, ΔAPQ-এ $\angle APQ = \angle AQP$ $\therefore AQ = AP$ সুতরাং ΔPAQ সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ। (প্রমাণিত)	[∵ ত্রিভুজের সমান সমান [কোণের বিপরীত বাহুদ্বয় সমান।]

১৭. O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABC বৃত্তে জ্যা AB = x সে.মি. $OD \perp AB$.



পাশের চিত্র অনুযায়ী নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও:

ক. বৃত্তটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, D, AB এর মধ্যবিন্দু। ৪

গ. $OD = \left(\frac{x}{2} - 2\right)$ সে.মি. হলে x এর মান নির্ণয় কর। ৪

✔ ১৭ নং প্রশ্নের উত্তর ▶

ক এখানে, বৃত্তের ব্যাসার্ধ $r = OB = 10$ cm

$\therefore$ বৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \pi r^2 = 3.1416 \times (10)^2$ বর্গ সে.মি.
$= 314.16$ বর্গ সে.মি. (প্রায়)

খ

বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, O কেন্দ্র বিশিষ্ট ABC বৃত্তে AB জ্যা-এর OD লম্ব। দেখাতে হবে যে, D, AB এর মধ্যবিন্দু।

প্রমাণ:

ধাপ	যথার্থতা
O, A এবং O, B যোগ করি। যেহেতু $OD \perp AB$ $\therefore \angle ODA = \angle ODB = 90^\circ$ অতএব, ΔODA এবং ΔODB উভয়ই সমকোণী ত্রিভুজ।	
তাহলে, অতিভুজ OA = অতিভুজ OB এবং OD = OD	[উভয়ে একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ] [সাধারণ বাহু]
$\therefore \Delta ODA \cong \Delta ODB$ $\therefore AD = BD$ সুতরাং D, AB এর মধ্যবিন্দু। (দেখানো হলো)	

গ দেওয়া আছে, জ্যা-এর দৈর্ঘ্য, AB = x cm

$\therefore$ অর্ধ জ্যা, $BD = \frac{x}{2}$ cm

লম্বের দৈর্ঘ্য, $OD = \left(\frac{x}{2} - 2\right)$ cm

বৃত্তের ব্যাসার্ধ, OB = 10 cm.

পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুযায়ী,

$BD^2 + OD^2 = OB^2$

বা, $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2} - 2\right)^2 = (10)^2$

বা, $\frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{4} - 2.\frac{x}{2}.2 + 4 = 100$

বা, $\frac{2x^2}{4} - 2x + 4 - 100 = 0$

বা, $\frac{2x^2}{4} - 2x - 96 = 0$

বা, $\frac{x^2}{2} - 2x - 96 = 0$

বা, $x^2 - 4x - 192 = 0$

বা, $x^2 - 16x + 12x - 192 = 0$

বা, $x(x - 16) + 12(x - 16) = 0$

বা, $(x - 16)(x + 12) = 0$

$\therefore x - 16 = 0$ | অথবা, $x + 12 = 0$
বা, $x = 16$ | বা, $x \neq -12$
$\therefore x = 16$ | $\therefore x \neq -12$
[কারণ দৈর্ঘ্য ঋণাত্মক হতে পারে না]

$\therefore x = 16$

$\therefore$ সুতরাং x এর নির্ণেয় মান 16.

১৮. একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 4 সে.মি., 5 সে.মি., 6 সে.মি.।

ওপরের তথ্য অনুযায়ী নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও:

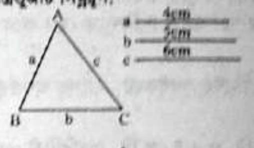
ক. ত্রিভুজটি অঙ্কন কর।

খ. ত্রিভুজটির পরিবৃত্ত অঙ্কন কর।

গ. ত্রিভুজের পরিবৃত্তের বাহিরে যেকোনো একটি নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে বৃত্তের স্পর্শক অঙ্কন করে দেখাও যে, ঐ বিন্দু থেকে স্পর্শকদ্বয়ের দূরত্ব সমান।

✔ ১৮ নং প্রশ্নের উত্তর ▶

ক প্রদত্ত তথ্যানুযায়ী ত্রিভুজটি নিম্নরূপ:



খ

মনে করি, ABC একটি ত্রিভুজ। এর পরিবৃত্ত আঁকতে হবে। অর্থাৎ এমন একটি বৃত্ত আঁকতে হবে, যা ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দু A, B ও C বিন্দু দিয়ে যায়।

অঙ্কন:

১. AB ও AC রেখাংশের লম্ব সমদ্বিখণ্ডক যথাক্রমে EM ও FN রেখা আঁকি। ধরি, তারা পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে।

২. A, O যোগ করি। O কে কেন্দ্র করে OA এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকি। তাহলে, বৃত্তটি A, B ও C বিন্দুগামী হবে এবং এই বৃত্তটিই ΔABC এর নির্ণেয় পরিবৃত্ত।

গ

বিশেষ নির্বচন : 'খ' থেকে প্রাপ্ত বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু P থেকে ঐ বৃত্তে PA ও PE দুইটি স্পর্শক আঁকি। দেখাতে হবে যে, PA = PE

অঙ্কন: O, E এবং O, P যোগ করি।

প্রমাণ:

ধাপ	যথার্থতা
বৃত্তের A বিন্দুতে PA একটি স্পর্শক এবং OA স্পর্শ বিন্দুগামী ব্যাসার্ধ।	
সুতরাং $OA \perp PA$ অর্থাৎ $\angle PAO$ = এক সমকোণ।	
আবার, বৃত্তের E বিন্দুতে PE একটি স্পর্শক এবং OE স্পর্শ বিন্দুগামী ব্যাসার্ধ।	
সুতরাং $OE \perp PE$ অর্থাৎ $\angle PEO$ = এক সমকোণ।	
এখন, PAO এবং PEO সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে OA = OE	[একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]
এবং অতিভুজ OP উভয়ই ত্রিভুজের সাধারণ বাহু।	
$\therefore \Delta PAO \cong \Delta PEO$	[সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ বাহু উপপাদ্য]
সুতরাং PA = PE. (দেখানো হলো)	

▸▸ নবম অধ্যায় : ত্রিকোণমিতিক অনুপাত (Trigonometric Ratios)

▸▸ অনুশীলনী ৯.১

১. নিচের গাণিতিক উক্তিগুলোর সত্য-মিথ্যা যাচাই কর। তোমার উত্তরের পক্ষে যুক্তি দাও।

ক. tanA এর মান সর্বদা 1 এর চেয়ে কম

সমাধান মিথ্যা।

যুক্তি : যখন A এর মান 45° বা 60° হয়, তখন tanA এর মান যথাক্রমে $\tan 45° = 1$ এবং $\tan 60° = \sqrt{3} = 1.732$

অর্থাৎ tanA এর মান 1 অথবা 1 অপেক্ষা বেশিও হতে পারে।

খ. cotA হলো cot ও A এর গুণফল

সমাধান মিথ্যা।

যুক্তি : cot হলো ত্রিকোণমিতিক অনুপাত cotangent এর সংক্ষিপ্ত রূপ এবং A হলো কোণের মান।

গ. A এর কোন মানের জন্য $\sec A = \frac{12}{5}$

সমাধান দেওয়া আছে, $\sec A = \frac{12}{5}$

বা, $\frac{1}{\cos A} = \frac{12}{5}$

বা, $\cos A = \frac{5}{12}$

বা, $A = \cos^{-1}\frac{5}{12} = 65.375°$

A এর নির্ণেয় মান = 65.375°

ঘ. cos হলো cotangent এর সংক্ষিপ্ত রূপ

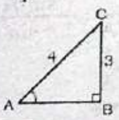
সমাধান মিথ্যা।

যুক্তি: cotangent এর সংক্ষিপ্ত রূপ হলো cot

এবং cosine এর সংক্ষিপ্ত রূপ হলো cos

২. $\sin A = \frac{3}{4}$ হলে, A কোণের অন্যান্য ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ নির্ণয় কর।

সমাধান দেওয়া আছে, $\sin A = \frac{3}{4}$



অতএব, ABC সমকোণী ত্রিভুজের,

বিপরীত বাহু, BC = 3

এবং অতিভুজ, AC = 4

$\therefore$ সন্নিহিত বাহু, $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2}$

$= \sqrt{4^2 - 3^2}$

$= \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$

সুতরাং $\cos A = \frac{\text{সন্নিহিত বাহু, AB}}{\text{অতিভুজ, AC}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$

$\tan A = \frac{\text{বিপরীত বাহু, BC}}{\text{সন্নিহিত বাহু, AB}} = \frac{\sqrt{3}}{7}$

$\cot A = \frac{\text{সন্নিহিত বাহু, AB}}{\text{বিপরীত বাহু, BC}} = \frac{\sqrt{7}}{3}$

$\sec A = \frac{\text{অতিভুজ, AC}}{\text{সন্নিহিত বাহু, AB}} = \frac{\sqrt{4}}{7}$

এবং $\operatorname{cosec} A = \frac{\text{অতিভুজ, AC}}{\text{বিপরীত বাহু, BC}} = \frac{4}{3}$

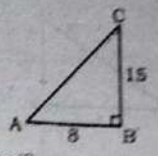
$\therefore \cos A = \frac{\sqrt{7}}{4}, \tan A = \frac{3}{\sqrt{7}}, \cot A = \frac{\sqrt{7}}{3}, \sec A = \frac{4}{\sqrt{7}}$

এবং $\operatorname{cosec} A = \frac{4}{3}$

৩. দেওয়া আছে, 15 cotA = 8, sinA ও secA এর মান বের কর।

সমাধান দেওয়া আছে, 15 cotA = 8

$\therefore \cot A = \frac{8}{15}$



অতএব, সন্নিহিত বাহু, AB = 8

বিপরীত বাহু, BC = 15

$\therefore$ অতিভুজ, $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$

$= \sqrt{(8)^2 + (15)^2}$

$= \sqrt{64 + 225}$

$= \sqrt{289}$

$= 17$

সুতরাং $\sin A = \frac{\text{বিপরীত বাহু, BC}}{\text{অতিভুজ, AC}} = \frac{15}{17}$

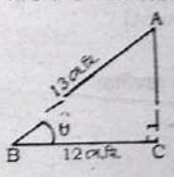
এবং $\sec A = \frac{\text{অতিভুজ, AC}}{\text{সন্নিহিত বাহু, AB}} = \frac{17}{8}$

$\therefore \sin A = \frac{15}{17}$ এবং $\sec A = \frac{17}{8}$

[দ্রষ্টব্য: বইয়ের উত্তর ভুল আছে।]

৪. ABC সমকোণী ত্রিভুজের ∠C সমকোণ, AB = 13 সে.মি., BC = 12 সে.মি. এবং ∠ABC = θ হলে, sinθ, cosθ ও tanθ এর মান বের কর।

সমাধান দেওয়া আছে, ABC সমকোণী ত্রিভুজের ∠C সমকোণ, AB = 13 সে.মি., BC = 12 সে.মি. এবং ∠ABC = θ.



অতএব,

বিপরীত বাহু, $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2}$

$= \sqrt{(13)^2 - (12)^2}$ সে.মি.

$= \sqrt{169 - 144}$ সে.মি.

$= \sqrt{25}$ সে.মি.

$= 5$ সে.মি.

সুতরাং $\sin\theta = \frac{\text{বিপরীত বাহু, AC}}{\text{অতিভুজ, AB}}$

$= \frac{5}{13}$

$\cos\theta = \frac{\text{সন্নিহিত বাহু, BC}}{\text{অতিভুজ, AB}}$

$= \frac{12}{13}$

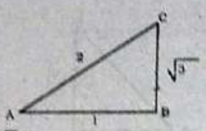
$\tan\theta = \frac{\text{বিপরীত বাহু, AC}}{\text{সন্নিহিত বাহু, BC}}$

$= \frac{5}{12}$

$\therefore \sin\theta = \frac{5}{13}, \cos\theta = \frac{12}{13}$ এবং $\tan\theta = \frac{5}{12}$

৫. ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle B$ কোণটি সমকোণ। $\tan A = \sqrt{3}$ হলে, $\sqrt{3}\sin A \cos A = 4\frac{3}{4}$ এর সত্যতা যাচাই কর।

সমাধান



দেওয়া আছে, $\tan A = \sqrt{3}$

অতএব, বিপরীত বাহু $= \sqrt{3}$

এবং সন্নিহিত বাহু $= 1$

$\therefore$ অতিভুজ $= \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$

$\therefore \sin A = \frac{\text{বিপরীত বাহু}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

এবং $\cos A = \frac{\text{সন্নিহিত বাহু}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{1}{2}$

বামপক্ষ $= \sqrt{3}\sin A \cos A$

$= \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4} =$ ডানপক্ষ

সুতরাং $\sqrt{3}\ \sin A \cos A = 4\frac{3}{4}$ বাক্যটি সত্য নয়।

প্রমাণ কর (৬ – ২০) :

৬. (i) $\frac{1}{\sec^2 A} + \frac{1}{\operatorname{cosec}^2 A} = 1$

সমাধান

বামপক্ষ $= \frac{1}{\sec^2 A} + \frac{1}{\operatorname{cosec}^2 A}$

$= \cos^2 A + \sin^2 A$

$\left[\because \cos A = \frac{1}{\sec A} \text{ Ges } \sin A = \frac{1}{\operatorname{cosec} A}\right]$

$= 1\ [\because \sin^2 A + \cos^2 A]$

$=$ ডানপক্ষ

$\therefore \frac{1}{\sec^2 A} + \frac{1}{\operatorname{cosec}^2 A} = 1$ (প্রমাণিত)

(ii) $\frac{1}{\cos^2 A} - \frac{1}{\cot^2 A} = 1$

সমাধান

বামপক্ষ $= \frac{1}{\cos^2 A} - \frac{1}{\cot^2 A}$

$= \left(\frac{1}{\cos A}\right)^2 - \left(\frac{1}{\cot A}\right)^2$

$= \sec^2 A - \tan^2 A$

$= 1 \qquad [\because \sec^2 A - \tan^2 A = 1]$

$=$ ডানপক্ষ

$\therefore \frac{1}{\cos^2 A} - \frac{1}{\cot^2 A} = 1$ (প্রমাণিত)

(iii) $\frac{1}{\sin^2 A} - \frac{1}{\tan^2 A} = 1$

সমাধান

বামপক্ষ $= \frac{1}{\sin^2 A} - \frac{1}{\tan^2 A}$

$= \left(\frac{1}{\sin A}\right)^2 - \left(\frac{1}{\tan}\right)^2$

$= \operatorname{cosec}^2 A - \cot^2 A \qquad \left[\because \operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A} \text{ Ges } \cot A = \frac{1}{\tan A}\right]$

$= 1 \qquad [\because \operatorname{cosec}^2 A - \cot^2 A = 1]$

$=$ ডানপক্ষ

$\therefore \frac{1}{\sin^2 A} - \frac{1}{\tan^2 A} = 1$ (প্রমাণিত)

৭. (i) $\frac{\sin A}{\operatorname{cosec} A} + \frac{\cos A}{\sec A} = 1$

সমাধান বামপক্ষ $= \frac{\sin A}{\operatorname{cosec} A} + \frac{\cos A}{\sec A}$

$= \frac{\sin A}{\frac{1}{\sin A}} + \frac{\cos A}{\frac{1}{\cos A}}$

$= \sin A \times \frac{\sin A}{1} + \cos A \times \frac{\cos A}{1}$

$= \sin^2 A + \cos^2 A$

$= 1 \qquad [\because \sin^2 A + \cos^2 A = 1]$

$=$ ডানপক্ষ

$\therefore \frac{\sin A}{\operatorname{cosec} A} + \frac{\cos A}{\sec A} = 1$ (প্রমাণিত)

(ii) $\frac{\sec A}{\cos A} - \frac{\tan A}{\cot A} = 1$

সমাধান বামপক্ষ $= \frac{\sec A}{\cos A} - \frac{\tan A}{\cot A}$

$= \sec A \times \frac{1}{\cos A} - \tan A \times \frac{1}{\cot A}$

$= \sec A.\sec A - \tan A.\ \tan A$

$= \sec^2 A - \tan^2 A$

$= 1 \qquad [\because \sec^2 A - \tan^2 A = 1]$

$=$ ডানপক্ষ

$\therefore \frac{\sec A}{\cos A} - \frac{\tan A}{\cot A} = 1$ (প্রমাণিত)

(iii) $\frac{1}{1 + \sin^2 A} + \frac{1}{1 + \operatorname{cosec}^2 A} = 1$

সমাধান বামপক্ষ $= \frac{1}{1 + \sin^2 A} + \frac{1}{1 + \operatorname{cosec}^2 A}$

$= \frac{1}{1 + \sin^2 A} + \frac{1}{1 + \frac{1}{\sin^2 A}}$

$= \frac{1}{1 + \sin^2 A} + \frac{1}{\frac{\sin^2 + 1}{\sin^2}}$

$= \frac{1}{1 + \sin^2 A} + \frac{\sin^2 A}{1 + \sin^2 A}$

$= \frac{1 + \sin^2 A}{1 + \sin^2 A}$

$= 1 =$ ডানপক্ষ

$\therefore \frac{1}{1 + \sin^2 A} + \frac{1}{1 + \operatorname{cosec}^2 A} = 1$ (প্রমাণিত)

৮. (i) $\frac{\tan A}{1 - \cot A} + \frac{\cot A}{1 - \tan A} = \sec A \operatorname{cosec} A + 1$

সমাধান বামপক্ষ $= \frac{\tan A}{1 - \text{cota}} + \frac{\cot A}{1 - \tan A}$

$= \frac{\frac{\sin A}{\cos A}}{1 - \frac{\cos A}{\sin A}} + \frac{\frac{\cos A}{\sin A}}{1 - \frac{\sin A}{\cos A}}$

$= \frac{\frac{\sin A}{\cos A}}{\frac{\sin A - \cos A}{\sin A}} + \frac{\frac{\cos A}{\sin A}}{\frac{\cos A - \sin A}{\cos A}}$

$= \frac{\sin A}{\cos A} \times \frac{\sin A}{\sin A - \cos A} + \frac{\cos A}{\sin A} \times \frac{\cos A}{\cos A - \sin A}$

$= \frac{\sin^2 A}{\cos A\ (\sin A - \cos A)} + \frac{\cos^2 A}{-\sin A\ (\sin A - \cos A)}$

$= \frac{\sin^2 A}{\cos A\ (\sin A - \cos A)} - \frac{\cos^2 A}{\sin A\ (\sin A - \cos A)}$

$= \frac{\sin^3 A - \cos^3 A}{\cos A \sin A\ (\sin A - \cos A)}$

$= \dfrac{(\sin A - \cos A)(\sin^2 A + \sin A\cos A + \cos^2 A)}{\cos A\sin A\,(\sin A - \cos A)}$

$= \dfrac{\sin^2 A + \cos^2 A + \sin A\cos A}{\sin A\cos A}$

$= \dfrac{1 + \sin A\cos A}{\sin A\cos A}$ $[\because \sin^2 A + \cos^2 A = 1]$

$= \dfrac{1}{\sin A\cos A} + \dfrac{\sin A\cos A}{\sin A\cos A}$

$= \dfrac{1}{\cos A}\cdot\dfrac{1}{\sin A} + 1$

$= \sec A.\ \mathrm{cosec} A + 1$

= ডানপক্ষ

$\therefore \dfrac{\tan A}{1 - \cot A} + \dfrac{\cot A}{1 - \tan A} = \sec A\ \mathrm{cosec} A + 1$ (প্রমাণিত)

(ii) $\dfrac{1}{1 + \tan^2 A} + \dfrac{1}{1 + \cot^2 A} = 1$

সমাধান বামপক্ষ $= \dfrac{1}{1 + \tan^2 A} + \dfrac{1}{1 + \cot^2 A}$

$= \dfrac{1}{1 + \tan^2 A} + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{\tan^2 A}}$

$= \dfrac{1}{1 + \tan^2 A} + \dfrac{1}{\dfrac{\tan^2 + 1}{\tan^2 A}}$

$= \dfrac{1}{1 + \tan^2 A} + \dfrac{\tan^2 A}{1 + \tan^2 A}$

$= \dfrac{1 + \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}$

= 1 = ডানপক্ষ

$\therefore \dfrac{1}{1 + \tan^2 A} + \dfrac{1}{1 + \cot^2 A} = 1$ (প্রমাণিত)

৯. $\dfrac{\cos A}{1 - \tan A} + \dfrac{\sin A}{1 - \cot A} = \sin A + \cos A$

সমাধান বামপক্ষ $= \dfrac{\cos A}{1 - \tan A} + \dfrac{\sin A}{1 - \cot A}$

$= \dfrac{\cos A}{1 - \dfrac{\sin A}{\cos A}} + \dfrac{\sin A}{1 - \dfrac{\cos A}{\sin A}}$

$= \dfrac{\cos A}{\dfrac{\cos A - \sin A}{\cos A}} + \dfrac{\sin A}{\dfrac{\sin A - \cos A}{\sin A}}$

$= \cos A \times \dfrac{\cos A}{\cos A - \sin A} + \sin A \times \dfrac{\sin A}{\sin A - \cos A}$

$= \dfrac{\cos^2 A}{\cos A - \sin A} + \dfrac{\sin^2 A}{\sin A - \cos A}$

$= \dfrac{\cos^2 A}{-(\sin A - \cos A)} + \dfrac{\sin^2 A}{\sin A - \cos A}$

$= \dfrac{\sin^2 A}{\sin A - \cos A} - \dfrac{\cos^2 A}{\sin A - \cos A}$

$= \dfrac{(\sin A + \cos A)(\sin A - \cos A)}{(\sin A - \cos A)}$

$= \sin A + \cos A$ = ডানপক্ষ

$\therefore \dfrac{\cos A}{1 - \tan A} + \dfrac{\sin A}{1 - \cot A} = \sin A + \cos A$. (প্রমাণিত)

১০. $\tan A\sqrt{1 - \sin^2 A} = \sin A$

সমাধান বামপক্ষ $= \tan A\sqrt{1 - \sin^2 A}$

$= \tan A\sqrt{\cos^2 A}$ $[\because \cos^2 A = 1 - \sin^2 A]$

$= \dfrac{\sin A}{\cos A} \times \cos A$

$= \sin A$ = ডানপক্ষ

$\therefore \tan A\sqrt{1 - \sin^2 A} = \sin A$ (প্রমাণিত)

১১. $\dfrac{\sec A + \tan A}{\mathrm{cosec} A + \cot A} = \dfrac{\mathrm{cosec} A - \cot A}{\sec A - \tan A}$

সমাধান বামপক্ষ $= \dfrac{\sec A + \tan A}{\mathrm{cosec} A + \cot A}$

$= \dfrac{(\sec A + \tan A)(\sec A - \tan A)(\mathrm{cosec} A - \cot A)}{(\mathrm{cosec} A + \cot A)(\sec A - \tan A)(\mathrm{cosec} A - \cot A)}$

লব ও হরকে $(\sec A - \tan A)(\mathrm{cosec} A - \cot A)$ দ্বারা গুণ করে।

$= \dfrac{\{(\sec A + \tan A)(\sec A - \tan A)\}(\mathrm{cosec} A - \cot A)}{\{(\mathrm{cosec} A + \cot A)(\mathrm{cosec} A - \cot A)\}(\sec A - \tan A)}$

$= \dfrac{(\sec^2 A - \tan^2 A)(\mathrm{cosec} A - \cot A)}{(\mathrm{cosec}^2 A - \cot^2 A)(\sec A - \tan A)}$ $[\because (a+b)(a-b) = a^2 - b^2]$

$= \dfrac{1(\mathrm{cosec} A - \cot A)}{1(\sec A - \tan A)}$

$[\because \sec^2 A - \tan^2 A = 1$ এবং $\mathrm{cosec}^2 A - \cot^2 A = 1]$

$= \dfrac{\mathrm{cosec} A - \cot A}{\sec A - \tan A}$ = ডানপক্ষ

$\therefore \dfrac{\sec A + \tan A}{\mathrm{cosec} A + \cot A} = \dfrac{\mathrm{cosec} A - \cot A}{\sec A - \tan A}$ (প্রমাণিত)

১২. $\dfrac{\mathrm{cosec} A}{\mathrm{cosec} A - 1} + \dfrac{\mathrm{cosec} A}{\mathrm{cosec} A + 1} = 2\sec^2 A$

সমাধান বামপক্ষ $= \dfrac{\mathrm{cosec} A}{\mathrm{cosec} A - 1} + \dfrac{\mathrm{cosec} A}{\mathrm{cosec} A + 1}$

$= \dfrac{\mathrm{cosec} A(\mathrm{cosec} A + 1) + \mathrm{cosec} A(\mathrm{cosec} A - 1)}{(\mathrm{cosec} A - 1)(\mathrm{cosec} A + 1)}$

$= \dfrac{\mathrm{cosec}^2 A + \mathrm{cosec} A + \mathrm{cosec}^2 A - \mathrm{cosec} A}{\mathrm{cosec}^2 A - 1}$

$= \dfrac{2\mathrm{cosec}^2 A}{1 + \cot^2 A - 1}$ $[\because \mathrm{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A]$

$= \dfrac{2\mathrm{cosec}^2 A}{\cot^2 A} = \dfrac{\dfrac{2}{\sin^2 A}}{\dfrac{\cos^2 A}{\sin^2 A}} = \dfrac{2}{\sin^2 A} \times \dfrac{\sin^2 A}{\cos^2 A}$

$= \dfrac{2}{\cos^2 A} = 2 \times \dfrac{1}{\cos^2 A} = 2\sec^2 A$ = ডানপক্ষ

$\therefore \dfrac{\mathrm{cosec} A}{\mathrm{cosec} A - 1} + \dfrac{\mathrm{cosec} A}{\mathrm{cosec} A + 1} = 2\sec^2 A$ (প্রমাণিত)

১৩. $\dfrac{1}{1 + \sin A} + \dfrac{1}{1 - \sin A} = 2\sec^2 A$

সমাধান বামপক্ষ $= \dfrac{1}{1 + \sin A} + \dfrac{1}{1 - \sin A}$

$= \dfrac{1 - \sin A + 1 + \sin A}{(1 + \sin A)(1 - \sin A)} = \dfrac{2}{1 - \sin^2 A}$

$= \dfrac{2}{\cos^2 A} = 2.\dfrac{1}{\cos^2 A}$ $[\because 1 - \sin^2 A = \cos^2 A]$

$= 2\sec^2 A$ = ডানপক্ষ

$\therefore \dfrac{1}{1 + \sin A} + \dfrac{1}{1 - \sin A} = 2\sec^2 A$ (প্রমাণিত)

১৪. $\dfrac{1}{\mathrm{cosec} A - 1} - \dfrac{1}{\mathrm{cosec} A + 1} = 2\tan^2 A$

সমাধান বামপক্ষ $= \dfrac{1}{\mathrm{cosec} A - 1} - \dfrac{1}{\mathrm{cosec} A + 1}$

$= \dfrac{\mathrm{cosec} A + 1 - \mathrm{cosec} A + 1}{(\mathrm{cosec} A - 1)(\mathrm{cosec} A + 1)}$

$= \dfrac{2}{\mathrm{cosec}^2 A - 1}$

$= \dfrac{2}{1 + \cot^2 A - 1}$ $[\because \mathrm{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A]$

$= \dfrac{2}{\cot^2 A} = 2.\dfrac{1}{\cot^2 A}$

$= 2\tan^2 A$ = ডানপক্ষ

$\therefore \dfrac{1}{\mathrm{cosec} A - 1} - \dfrac{1}{\mathrm{cosec} A + 1} = 2\tan^2 A$ (প্রমাণিত)

১৫. $\frac{\sin A}{1-\cos A}+\frac{1-\cos A}{\sin A}=2\text{cosec}A$

সমাধান বামপক্ষ $=\frac{\sin A}{1-\cos A}+\frac{1-\cos A}{\sin A}$

$=\frac{\sin^2 A+(1-\cos A)^2}{\sin A\,(1-\cos A)}$

$=\frac{\sin^2 A+1-2\cos A+\cos^2 A}{\sin A\,(1-\cos A)}$

$=\frac{(\sin^2 A+\cos^2 A)+1-2\cos A}{\sin A\,(1-\cos A)}$

$=\frac{1+1-2\cos A}{\sin A\,(1-\cos A)}$ $[\because \sin^2 A+\cos^2 A=1]$

$=\frac{2-2\cos A}{\sin A\,(1-\cos A)}=\frac{2(1-\cos A)}{\sin A\,(1-\cos A)}$

$=\frac{2}{\sin A}=2\times\frac{1}{\sin A}=2\text{cosec}A$

= ডানপক্ষ

$\therefore \frac{\sin A}{1-\cos A}+\frac{1-\cos A}{\sin A}=2\text{cosec}A$ (প্রমাণিত)

১৬. $\frac{\tan A}{\sec A+1}-\frac{\sec A-1}{\tan A}=0$

সমাধান বামপক্ষ $=\frac{\tan A}{\sec A+1}-\frac{\sec A-1}{\tan A}$

$=\frac{\tan^2 A-(\sec A+1)(\sec A-1)}{\tan A\,(\sec A+1)}$

$=\frac{\tan^2 A-(\sec A^2-1)}{\tan A(\sec A+1)}$

$=\frac{\tan^2 A-\tan^2 A}{\tan A\,(\sec A+1)}$ $[\because \sec^2 A=1+\tan^2 A]$

$=\frac{0}{\tan A\,(\sec A+1)}=0$

= ডানপক্ষ

$\therefore \frac{\tan A}{\sec A+1}-\frac{\sec A-1}{\tan A}=0$ (প্রমাণিত)

১৭. $(\tan\theta+\sec\theta)^2=\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}$

সমাধান বামপক্ষ $=(\tan\theta+\sec\theta)^2$

$=\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{1}{\cos\theta}\right)^2=\left(\frac{\sin\theta+1}{\cos\theta}\right)^2$

$=\frac{(1+\sin\theta)^2}{\cos^2\theta}=\frac{(1+\sin\theta)^2}{1-\sin^2\theta}$ $[\because \cos^2\theta=1-\sin^2\theta]$

$=\frac{(1+\sin\theta)(1+\sin\theta)}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}=\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}$

= ডানপক্ষ

$\therefore (\tan\theta+\sec\theta)^2=\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}$ (প্রমাণিত)

১৮. $\frac{\cot A+\tan B}{\cot B+\tan A}=\cot A.\tan B$

সমাধান

বামপক্ষ $=\frac{\cot A+\tan B}{\cot B+\tan A}$

$=\frac{\frac{\cos A}{\sin A}+\frac{\sin B}{\cos B}}{\frac{\cos B}{\sin B}+\frac{\sin A}{\cos A}}=\frac{\frac{\cos A\cos B+\sin A\sin B}{\sin A\cos B}}{\frac{\cos A\cos B+\sin A\sin B}{\sin B\cos A}}$

$=\frac{(\cos A\cos B+\sin A\sin B)}{\sin A\cos B}\times\frac{\sin B\cos A}{(\cos A\cos B+\sin A\sin B)}$

$=\frac{\sin B\cos A}{\sin A\cos B}=\frac{\cos A}{\sin A}\cdot\frac{\sin B}{\cos B}$

$=\cot A.\tan B$

= ডানপক্ষ

$\therefore \frac{\cot A+\tan B}{\cot B+\tan A}=\cot A.\tan B$ (প্রমাণিত)

১৯. $\sqrt{\frac{1-\sin A}{1+\sin A}}=\sec A-\tan A$

সমাধান বামপক্ষ $=\sqrt{\frac{1-\sin A}{1+\sin A}}$

$=\sqrt{\frac{(1-\sin A)(1-\sin A)}{(1+\sin A)(1-\sin A)}}$

$=\sqrt{\frac{(1-\sin A)^2}{1-\sin^2 A}}$ [লব ও হরকে 1–sinA দ্বারা গুণ করে]

$=\sqrt{\frac{(1-\sin A)^2}{\cos^2 A}}$ $[\because \cos^2 A=1-\sin^2 A]$

$=\frac{1-\sin A}{\cos A}=\frac{1}{\cos A}-\frac{\sin A}{\cos A}$

$=\sec A-\tan A$

= ডানপক্ষ

$\therefore \sqrt{\frac{1-\sin A}{1+\sin A}}=\sec A-\tan A$ (প্রমাণিত)

২০. $\sqrt{\frac{\sec A+1}{\sec A-1}}=\cot A+\text{cosec}A$

সমাধান বামপক্ষ $=\sqrt{\frac{\sec A+1}{\sec A-1}}$

$=\sqrt{\frac{(\sec A+1)(\sec A+1)}{(\sec A-1)(\sec A+1)}}$

$=\sqrt{\frac{(\sec A+1)^2}{\sec^2 A-1}}$ [লব ও হরকে (secA + 1) দ্বারা গুণ করে]

$=\sqrt{\frac{(\sec A+1)^2}{\tan^2 A}}$ $[\because \sec^2 A=1+\tan^2 A]$

$=\frac{\sec A+1}{\tan A}=\frac{\sec A}{\tan A}+\frac{1}{\tan A}$

$=\frac{\frac{1}{\cos A}}{\frac{\sin A}{\cos A}}+\cot A=\frac{1}{\cos A}\times\frac{\cos A}{\sin A}+\cot A$

$=\frac{1}{\sin A}+\cot A$

$=\text{cosec}A+\cot A$

$=\cot A+\text{cosec}A$

= ডানপক্ষ

$\therefore \sqrt{\frac{\sec A+1}{\sec A-1}}=\cot A+\text{cosec}A$ (প্রমাণিত)

২১. $\cos A+\sin A=\sqrt{2}\cos A$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\cos A-\sin A=\sqrt{2}\sin A$

সমাধান দেওয়া আছে, $\cos A+\sin A=\sqrt{2}\cos A$

বা, $\sin A=\sqrt{2}\cos A-\cos A$ [পক্ষান্তর

বা, $\sin A=(\sqrt{2}-1)\cos A$

বা, $(\sqrt{2}+1)\cos A=\sin A$

বা, $\cos A=\frac{\sin A}{\sqrt{2}-1}$

বা, $\cos A=\frac{(\sqrt{2}+1)\sin A}{(\sqrt{2}+1)+(\sqrt{2}-1)}$

[হর ও লবকে $(\sqrt{2}+1)$ দ্বারা গুণ

বা, $\cos A=\frac{(\sqrt{2}+1)\sin A}{(\sqrt{2})^2-(1)^2}$

বা, $\cos A=\frac{\sqrt{2}\sin A+\sin A}{2-1}$

বা, $\cos A=\sqrt{2}\sin A+\sin A$

$\therefore \cos A-\sin A=\sqrt{2}\sin A$ (প্রমাণিত)

২২. যদি $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$ হয়, তবে $\frac{\operatorname{cosec}^2 A - \sec^2 A}{\operatorname{cosec}^2 A + \sec^2 A}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান দেওয়া আছে, $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\tan^2 A = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{3}$

বা, $\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} = \frac{1}{3}$

বা, $\frac{\cos^2 A}{\sin^2 A} = 3$ [বিপরীতকরণ করে]

বা, $\frac{\frac{1}{\sec^2 A}}{\frac{1}{\operatorname{cosec}^2 A}} = 3$

বা, $\frac{\operatorname{cosec}^2 A}{\sec^2 A} = 3$

বা, $\frac{\operatorname{cosec}^2 A - \sec^2 A}{\operatorname{cosec}^2 A + \sec^2 A} = \frac{3-1}{3+1}$ [বিয়োজন-যোজন করে]

$= \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $\frac{1}{2}$

২৩. $\operatorname{cosec} A - \cot A = \frac{4}{3}$ হলে, $\operatorname{cosec} A + \cot A$ এর মান কত?

সমাধান দেওয়া আছে, $\operatorname{cosec} A - \cot A = \frac{4}{3}$.

আমরা জানি, $\operatorname{cosec}^2 A - \cot^2 A = 1$

বা, $(\operatorname{cosec} A + \cot A)(\operatorname{cosec} A - \cot A) = 1$

বা, $(\operatorname{cosec} A + \cot A)\frac{4}{3} = 1$ [মান বসিয়ে]

$\therefore \operatorname{cosec} A + \cot A = \frac{3}{4}$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $= \frac{3}{4}$

২৪. $\cot A = \frac{b}{a}$ হলে, $\frac{a \sin A - b \cos A}{a \sin A + b \cos A}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান দেওয়া আছে, $\cot A = \frac{b}{a}$

বা, $\frac{\cos A}{\sin A} = \frac{b}{a}$

বা, $\frac{\sin A}{\cos A} = \frac{a}{b}$ [বিপরীতকরণ করে]

বা, $\frac{a \sin A}{b \cos A} = \frac{a^2}{b^2}$ [উভয়পক্ষকে $\frac{a}{b}$ দ্বারা গুণ করে]

বা, $\frac{a \sin A - b \cos A}{a \sin A + b \cos A} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$ [বিয়োজন-যোজন করে]

$\therefore$ নির্ণেয় মান $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$।

২৫. $\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta = \frac{1}{x}$, যেখানে θ সূক্ষ্মকোণ।

ক. $\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, $\sec\theta = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ ৪

গ. উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর যে, $\tan\theta + \cot\theta = \sec\theta \operatorname{cosec}\theta$ ৪

২৫ নং প্রশ্নের উত্তর

ক দেওয়া আছে, $\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta = \frac{1}{x}$

আমরা জানি,

$\operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$

বা, $(\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta)(\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta) = 1$ [সূত্র প্রয়োগ করে]

বা, $(\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta)\frac{1}{x} = 1$

$\therefore \operatorname{cosec}\theta + \cot\theta = x$

খ দেওয়া আছে, $\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta = \frac{1}{x}$

বা, $\frac{1}{\sin\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{x}$

বা, $\frac{1 - \cos\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{x}$

বা, $\frac{(1 - \cos)^2}{\sin^2} = \frac{1}{x^2}$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $\frac{(1 - \cos\theta)(1 - \cos\theta)}{1 - \cos^2\theta} = \frac{1}{x^2}$

বা, $\frac{(1 - \cos\theta)(1 - \cos\theta)}{(1 + \cos\theta)(1 - \cos\theta)} = \frac{1}{x^2}$

বা, $\frac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta} = \frac{1}{x^2}$

বা, $\frac{1 - \cos + 1 + \cos}{1 - \cos - 1 - \cos} = \frac{1 + x^2}{1 - x^2}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2}{-2\cos\theta} = \frac{1 + x^2}{-(x^2 - 1)}$

বা, $-\frac{1}{\cos} = -\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

বা, $\frac{1}{\cos} = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

$\therefore \sec\theta = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ (দেখানো হলো)

গ দেওয়া আছে, $\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta = \frac{1}{x}$ .... (i)

'ক' থেকে পাই, $\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta = x$ .... (ii)

সমীকরণ (ii) থেকে সমীকরণ (i) বিয়োগ করে পাই,

$\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta - \operatorname{cosec}\theta + \cot\theta = x - \frac{1}{x}$

বা, $2\cot\theta = \frac{x^2 - 1}{x}$

বা, $\cot\theta = \frac{x^2 - 1}{2x}$

(ii) নং সমীকরণ হতে পাই,

$\operatorname{cosec}\theta = x - \cot\theta$

বা, $\operatorname{cosec}\theta = x - \frac{x^2 - 1}{2x}$

বা, $\operatorname{cosec}\theta = \frac{2x^2 - x^2 + 1}{2x}$

বা, $\operatorname{cosec}\theta = \frac{x^2 + 1}{2x}$

এবং 'খ' থেকে প্রমাণিত, $\sec\theta = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

এখন, প্রমাণ করতে হবে যে, $\tan\theta + \cot\theta = \sec\theta \operatorname{cosec}\theta$

তাহলে,

বামপক্ষ = $\tan\theta + \cot\theta$

$= \frac{1}{\cot\theta} + \cot$

$= \frac{1}{\frac{x^2-1}{2x}} + \frac{x^2-1}{2x}$

$= \frac{2x}{x^2-1} + \frac{x^2-1}{2x}$

$= \frac{4x^2+(x^2-1)^2}{2x\,(x^2-1)}$

$= \frac{4x^2+x^4-2x^2+1}{2x(x^2-1)}$

$= \frac{x^4+2x^2+1}{2x(x^2-1)}$

$= \frac{(x^2)^2+2x^2+(1)^2}{2x(x^2-1)}$

$= \frac{(x^2+1)2}{2x(x^2-1)}$

এবং ডানপক্ষ = $\sec\theta.\mathrm{cosec}\theta$

$= \frac{x^2+1}{x^2-1}.\frac{x^2+1}{2x}$

$= \frac{(x^2+1)^2}{2x(x^2-1)}$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ

অর্থাৎ, $\tan\theta + \cot\theta = \sec\theta\ \mathrm{cosec}\theta$ (প্রমাণিত)

⏭ অনুশীলনী ৯·২

১. $\cos\theta = \frac{1}{2}$ হলে, $\cot\theta$ এর মান কোনটি?

ক $\frac{1}{\sqrt{3}}$ খ 1 গ $\sqrt{3}$ ঘ 2

২. $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \frac{1}{3}$ হলে, $\cos^4\theta - \sin^4\theta$ এর মান কত?

ক 3 খ 2 গ 1 ঘ $\frac{1}{3}$

৩. $\cot(\theta - 30°) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ হলে, $\sin\theta$ = কত?

ক $\frac{1}{2}$ খ 0 গ 1 ঘ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

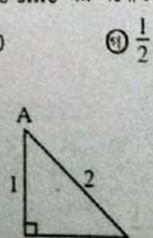
৪. $\tan 3A = \sqrt{3}$ হলে, A = কত?

ক 45° খ 30° গ 20° ঘ 15°

৫. $0° \le \theta \le 90°$ এর জন্য $\sin\theta$ এর সর্বোচ্চ মান–

ক −1 খ 0 গ $\frac{1}{2}$ ঘ 1

৬.



চিত্রে —

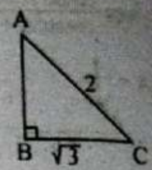
i. $\angle ACB = 30°$ ii. $\tan A = \sqrt{3}$

iii. $\sin(A + C) = 0$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i খ ii গ i ও ii ঘ ii ও iii

৭.



ΔABC-এ —

i. $\cos A = \sin C$ ii. $\cos A + \sec A =$ [illegible]

iii. $\tan C = \frac{2}{\sqrt{3}}$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ ii ও iii গ i ও iii ঘ i [illegible]

মান নির্ণয় কর (৮ – ১১) :

৮. $\frac{1-\cot^2 60°}{1+\cot^2 60°}$

সমাধান

প্রদত্তরাশি = $\frac{1-\cot^2 60°}{1+\cot^2 60°}$

$= \frac{1-(\cot 60°)^2}{1+(\cot 60°)^2}$

$= \frac{1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}$

$= \frac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}$

$= \frac{\frac{3-1}{3}}{\frac{3+1}{3}}$

$= \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$

৯. $\tan 45°.\ \sin^2 60°.\tan 30°.\tan 60°$

সমাধান: প্রদত্তরাশি $= \tan 45°.\ \sin^2 60°.\tan 30°.\tan 60°$

$= 1.\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2.\frac{1}{\sqrt{3}}.\sqrt{3} = 1.\frac{3}{4}.1 = \frac{3}{4}$

১০. $\frac{1-\cos^2 60°}{1+\cos^2 60°} + \sec^2 60°$

সমাধান প্রদত্তরাশি $= \frac{1-\cos^2 60°}{1+\cos^2 60°} + \sec^2 60°$

$= \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2} + (2)^2$

$= \frac{1-\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}} + 4$

$= \frac{\frac{4-1}{4}}{\frac{4+1}{4}} + 4$

$= \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} + 4 = \frac{3}{5} + 4 = \frac{3+20}{5} = \frac{23}{5}$

১১. $\cos45°.\cot^2 60°.\text{cosec}^2 30°$

সমাধান প্রদত্তরাশি $= \cos45°.\cot^2 60°.\text{cosec}^2 30°$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}.\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2.(2)^2$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{1}{3}.4$$
$$= \frac{4}{3\sqrt{2}}$$
$$= \frac{2.2}{3\sqrt{2}}$$
$$= \frac{2.\sqrt{2}.\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}$$
$$= \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

দেখাও যে, (১২ – ১৭) :

১২. $\cos^2 30° - \sin^2 30° = \cos60°$

সমাধান বামপক্ষ $= \cos^2 30° - \sin^2 30°$

$$= (\cos30°)^2 - (\sin30°)^2$$
$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$= \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3-1}{4}$$
$$= \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$\therefore$ ডানপক্ষ $= \cos60° = \frac{1}{2}$

$\therefore \cos^2 30° - \sin^2 30° = \cos60°$ (দেখানো হলো)

১৩. $\sin60° \cos30° + \cos60° \sin30° = \sin90°$

সমাধান $\sin60° \cos30° + \cos60° \sin30° = \sin90°$

বামপক্ষ $= \sin60° \cos30° + \cos60° \sin30°$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}.\frac{1}{2}$$ [মান বসিয়ে]
$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3+1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

ডানপক্ষ $= \sin90° = 1$

$\therefore \sin60° \cos30° + \cos60° \sin30° = \sin90°$ (দেখানো হলো)

১৪. $\cos60° \cos30° + \sin60° \sin30° = \cos30°$

সমাধান $\cos60° \cos30° + \sin60° \sin30° = \cos30°$

বামপক্ষ $= \cos60° \cos30° + \sin60° \sin30°$

$$= \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{2}$$ [মান বসিয়ে]
$$= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}}{4}$$
$$= \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ডানপক্ষ $= \cos30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \cos60° \cos30° + \sin60° \sin30° = \cos30°$ (দেখানো হলো)

১৫. $\sin3A = \cos3A$ যদি $A = 15°$ হয়।

সমাধান $A = 15°$ হলে দেখাতে হবে যে, $\sin3A = \cos3A$

বামপক্ষ $= \sin3A$

$$= \sin(3.15°)\ [\because A = 15°]$$
$$= \sin45°$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}$$ [মান বসিয়ে]

ডানপক্ষ $= \cos3A = \cos(3.15°) = \cos45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore \sin3A = \cos3A$ (দেখানো হলো)

১৬. $\sin2A = \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$ যদি $A = 45°$ হয়।

সমাধান বামপক্ষ $= \sin2A$

$$= \sin(2 \times 45)$$
$$= \sin90° = 1$$

ডানপক্ষ $= \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$

$$= \frac{2\tan45°}{1+\tan^2 45°}$$
$$= \frac{2 \times 1}{1+(1)^2}$$
$$= \frac{2}{1+1} = \frac{2}{2} = 1$$

$\therefore \sin2A = \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$ (দেখানো হলো)

১৭. $\tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$ যদি $A = 30°$ হয়।

সমাধান

বামপক্ষ $= \tan 2A$

$$= \tan(2.30°)$$
$$= \tan 60° \quad [\because A = 30°]$$
$$= \sqrt{3}.$$

ডানপক্ষ $= \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A} = \frac{2\tan A\ 30°}{1-\tan^2 30°}$ $[\because A = 30°]$

$$= \frac{2\tan 30°}{1-(\tan 30°)^2}$$
$$= \frac{2.\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}$$ [মান বসিয়ে]
$$= \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{3-1}{3}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{\sqrt{3}}$$
$$= \frac{\sqrt{3}.\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

$\therefore \tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$ (দেখানো হলো)

১৮. $2\cos(A+B) = 1 = 2\sin(A-B)$ এবং A, B সূক্ষ্মকোণ হলে দেখাও যে, $A = 45°$, $B = 15°$।

সমাধান দেওয়া আছে, $2\cos(A+B) = 1 = 2\sin(A-B)$

$\therefore 2\cos(A+B) = 1$

বা, $\cos(A+B) = \frac{1}{2}$

বা, $\cos(A+B) = \cos60°\ [\because \cos60° = \frac{1}{2}]$

$\because A+B = 60°$..................(i)

আবার, $2\sin(A-B) = 1$

বা, $\sin(A-B) = \frac{1}{2}$

বা, $\sin(A-B) = \sin30°\ [\because \sin30° = \frac{1}{2}]$

$\because A-B = 30°$..................(ii)

(i) নং ও (ii) নং যোগ করে,

$A+B+A-B = 60° + 30°$

বা, $2A = 90°$

বা, $A = \frac{90°}{2}$

$\therefore A = 45°$

(i) নং-এ $A = 45°$ বসিয়ে

$45° + B = 60°$

বা, $B = 60° - 45°$

$\therefore B = 15°$

$\therefore A = 45°$ এবং $B = 15°$ (দেখানো হলো)

১৯. $\cos(A - B) = 1$, $2\sin(A + B) = \sqrt{3}$ এবং A, B সূক্ষ্মকোণ হলে, A ও B এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান দেওয়া আছে, $\cos(A - B) = 1$

বা, $\cos(A - B) = \cos0°$

$\therefore A - B = 0°$ .... (i)

আবার, $2\sin(A + B) = \sqrt{3}$

বা, $\sin(A + B) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

বা, $\sin(A + B) = \sin60°$ $[\because \sin60° = \frac{\sqrt{3}}{2}]$

$\therefore (A + B) = 60°$ .... (ii)

(i) ও (ii) নং যোগ করে,

$A - B + A + B = 0° + 60°$

বা, $2A = 60°$

বা, $A = \frac{60°}{2}$

$\therefore A = 30°$

A এর মান সমীকরণ (ii) এ বসিয়ে পাই,

$30° + B = 60°$

বা, $B = 60° - 30°$

$\therefore B = 30°$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $A = 30°, B = 30°$

২০. সমাধান কর: $\frac{\cos A - \sin A}{\cos A + \sin A} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}$

সমাধান $\frac{\cos A - \sin A}{\cos A + \sin A} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}$

বা, $\frac{\cos A - \sin A + \cos A + \sin A}{\cos A - \sin A - \cos A - \sin A} = \frac{\sqrt{3} - 1 + \sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1 - \sqrt{3} - 1}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2\cos A}{-2\sin A} = \frac{2\sqrt{3}}{-2}$ বা, $\frac{\cos A}{\sin A} = \sqrt{3}$

বা, $\cot A = \sqrt{3}$

বা, $\cot A = \cot 30°$ $[\because \cot 30° = \sqrt{3}]$

$\therefore A = 30°$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $A = 30°$

২১. A ও B সূক্ষ্মকোণ এবং $\cot(A + B) = 1$, $\cot(A - B) = \sqrt{3}$ হলে, A ও B এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান দেওয়া আছে, $\cot(A + B) = 1$

বা $\cot(A + B) = \cot 45°$ $[\because \cot 45° = 1]$

বা, $A + B = 45°$..................(i)

আবার, $\cot(A - B) = \sqrt{3}$

বা, $\cot(A - B) = \cot 30°$ $[\because \cot 30° = \sqrt{3}]$

$\therefore A - B = 30°$..................(ii)

(i) ও (ii) নং যোগ করে পাই,

$A + B + A - B = 45° + 30°$

বা, $2A = 75°$

বা, $A = \frac{75°}{2}$

$\therefore A = 37\frac{1°}{2}$

(ii) নং থেকে (i) বিয়োগ করে পাই,

$A + B - A + B = 45° - 30°$

বা, $2B = 15°$

বা, $B = \frac{15°}{2}$

$\therefore B = 7\frac{1°}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $A = 37\frac{1°}{2}$ এবং $B = 7\frac{1°}{2}$

২২. দেখাও যে, $\cos3A = 4\cos^3A - 3\cos A$ যদি $A = 30°$ হয়।

সমাধান বামপক্ষ $= \cos3A$

$= \cos(3 \times 30°)$ $[\because A = 30°]$

$= \cos90° = 0$

ডানপক্ষ $= 4\cos^3A - 3\cos A$

$= 4\cos^3 30° - 3\cos30°$ $[\because A = 30°]$

$= 4(\cos30°)^3 - 3\cos30°$

$= 4 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 - 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$ $[\because \cos30° = \frac{\sqrt{3}}{2}]$

$= 4 \times \frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} = 0$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ

অর্থাৎ $\cos3A = 4\cos^3A - 3\cos A$ (দেখানো হলো)

২৩. সমাধান কর: $\sin\theta + \cos\theta = 1$ যখন $0° \le \theta \le 90°$

সমাধান $\sin\theta + \cos\theta = 1$

বা, $\sin\theta = 1 - \cos\theta$

বা, $(\sin\theta)^2 = (1 - \cos\theta)^2$ [বর্গ করে]

বা, $\sin^2\theta = 1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta$

বা, $1 - \cos^2\theta = 1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta$ $[\because \cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta]$

বা, $1 - \cos^2\theta - 1 + 2\cos\theta - \cos^2\theta = 0$

বা, $-2\cos^2\theta + 2\cos\theta = 0$

বা, $-2(\cos^2\theta - \cos\theta) = 0$

বা, $\cos^2\theta - \cos\theta = 0$ [-2 দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\cos\theta(\cos\theta - 1) = 0$

বা, $\cos\theta = 0$ অথবা, $\cos\theta - 1 = 0$

বা, $\cos\theta = \cos90°$ বা, $\cos\theta = 1$

$\therefore \theta = 90°$ বা, $\cos\theta = \cos0°$ $\therefore \theta = 0°$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $\theta = 0°$ অথবা, $90°$

২৪. সমাধান কর: $\cos^2\theta - \sin^2\theta = 2 - 5\cos\theta$ যখন θ সূক্ষ্মকোণ।

সমাধান $\cos^2\theta - \sin^2\theta = 2 - 5\cos\theta$

বা, $\cos^2\theta - (1 - \cos^2\theta) = 2 - 5\cos\theta$ $[\because \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta]$

বা, $\cos^2\theta - 1 + \cos^2\theta - 2 + 5\cos\theta = 0$

বা, $2\cos^2\theta + 5\cos\theta - 3 = 0$

বা, $2\cos^2\theta + 6\cos\theta - \cos\theta - 3 = 0$

বা, $2\cos\theta(\cos\theta + 3) - 1(\cos\theta + 3) = 0$

বা, $(\cos\theta + 3)(2\cos\theta - 1) = 0$

হয় $\cos\theta + 3 = 0$

বা, $\cos\theta = -3$

এখানে $\cos\theta = -3$ গ্রহণযোগ্য নয়, কারণ $-1 \le \cos\theta \le 1$

$\therefore 2\cos\theta - 1 = 0$

বা, $2\cos\theta = 1$

বা, $\cos\theta = \frac{1}{2}$

বা, $\cos\theta = \cos60°$

$\therefore \theta = 60°$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $\theta = 60°$

২৫. সমাধান কর: $2\sin^2\theta + 3\cos\theta - 3 = 0$, θ সূক্ষ্মকোণ।

সমাধান প্রদত্ত সমীকরণটি,

$2\sin^2\theta + 3\cos\theta - 3 = 0$

বা, $2(1-\cos^2\theta) + 3\cos\theta - 3 = 0$

বা, $2 - 2\cos^2\theta + 3\cos\theta - 3 = 0$

বা, $-2\cos^2\theta + 3\cos\theta - 1 = 0$

বা, $2\cos^2\theta - 3\cos\theta + 1 = 0$ [-1 দ্বারা গুণ করিয়া]

বা, $2\cos^2\theta - 2\cos\theta - \cos\theta + 1 = 0$

বা, $(\cos\theta - 1)\,2\cos\theta - 1(\cos\theta - 1) = 0$

বা, $(2\cos\theta - 1)(\cos\theta - 1) = 0$

$\therefore 2\cos\theta - 1 = 0$ অথবা, $\cos\theta - 1 = 0$

$2\cos\theta - 1 = 0$ হলে, $2\cos\theta = 1$

বা, $\cos\theta = \frac{1}{2}$

বা, $\cos\theta = \cos 60^\circ$

$\therefore \theta = 60^\circ$

আবার, $\cos\theta - 1 = 0$ হলে, $\cos\theta = 1$

বা, $\cos\theta = \cos 0^\circ$

$\therefore \theta = 0^\circ$

এখানে, $\theta = 0^\circ$ গ্রহণযোগ্য নয়। কারণ θ সূক্ষ্মকোণ।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $\theta = 60^\circ$

২৬. সমাধান কর: $\tan^2\theta - (1+\sqrt{3})\tan\theta + \sqrt{3} = 0$

সমাধান $\tan^2\theta - (1+\sqrt{3})\tan\theta + \sqrt{3} = 0$

বা, $\tan^2\theta - \tan\theta - \sqrt{3}\tan\theta + \sqrt{3} = 0$

বা, $\tan\theta(\tan\theta - 1) - \sqrt{3}(\tan\theta - 1) = 0$

বা, $(\tan\theta - 1)(\tan\theta - \sqrt{3}) = 0$

$\therefore$ হয়, $\tan\theta - 1 = 0$

বা, $\tan\theta = 1$

বা, $\tan\theta = \tan 45^\circ$

$\therefore \theta = 45^\circ$

অথবা, $\tan\theta - \sqrt{3} = 0$

বা, $\tan\theta = \sqrt{3}$

বা, $\tan\theta = \tan 60^\circ$

বা, $\theta = 60^\circ$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $\theta = 45^\circ, 60^\circ$

২৭. মান নির্ণয় কর: $3\cot^2 60^\circ + \frac{1}{4}\operatorname{cosec}^2 30^\circ + 5\sin^2 45^\circ - 4\cos^2 60^\circ$

সমাধান প্রদত্ত রাশি $= 3\cot^2 60^\circ + \frac{1}{4}\operatorname{cosec}^2 30^\circ + 5\sin^2 45^\circ - 4\cos^2 60^\circ$

$= 3(\cot 60^\circ)^2 + \frac{1}{4}(\operatorname{cosec} 30^\circ)^2 + 5(\sin 45^\circ)^2 - 4(\cos 60^\circ)^2$

$= 3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{1}{4}\cdot(2)^2 + 5\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{2}\right)^2$ [মান বসিয়ে]

$= 3\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\cdot 4 + 5\cdot\frac{1}{2} - 4\cdot\frac{1}{4}$

$= 1 + 1 + \frac{5}{2} - 1$

$= 1 + \frac{5}{2}$

$= \frac{2+5}{2}$

$= \frac{7}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় মান: $\frac{7}{2}$

২৮. $\triangle ABC$ এর $\angle B = 90^\circ$, $AB = 5$ cm, $BC = 12$cm.

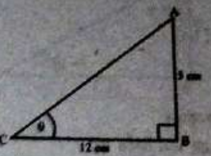
ক. AC এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ২

খ. $\angle C = \theta$ হলে, $\sin\theta + \cos\theta$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. দেখাও যে, $\sec^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta = \sec^2\theta\,\operatorname{cosec}^2\theta$ ৪

✓ ২৮ নং প্রশ্নের উত্তর ▶

ক চিত্রানুযায়ী $\triangle ABC$-এ $\angle ABC = 90^\circ$



$\triangle ABC$-এ $\angle B = 90^\circ$, $AB = 5$cm

$BC = 12$cm

AC এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করতে হবে।

$\triangle ABC$-এ

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$= 5^2 + 12^2$

$= 25 + 144$

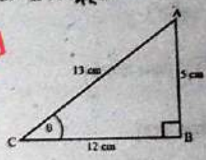
$= 169$

$\therefore AC = 13$

সুতরাং $AC = 13$ সে.মি.

খ দেওয়া আছে, $\angle C = \theta$

সুতরাং $\triangle ABC$-এর চিত্রটি হবে নিম্নরূপ:



$\sin\theta = \frac{\text{বিপরীত বাহু}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{13}$

এবং $\cos\theta = \frac{\text{সন্নিহিত বাহু}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{BC}{AC} = \frac{12}{13}$

$\therefore \sin\theta + \cos\theta = \frac{5}{13} + \frac{12}{13}$

$= \frac{5+12}{13}$

$= \frac{17}{13}$

গ 'খ' হতে পাই,

$\sin\theta = \frac{5}{13}$ এবং $\cos\theta = \frac{12}{13}$

$\therefore \operatorname{cosec}\theta = \frac{13}{5}$ এবং $\sec\theta = \frac{13}{12}$

বামপক্ষ $= \sec^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta$

$= \left(\frac{13}{12}\right)^2 + \left(\frac{13}{5}\right)^2$

$= \frac{169}{144} + \frac{169}{25}$

$= \frac{4225 + 24336}{3600}$

$= \frac{28561}{3600}$

ডানপক্ষ $= \sec^2\theta.\operatorname{cosec}^2\theta$

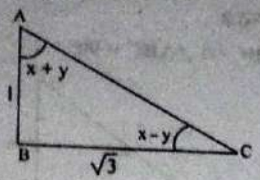
$= \left(\frac{13}{12}\right)^2\cdot\left(\frac{13}{5}\right)^2$

$= \frac{169}{144}\cdot\frac{169}{25}$

$= \frac{28561}{3600}$

$\therefore \sec^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta = \sec^2\theta.\operatorname{cosec}^2\theta$ (দেখানো হলো)

২৯.



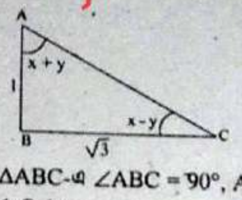
ক. AC এর পরিমাণ কত? ২

খ. $\tan A + \tan C$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. x ও y এর মান নির্ণয় কর। ৪

✔ ২৯ নং প্রশ্নের উত্তর ▶

ক



উদ্দীপকের চিত্রানুযায়ী, ΔABC-এ $\angle ABC = 90°$, $AB = 1$ একক, $BC = \sqrt{3}$ একক AC এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করতে হবে।

পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে,

$(\text{অতিভুজ})^2 = (\text{লম্ব})^2 + (\text{ভূমি})^2$

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

বা, $AC^2 = (1)^2 + (\sqrt{3})^2$ [মান বসিয়ে]

বা, $AC^2 = 1 + 3$

বা, $\sqrt{AC^2} = \sqrt{4}$ [বর্গমূল করে]

বা, $AC = 2$

∴ নির্ণেয় মান = 2 একক

খ চিত্রানুযায়ী,

$\tan A = \dfrac{\text{বিপরীত বাহু}}{\text{সন্নিহিত বাহু}} = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$

আবার,

$\tan C = \dfrac{\text{বিপরীত বাহু}}{\text{সন্নিহিত বাহু}} = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

প্রদত্ত রাশি $= \tan A + \tan C$

$= \sqrt{3} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$= \dfrac{\sqrt{3}.\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3}}$

$= \dfrac{4}{\sqrt{3}}$

গ চিত্রানুযায়ী, $\angle A = x + y$ এবং $\angle C = x - y$

'খ' হতে পাই,

$\tan A = \sqrt{3}$

বা, $\tan A = \tan 60°$

বা, $A = 60°$

বা, $x + y = 60°$ .... (i) [∵ $\angle A = x + y$]

আবার, $\tan C = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\tan C = \tan 30°$

বা, $C = 60°$

বা, $x - y = 30°$ .... (ii) [∵ $\angle C = x - y$]

সমীকরণ (i) ও (ii) যোগ করে পাই,

$x + y + x - y = 60° + 30°$

বা, $2x = 90°$

∴ $x = 45°$

$x = 45°$ হলে, (i) হতে পাই,

$45° + y = 60°$

বা, $y = 60° - 45°$

∴ $y = 15°$

সুতরাং $x = 45°$ এবং $y = 15°$

৩০. $\sin\theta = p$, $\cos\theta = q$, $\tan\theta = r$, যেখানে θ সূক্ষ্মকোণ

ক. $r = \sqrt{(3)^{-1}}$ হলে, θ এর মান নির্ণয় কর।

খ. $p + q = \sqrt{2}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\theta = 45°$

গ. $7p^2 + 3q^2 = 4$ হলে দেখাও যে, $\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

✔ ৩০ নং প্রশ্নের উত্তর ▶

ক দেওয়া আছে,

$\sin\theta = p$, $\cos\theta = q$, $\tan\theta = r$

$r = \sqrt{(3)^{-1}} = \sqrt{\dfrac{1}{3}}$

∴ $\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \tan 30°$

$\theta = 30°$

খ দেওয়া আছে, $p + q = \sqrt{2}$

বা, $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}$ [p, q এর মান বসিয়ে]

বা, $\sin\theta = \sqrt{2} - \cos\theta$

বা, $\sin^2\theta = (\sqrt{2} - \cos\theta)^2$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $1 - \cos^2 = 2 - 2\sqrt{2}\cos\theta + \cos^2\theta$

বা, $2\cos^2\theta - 2\sqrt{2}\cos\theta + 1 = 0$

বা, $(\sqrt{2}\cos\theta)^2 - 2.\sqrt{2}\cos.1 + (1)^2 = 0$

বা, $(\sqrt{2}\cos\theta - 1)^2 = 0$

বা, $\sqrt{2}\cos\theta - 1 = 0$

বা, $\sqrt{2}\cos = 1$

বা, $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

বা, $\cos\theta = \cos 45°$

বা, $\theta = 45°$

∴ $\theta = 45°$ (প্রমাণিত)

গ দেওয়া আছে,

$7p^2 + 3q^2 = 4$

বা, $7\sin^2\theta + 3\cos^2\theta = 4$ [p, q এর মান বসিয়ে]

বা, $7\sin^2\theta + 3(1 - \sin^2\theta) = 4$

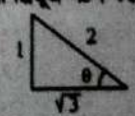
বা, $7\sin^2\theta + 3 - 3\sin\theta = 4$

বা, $4\sin^2\theta = 1$

বা, $\sin^2\theta = \dfrac{1}{4}$

বা, $\sin\theta = \dfrac{1}{2} = \dfrac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}}$

sinθ এর মান থেকে সমকোণী ত্রিভুজ গঠন করে পাই,



ত্রিভুজ থেকে পাই, $\tan\theta = \dfrac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

∴ $\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ (দেখানো হলো)

▸▸ দশম অধ্যায় : দূরত্ব ও উচ্চতা

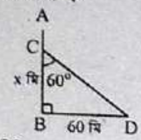
▸▸ অনুশীলনী – ১০

১. একটি দন্ডের দৈর্ঘ্য তার ছায়ার দৈর্ঘ্যের এক–তৃতীয়াংশ হলে ছায়ার প্রান্ত বিন্দুতে সূর্যের উন্নতি কোণ কত?

(ক) $15°$ (খ) $30°$ (গ) $45°$ (ঘ) $60°$

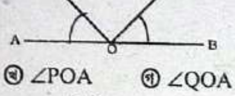
বি.দ্র : সঠিক উত্তর নাই। সঠিক উত্তর 18.

২. চিত্রে x এর মান নিচের কোনটি?



(ক) $\frac{\sqrt{3}}{60}$ (খ) $\frac{20}{\sqrt{3}}$ (গ) $20\sqrt{3}$ (ঘ) $60\sqrt{3}$

৩. পাশের চিত্রে O বিন্দুতে P বিন্দুর উন্নতি কোণ কোনটি?

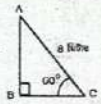


(ক) ∠QOB (খ) ∠POA (গ) ∠QOA (ঘ) ∠POB

৪. অবনতি কোণের মান কত ডিগ্রি হলে একটি খুঁটির দৈর্ঘ্য ও ছায়ার দৈর্ঘ্য সমান হবে?

(ক) $30°$ (খ) $45°$ (গ) $60°$ (ঘ) $90°$

● পাশের চিত্র অনুযায়ী ৫নং – ৬নং প্রশ্ন দুইটির উত্তর দাও :



৫. BC এর দৈর্ঘ্য হবে —

(ক) $\frac{4}{\sqrt{3}}$ মিটার (খ) 4 মিটার (গ) $4\sqrt{2}$ মিটার (ঘ) $4\sqrt{3}$ মিটার

৬. AB এর দৈর্ঘ্য হবে–

(ক) $\frac{4}{\sqrt{3}}$মিটার (খ) 4 মিটার (গ) $4\sqrt{2}$ মিটার (ঘ) $4\sqrt{3}$ মিটার

৭. উন্নতি কোণ —

i. $30°$ হলে, ভূমি > লম্ব হবে

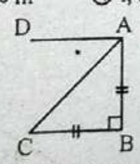
ii. $45°$ হলে, ভূমি = লম্ব হবে

iii. $60°$ হলে, লম্ব < ভূমি হবে

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii (খ) ii ও iii (গ) i ও iii (ঘ) i, ii ও iii

৮. পাশের চিত্রে —



i. ∠DAC অবনতি কোণ

ii. ∠ACB উন্নতি কোণ

iii. ∠DAC = ∠ACB

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii (খ) ii ও iii (গ) i ও iii (ঘ) i, ii ও iii

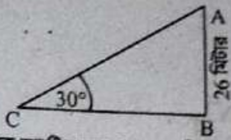
৯. ভূ–রেখার অপর নাম কী?

(ক) লম্ব রেখা (খ) সমান্তরাল রেখা

(গ) শয়ন রেখা (ঘ) উর্ধ্বরেখা

১০. একটি মিনারের পাদদেশ থেকে কিছু দূরে একটি স্থানে মিনারটির শীর্ষের উন্নতি কোণ $30°$ এবং মিনারটির উচ্চতা 26 মিটার হলে, মিনার থেকে ঐ স্থানটির দূরত্ব নির্ণয় কর।

সমাধান



মনে করি, মিনার থেকে স্থানটির দূরত্ব BC = x মি.।

দেওয়া আছে, মিনারটির উচ্চতা, AB = 26 মিটার।

C বিন্দুতে শীর্ষবিন্দু A এর উন্নতি ∠ACB = $30°$

এখান, ABC ত্রিভুজে–এ

$\tan\angle ACB = \frac{AB}{BC}$

বা, $\tan 30° = \frac{AB}{BC}$

বা, $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{26}{BC}$ $[\because \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}]$

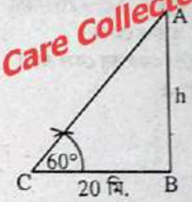
বা, $BC = 26\sqrt{3}$

$\therefore BC = 26 \times 1.73205 = 45.033$ মিটার (প্রায়)

∴ মিনার থেকে ঐ স্থানের দূরত্ব 45.033 মিটার (প্রায়)

১১. একটি গাছের পাদদেশ থেকে 20 মিটার দূরে ভূতলের কোনো বিন্দুতে গাছের চূড়ার উন্নতি কোণ $60°$ হলে, গাছটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

সমাধান



মনে করি, গাছের উচ্চতা AB = h মিটার। পাদবিন্দু B থেকে 20 মিটার দূরের অপর একটি বিন্দু C. তাহলে BC = 20 মি.। C বিন্দুতে গাছটির শীর্ষের উন্নতি কোণ ∠ACB = $60°$.

এখন, ΔABC-এ

$\tan 60° = \frac{AB}{BC}$

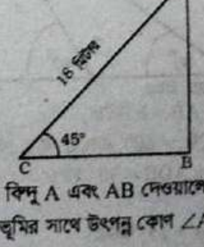
বা, $\sqrt{3} = \frac{h}{20}$

বা, $h = 20\sqrt{3} = 20 \times 1.732058 = 34.641016 = 34.641$

∴ গাছটি উচ্চতা 34.641 মিটার।

১২. 18 মিটার দৈর্ঘ্যের একটি মই ভূমির সাথে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে দেওয়ালের ছাদ স্পর্শ করে। দেওয়ালটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

সমাধান



মনে করি, ছাদের স্পর্শ বিন্দু A এবং AB দেওয়ালের উচ্চতা। মই–এর দৈর্ঘ্য AC = 18 মিটার এবং ভূমির সাথে উৎপন্ন কোণ ∠ACB = $45°$,

ΔABC সমকোণী ত্রিভুজ-এ

$\sin 45^\circ = \frac{AB}{AC}$

বা, $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{AB}{18}$

বা, $\sqrt{2}AB = 18$

বা, $AB = \frac{18}{\sqrt{2}} = \frac{18\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}$

$= \frac{18\sqrt{2}}{2}$

$= 9\sqrt{2}$

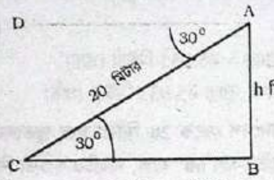
$= 12.72792$

$= 12.728$ মিটার (প্রায়)

$\therefore$ দেওয়ালটির উচ্চতা $= 12.728$ মিটার। (প্রায়)

১৩. একটি ঘরের ছাদের কোনো বিন্দুতে ঐ বিন্দু থেকে 20 মিটার দূরের ভূতলস্থ একটি বিন্দুর অবনতি কোণ 30° হলে, ঘরটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

সমাধান



মনে করি, ঘরটির উচ্চতা AB = h মিটার। শীর্ষবিন্দু A থেকে 20 মিটার দূরে ভূতলস্থ অপর একটি বিন্দু C. তাহলে, AC = 20 মিটার।

যেহেতু AD ॥ BC এবং AC তাদের ছেদক।

$\therefore \angle DBC = \angle ACB = 30^\circ$ [একান্তর কোণ বলে]

এখন, সমকোণী ত্রিভুজ ABC-এ

$\sin\angle ACB = \frac{AB}{AC}$

বা, $\sin 30^\circ = \frac{h}{20}$

বা, $\frac{1}{2} = \frac{h}{20}$

বা, $2h = 20$

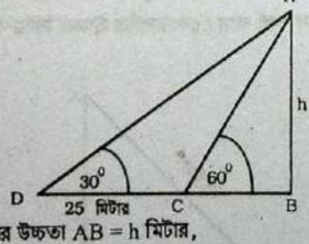
বা, $h = \frac{20}{2}$

$\therefore h = 10$

$\therefore$ ঘরটির উচ্চতা 10 মিটার।

১৪. ভূতলে কোনো স্থানে একটি স্তম্ভের শীর্ষের উন্নতি কোণ 60°। ঐ স্থান থেকে 25 মিটার পিছিয়ে গেলে স্তম্ভটির উন্নতি কোণ 30° হয়। স্তম্ভটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

সমাধান



মনে করি, স্তম্ভের উচ্চতা AB = h মিটার,

শীর্ষের উন্নতি কোণ $\angle ACB = 60^\circ$ এবং C স্থান থেকে CD = 25 মিটার পিছিয়ে গেলে উন্নতি কোণ $\angle ADB = 30^\circ$ হয়।

ধরি, BC = x মিটার।

$\therefore BD = BC + CD = (x + 25)$ মিটার।

এখন, সমকোণী ত্রিভুজ ABC থেকে পাই,

$\tan\angle ACB = \frac{AB}{BC}$

বা, $\tan 60^\circ = \frac{AB}{BC}$

বা, $\sqrt{3} = \frac{h}{x}$ [$\because \tan 60^\circ = \sqrt{3}$]

$\therefore x = \frac{h}{\sqrt{3}}$ .... (i)

আবার, $\triangle ABD$ থেকে পাই,

$\tan\angle ADB = \frac{AB}{BD}$

বা, $\tan 30^\circ = \frac{AB}{BD}$

বা, $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{x+25}$ [$\because \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$]

বা, $\sqrt{3}h = x + 25$

বা, $h = \frac{h}{\sqrt{3}} + \frac{25}{\sqrt{3}}$

বা, $h = \frac{h}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{25}{\sqrt{3}}$

বা, $h = \frac{h}{3} + \frac{25}{\sqrt{3}}$

বা, $h - \frac{h}{3} = \frac{25}{\sqrt{3}}$

বা, $\frac{3h - h}{3} = \frac{25}{\sqrt{3}}$

বা, $\frac{2h}{3} = \frac{25}{\sqrt{3}}$

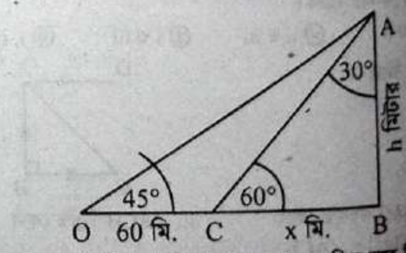
বা, $h = \frac{75}{2\sqrt{3}}$

বা, $h = 21.65063$

$\therefore$ স্তম্ভটির উচ্চতা 21.651 মিটার (প্রায়)।

১৫. কোনো স্থান থেকে একটি মিনারের দিকে 60 মিটার এগিয়ে আসলে মিনারের শীর্ষ বিন্দুর উন্নতি 45° থেকে 60° হয়। মিনারটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

সমাধান



মনে করি, AB একটি মিনার। মিনারের পাদদেশ B বিন্দু হতে কিছু দূরে O বিন্দুতে মিনারের শীর্ষবিন্দু A এর উন্নতি কোণ, $\angle AOB = 45^\circ$. এবং O বিন্দু হতে মিনারের দিকে 60 মিটার এগিয়ে আসলে C বিন্দুতে A বিন্দুর উন্নতি কোণ $\angle ACB = 60^\circ$.

মনে করি, মিনারটির উচ্চতা, AB = h মিটার এবং BC = x মিটার।

তাহলে, BO = BC + CO = (x + 60) মিটার

এখন, সমকোণী $\triangle AOB$-এ

$\tan\angle AOB = \frac{AB}{BO}$

বা, $\tan 45° = \frac{h}{x + 60°}$ $\quad [\because \angle AOB = 45°]$

বা, $1 = \frac{h}{x + 60}$ $\quad [\because \tan 45° = 1]$

বা, $x + 60 = h$

$\therefore x = h - 60$..........................(i)

আবার, সমকোণী $\triangle ACB$ –এ

$\therefore \tan\angle ACB = \frac{AB}{BC}$

বা, $\tan 60° = \frac{h}{x}$ $\quad [\because \angle ACB = 60°]$

বা, $\sqrt{3} = \frac{h}{x}$ $\quad [\because \tan 60° = \sqrt{3}]$

বা, $h = x\sqrt{3}$

বা, $h = (h - 60)\sqrt{3}$ [(i) নং থেকে x এর মান বসিয়ে পাই]

বা, $h = h\sqrt{3} - 60\sqrt{3}$

বা, $h(\sqrt{3} - 1) = 60\sqrt{3}$

বা, $h = \frac{60\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1}$

$= \frac{60 \times 1.73205}{1.73205 - 1}$ $\quad [\because \sqrt{3} = 1.733205]$

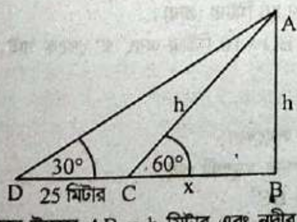
$= \frac{103.923}{0.73205} = 141.961614$

$\therefore h = 141.962$ (প্রায়)

$\therefore$ নির্ণেয় উচ্চতা 141.962 মিটার (প্রায়)।

১৬. একটি নদীর তীরে কোনো এক স্থানে দাঁড়িয়ে একজন লোক দেখল যে, ঠিক সোজাসোজি অপর তীরে অবস্থিত একটি টাওয়ারের উন্নতি কোণ 60°। ঐ স্থান থেকে 96 মিটার পিছিয়ে গেলে উন্নতি কোণ 30° হয়। টাওয়ারের উচ্চতা এবং নদীর বিস্তার নির্ণয় কর।

সমাধান



মনে করি, টাওয়ারের উচ্চতা AB = h মিটার এবং নদীর বিস্তার BC = x মিটার।

নদীর অপর তীরে C বিন্দুতে টাওয়ারের শীর্ষের উন্নতি কোণ $\angle ACB = 60°$ এবং C বিন্দু থেকে 96 মিটার পিছনে অপর একটি বিন্দু D তে টাওয়ারের শীর্ষের উন্নতি কোণ $\angle ADB = 30°$ হয়।

$\therefore BD = (BC + CD) = (x + 96)$ মিটার।

এখন, সমকোণী ত্রিভুজ ABC–এ

$\tan\angle BCA = \frac{AB}{BC}$

বা, $\tan 60° = \frac{h}{x}$

বা, $\sqrt{3} = \frac{h}{x}$ $\quad [\because \tan 60° = \sqrt{3}]$

$\therefore x = \frac{h}{\sqrt{3}}$..............(i)

আবার, সমকোণী ত্রিভুজ ABD–এ

$\tan\angle BDA = \frac{AB}{BD}$

বা, $\tan 30° = \frac{AB}{BC + CD}$

বা, $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{x + 96}$ $\quad [\because \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}]$

বা, $\sqrt{3}h = x + 96$

বা, $\sqrt{3}h = \frac{h}{\sqrt{3}} + 96$ [(i) নং থেকে x-এর মান বসিয়ে]

বা, $\sqrt{3}h - \frac{h}{\sqrt{3}} = 96$

বা, $\frac{3h - h}{\sqrt{3}} = 96$

বা, $2h = 96\sqrt{3}$

বা, $h = \frac{96\sqrt{3}}{2}$

বা, $h = 83.138$ (প্রায়)

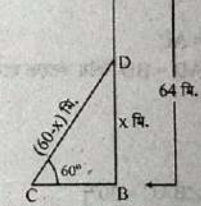
h এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই, $x = \frac{83.138}{\sqrt{3}}$

বা, $x = 27.713$

$\therefore$ টাওয়ারের উচ্চতা 83.138 মিটার (প্রায়) এবং নদীর বিস্তার 27.713 মিটার (প্রায়)।

১৭. 64 মিটার লম্বা একটি খুঁটি ভেঙে গিয়ে সম্পূর্ণ বিচ্ছিন্ন না হয়ে ভূমির সাথে 60° উৎপন্ন করে। খুঁটিটির ভাঙা অংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান



মনে করি, খুঁটিটি x মিটার উচ্চতায় D বিন্দুতে ভেঙে সম্পূর্ণ বিচ্ছিন্ন না হয়ে ভূমির সাথে C বিন্দুতে মিলিত হয়েছে এবং $\angle BCD = 60°$ উৎপন্ন করেছে।

তাহলে, BD = x মিটার এবং CD = (64 – x) মি.

এখন, BCD সমকোণী ত্রিভুজ থেকে পাই,

$\sin\angle BCD = \frac{BD}{CD}$

বা, $\sin 60° = \frac{BD}{CD}$

বা, $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{64 - x}$

বা, $\sqrt{3}(64 - x) = 2x$

বা, $64\sqrt{3} - \sqrt{3}x - 2x = 0$

বা, $-x(\sqrt{3} + 2) = -64\sqrt{3}$

বা, $x(\sqrt{3} + 2) = 64\sqrt{3}$

বা, $x = \frac{64\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}$

বা, $x = \frac{64\sqrt{3}(2 - \sqrt{3})}{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})}$

[ভাজকের লব ও হরকে $(2 - \sqrt{3})$ দ্বারা গুণ করে]

বা, $x = \frac{64\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{(2)^2 - (\sqrt{3})^2}$

বা, $x = \frac{64\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{4-3}$

বা, $x = 64\sqrt{3}(2-\sqrt{3})$

বা, $x = 128\sqrt{3} - 64 \times 3$

বা, $x = 128\sqrt{3} - 192$

$\therefore x = 29.7025$ (প্রায়)

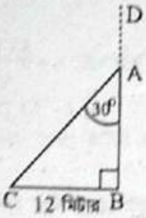
$\therefore$ খুঁটির ভাঙা অংশের দৈর্ঘ্য,

$CD = (64 - 29.7025)$ মি.

$= 34.298$ মি. (প্রায়)।

১৮. একটি গাছ ঝড়ে এমনভাবে ভেঙে গেল যে, অবিচ্ছিন্ন ভাঙা অংশ দণ্ডায়মান অংশের সাথে 30° কোণ করে গাছের গোড়া থেকে 12 মিটার দূরে মাটি স্পর্শ করে। সম্পূর্ণ গাছটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান



মনে করি, BD একটি গাছ। উহা ঝড়ে A বিন্দুতে ভেঙে সম্পূর্ণভাবে বিচ্ছিন্ন না হয়ে AD অংশ, দণ্ডায়মান অংশ AB এর সাথে A বিন্দুতে 30° কোণ উৎপন্ন করে গাছের গোড়া B বিন্দু থেকে 12 মিটার দূরে C বিন্দুতে মাটি স্পর্শ করে। $\angle BAC = 30°$,

$BC = 12$ মিটার এবং $AD = AC$

গাছটির সম্পূর্ণ দৈর্ঘ্য $BA + AD = BD$ নির্ণয় করতে হবে।

এখন, সমকোণী ΔABC-এ

$\tan\angle BAC = \frac{BC}{BA}$

বা, $\tan 30° = \frac{BC}{BA}$ $[\because \angle BAC = 30°]$

বা, $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{BA}$ $[\because \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}]$

বা, $BA = 12\sqrt{3}$

$\therefore BA = 20.785$ (প্রায়)

আবার, $\sin\angle BAC = \frac{BC}{AC}$

বা, $\sin 30° = \frac{12}{AC}$

বা, $\frac{1}{2} = \frac{12}{AC}$

$\therefore AC = 24$

$\therefore$ গাছটির সম্পূর্ণ দৈর্ঘ্য $BD = BA + AD$

$= (20.785 + 24)$ মিটার $[\because AC = AD]$

$= 44.785$ মিটার (প্রায়)

$\therefore$ নির্ণেয় সম্পূর্ণ গাছটির দৈর্ঘ্য 44.785 মিটার (প্রায়)।

১৯. একটি নদীর এক তীরে কোনো স্থানে দাঁড়িয়ে একজন লোক দেখলো যে, ঠিক সোজাসোজি অপর তীরে অবস্থিত 150 মিটার লম্বা একটি গাছের শীর্ষের উন্নতি কোণ 30°। লোকটি একটি নৌকাযোগে গাছটিকে লক্ষ্য করে যাত্রা শুরু করলো। কিন্তু পানির স্রোতের কারণে লোকটি গাছ থেকে 10 মিটার দূরে তীরে পৌঁছল।

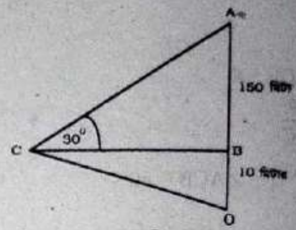
ক. উপরোক্ত বর্ণনাটি চিত্রের মাধ্যমে দেখাও।

খ. নদীর বিস্তার নির্ণয় কর।

গ. লোকটির যাত্রা স্থান থেকে অবতরণের স্থানের দূরত্ব নির্ণয় কর।

✔ ১৯ নং প্রশ্নের উত্তর ▶

ক প্রদত্ত বর্ণনাটি নিম্নে চিত্রের মাধ্যমে দেখানো হলো–



অঙ্কিত চিত্রে, নদীর বিস্তার BC। নদীর এক তীরের B বিন্দুতে একটি AB = 150 মিটার এবং অপর তীরের C বিন্দুতে গাছটির শীর্ষ A এর উ কোণ $\angle ACB = 30°$

নৌকাযোগে C বিন্দু হতে AB গাছটিকে লক্ষ্য করে সোজাসোজি যাত্রা করলে নদীর স্রোতের কারণে AB গাছ হতে BO = 10 মিটার দূরে O বিন্দু পৌঁছায়।

খ 'ক' থেকে পাই,

$\angle ACB = 30°$, $BA = 150$ মিটার এবং ধরি, নদীর বিস্তার = BC = মিটার

এখন, ΔABC-এ

$\tan\angle ACB = \frac{BA}{BC}$

বা, $\tan 30° = \frac{150}{BC}$

বা, $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{150}{x}$

বা, $x = 150 \times \sqrt{3}$

বা, $x = 259.808$

$\therefore x = 259.808$ মিটার

$\therefore$ নদীর বিস্তার 259.80 মিটার (প্রায়)।

গ 'ক' থেকে পাই BO= 10 মিটার এবং 'খ' থেকে পাই, BC = 259. মিটার

ধরি, CO = S মিটার

ΔOBC এর $\angle OBC$ সমকোণ,

$\therefore$ পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুযায়ী পাই,

$OC^2 = OB^2 + BC^2$

বা, $S^2 = (10)^2 + (259.808)^2$ [খ নং হতে BC = 259.808 মি.]

বা, $S^2 = 100 + 67500$

বা, $S^2 = 67600$

বা, $S = \sqrt{67600}$

$\therefore S = 260$

$\therefore$ অবতরণের স্থানের দূরত্ব 260 মিটার।

২০. 16 মিটার দীর্ঘ একটি মই লম্বভাবে দণ্ডায়মান একটি দেয়াল বরাবর ঠেস দিয়ে রাখা হলো। ফলে এটি ভূমির সাথে 60° কোণ করল।

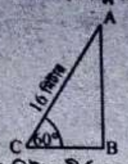
ক. উদ্দীপক অনুসারে সংক্ষিপ্ত বর্ণনাসহ চিত্র অঙ্কন কর।

খ. দেয়ালটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

গ. দেয়ালের সাথে ঠেস দিয়ে রাখা মইটিকে পূর্বের অবস্থান থেকে বরাবর আর কতদূরে সরালে মইটি ভূমির সাথে 30° কোণ করবে?

✔ ২০ নং প্রশ্নের উত্তর ▸

ক উদ্দীপক অনুসারে সংক্ষিপ্ত বর্ণনাসহ নিম্নে চিত্র অঙ্কন করা হলো –



অঙ্কিত চিত্রানুসারে AC = 16 মিটার দীর্ঘ একটি মই লম্বভাবে দণ্ডায়মান AB দেয়ালের ছাদ বরাবর ঠেস দিয়ে রাখায় AC মইটি দেওয়ালের পাদবিন্দু B হতে BC দূরত্বে ভূমির সাথে C বিন্দুতে $\angle ACB = 60°$ উৎপন্ন করে।

খ 'ক' থেকে পাই,
মইয়ের দৈর্ঘ্য, AC = 16 মিার
এবং $\angle ACB = 60°$
ধরি, দেয়ালের উচ্চতা AB = h মিটার
এখন, ABC সমকোণী ত্রিভুজে

$\sin \angle ACB = \frac{AB}{AC}$

বা, $\sin 60° = \frac{h}{16}$

বা, $h = 16 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

বা, $h = 8\sqrt{3}$

$\therefore h = 13.856$

দেয়ালটির উচ্চতা 13.856 মিটার

গ 'ক' তে অঙ্কিত চিত্র অনুসারে,
মইয়ের দৈর্ঘ্য, AC = 16 মিটার
ভূমিতে উৎপন্ন কোণ, $\angle ACB = 60°$
ধরি,দেওয়ালেরও মইয়ের পাদবিন্দুর দূরত্ব BC = y মিটার
সুতরাং, ABC সমকোণী ত্রিভুজে,

$\cos \angle ACB = \frac{BC}{AC}$

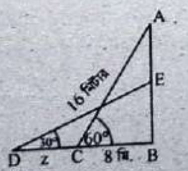
বা, $\cos 60° = \frac{y}{16}$

বা, $\frac{1}{2} = \frac{y}{16}$

বা, $y = \frac{16}{2}$

$\therefore y = 8$

$\therefore$ এক্ষেত্রে দেওয়ালের ও মাইয়ের পাদবিন্দুর দূরত্ব 8 মিটার।৷
এখন মনে করি, মইটিকে পূর্বের অবস্থানে C হতে CD = z মিটার দূরে স্থাপন করা হলে দেওয়ালের E বিন্দুতে স্পর্শ করে ভূমিতে D বিন্দুতে $\angle EDB = 30°$ হয়।



সুতরাং সমকোণী ত্রিভুজ BDE-এ

$\cos \angle BDE = \frac{BD}{DE}$

বা, $\cos 30° = \frac{BC + CD}{DE}$

বা, $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{8 + z}{16}$

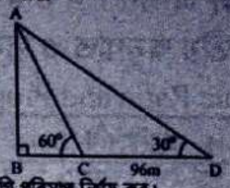
বা, $8 + z = \frac{16\sqrt{3}}{2}$

বা, $z = 8\sqrt{3} - 8$

বা, $z = 5.856$

$\therefore$ মইটিকে 5.856 মিটার সরাতে হবে।

২১. চিত্রে, CD = 96 মিটার



ক. $\angle CAD$ এর ডিগ্রি পরিমাপ নির্ণয় কর। ২
খ. BC এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ৪
গ. ΔACD এর পরিসীমা নির্ণয় কর। ৪

✔ ২১ নং প্রশ্নের উত্তর ▸

ক $\angle BCD$ = এক সরলকোণ = 180°
প্রশ্নমতে, $\angle ACB = 60°$
$\therefore \angle ACD = 180° - 60° = 120°$ [$\because \angle BAC + \angle ACD$ = এক সরলকোণ]
আবার, ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি = 180°
অতএব, ΔACD–তে $\angle CAD + \angle ACD + \angle ADC = 180°$
বা, $\angle CAD = 180° - \angle ACD - \angle ADC$
বা, $\angle CAD = 180° - 120° - 30°$
$\therefore \angle CAD = 180° - 150° = 30°$

খ প্রদত্ত চিত্রে, ΔABD–এ

$\tan 30° = \frac{AB}{BD}$

বা, $AB = \tan 30° \times BD$

$\therefore AB = \frac{1}{\sqrt{3}}(BC + CD) = \frac{1}{\sqrt{3}}(x + 96)$ [ধরি, BC = x] – (i)

আবার, ΔABC–এ $\tan 60° = \frac{AB}{BC} = \frac{AB}{x}$

বা, $AB = x \tan 60° = \sqrt{3}x$ .... (ii)

(i) ও (ii) হতে পাই,

$\sqrt{3}x = \frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{96}{\sqrt{3}}$

বা, $\sqrt{3}x - \frac{1}{\sqrt{3}}x = \frac{96}{\sqrt{3}}$

বা, $x\left(\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{96}{\sqrt{3}}$

বা, $x\left(\frac{3 - 1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{96}{\sqrt{3}}$

বা, $x \times 2 = 96$

বা, $x = \frac{96}{2} = 48.$

$\therefore$ BC = 48 মিটার

$\therefore$ নির্ণেয় BC এর দৈর্ঘ্য 48 মিটার

গ ΔACD এর পরিসীমা = AC + CD + DA

ΔABC–এ $\cos 60° = \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{BC}{AC} = \frac{48}{AC}$

$\therefore AC = \frac{48}{\cos 60°} = \frac{48}{\frac{1}{2}} = 96.$

ΔABD–এ $\cos 30° = \frac{BD}{AD} = \frac{BC + CD}{AD} = \frac{48 + 96}{AD}$

$\therefore AD = \frac{144}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{288}{\sqrt{3}}$

$\therefore$ পরিসীমা $= 96 + 96 + \frac{288}{\sqrt{3}} = \frac{192\sqrt{3} + 288}{\sqrt{3}}$ মিটার

⏭ একাদশ অধ্যায় : বীজগণিতীয় অনুপাত ও সমানুপাত

(Algebraic Ratio and Proportion)

⏭ অনুশীলনী ১১.১

১. দুইটি বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে a মিটার এবং b মিটার হলে, তাদের ক্ষেত্রফলের অনুপাত কত?

সমাধান

১ম বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য = a মিটার

∴ ১ম বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $a \times a = a^2$ বর্গমিটার

২য় বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য = b মিটার

২য় বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $b \times b = b^2$ বর্গমিটার

এখন, $\dfrac{\text{১ম বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল}}{\text{২য় বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল}} = \dfrac{a^2}{b^2}$

∴ ১ম বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল : ২য় বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $a^2 : b^2$

২. একটি বৃত্তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল একটি বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান হলে, তাদের পরিসীমার অনুপাত নির্ণয় কর।

সমাধান মনে করি, বৃত্তের ব্যাসার্ধ r একক এবং বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্য a একক।
জানা আছে, বৃত্তের ক্ষেত্রফল = πr^2, যেখানে r = বৃত্তের ব্যাসার্ধ বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = a^2, যেখানে a = বর্গক্ষেত্রের একবাহু

∴ প্রশ্নমতে, $\pi r^2 = a^2$

বা, $\dfrac{r^2}{a^2} = \dfrac{1}{\pi}$

বা, $\dfrac{r}{a} = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$ .... (i)

আবার, জানা আছে,

বৃত্তের পরিসীমা = $2\pi r$

এবং বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা = 4a

$\dfrac{\text{বৃত্তের পরিসীমা}}{\text{বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা}} = \dfrac{2\pi r}{4a} = \dfrac{\pi r}{2a}$

$= \dfrac{\pi}{2} \times \dfrac{r}{a} = \dfrac{\pi}{2} \times \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$

∴ নির্ণেয় বৃত্তের পরিসীমা : বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা = $\sqrt{\pi} : 2$

৩. দুইটি সংখ্যার অনুপাত 3 : 4 এবং তাদের ল.সা.গু. 180; সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

সমাধান মনেকরি, সংখ্যা দুটি 3x এবং 4x [x অনুপাতের সাধারণ রাশি]

3x এবং 4x এর ল.সা.গু. = $3 \times 4 \times x = 12x$

প্রশ্নমতে, 12x = 180

বা, $x = \dfrac{180}{12}$

∴ x = 15

∴ ১ম সংখ্যা = $3x = 3 \times 15 = 45$

এবং ২য় সংখ্যা = $4x = 4 \times 15 = 60$

৪. একদিন তোমাদের ক্লাসে দেখা গেল অনুপস্থিত ও উপস্থিত ছাত্র সংখ্যার অনুপাত 1 : 4, অনুপস্থিত ছাত্র সংখ্যাকে মোট ছাত্র সংখ্যার শতকরায় প্রকাশ কর।

সমাধান অনুপস্থিত ছাত্রসংখ্যা : উপস্থিত ছাত্রসংখ্যা = 1 : 4

∴ অনুপাতের রাশিদ্বয়ের সমষ্টি = 1 + 4 = 5

∴ অনুপস্থিত ছাত্রসংখ্যা মোট ছাত্র সংখ্যার = $\dfrac{1}{5}$ ভাগ

∴ অনুপস্থিত ছাত্রসংখ্যা মোট ছাত্রসংখ্যার শতকরা = $\left(\dfrac{1}{5} \times 100\right)$ %

= 20 ভাগ

৫. একটি দ্রব্য ক্রয় করে 28% ক্ষতিতে বিক্রয় করা হলো। বিক্রয়মূল্য ও ক্রয়মূল্যের অনুপাত নির্ণয় কর।

সমাধান মনে করি, দ্রব্যটির ক্রয়মূল্য = x টাকা

তাহলে, ক্ষতি = x টাকার ২৮%

$= x$ এর $\dfrac{28}{100}$ টাকা $= \dfrac{7x}{25}$ টাকা

∴ বিক্রয়মূল্য = $\left(x - \dfrac{7x}{25}\right)$ টাকা

$= \left(\dfrac{25x - 7x}{25}\right)$ টাকা $= \dfrac{18x}{25}$ টাকা

∴ বিক্রয়মূল্য : ক্রয়মূল্য = $\dfrac{18x}{25} : x$

= 18x : 25x [পূর্ব ও উত্তর রাশিকে ২৫ দ্বারা গুণ করে]

= 18 : 25 [পূর্ব ও উত্তর রাশিকে x দ্বারা ভাগ করে]

৬. পিতা ও পুত্রের বর্তমান বয়সের সমষ্টি 70 বছর। তাদের বয়সের অনুপাত 7 বছর পূর্বে ছিল 5 : 2। 5 বছর পরে তাদের বয়সের অনুপাত কত হবে?

সমাধান মনে করি,

7 বছর পূর্বে পিতার বয়স ছিল 5k বছর এবং পুত্রের বয়স ছিল 2k বছর।
[এখানে k ধনাত্মক আনুপাতিক ধ্রুবক]

∴ বর্তমানে পিতার বয়স = (5k + 7) বছর

এবং বর্তমানে পুত্রের বয়স = (2k + 7) বছর

বর্তমানে পিতা ও পুত্রের বয়সের সমষ্টি = {(5k + 7) + (2k + 7)} বছর

= (5k + 7 + 2k + 7) বছর

= (7k + 14) বছর

প্রশ্নমতে, 7k + 14 = 70

বা, 7 (k + 2) = 70

বা, $k + 2 = \dfrac{70}{7}$

বা, k + 2 = 10

বা, k = 10 − 2

বা, k = 8

∴ পিতার বর্তমান বয়স $(5 \times 8 + 7)$ বছর

= (40 + 7) বছর

= 47 বছর

এবং পুত্রের বর্তমান বয়স $(2 \times 8 + 7)$ বছর

= (16 + 7) বছর

= 23 বছর

5 বছর পর পিতার বর্তমান বয়স (47 + 5) বছর

= 52 বছর

এবং 5 বছর পর পুত্রের বর্তমান বয়স (23 + 5) বছর

= 28 বছর

5 বছর পর পিতা ও পুত্রের বর্তমান বয়সের অনুপাত 52 : 28

= 13 : 4 [4 দ্বারা ভাগ করে]

∴ 5 বছর পরে পিতা ও পুত্রের বয়সের অনুপাত হবে 13 : 7.

৭. যদি a : b = b : c হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

(i) $\dfrac{a}{c} = \dfrac{a^2 + b^2}{b^2 + c^2}$

সমাধান দেওয়া আছে,

a : b = b : c

বা, $\dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{c}$

∴ $b^2 = ac$

ডানপক্ষ $= \dfrac{a^2 + b^2}{b^2 + c^2}$

$= \dfrac{a^2 + ac}{ac + c^2}$ [∵ $b^2 = ac$]

$= \dfrac{a(a + c)}{c(a + c)} = \dfrac{a}{c}$ = বামপক্ষ

∴ $\dfrac{a}{c} = \dfrac{a^2 + b^2}{b^2 + c^2}$ (প্রমাণিত)

(ii) $a^2b^2c^2\left(\dfrac{1}{a^3} + \dfrac{1}{b^3} + \dfrac{1}{c^3}\right) = a^3 + b^3 + c^3$

সমাধান দেওয়া আছে, a : b = b : c

বা, $\dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{c}$

∴ $b^2 = ac$

বামপক্ষ $= a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)$

$= \frac{a^2b^2c^2}{a^3}+\frac{a^2b^2c^2}{b^3}+\frac{a^2b^2c^2}{c^3}$

$= \frac{b^2c^2}{a}+\frac{a^2c^2}{b}+\frac{a^2b^2}{c}$

$= \frac{ac.c^2}{a}+\frac{(ac)^2}{b}+\frac{a^2.ac}{c} = c^3+\frac{(b^2)^2}{b}+a^3$

$= c^3+\frac{b^4}{b}+a^3 = a^3+b^3+c^3 =$ ডানপক্ষ

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ

অর্থাৎ, $a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right) = a^3+b^3+c^3$ (প্রমাণিত)

(iii) $\frac{abc(a+b+c)^3}{(ab+bc+ca)^3} = 1$

সমাধান : দেওয়া আছে, $a : b = b : c$

ধরি, $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = k$ আবার,

$\therefore \frac{b}{c} = k$ বা, $\frac{a}{b} = k$

বা, $b = ck$ বা, $a = bk$

বা, $a = ck.k$ [$\because b = ck$]

বা, $a = ck^2$

বামপক্ষ $= \frac{abc(a+b+c)^3}{(ab+bc+ca)^3}$

$= \frac{ck^2.ck.c(ck^2+ck+c)^3}{(ck^2.ck+ck.c+c.ck^2)^3}$

$= \frac{c^3k^3\{c(k^2+k+1)\}^3}{(c^2k^3+c^2k^2+c^2k)^3}$

$= \frac{c^3k^3.c^3(k^2+k+1)^3}{\{c^2k(k^2+k+1)\}^3}$

$= \frac{c^6k^3(k^2+k+1)^3}{c^6k^3(k^2+k+1)^3} = 1 =$ ডানপক্ষ

$\therefore \frac{abc(a+b+c)^3}{(ab+bc+ca)^3} = 1$ (প্রমাণিত)

৮. সমাধান কর :

(i) $\frac{1-\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}} = \frac{1}{3}$

সমাধান দেওয়া আছে,

$\frac{1-\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}} = \frac{1}{3}$

বা, $\frac{1-\sqrt{1-x}+1+\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{1-x}-1-\sqrt{1-x}} = \frac{1+3}{1-3}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2}{-2\sqrt{1-x}} = \frac{4}{-2}$

বা, $\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 2$

বা, $\frac{1}{1-x} = 4$ [বর্গ করে]

বা, $4(1-x) = 1$

বা, $1-x = \frac{1}{4}$

বা, $1-\frac{1}{4} = x$

বা, $x = \frac{4-1}{4}$ $\therefore x = \frac{3}{4}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $x = \frac{3}{4}$

(ii) $\frac{a+x-\sqrt{a^2-x^2}}{a+x+\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{b}{x}$

সমাধান দেওয়া আছে,

$\frac{a+x-\sqrt{a^2-x^2}}{a+x+\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{b}{x}$

বা, $\frac{a+x-\sqrt{a^2-x^2}+a+x+\sqrt{a^2-x^2}}{a+x-\sqrt{a^2-x^2}-a-x-\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{b+x}{b-x}$

[যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2a+2x}{-2\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{b+x}{b-x}$

বা, $\frac{2(a+x)}{-2\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{b+x}{b-x}$

বা, $\frac{a+x}{-\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{b+x}{b-x}$

বা, $\left(\frac{a+x}{-\sqrt{a^2-x^2}}\right)^2 = \left(\frac{b+x}{b-x}\right)^2$ [বর্গ করে]

বা, $\frac{(a+x)^2}{a^2-x^2} = \frac{(b+x)^2}{(b-x)^2}$

বা, $\frac{a^2+2ax+x^2}{a^2-x^2} = \frac{b^2+2bx+x^2}{b^2-2bx+x^2}$

বা, $\frac{a^2+2ax+x^2+a^2-x^2}{a^2+2ax+x^2-a^2+x^2} = \frac{b^2+2bx+x^2+b^2-2bx+x^2}{b^2+2bx+x^2-b^2+2bx-x^2}$

[যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2a^2+2ax}{2x^2+2ax} = \frac{2b^2+2x^2}{4bx}$

বা, $\frac{2(a^2+ax)}{2(x^2+ax)} = \frac{2(b^2+x^2)}{2.2bx}$

বা, $\frac{a^2+ax}{x^2+ax} = \frac{b^2+x^2}{2bx}$

বা, $\frac{a^2+ax}{x(x+a)} = \frac{b^2+x^2}{2b.x}$

বা, $\frac{a^2+ax}{x+a} = \frac{b^2+x^2}{2b}$ [x দ্বারা গুণ করে, $\because x \neq 0$]

বা, $\frac{a(a+x)}{x+a} = \frac{b^2+x^2}{2b}$

বা, $a = \frac{b^2+x^2}{2b}$

বা, $b^2+x^2 = 2ab$

বা, $x^2 = 2ab-b^2$

$\therefore x = \pm\sqrt{2ab-b^2}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $x = \pm\sqrt{2ab-b^2}$

(iii) $81\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^3 = \frac{1+x}{1-x}$

সমাধান দেওয়া আছে,

$81\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^3 = \frac{1+x}{1-x}$

বা, $81.\frac{(1-x)^3}{(1+x)^3} = \frac{1+x}{1-x}$

বা, $81.(1-x)^4 = (1+x)^4$

বা, $81 = \frac{(1+x)^4}{(1-x)^4}$

বা, $\frac{(1+x)^4}{(1-x)^4} = 81$

বা, $\left\{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2\right\}^2 = 81$

বা, $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2 = 9$ [বর্গমূল করে]

বা, $\frac{1+x}{1-x} = \pm 3$

এখন, $\frac{1+x}{1-x} = 3$ হলে,

বা, $1+x = 3-3x$

বা, $x+3x = 3-1$

বা, $4x = 2$

বা, $x = \frac{2}{4}$

$\therefore x = \frac{1}{2}$

অথবা, $\frac{1+x}{1-x} = -3$

বা, $1 + x = -3 + 3x$

বা, $x - 3x = -3 - 1$

বা, $-2x = -4$

বা, $x = \frac{-4}{-2}$

$\therefore x = 2$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $x = 2, \frac{1}{2}$

৯. $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$ হলে, দেখাও যে,

(i) $\frac{a^3+b^3}{b^3+c^3} = \frac{b^3+c^3}{c^3+d^3}$

সমাধান ধরে নিই, $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = k$

বা, $a = bk$ $b = ck$ $c = dk$

$= dk^2.k$ $= dk.k$

$= dk^3$ $= dk^2$

এখন, বামপক্ষ $= \frac{a^3+b^3}{b^3+c^3}$

$= \frac{(dk^3)^3 + (dk^2)^3}{(dk^2)^3 + (dk)^3}$

$= \frac{d^3k^9 + d^3k^6}{d^3k^6 + d^3k^3}$

$= \frac{d^3k^6(k^3+1)}{d^3k^3(k^3+1)}$

$= k^3$

ডানপক্ষ $= \frac{b^3+c^3}{c^3+d^3}$

$= \frac{(dk^2)^3 + (dk)^3}{(dk)^3 + d^3}$

$= \frac{d^3k^6 + d^3k^3}{d^3k^3 + d^3}$

$= \frac{d^3k^3(k^3+1)}{d^3(k^3+1)}$

$= k^3$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ

অর্থাৎ, $\frac{a^3+b^3}{b^3+c^3} = \frac{b^3+c^3}{c^3+d^3}$ (প্রমাণিত)

(ii) $(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2) = (ab+bc+cd)^2$

সমাধান ধরে নিই, $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = k$

এখানে, $\frac{c}{d} = k \therefore c = dk$

এবং $\frac{b}{c} = k \therefore b = ck = dk.k = dk^2$

আবার $\frac{a}{b} = k \therefore a = bk = dk^2.k = dk^3$

$\therefore$ বামপক্ষ $= (a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)$

$= \{(dk^3)^2 + (dk^2)^2 + (dk)^2\}\{(dk^2)^2 + (dk)^2 + d^2\}$

$= (d^2k^6 + d^2k^4 + d^2k^2)(d^2k^4 + d^2k^2 + d^2)$

$= d^2k^2(k^4+k^2+1).d^2(k^4+k^2+1)$

$= d^4k^2(k^4+k^2+1)^2$

এবং ডানপক্ষ $= (ab+bc+cd)^2$

$= (dk^3.dk^2 + dk^2.dk + dk.d)^2$

$= (d^2k^5 + d^2k^3 + d^2k)^2$

$= \{d^2k(k^4+k^2+1)\}^2$

$= d^4k^2(k^4+k^2+1)^2$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ

অর্থাৎ, $(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2) = (ab+bc+cd)^2$ (প্রমাণিত)

১০. $x = \frac{4ab}{a+b}$ হলে, দেখাও যে, $\frac{x+2a}{x-2a} + \frac{x+2b}{x-2b} = 2$,

সমাধান দেওয়া আছে, $x = \frac{4ab}{a+b}$

বা, $\frac{x}{2a} = \frac{2a \times 2b}{2a(a+b)}$ [উভয়পক্ষকে $\frac{1}{2a}$ দ্বারা গুণ করে]

বা, $\frac{x}{2a} = \frac{2b}{a+b}$

বা, $\frac{x+2a}{x-2a} = \frac{2b+a+b}{2b-a-b}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{x+2a}{x-2a} = \frac{3b+a}{b-a}$ ....(i)

আবার, $\frac{x}{2a} = \frac{2b}{a+b}$

বা, $\frac{x}{2b} = \frac{2a}{a+b}$ [একান্তরকরণ করে]

বা, $\frac{x+2b}{x-2b} = \frac{2a+a+b}{2a-a-b}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{x+2b}{x-2b} = \frac{3a+b}{a-b}$ ....(ii)

এখন, (i) ও (ii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

$\frac{x+2a}{x-2a} + \frac{x+2b}{x-2b}$

$= \frac{3b+a}{b-a} + \frac{3a+b}{a-b}$

$= \frac{3b+a}{b-a} - \frac{3a+b}{b-a}$

$= \frac{3b+a-3a-b}{b-a}$

$= \frac{2b-2a}{b-a} = \frac{2(b-a)}{b-a} = 2$

$\therefore \frac{x+2a}{x-2a} + \frac{x+2b}{x-2b} = 2$ (দেখানো হলো)

১১. $x = \frac{\sqrt[3]{m+1} + \sqrt[3]{m-1}}{\sqrt[3]{m+1} - \sqrt[3]{m-1}}$ হলে,

প্রমাণ কর যে, $x^3 - 3mx^2 + 3x - m = 0$

সমাধান দেওয়া আছে, $x = \frac{\sqrt[3]{m+1} + \sqrt[3]{m-1}}{\sqrt[3]{m+1} - \sqrt[3]{m-1}}$

বা, $\frac{x+1}{x-1} = \frac{\sqrt[3]{m+1} + \sqrt[3]{m-1} + \sqrt[3]{m+1} - \sqrt[3]{m-1}}{\sqrt[3]{m+1} + \sqrt[3]{m-1} - \sqrt[3]{m+1} + \sqrt[3]{m-1}}$ [যোজন-

বা, $\frac{x+1}{x-1} = \frac{2\sqrt[3]{m+1}}{2\sqrt[3]{m-1}}$

বা, $\frac{x+1}{x-1} = \frac{\sqrt[3]{m+1}}{\sqrt[3]{m-1}}$

বা, $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 = \left(\frac{\sqrt[3]{m+1}}{\sqrt[3]{m-1}}\right)^3$ [উভয় পক্ষকে ঘন করে]

বা, $\frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^3-3x^2+3x-1} = \frac{m+1}{m-1}$

বা, $\frac{x^3+3x^2+3x+1+x^3-3x^2+3x-1}{x^3+3x^2+3x+1-x^3+3x^2-3x+1} = \frac{m+1+m-1}{m+1-m+1}$

[যোজন-

বা, $\frac{2x^3+6x}{6x^2+2}=\frac{2m}{2}$

বা, $\frac{2(x^3+3x)}{2(3x^2+1)}=m$

বা, $\frac{x^3+3x}{3x^2+1}=m$

বা, $x^3+3x=3mx^2+m$ [বজ্রগুণন করে]

বা, $x^3-3mx^2+3x-m=0$

$\therefore x^3-3mx^2+3x-m=0$ (প্রমাণিত)

১২. $x=\frac{\sqrt{2a+3b}+\sqrt{2a-3b}}{\sqrt{2a+3b}-\sqrt{2a-3b}}$ হলে, দেখাও যে, $3bx^2-4ax+3b=0$

সমাধান দেওয়া আছে, $x=\frac{\sqrt{2a+3b}+\sqrt{2a-3b}}{\sqrt{2a+3b}-\sqrt{2a-3b}}$

বা, $\frac{x+1}{x-1}=\frac{\sqrt{2a+3b}+\sqrt{2a-3b}+\sqrt{2a+3b}-\sqrt{2a-3b}}{\sqrt{2a+3b}+\sqrt{2a-3b}-\sqrt{2a+3b}+\sqrt{2a-3b}}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{x+1}{x-1}=\frac{2\sqrt{2a+3b}}{2\sqrt{2a-3b}}$

বা, $\frac{(x+1)^2}{(x-1)^2}=\frac{(\sqrt{2a+3b})^2}{(\sqrt{2a-3b})^2}$ [বর্গ করে]

বা, $\frac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1}=\frac{2a+3b}{2a-3b}$

বা, $\frac{x^2+2x+1+x^2-2x+1}{x^2+2x+1-x^2+2x-1}=\frac{2a+3b+2a-3b}{2a+3b-2a+3b}$ [পুনঃ যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2x^2+2}{4x}=\frac{4a}{6b}$

বা, $\frac{2(x^2+1)}{2.2x}=\frac{2\times 2a}{2\times 3b}$

বা, $\frac{x^2+1}{2x}=\frac{2a}{3b}$

বা, $3b(x^2+1)=4ax$ [বজ্রগুণন করে]

বা, $3bx^2+3b=4ax$

বা, $3bx^2-4ax+3b=0$

$\therefore 3bx^2-4ax+3b=0$ (দেখানো হলো)

১৩. $\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}=\frac{(a+b)^2}{(b+c)^2}$ হলে, প্রমাণ কর যে, a, b, c ক্রমিক সমানুপাতী।

সমাধান দেওয়া আছে, $\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}=\frac{(a+b)^2}{(b+c)^2}$

বা, $\frac{(b+c)^2}{b^2+c^2}=\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2}$ [একান্তরকরণ করে]

বা, $\frac{b^2+c^2+2bc}{b^2+c^2}=\frac{a^2+b^2+2ab}{a^2+b^2}$

বা, $\frac{b^2+c^2+2bc-b^2-c^2}{b^2+c^2}=\frac{a^2+b^2+2ab-a^2-b^2}{a^2+b^2}$ [বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2bc}{b^2+c^2}=\frac{2ab}{a^2+b^2}$

বা, $\frac{2bc}{2ab}=\frac{b^2+c^2}{a^2+b^2}$ [পুনঃ একান্তরকরণ করে]

বা, $\frac{c}{a}=\frac{b^2+c^2}{a^2+b^2}$

বা, $a^2c+b^2c=ab^2+ac^2$ [বজ্রগুণন করে]

বা, $a^2c-ac^2=ab^2-b^2c$

বা, $ac(a-c)=b^2(a-c)$

বা, $ac=\frac{b^2(a-c)}{(a-c)}$

বা, $ac=b^2$

বা, $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$

বা, $a:b=b:c$

$\therefore$ a, b, c ক্রমিক সমানুপাতী (প্রমাণিত)

১৪. $\frac{x}{b+c}=\frac{y}{c+a}=\frac{z}{a+b}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{a}{y+z-x}=\frac{b}{z+x-y}=\frac{c}{x+y-z}$

সমাধান মনে করি, $\frac{x}{b+c}=\frac{y}{c+a}=\frac{z}{a+b}=k$

$\therefore \frac{x}{b+c}=k$

বা, $x=k(b+c)$

আবার, $\frac{y}{c+a}=k$

বা, $y=k(c+a)$

আবার, $\frac{z}{a+b}=k$

বা, $z=k(a+b)$

এখন, $y+z-x=k(c+a)+k(a+b)-k(b+c)$
$=k(c+a+a+b-b-c)$
$=2ak$

$\therefore \frac{a}{y+z-x}=\frac{a}{2ak}=\frac{1}{2k}$

আবার, $z+x-y=k(a+b)+k(b+c)-k(c+a)$
$=k(a+b+b+c-c-a)$
$=2bk$

$\therefore \frac{b}{z+x-y}=\frac{b}{2bk}=\frac{1}{2k}$

এবং $x+y-z=k(b+c)+k(c+a)-k(a+b)$
$=k(b+c+c+a-a-b)$
$=2kc$

$\therefore \frac{c}{x+y-z}=\frac{c}{2ck}=\frac{1}{2k}$

$\therefore \frac{a}{y+z-x}=\frac{b}{z+x-y}=\frac{c}{x+y-z}$ (প্রমাণিত)

১৫. $\frac{bz-cy}{a}=\frac{cx-az}{b}=\frac{ay-bx}{c}$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$

সমাধান মনে করি, $\frac{bz-cy}{a}=\frac{cx-az}{b}=\frac{ay-bx}{c}=k$

$\therefore bz-cy=ak$ ....(i)

$cx-az=bk$ ....(ii)

$ay-bx=ck$ ....(iii)

এখন, (i), (ii) ও (iii) নং সমীকরণকে যথাক্রমে a, b, c দ্বারা গুণ করে পাই,

$abz-acy=a^2k$

$bcx-abz=b^2k$

$acy-bcx=c^2k$

[যোগ করে] $0=k(a^2+b^2+c^2)$

বা, $k(a^2+b^2+c^2)=0$

বা, $k=\frac{0}{a^2+b^2+c^2}$

বা, $k=0$

এখন, (i) নং সমীকরণে $k=0$ বসিয়ে পাই,

$bz-cy=a\times 0$

বা, $bz-cy=0$

বা, $bz=cy$

বা, $\frac{z}{c}=\frac{y}{b}$ .... (iv)

আবার, (ii) নং সমীকরণে $k=0$ বসিয়ে পাই,

$cx-az=b\times 0$

বা, $cx-az=0$

বা, $cx=az$

বা, $\frac{x}{a}=\frac{z}{c}$ .... (v)

(iv) ও (v) হতে পাই,

$\therefore \frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$ [প্রমাণিত]

১৬. $\frac{a+b-c}{a+b}=\frac{b+c-a}{b+c}=\frac{c+a-b}{c+a}$ এবং $a+b+c\neq 0$ হলে, প্রমাণ কর যে, $a=b=c$.

সমাধান দেওয়া আছে, $\frac{a+b-c}{a+b}=\frac{b+c-a}{b+c}=\frac{c+a-b}{c+a}$

$\therefore \frac{a+b-c}{a+b}=\frac{b+c-a}{b+c}$

বা, $\frac{a+b-c-a-b}{a+b}=\frac{b+c-a-b-c}{b+c}$ [বিয়োজন করে]

বা, $\frac{-c}{a+b}=\frac{-a}{b+c}$

বা, $\frac{c}{a+b}=\frac{a}{b+c}$ [−1 দ্বারা গুণ করে]

বা, $\frac{a+b+c}{a+b}=\frac{a+b+c}{b+c}$ [যোজন করে]

বা, $\frac{1}{a+b}=\frac{1}{b+c}$

[যেহেতু $a+b+c\neq 0$; সুতরাং উভয় পক্ষকে $(a+b+c)$ দ্বারা ভাগ করে]

বা, $a+b=b+c$

বা, $a=b+c-b$

বা, $a=c$ ....(i)

আবার, $\frac{b+c-a}{b+c}=\frac{c+a-b}{c+a}$

বা, $\frac{b+c-a-b-c}{b+c}=\frac{c+a-b-c-a}{c+a}$ [বিয়োজন করে]

বা, $\frac{-a}{b+c}=\frac{-b}{c+a}$

বা, $\frac{a}{b+c}=\frac{b}{c+a}$ [-1 দ্বারা গুণ করে]

বা, $\frac{a+b+c}{b+c}=\frac{a+b+c}{c+a}$ [যোজন করে]

বা, $\frac{1}{b+c}=\frac{1}{c+a}$

[$\because a+b+c\neq 0$ সুতরাং উভয় পক্ষকে $(a+b+c)$ দ্বারা ভাগ করে]

বা, $c+a=b+c$

বা, $a=b+c-c$

বা, $a=b$ ....(ii)

(i) ও (ii) হতে পাই,

$\therefore a=b=c$ (প্রমাণিত)

১৭. $\frac{x}{xa+yb+zc}=\frac{y}{ya+zb+xc}=\frac{z}{za+xb+yc}$ এবং $x+y+z\neq 0$ হলে, দেখাও যে, প্রতিটি অনুপাত $=\frac{1}{a+b+c}$

সমাধান মনে করি, $\frac{x}{xa+yb+zc}=\frac{y}{ya+zb+xc}=\frac{z}{za+xb+yc}=k$

$\therefore x=k(xa+yb+zc)$.......... (i)

$y=k(ya+zb+xc)$.............(ii)

$z=k(za+xb+yc)$.............(iii)

এখন, (i), (ii)ও (iii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

$x+y+z=k(xa+yb+zc+ya+zb+xc+za+xb+yc)$

বা, $x+y+z=k(xa+xb+xc+ya+yb+yc+za+zb+yc)$

বা, $x+y+z=k\{x(a+b+c)+y(a+b+c)+z(a+b+c)\}$

বা, $x+y+z=k(a+b+c)(x+y+z)$

বা, $k(a+b+c)(x+y+z)=x+y+z$

বা, $k(a+b+c)=\frac{x+y+z}{x+y+z}$

বা, $k(a+b+c)=1$

বা, $k=\frac{1}{a+b+c}$

যেহেতু প্রতিটি অনুপাতের মান k ধরা হয়েছে,

$\therefore$ প্রতিটি অনুপাতের মান $=\frac{1}{a+b+c}$ (দেখানো হলো)

১৮. যদি $(a+b+c)p=(b+c-a)q=(c+a-b)r=(a+b-$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{q}+\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=\frac{1}{p}$

সমাধান মনে করি, $(a+b+c)p=(b+c-a)q=(c+a-b)r=$
$(a+b-c)s=k$

$\therefore (a+b+c)p=k$

বা, $a+b+c=\frac{k}{p}$

বা, $\frac{k}{p}=a+b+c$

$\therefore \frac{1}{p}=\frac{a+b+c}{k}$ [উভয়পক্ষকে k দ্বারা ভাগ করে]

এবং $(b+c-a)q=k$

বা, $b+c-a=\frac{k}{q}$

বা, $\frac{k}{q}=b+c-a$

$\therefore \frac{1}{q}=\frac{b+c-a}{k}$ [উভয়পক্ষকে k দ্বারা ভাগ করে]

এবং $(c+a-b)r=k$

বা, $c+a-b=\frac{k}{r}$

বা, $\frac{k}{r}=c+a-b$

$\therefore \frac{1}{r}=\frac{c+a-b}{k}$ [উভয়পক্ষকে k দ্বারা ভাগ করে]

এবং $(a+b-c)s=k$

বা, $a+b-c=\frac{k}{s}$

বা, $\frac{k}{s}=a+b-c$

$\therefore \frac{1}{s}=\frac{a+b-c}{k}$ [উভয়পক্ষকে k দ্বারা ভাগ করে]

এখন, বামপক্ষ $=\frac{1}{q}+\frac{1}{r}+\frac{1}{s}$

$=\frac{b+c-a}{k}+\frac{c+a-b}{k}+\frac{a+b-c}{k}$

$=\frac{b+c-a+c+a-b+a+b-c}{k}=\frac{a+b+c}{k}=\frac{1}{p}$

= ডানপক্ষ

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ

অর্থাৎ $\frac{1}{q}+\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=\frac{1}{p}$ (প্রমাণিত)

১৯. যদি $lx=my=nz$ হয়, তবে দেখাও যে,
$\frac{x^2}{yz}+\frac{y^2}{zx}+\frac{z^2}{xy}=\frac{mn}{l^2}+\frac{nl}{m^2}+$

সমাধান মনে করি, $lx=my=nz=k$

$\therefore lx=k, my=k, nz=k$ বা, $x=\frac{k}{l}, y=\frac{k}{m}, z=\frac{k}{n}$

এখন, বামপক্ষ $=\frac{x^2}{yz}+\frac{y^2}{zx}+\frac{z^2}{xy}$

$=\frac{\left(\frac{k}{l}\right)^2}{\frac{k}{m}\times\frac{k}{n}}+\frac{\left(\frac{k}{m}\right)^2}{\frac{k}{n}\times\frac{k}{l}}+\frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2}{\frac{k}{l}\times\frac{k}{m}}=\frac{\frac{k^2}{l^2}}{\frac{k^2}{mn}}+\frac{\frac{k^2}{m^2}}{\frac{k^2}{ln}}+\frac{\frac{k^2}{n^2}}{\frac{k^2}{lm}}$

$=\left(\frac{k^2}{l^2}\times\frac{mn}{k^2}\right)+\left(\frac{k^2}{m^2}\times\frac{nl}{k^2}\right)+\left(\frac{k^2}{n^2}\times\frac{lm}{k^2}\right)$

$=\frac{mn}{l^2}+\frac{nl}{m^2}+\frac{lm}{n^2}=$ ডানপক্ষ

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ

অর্থাৎ $\frac{x^2}{yz}+\frac{y^2}{zx}+\frac{z^2}{xy}=\frac{mn}{l^2}+\frac{nl}{m^2}+\frac{lm}{n^2}$ (দেখানো হলো)

২০. যদি $\frac{p}{q}=\frac{a^2}{b^2}$ এবং $\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{a+q}}{\sqrt{a-q}}$ হয়, তবে দেখাও যে, $\frac{p+q}{a}=\frac{p-q}{q}$

সমাধান দেওয়া আছে, $\frac{p}{q} = \frac{a^2}{b^2}$ এবং $\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{a+q}}{\sqrt{a-q}}$

এখন, $\frac{p}{q} = \frac{a^2}{b^2}$

বা, $\frac{p+q}{p-q} = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$ [যোজন-বিয়োজন করে] .... (i)

আবার, $\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{a+q}}{\sqrt{a-q}}$

বা, $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{a+q}}{\sqrt{a-q}}\right)^2$ [বর্গ করে]

বা, $\frac{a^2}{b^2} = \frac{a+q}{a-q}$

বা, $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} = \frac{a+q+a-q}{a+q-a+q}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} = \frac{2a}{2q}$

বা, $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} = \frac{a}{q}$

এখন, $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$ এর মান (i) নং সমীকরণে বসাই,

$\frac{p+q}{p-q} = \frac{a}{q}$

বা, $\frac{p+q}{a} = \frac{p-q}{q}$ [একান্তরকরণ করে]

$\therefore \frac{p+q}{a} = \frac{p-q}{q}$ (দেখানো হলো)

▶▶ অনুশীলনী ১১.২

১. a, b, c ক্রমিক সমানুপাতী হলে নিচের কোনটি সঠিক?
ⓚ $a^2 = bc$ ● $b^2 = ac$ ⓖ $ab = bc$ ⓘ $a = b = c$

২. আরিফ ও আকিবের বয়সের অনুপাত 5 : 3; আরিফের বয়স 20 বছর হলে, কত বছর পর তাদের বয়সের অনুপাত 7 : 5 হবে?
ⓚ 5 বছর ⓛ 6 বছর ● 8 বছর ⓘ 10 বছর

➲ ΔABC এর কোণগুলোর অনুপাত 2 : 3 : 5 এবং ABCD চতুর্ভুজের কোণ চারটির অনুপাত 3 : 4 : 5 : 6; তথ্যের ভিত্তিতে ৩ ও ৪ নং প্রশ্নের উত্তর দাও।

৩. একটি বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য দ্বিগুণ হলে ক্ষেত্রফল কতগুণ বৃদ্ধি পাবে?
ⓚ ২ গুণ ● ৪ গুণ ⓖ ৮ গুণ ⓘ ৬ গুণ

৪. $x : y = 7 : 5, y : z = 5 : 7$ হলে $x : z$ = কত?
ⓚ 35 : 49 ● 35 : 35 ⓖ 25 : 44 ⓘ 49 : 25

৫. b, a, c ক্রমিক সমানুপাতী হলে —
i. $a^2 = bc$ ii. $\frac{b}{a} = \frac{c}{a}$ iii. $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+a}{c-a}$
নিচের কোনটি সঠিক?
ⓚ i ⓛ i ও ii ● i ও iii ⓘ i, ii ও iii

৬. $x:y = 2:1$ এবং $y:z = 2:1$ হলে —
i. x, y, z ক্রমিক সমানুপাতী ii. $z:x = 1:4$
iii. $y^2 + zx = 4yz$
নিচের কোনটি সঠিক?
ⓚ i ও ii ⓛ i ও iii ⓖ ii ও iii ● i, ii ও iii

৭. $\frac{a}{x} = \frac{m^2+n^2}{2mn}$ হলে, $\frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a-x}}$
ⓚ $\frac{m}{n}$ ● $\frac{m+n}{m-n}$ ⓖ $\frac{m-n}{m+n}$ ⓘ $\frac{n}{m}$

একটি ত্রিভুজের পরিসীমা 36 সে.মি. এবং বাহুগুলোর দৈর্ঘ্যের অনুপাত 3 : 4 : 5 হলে, নিচের (৮ ও ৯) নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

৮. ত্রিভুজটির বৃহত্তম বাহুর দৈর্ঘ্য কত সে.মি.?
ⓚ 5 ⓛ 9 ⓖ 12 ● 15

৯. ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল কত বর্গ সে.মি.?
ⓚ 6 ● 54 ⓖ 67 ⓘ 90

১০. 1 ঘন সে. মি. কাঠের ওজন 7 ডেসিগ্রাম। কাঠের ওজন সমআয়তন পানির ওজনের শতকরা কত ভাগ?

সমাধান দেওয়া আছে, 1 ঘন সেমি কাঠের ওজন
= 7 ডেসিগ্রাম
= 7 × 0.1 গ্রাম [∵ 1 ডেসিগ্রাম = 0.1 গ্রাম]
= 0.7 গ্রাম

আমরা জানি, 1 ঘন সেমি পানির ওজন 1 গ্রাম

∴ সম আয়তন কাঠের ওজন পানির ওজনের $= \frac{0.7}{1}$ ভাগ

∴ সমআয়তন কাঠের ওজন পানির ওজনের শতকরা $= \frac{0.7 \times 100}{1}$ ভাগ
= 70 ভাগ

১১. ক, খ, গ, ঘ এর মধ্যে 300 টাকা এমনভাবে ভাগ করে দাও যেন, ক এর অংশ : খ এর অংশ = 2 : 3, খ এর অংশ : গ এর অংশ = 1 : 2 এবং গ এর অংশ : ঘ এর অংশ = 3 : 2 হয়।

সমাধান ক এর অংশ : খ এর অংশ = 2 : 3

খ এর অংশ : গ এর অংশ = 1 : 2
= (1 × 3) : (2 × 3) [3 দ্বারা গুণ করে]
= 3 : 6

গ এর অংশ : ঘ এর অংশ = 3 : 2
= (3 × 2) : (2 × 2) [2 দ্বারা গুণ করে]
= 6 : 4

∴ ক এর অংশ : খ এর অংশ : গ এর অংশ : ঘ এর অংশ,
= 2 : 3 : 6 : 4

অনুপাতের রাশিগুলোর সমষ্টি = 2 + 3 + 6 + 4 = 15

∴ ক পায় $\left(300 \text{ Gi } \frac{2}{15} \text{ Ask}\right)$ টাকা = 40 টাকা।

খ পায় $\left(300 \text{ Gi } \frac{3}{15} \text{ Ask}\right)$ টাকা = 60 টাকা।

গ পায় $\left(300 \text{ Gi } \frac{6}{15} \text{ Ask}\right)$ টাকা = 120 টাকা।

ঘ পায় $\left(300 \text{ Gi } \frac{4}{15} \text{ Ask}\right)$ টাকা = 80 টাকা।

∴ ক, খ, গ ও ঘ পায়, 40 টাকা, 60 টাকা, 120 টাকা ও 80 টাকা।

১২. তিনজন জেলে 690 টি মাছ ধরেছে। তাদের অংশের অনুপাত $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}$ এবং $\frac{5}{6}$ হলে, কে কয়টি মাছ পেল?

সমাধান

তিনজন জেলের প্রাপ্ত মাছের অনুপাত $= \frac{2}{3} : \frac{4}{5} : \frac{5}{6}$
$= \left(\frac{2 \times 30}{3}\right) : \left(\frac{4 \times 30}{5}\right) : \left(\frac{5 \times 30}{6}\right)$
= 20 : 24 : 25

অনুপাতের রাশিগুলোর সমষ্টি = 20 + 24 + 25 = 69

∴ প্রথম জেলে পাবে $\left(690 \text{ এর } \frac{20}{69}\right)$ টি = 200 টি

∴ দ্বিতীয় জেলে পাবে $\left(690 \text{ এর } \frac{24}{69}\right)$ টি = 240 টি

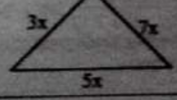
∴ তৃতীয় জেলে পাবে $\left(690 \text{ এর } \frac{25}{69}\right)$ টি = 250টি

সুতরাং প্রথম জেলে পাবে 200 টি, দ্বিতীয় জেলে পাবে 240 টি এবং তৃতীয় জেলে পাবে 250টি

১৩. একটি ত্রিভুজের পরিসীমা 45 সে. মি.। বাহুগুলোর দৈর্ঘ্যের অনুপাত 3: 5: 7 হলে, প্রত্যেক বাহুর পরিমাপ নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, ত্রিভুজের পরিসীমা = 45 সে.মি.

বাহুগুলোর দৈর্ঘ্যের অনুপাত = 3 : 5 : 7



প্রত্যেক বাহুর পরিমাণ নির্ণয় :
ধরি, বাহুত্রয়ের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 3x, 5x এবং 7x সে.মি.
∴ পরিসীমা = 3x + 5x + 7x = 15x সে.মি.
প্রশ্নমতে, 15x = 45

বা, $x = \frac{45}{15} = 3$

বা, x = 3

∴ x = 3

∴ ১ম বাহুর দৈর্ঘ্য = 3x সে.মি.
= 3 × 3 "
= 9 সে.মি.

২য় বাহুর দৈর্ঘ্য = 5x সে.মি.
= 5 × 3 " = 15 সে.মি.

৩য় বাহুর দৈর্ঘ্য = 7x সে.মি. = 7 × 3 " = 21 সে.মি.

∴ ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 9 সে.মি., 15 সে.মি. এবং 21 সে.মি.।

১৪. দুইটি সংখ্যার অনুপাত 5 : 7 এবং তাদের গ.সা.গু. 4 হলে, সংখ্যা দুইটির ল.সা.গু. কত?

সমাধান দেওয়া আছে, সংখ্যা দুটির অনুপাত = 5 : 6
মনে করি, সংখ্যা দুটি 5x ও 7x
5x ও 7x গ. সা. গু. = x
প্রশ্নমতে, x = 4
5x ও 7x এর ল. সা. গু. = 35x
= 35 × 4 [∴ x = 4]
= 140

∴ সংখ্যা দুটির ল. সা. গু. 140

১৫. ক্রিকেট খেলায় সাকিব, মুশফিকুর ও মাশরাফী 171 রান করলো। সাকিব ও মুশফিকুরের এবং মুশফিকুর ও মাশরাফীর রানের অনুপাত 3 : 2 হলে কে কত রান করেছে?

সমাধান সাকিব রান : মুশফিকের রান = 3 : 2
= (3 ×3) : (2 × 3)
[অনুপাতের রাশিদ্বয়কে 3 দ্বারা গুণ করে]
= 9 : 6

মুশফিকের রান : মাশরাফির রান = 3 : 2
= (3 × 2) : (2 × 2)
[অনুপাতের রাশিদ্বয়কে 2 দ্বারা গুণ করে]
= 6 : 4

∴ সাকিবের রান : মুশফিকের রান : মাশরাফির রান = 9 : 6 : 4
অনুপাতের রাশিগুলোর সমষ্টি = 9 + 6 + 4 = 19

∴ সাকিব করে $\left(171 \text{ এর } \frac{9}{19}\right)$ রান = 81 রান।

মুশফির করে $\left(171 \text{ এর } \frac{6}{19}\right)$ রান = 54 রান।

মাশরাফি করে $\left(171 \text{ এর } \frac{4}{19}\right)$ এর = 36 রান।

∴ সাকিব, মুশফিক ও মাশরাফির রান যথাক্রমে 81, 54, ও 36।

১৬. একটি অফিসে 2 জন কর্মকর্তা, 7 জন করণিক এবং 3 জন পিওন আছে। একজন পিওন 1 টাকা পেলে একজন করণিক পায় 2 টাকা, একজন কর্মকর্তা পায় 4 টাকা। তাদের সকলের মোট বেতন 150,000 টাকা হলে, কে কত বেতন পায়?

সমাধান একজন পিওন, একজন করণিক ও একজন কর্মকর্তা বেতনের অনুপাত = 1 : 2 : 4
অফিসে 3 জন পিওন, 7 জন করণিক ও 2 জন কর্মকর্তা আছে।
∴ পিওন, করণিক ও কর্মকর্তার সংখ্যা সমতুল্য বেতনের অনুপাত = (1 × 3) : (2 × 7) : (4 × 2) = 3 : 14 : 8
অনুপাতের রাশিগুলোর সমষ্টি = 3 + 14 + 8 = 25

∴ 1 জন পিওনের বেতন = $\left(\frac{150000 \times 3}{25 \times 3}\right)$ টাকা = 6,000 টাকা।

1 জন করণিকের বেতন = $\left(\frac{150000 \times 14}{25 \times 7}\right)$ টাকা = 12,000 টাকা।

1 জন কর্মকর্তার বেতন = $\left(\frac{150000 \times 8}{25 \times 2}\right)$ টাকা = 24,000 টাকা।

∴ কর্মকর্তা, করণিক ও পিওনের বেতন যথাক্রমে 6,000 টাকা, 12,000 টাকা ও 24,000 টাকা।

১৭. যদি কোনো বর্গক্ষেত্রের বাহুর পরিমাণ 20% বৃদ্ধি পায়, তবে ক্ষেত্রফল শতকরা কত বৃদ্ধি পাবে?

সমাধান মনে করি, বর্গক্ষেত্রের প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য x একক
∴ বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = x^2 বর্গ একক
এখন, বর্গক্ষেত্রের প্রত্যেক বাহুর বৃদ্ধির পরিমাণ
= x এর 20% = $\left(x \times \frac{20}{100}\right)$ একক = $\frac{x}{5}$ একক

∴ বৃদ্ধিপ্রাপ্ত বাহুর পরিমাণ = $\left(x + \frac{x}{5}\right)$ একক = $\frac{6x}{5}$ একক

এক্ষেত্রে, বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $\left(\frac{6x}{5}\right)^2$ বর্গ একক = $\frac{36x^2}{25}$ বর্গ একক

আবার, নতুন বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল বৃদ্ধি = $\left(\frac{36x^2}{25} - x^2\right)$ বর্গ একক
= $\left(\frac{36x^2 - 25x^2}{25}\right)$ বর্গ একক
= $\frac{11x^2}{25}$ বর্গ একক

∴ শতকরা ক্ষেত্রফল বৃদ্ধি = $\left(\frac{\text{মোট বৃদ্ধি}}{\text{পূর্বের ক্ষেত্রফল}} \times 100\right)\%$

$= \left(\frac{\frac{11x^2}{25}}{x^2} \times 100\right)\%$

$= \left(\frac{11x^2}{25} \times \frac{1}{x^2} \times 100\right)\%$

∴ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল বৃদ্ধি পায় 44 %

১৮. একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 10% বৃদ্ধি এবং প্রস্থ 10% হ্রাস পেলে আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল শতকরা কত বৃদ্ধি বা হ্রাস পাবে?

সমাধান মনে করি, আয়তক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য x একক এবং প্রস্থ y একক
∴ আয়তক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল xy বর্গ একক
10% বৃদ্ধি পাওয়ায়,
নতুন আয়তক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য = (x + x এর 10%) একক

$= \left(x + \frac{10x}{100}\right)$ একক

$= \left(x + \frac{x}{10}\right)$ একক

$= \frac{10x + x}{10}$ একক $= \frac{11x}{10}$ একক

10% হ্রাস পাওয়ায়,
নতুন আয়তক্ষেত্রের প্রস্থ = $\left(y - y \text{ Gi } \frac{10}{100}\right)$ একক

$= \left(y - \frac{10y}{100}\right)$ একক

$= \left(y - \frac{y}{10}\right)$ একক

$= \frac{10y - y}{10} = \frac{9y}{10}$ একক

∴ নতুন আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $\left(\frac{11x}{10} \times \frac{9y}{10}\right)$ বর্গ একক
$= \frac{99xy}{100}$ বর্গ একক

যেহেতু, $xy > \frac{99xy}{100}$ বর্গ একক

সুতরাং, ক্ষেত্রফল হ্রাস পায় = $\left(xy - \frac{99xy}{100}\right)$ বর্গ একক

$= \frac{100xy - 99xy}{100} = \frac{xy}{100}$ বর্গ একক

∴ ক্ষেত্রফল শতকরা হ্রাস পায় = $\left(\frac{\frac{xy}{100}}{xy} \times 100\right)\%$

$= \left(\frac{xy}{100} \times \frac{1}{xy} \times 100\right)\% = 1\%$

∴ ক্ষেত্রফল 1% হ্রাস পায়।

১৯. একটি মাঠের জমিতে সেচের সুযোগ আসার আগের ও পরের ফলনের অনুপাত 4 : 7. ঐ মাঠে যে জমিতে আগে 304 কুইন্টাল ধান ফলতো, সেচ পাওয়ার পরে তার ফলন কত হবে?

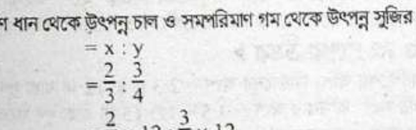
সমাধান দেওয়া আছে,
সেচহীন ফলন : সেচে ফলন = 4 : 7
সেচ দেওয়ার পর ফলন নির্ণয় :
মনে করি, আগের ফলন = 4x কুইন্টাল
তাহলে, সেচের পর ফলন = 7x "
প্রশ্নমতে, $4x = 304$
বা, $x = \frac{304}{4}$
বা, $x = 76$
$\therefore x = 76$
$\therefore$ সেচের পর ফলন = $7x = 7 \times 76 = 532$ কুইন্টাল

২০. ধান ও ধান থেকে উৎপন্ন চালের অনুপাত 3 : 2 এবং গম ও গম থেকে উৎপন্ন সুজির অনুপাত 4 : 3 হলে, সমান পরিমাণের ধান ও গম থেকে উৎপন্ন চাল ও সুজির অনুপাত বের কর।

সমাধান মনে করি, 1 কুইন্টাল ধান থেকে উৎপন্ন হয় x কুইন্টাল চাল এবং 1 কুইন্টাল গম থেকে উৎপন্ন হয় y কুইন্টাল সুজি।
প্রশ্নমতে, $1 : x = 3 : 2$
বা, $\frac{1}{x} = \frac{3}{2}$
বা, $3x = 2$
$\therefore x = \frac{2}{3}$
আবার, $1 : y = 4 : 3$
বা, $\frac{1}{y} = \frac{4}{3}$
বা, $4y = 3$
$\therefore y = \frac{3}{4}$
$\therefore$ সমপরিমাণ ধান থেকে উৎপন্ন চাল ও সমপরিমাণ গম থেকে উৎপন্ন সুজির অনুপাত
$= x : y$
$= \frac{2}{3} : \frac{3}{4}$
$= \frac{2}{3} \times 12 : \frac{3}{4} \times 12$ [3 ও 4 এর ল.সা.গু. 12 দ্বারা গুণ করে]
$= (2 \times 4) : (3 \times 4)$
$= 8 : 9$

২১. একটি জমির ক্ষেত্রফল 432 বর্গমিটার। ঐ জমির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের সঙ্গে অপর একটি জমির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের অনুপাত যথাক্রমে 3 : 4 এবং 2 : 5 হলে, অপর জমির ক্ষেত্রফল কত?

সমাধান দেওয়া আছে,
১ম জমির ক্ষেত্রফল = 432 বর্গমিটার
১ম জমির দৈর্ঘ্য : ২য় জমির দৈর্ঘ্য = 3 : 4
১ম জমির প্রস্থ : ২য় জমির প্রস্থ = 2 : 5



মনে করি, ১ম জমির দৈর্ঘ্য 3x মি. তাহলে ২য় জমির দৈর্ঘ্য 4x মিটার। ১ম জমির প্রস্থ 2y মিটার হলে ২য় জমির প্রস্থ 5y মিটার হবে।
$\therefore$ ১ম জমির ক্ষেত্রফল = $3x \times 2y = 6xy$ বর্গমিটার
প্রশ্নমতে, $6xy = 432$ বর্গমিটার
বা, $xy = \frac{432}{6} = 72$ "
বা, $xy = 72$ বর্গমিটার
$\therefore$ ২য় জমির ক্ষেত্রফল = $4x \times 5y$ বর্গ মিটার
$= 20xy$ বর্গ মিটার
$= 20 \times 72$ [$\because xy = 72$ বর্গ মি.]
$= 1440$ বর্গ মি.

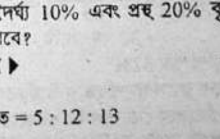
২২. জেমি ও সিমি একই ব্যাংক থেকে একই দিনে 10% সরল মুনাফায় আলাদা আলাদা পরিমাণ অর্থ ঋণ নেয়। জেমি 2 বছর পর মুনাফা–আসলে যত টাকা শোধ করে 3 বছর পর সিমি মুনাফা–আসলে তত টাকা শোধ করে। তাদের ঋণের অনুপাত নির্ণয় কর।

সমাধান মনে করি, জেমির ঋণের পরিমাণ x টাকা এবং সিমির ঋণের পরিমাণ y টাকা।
10% হার মুনাফায় x টাকার 2 বছরের মুনাফা = $\left(x \times 2 \times \frac{10}{100}\right)$ টাকা = $\frac{x}{5}$ টাকা।
$\therefore$ 2 বছর পরে জেমির মুনাফা–আসলে পরিশোধ করে = $\left(x + \frac{x}{5}\right)$ টাকা
$= \frac{5x + x}{5}$ টাকা
$= \frac{6x}{5}$ টাকা।
আবার, 10% হার মুনাফায় y টাকায় 3 বছরের মুনাফা
$= \left(y \times 3 \times \frac{10}{100}\right)$ টাকা
$= \frac{3y}{10}$ টাকা
$\therefore$ 3 বছর পর সিমির মুনাফা – আসলে পরিশোধ করে
$= \left(y + \frac{3y}{10}\right)$ টাকা
$= \frac{10y + 3y}{10}$ টাকা $= \frac{13y}{10}$ টাকা
প্রশ্নমতে, $\frac{6x}{5} = \frac{13y}{10}$
বা, $\frac{6x}{13y} = \frac{5}{10}$
বা, $\frac{6}{13} \times \frac{x}{y} = \frac{5}{10}$
বা, $\frac{x}{y} = \frac{5}{10} \times \frac{13}{6}$ ev, $\frac{x}{y} = \frac{13}{12}$
বা, $x : y = 13 : 12$
$\therefore$ জেমির ঋণের পরিমাণ : সিমির ঋণের অনুপাত = 13 : 12

২৩. একটি ত্রিভুজের বাহুগুলোর অনুপাত 5 : 12 : 13 এবং পরিসীমা 30 সে.মি.।
ক. ত্রিভুজটি অঙ্কন কর এবং কোণ ভেদে ত্রিভুজটি কী ধরনের তা লিখ। ২
খ. বৃহত্তর বাহুকে দৈর্ঘ্য এবং ক্ষুদ্রতর বাহুকে প্রস্থ ধরে অঙ্কিত আয়তক্ষেত্রের কর্ণের সমান বাহুবিশিষ্ট বর্গের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ৪
গ. উক্ত আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 10% এবং প্রস্থ 20% বৃদ্ধি পেলে ক্ষেত্রফল শতকরা কত বৃদ্ধি পাবে? ৪

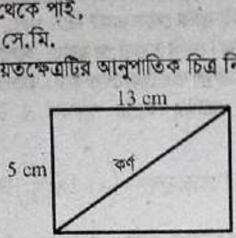
✔ ২৩ নং প্রশ্নের উত্তর ▸

ক দেওয়া আছে,
ত্রিভুজের বাহুগুলোর অনুপাত = 5 : 12 : 13
এবং পরিসীমা 30 সে.মি.
মনে করি, বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 5x সে.মি., 12x সে.মি. ও 13x সে.মি.
প্রশ্নমতে, $5x + 12x + 13x = 30$
বা, $30x = 30$
বা, $x = \frac{30}{30}$
$\therefore x = 1$
$\therefore$ বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 5×1 সে.মি., 12×1 সে.মি. ও 13×1 সে.মি. = 5 সে.মি., 12 সে.মি. ও 13 সে.মি.
উপরিউক্ত তথ্য অনুসারে নিম্নে ত্রিভুজটির একটি আনুপাতিক চিত্র আঁকা হলো–



এখন, $\triangle ABC$-এ $AC^2 = (13)^2 = 169$
এবং $AB^2 + BC^2 = (5)^2 + (12)^2$
$= 25 + 144$
$= 169$
অর্থাৎ $AC^2 = AB^2 + BC^2$; যা পিথাগোরাসের উপপাদ্য সমর্থন করে।
$\therefore$ ত্রিভুজটি একটি সমকোণী ত্রিভুজ।

খ শর্তানুসারে, 'ক' থেকে পাই,
আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 13 সে.মি.
এবং প্রস্থ 5 সে.মি.। আয়তক্ষেত্রটির আনুপাতিক চিত্র নিম্নরূপ–



আমরা জানি,

$$\text{কর্ণ} = \sqrt{(\text{দৈর্ঘ্য})^2 + (\text{প্রস্থ})^2}$$
$$= \sqrt{(13)^2 + (5)^2}$$
$$= \sqrt{169 + 25}$$
$$= \sqrt{194} \text{ বর্গ সে.মি.}$$

$\therefore$ বর্গের এক বাহু $= \sqrt{194}$ সে.মি.

$\therefore$ বর্গের ক্ষেত্রফল $= (\sqrt{194})^2$ বর্গ সে.মি.
$= 194$ বর্গ সে.মি.

গ 'খ' থেকে পাই,
আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য = 13 সে.মি.
আয়তক্ষেত্রের প্রস্থ = 5 সে.মি.
আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= (13 \times 5) = 65$ বর্গ সে.মি.
দৈর্ঘ্য 10% বৃদ্ধি করলে
দৈর্ঘ্য বৃদ্ধি $= 13 \times 10\% = 1.3$
$\therefore$ নতুন দৈর্ঘ্য $= 13 + 1.3 = 14.3$ সে.মি.
প্রস্থ 20% বাড়লে,
প্রস্থ বৃদ্ধি $= 5 \times 20\% = 1$ সে.মি.
$\therefore$ নতুন প্রস্থ $= 5 + 1 = 6$ সে.মি.
$\therefore$ নতুন আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= (14.3 \times 6)$ বর্গ সে.মি.
$= 85.8$ বর্গ সে.মি.
$\therefore$ ক্ষেত্রফল বৃদ্ধি পায় $= (85.8 - 65)$ বর্গ সে.মি.
$= 20.8$ বর্গ সে.মি.
65 বর্গ সে.মি. এ বৃদ্ধি পায় 20.8 বর্গ সে.মি.

$\therefore$ 1 বর্গ সে.মি. এ বৃদ্ধি পায় $\frac{20.8}{65}$ বর্গ সে.মি.

100 বর্গ সে.মি. এ বৃদ্ধি পায় $\frac{20.8 \times 100}{65}$ বর্গ সে.মি.
$= 32$ বর্গ সে.মি.

ক্ষেত্রফল শতকরা বৃদ্ধি পায় 32%

২৪. একদিন কোনো ক্লাসে অনুপস্থিত ও উপস্থিত শিক্ষার্থীর অনুপাত 1:4।
ক. অনুপস্থিত শিক্ষার্থীদেরকে মোট শিক্ষার্থীর শতকরায় প্রকাশ কর। ২
খ. 10 জন শিক্ষার্থী বেশি উপস্থিত হলে অনুপস্থিত ও উপস্থিত শিক্ষার্থীর অনুপাত হতো 1:9 মোট শিক্ষার্থীর সংখ্যা কত? ৪
গ. মোট শিক্ষার্থীর মধ্যে ছাত্র সংখ্যা ছাত্রী সংখ্যার দ্বিগুণ অপেক্ষা 20 জন কম। ছাত্র ও ছাত্রীসংখ্যার অনুপাত নির্ণয় কর। ৪

✔ ২৪ নং প্রশ্নের উত্তর ▶

ক মনে করি, অনুপস্থিত শিক্ষার্থীর সংখ্যা = x
এবং উপস্থিত শিক্ষার্থী সংখ্যা = 4x
এখানে, x ধনাত্মক আনুপাতিক ধ্রুবক
মোট শিক্ষার্থীর সংখ্যা = x + 4x = 5x

$$\text{অনুপস্থিত শিক্ষার্থী মোট শিক্ষার্থীর শতকরা} = \frac{\text{অনুপস্থিত শিক্ষার্থীর সংখ্যা}}{\text{মোট শিক্ষার্থীর সংখ্যা}} \times 100\%$$
$$= \frac{x}{5x} \times 100\%$$
$$= 20\%$$

খ 'ক' থেকে পাই,
অনুপস্থিত শিক্ষার্থীর সংখ্যা x
উপস্থিত শিক্ষার্থীর সংখ্যা 4x
এবং মোট শিক্ষার্থীর সংখ্যা 5x
10 জন বেশি উপস্থিত থাকলে অনুপস্থিত শিক্ষার্থীর সংখ্যা = x – 10
এবং 10 জন বেশি উপস্থিত থাকলে উপস্থিত শিক্ষার্থীর সংখ্যা = 4x + 10

প্রশ্নমতে, $\frac{x - 10}{4x + 10} = \frac{1}{9}$
বা, $9x - 90 = 4x + 10$
বা, $9x - 4x = 10 + 90$
বা, $5x = 100$
$\therefore$ মোট শিক্ষার্থীর সংখ্যা 100 জন।

গ মনে করি, ছাত্রী সংখ্যা = c
এবং ছাত্র সংখ্যা = (2c – 20)
'খ' হতে পাই,
মোট শিক্ষার্থীর সংখ্যা 100 জন।
প্রশ্নমতে, $c + 2c - 20 = 100$
বা, $3c = 100 + 20 = 120$
বা, $c = \frac{120}{3}$
বা, $c = 40$
$\therefore c = 40$
তাহলে ছাত্রী সংখ্যা 40 জন।
এবং ছাত্র সংখ্যা $= 2c - 20 = 2 \times 40 - 20$
$= 80 - 20 = 60$ জন।
$\therefore$ ছাত্র ও ছাত্রী সংখ্যার অনুপাত $= 60 : 40 = 3 : 2$
$\therefore$ ছাত্র : ছাত্রী $= 3 : 2$

২৫. আশিক, মিজান, অনিকা ও অহনা মোট 195000 টাকা মূলধন দিয়ে একটি ব্যবসা শুরু করে এবং এক বছর শেষে 26500 লাভ হয়। ব্যবসায় মূলধনে আশিকের অংশ: মিজানের অংশ = 2 : 3, মিজানের অংশ: অনিকার অংশ = 4 : 5 এবং অনিকার অংশ: অহনার অংশ = 5 : 6.
ক. মূলধনের সরল অনুপাত নির্ণয় কর।
খ. উক্ত ব্যবসায় প্রত্যেকের মূলধন নির্ণয় কর।
গ. বছর শেষে লভ্যাংশের 60% উক্ত ব্যবসায় বিনিয়োগ করা হলো। অবশিষ্ট লভ্যাংশ মূলধনের সরল অনুপাতে বিভক্ত হলে অহনা ও আশিকের লভ্যাংশের মধ্যে কে কত টাকা বেশি লাভ পাবে?

✔ ২৫ নং প্রশ্নের উত্তর ▶

ক আশিকের অংশ: মিজানের অংশ = 2:3 = 8: 12 [4 দ্বারা গুণ করে]
মিজানের অংশ: অনিকার অংশ = 4:5 = 12: 15 [3 দ্বারা গুণ করে]
অনিকার অংশ: অহনার অংশ = 5:6 = 15: 18 [3 দ্বারা গুণ করে]
আশিকের অংশ: মিজানের অংশ: অনিকার অংশ: অহনার অংশ = 8: 12: 15: 18

খ মোট মূলধন = 195000
অনুপাতের রাশিগুলোর যোগফল = 8+12+15+18
= 53

আশিকের মূলধন $= 195000 \times \frac{8}{53}$ টাকা
$= 29433.96226$ টাকা

মিজানের অংশ $= 195000 \times \frac{12}{53} = 44150.9434$ টাকা

অনিকার অংশ $= 195000 \times \frac{15}{53} = 55188.67925$ টাকা

অহনার অংশ $= 195000 \times \frac{18}{53} = 66226.41509$ টাকা

গ বছর শেষে লভ্যাংশ = 26500 টাকা

$\therefore$ 26500 এর 60% $= 26500 \times \frac{60}{100} = 15900$ টাকা

$\therefore$ অবশিষ্ট লাভ $= (26500 - 15900)$ টাকা $= 10600$ টাকা

$\therefore$ অহনার লভ্যাংশ $= \frac{10600}{53} \times 18$ টাকা $= 3600$ টাকা

আশিকের লভ্যাংশ $= \frac{10600}{53} \times 8$ টাকা $= 1600$ টাকা

$\therefore$ অহনার লভ্যাংশ = 3600
আশিকের লভ্যাংশ = 1600
এখানে, অহনার লভ্যাংশ > আশিকের লভ্যাংশ
$\therefore$ অহনার লভ্যাংশ বেশি $= (3600 - 1600)$ টাকা
$= 2000$ টাকা