(v) নং এর এক-এক মিলের জন্য

x	a	b	c
y	c	a	b

$\therefore F_5 = \{(a, c), (b, a)\ (c, b)\}$

(vi) নং এর এক-এক মিলের জন্য

x	a	b	c
y	b	c	a

$\therefore F_6 = \{(a, c), (b, b)\ (c, a)\}$

[দ্রষ্টব্য: তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশের জন্য অবশ্যই {} ব্যবহার করতে হবে]

(৩)-এর সমাধান:

দেওয়া আছে, $A = \{a, b, c, d\}$ এবং $B = \{1, 2, 3, 4\}$

$\therefore A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (a, 4), (b, 1), (b, 2), (b, 3), (b, 4), (c, 1), (c, 2), (c, 3), (c, 4), (d, 1), (d, 2), (d, 3), (d, 4)\}$

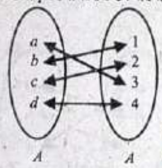
ধরি, $(A \times B)$ এর উপসেট F অর্থাৎ $F \subset A \times B$ বলে,

$F = \{(a, 1), (b, 2), (c, 3), (d, 4)\}$ হওয়াই স্বাভাবিক

[∵ ১ম পদের সাথে ২য় পদের এক-এক মিল থাকবে]

কিন্তু দেওয়া আছে, $a \leftrightarrow 3$

$\therefore$ এক্ষেত্রে F এর অন্তর্ভুক্ত ক্রমজোড়গুলো চিত্রে দেখানো হলো:



$\therefore F = \{(a, 3), (b, 1), (c, 2), (d, 4)\}$

বি: দ্র: (a, 3) ঠিক রেখে পদের F এর অন্তর্ভুক্ত ক্রমজোড়গুলোর প্রথম পদের সাথে দ্বিতীয় পদের বিভিন্নভাবে এক এক মিল দেখানো যায়।

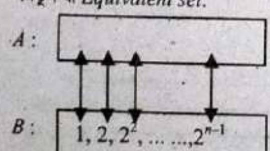
(৪)-এর সমাধান:

দেওয়া আছে, $A = \{1, 2, 3, \ldots \ldots, n\}$ এবং

$B = \{1, 2, 2^2, \ldots \ldots, 2^{n-1}\}$

A ও B সেটদ্বয়ের মধ্যে একটি এক-এক মিল নিম্নে দেখানো হলো:

আমরা জানি, দুটি সেটের মধ্যে এক-এক মিল দেখানো গেলে বোঝা যাবে সেটদ্বয় সমতুল বা *Equivalent set*.



সুতরাং A ও B সেটদ্বয় সমতুল। ওপরের চিত্রিত এক-এক মিলটিকে $A \leftrightarrow B : n \leftrightarrow 2^{n-1}, n \in N$ দ্বারা বর্ণনা করা যায়।

(৫)-এর সমাধান:

এখানে, $S = \{3^n : n = 0$ অথবা $n \in N\}$

এখন, $n = 0$ হলে, $3^n = 3^0 = 1$

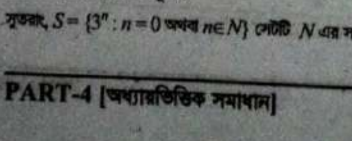
আবার, $n \in N$

কিন্তু N হলো স্বাভাবিক সংখ্যার সেট।

আমরা জানি, $N = \{1, 2, 3 \ldots \ldots\}$

তাহলে, তালিকা পদ্ধতিতে S কে লেখা যায়,

এখন S ও N এর মধ্যে একটি এক-এক মিল নিম্নে প্রদর্শিত হলো।



$\therefore S$ ও N সেটদ্বয় সমতুল।

সুতরাং, $S = \{3^n : n = 0$ অথবা $n \in N\}$ সেটটি N এর সমতুল।

বিকল্প সমাধান:

S-এর বর্ণনাকারী রাশি $= 3^n$

$n = 0, 1, 2, 3, 4 \ldots \ldots$ ইত্যাদি বসিয়ে

$n = 0$ হলে, $3^n = 3^0 = 1$

$n = 1$ হলে, $3^n = 3^1 = 3$

$n = 2$ হলে, $3^n = 3^2 = 9$

$n = 3$ হলে, $3^n = 3^3 = 27$

... ...

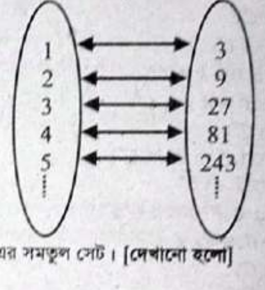
... ...

$n = n$ হলে, $3^n = 3^n$

$\therefore S = \{1, 3, 9, 27, \ldots \ldots\}$

আবার, $N = \{1, 2, 3, 4, \ldots \ldots\}$

S ও N-এর মধ্যে এক-এক মিল নিম্নরূপ:



অতএব, S সেটটি N-এর সমতুল সেট। [দেখানো হলো]

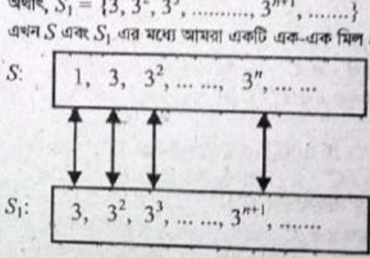
(৬)-এর সমাধান:

উপরে উল্লেখিত সেট $S = \{1, 3, 3^2, \ldots \ldots, 3^n, \ldots \ldots\}$ এখন আমরা একটি সেট S_1 লিখি নিম্নোক্তভাবে,

$S_1 = \{3k : k \in S\}$ [অর্থাৎ S_1 এর একটি উপাদান S এর অনুরূপ উপাদানের 3 গুণ]

অর্থাৎ, $S_1 = \{3, 3^2, 3^3, \ldots \ldots \ldots, 3^{n+1}, \ldots \ldots\}$

এখন S এবং S_1 এর মধ্যে আমরা একটি এক-এক মিল দেখাতে পারি।



যেহেতু S_1 এর প্রত্যেকটি সদস্যই S সেটে আছে এবং S এর অন্তত একটি সদস্য আছে যা S_1 এ নেই, অর্থাৎ 1, তাহলে বলা যায় S_1, S-এর প্রকৃত উপসেট এবং S এর সমতুল।

ওপরের চিত্রিত এক-এক মিলটিকে

$S \leftrightarrow S_1 : k \leftrightarrow 3k, k \in S$ দ্বারা বর্ণনা করা যায়।

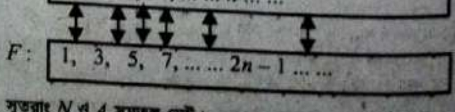
(৭)-এর সমাধান:

আমরা জানি, স্বাভাবিক সংখ্যার সেট N একটি অনন্ত সেট এবং অনন্ত সেটের সমতুল সেট একটি অনন্ত সেট।

এখানে, $A = \{1, 3, 5, 7 \ldots \ldots\}$

এবং $N = \{1, 2, 3, 4 \ldots \ldots n \ldots \ldots\}$

N এবং A এর মধ্য এক-এক মিল নিম্নের চিত্রে দেখানো হলো:



সুতরাং N ও A সমতুল সেট।

সকল বিজোড় স্বাভাবিক সংখ্যার সেট $A = \{1, 3, 5, 7 \ldots \ldots\}$ ইত্যাদি অনন্ত সেট।

[দেখানো হলো]

১ কাজ: [*Ref:* পাঠ্যবই পৃষ্ঠা: ১৮]

১। কোনো শ্রেণির 30 জন ছাত্রের 20 জন ফুটবল এবং 15 জন ক্রিকেট পছন্দ করে। প্রত্যেক ছাত্র দুইটি খেলার যেকোনো একটি খেলা পছন্দ করে। কতজন ছাত্র দুইটি খেলাই পছন্দ করে?

২। কিছু সংখ্যক লোকের মধ্যে 50 জন বাংলা, 20 ইংরেজি এবং 10 জন বাংলা ও ইংরেজি বলতে পারে। দুইটি ভাষার অন্তত একটি ভাষা কতজন বলতে পারে?

৩। ঢাকা বিশ্ববিদ্যালয়ের আধুনিক ভাষা ইনস্টিটিউটের 100 জন শিক্ষার্থীর মধ্যে 42 জন ফ্রেঞ্চ, 30 জন জার্মান, 28 জন স্প্যানিশ নিয়েছে। 10 জন নিয়েছে ফ্রেঞ্চ ও স্প্যানিশ, 8 জন নিয়েছে জার্মান ও স্প্যানিশ, 5 জন নিয়েছে জার্মান ও ফ্রেঞ্চ, 3 জন তিনটি ভাষাই নিয়েছে।

i. কতজন শিক্ষার্থী ঐ তিনটি ভাষার একটিও নেয়নি?

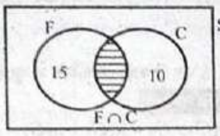
ii. কতজন শিক্ষার্থী ঐ তিনটি ভাষার কেবল একটি ভাষা নিয়েছে?

iii. কতজন শিক্ষার্থী ঐ তিনটি ভাষার কেবল দুইটি ভাষা নিয়েছে?

৪। কোনো স্কুলের নবম শ্রেণির মানবিক শাখার 50 জন শিক্ষার্থীর মধ্যে 29 জন পৌরনীতি, 24 জন ভূগোল এবং 11 জন পৌরনীতি ও ভূগোল উভয় বিষয় নিয়েছে। কতজন শিক্ষার্থী পৌরনীতি বা ভূগোল বিষয় দুইটির কোনটিই নেয়নি?

(১)-এর সমাধান:

মনে করি, সকল ছাত্রের সেট S এবং ছাত্রদের মধ্যে যারা ফুটবল খেলতে পছন্দ করে তাদের সেট F ও যারা ক্রিকেট খেলতে পছন্দ করে তাদের সেট C।



তাহলে প্রশ্নানুসারে,

$n(S) = 30$

$n(F) = 20$

$n(C) = 15$

এবং $S = (F \cup C) = 30$

[$\because$ প্রত্যেক ছাত্র কোনো না কোনো খেলা পছন্দ করে।]

দুটি খেলা পছন্দ করে এমন ছাত্রসংখ্যা, $n(F \cap C) = ?$

এখন $n(F \cup C) = n(F) + n(C) - n(F \cap C)$

বা, $n(F) + n(C) - n(F \cap C) = 30$ [সূত্র প্রয়োগ করে]

বা, $20 + 15 - n(F \cap C) = 30$ [মান বসিয়ে]

বা, $35 - 30 = n(F \cap C)$

$\therefore n(F \cap C) = 5$

অতএব, দুটি খেলাই পছন্দ করে 5 জন ছাত্র। **(Ans.)**

(২)-এর সমাধান:

মনে করি, বাংলা বলতে পারে এমন লোকের সেট B এবং ইংরেজি বলতে পারে এমন লোকের সেট E.

তাহলে, প্রশ্নানুসারে,

$n(B) = 50, n(E) = 20, n(B \cap E) = 10$

দুটি ভাষার অন্তত একটি বলতে পারে, $n(B \cup E) = ?$

আমরা জানি,

$n(B \cup E) = n(B) + n(E) - n(B \cap E)$

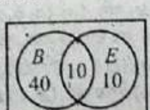
বা, $n(B \cup E) = 50 + 20 - 10$[মান বসিয়ে]

বা, $n(B \cup E) = 70 - 10$

$\therefore n(B \cup E) = 60$

অতএব, দুটি ভাষার অন্তত একটি বলতে পারে 60 জন ছাত্র। **(Ans.)**

বিকল্প সমাধান:



উপরোক্ত সমস্যাটি আমরা ভেনচিত্রের সাহায্যেও করতে পারি। ধরি, বাংলা বলতে পারে এমন লোকের সেটকে B বৃত্তের মধ্যে এবং ইংরেজি বলতে পারে এমন লোকের সেটকে E বৃত্তের স্থাপন করা হলো।

(*i*) এখন সমাধানের জন্য সমস্যাটির প্রশ্নের পিছনদিক থেকে অগ্রসর হই। এতে বলা আছে 10 লোক ইংরেজি ও বাংলা বলতে পারে। সুতরাং ভেনচিত্রের মাঝের (কমন) অংশে 10 স্থাপন করি।

(*ii*) অতপর বলা আছে, 20 জন লোক ইংরেজি বলতে পারে। এই 20 জনকে E বৃত্তে স্থাপন করতে হবে। কিন্তু E বৃত্তে ইতোমধ্যে 10 জনকে স্থাপন করা হয়েছে। সুতরাং বাকি $(20 - 10) = 10$ জনকে E বৃত্তের যেকোনো এক জায়গায় (কমন অংশ ব্যতীত) স্থাপন করি।

(*iii*) অনুরূপভাবে 50 জন বাংলা বলতে পারে। এই 50 জনের মধ্যে 10 জনকে আগেই স্থাপন করা হয়েছে। সুতরাং বাকি $(50 - 10) = 40$ জনকে B বৃত্তের যেকোনো জায়গায় স্থাপন করি।

এবার সবগুলো যোগ করলে পাওয়া যায়,

$40 + 10 + 10 = 60$ জন।

অর্থাৎ 60 জন লোক অন্তত যেকোনো একটি ভাষা জানে।

(৩)-এর সমাধান:

ধরি, সকল শিক্ষার্থীর সেট U, ফ্রেঞ্চ নেওয়া শিক্ষার্থীর সেট F, জার্মান নেওয়া শিক্ষার্থীর সেট G, স্প্যানিশ নেওয়া শিক্ষার্থীর সেট S.

$\therefore n(U) = 100, n(F) = 42, n(G) = 30, n(S) = 28,$

$n(F \cap S) = 10, n(G \cap S) = 8, n(G \cap F) = 5,$

$n(S \cap G \cap F) = 3$

(*i*) অন্তত একটি ভাষা নিয়েছে এমন শিক্ষার্থীর সংখ্যা

$n(F \cup S \cup G)$

$\therefore$ একটি ভাষাও নেয়নি এমন শিক্ষার্থীর সংখ্যা

$n(U) - n(F \cup G \cup S)$

এখন, $n(F \cup G \cup S) = n(F) + n(G) + n(S) - n(F \cap S) - n(F \cap G) - n(G \cap S) + n(F \cap G \cap S)$

$= 42 + 30 + 28 - 10 - 5 - 8 + 3$

$= 103 - 23 = 80$

$\therefore$ একটি ভাষাও নেয়নি এমন শিক্ষার্থীর সংখ্যা

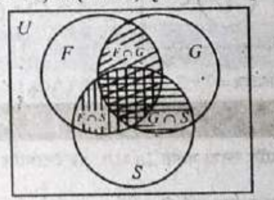
$= n(U) - n(F \cup G \cup S)$

$= 100 - 80$

$= 20$ জন **(Ans.)**

(ii) অন্তত দুইটি ভাষা নিয়েছে এমন শিক্ষার্থীর সেট

$= (F \cap G) \cup (G \cap S) \cup (F \cap S)$ [ভেনচিত্র দ্রষ্টব্য]



অন্তত একটি ভাষা নিয়েছে এমন শিক্ষার্থীর সেট $= (F \cup G \cup S)$

$\therefore$ কেবল একটি ভাষা নিয়েছে এমন শিক্ষার্থীর সংখ্যা

$n(F \cup G \cup S) - n[(F \cap G) \cup (G \cap S) \cup (F \cap S)]$

এখন, $n[(F \cap G) \cup (G \cap S) \cup (F \cap S)]$

$= n(F \cap G) + n(G \cap S) + n(F \cap S) - n[(F \cap G) \cap (G \cup S)] - n[(F \cap G) \cap (F \cap S)] - n[(G \cap S) \cap (F \cap S)] + n[(F \cap G) \cap (G \cap S) \cap (F \cap S)]$

$= n(F \cap G) + n(G \cap S) + n(F \cap S) - n(F \cap G \cap S) - n(F \cap G \cap S) - n(F \cap G \cap S) + n(F \cap G \cap S)$

$= 5 + 8 + 10 - 3 - 3 - 3 + 3 = 26 - 9 = 17$ জন

$\therefore$ কেবল একটি ভাষা নিয়েছে $n(F \cup G \cup S) - 17$

$= 80 - 17$ [পূর্বের অংশ থেকে $n(F \cup G \cup S) = 80$]

$= 63$ জন **(Ans.)**

বিকল্প সমাধান:

কেবল ফ্রেঞ্চ ভাষা নিয়েছে

$= n(F) - n(F \cap G) - n(F \cap S) + n(F \cap G \cap S)$

$= 42 - 5 - 10 + 3 = 30$ জন

কেবল জার্মান ভাষা নিয়েছে

$= n(G) - n(F \cap G) - n(G \cap S) + n(F \cap G \cap S)$

$= 30 - 5 - 8 + 3 = 33 - 13 = 20$ জন

কেবল স্প্যানিশ ভাষা নিয়েছে

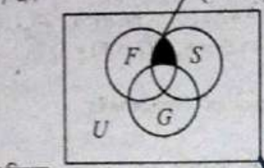
$= n(S) - n(F \cap S) - n(G \cap S) + n(F \cap G \cap S)$

$= 28 - 10 - 8 + 3 = 31 - 18 = 13$ জন

$\therefore$ কেবল একটি ভাষা নিয়েছে $= (30 + 20 + 30) = 63$ জন।

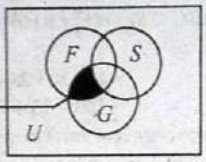
(iii) শুধু ফ্রেঞ্চ ও স্প্যানিশ নিয়েছে
$n(F \cap S) - n(F \cap G \cap S)$
$= 10 - 3 = 7$ জন

$(F \cap S) \setminus (F \cap G \cap S)$

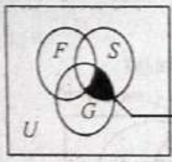


শুধু ফ্রেঞ্চ ও জার্মান নিয়েছে,
$n(F \cap G) - n(F \cap G \cap S) = 5 - 3 = 2$ জন

$(F \cap G) \setminus (F \cap G \cap S)$



শুধু জার্মান ও স্প্যানিশ নিয়েছে,
$n(G \cap S) - n(F \cap G \cap S) = 8 - 3 = 5$ জন

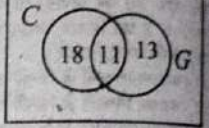


$(S \cap G) \setminus (F \cap G \cap S)$

$\therefore$ কেবল দুইটি ভাষা নিয়েছে $= 7 + 2 + 5 = 14$ জন **(Ans.)**

(iii) নং এর বিকল্প সমাধান:
'খ' হতে পাই, কমপক্ষে দুইটি ভাষা নিয়েছে এমন শিক্ষার্থীর সংখ্যা $= n(F \cap G) \cup (G \cap S) \cup (F \cap S) = 17$ জন। কিন্তু 3 জন শিক্ষার্থী তিনটি ভাষাই নিয়েছে।
$\therefore$ কেবল দুইটি ভাষা নিয়েছে $(17 - 3)$ জন $= 14$ জন

গ)-এর সমাধান:



মনে করি, স্কুলের মানবিক শাখার ছাত্রদের সেট S, যারা পৌরনীতি নিয়েছে তাদের সেট C এবং যারা ভূগোল নিয়েছে তাদের সেট G।
তাহলে প্রশ্নানুসারে,
$n(S) = 50, n(C) = 29, n(G) = 24$ এবং $n(C \cap G) = 11$
দুটি বিষয়ের কোনটিই নেয়নি এমন ছাত্রসংখ্যা,
$n(S) - n(C \cup G) = ?$
এখন $n(C \cup G) = n(C) + n(G) - n(C \cap G)$
$= 29 + 24 - 11 = 53 - 11 = 42$
$\therefore$ কোন বিষয়ই নেয়নি এমন ছাত্রসংখ্যা $= n(S) - n(C \cup G)$
$= (50 - 42)$ জন
$= 8$ জন **(Ans.)**
$\therefore$ 8 জন শিক্ষার্থী পৌরনীতি বা ভূগোল কোনো বিষয়ই নেয়নি।

বিকল্প সমাধান:
$n(C \cup G) = n(C) + n(G) - n(C \cap G)$
$= 29 + 24 - 11 = 53 - 11 = 42$
$\therefore n(C \cup G)' = n(S) - n(C \cup G)$
$= 50 - 42 = 8$
$\therefore$ 8 জন শিক্ষার্থী পৌরনীতি বা ভূগোল কোনো বিষয়ই নেয়নি।

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-১.১

১। i. কোনো সেটের সদস্য সংখ্যা $2n$ হলে, এর উপসেটের সংখ্যা হবে 4^n

ii. সকল মূলদ সংখ্যার সেট $Q = \left\{\frac{p}{q} : pq \cup Z\right\}$

iii. $a, b \in R$; $]a, b[= \{x : x \in R$ এবং $a < x < b\}$

উপরের উক্তির আলোকে নিচের কোনটি সঠিক?
(ক) i ও ii (খ) ii ও iii (গ) i ও iii (ঘ) i, ii ও iii

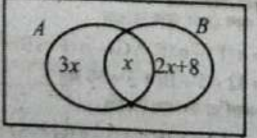
নিচের তথ্যের আলোকে (২ - ৪)নং প্রশ্নের উত্তর দাও:
প্রত্যেক $n \in N$ এর জন্য $A_n = \{n, 2n, 3n, \ldots \ldots\}$

২। $A_1 \cap A_2$ এর মান নিচের কোনটি ?
(ক) A_1 (খ) A_2 (গ) A_3 (ঘ) A_4

৩। নিচের কোনটি $A_3 \cap A_6$ এর মান নির্দেশ করে?
(ক) A_2 (খ) A_3 (গ) A_4 (ঘ) A_6

৪। $A_2 \cap A_3$ এর পরিবর্তে নিচের কোনটি লেখা যায়?
(ক) A_3 (খ) A_4 (গ) A_5 (ঘ) A_6

৫। দেওয়া আছে $U = \{x : 3 \le x \le 20, n \in Z\}, A = \{x : x$ বিজোড় সংখ্যা$\}$ এবং $B = \{x : x$ মৌলিক সংখ্যা$\}$ নিম্নের সেটগুলো তালিকা পদ্ধতিতে লিপিবদ্ধ কর:
(i) A (ii) B (iii) $C = \{x : x \in A$ এবং $x \in B\}$ এবং
(iv) $D = \{x : x \in A$ অথবা $x \in B\}$



৬। ভেনচিত্রে A এবং B সেটের উপাদানগুলোর সংখ্যা দেখানো হয়েছে। যদি $n(A) = n(B)$ হয়, তবে নির্ণয় কর : (a) x এর মান (b) $n(A \cup B)$ এবং $n(A \cap B')$.

৭। যদি $U = \{x : x$ ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা$\}$, $A = \{x : x \ge 5\} \subset U$ এবং $B = \{x : x < 12\} \subset U$ হয়, তবে $n(A \cap B)$ এবং $n(A')$ এর মান নির্ণয় কর।

৮। যদি $U = \{x : x$ জোড় পূর্ণসংখ্যা$\}$, $A = \{x : 3x \ge 25\} \subset U$ এবং $B = \{x : 5x < 12\} \subset U$ হয়, তাহলে $n(A \cap B)$ এবং $n(A' \cap B')$ এর মান নির্ণয় কর।

৯। দেখাও যে, (ক) $A \setminus A = \Phi$. (খ) $A \setminus (A \setminus A) = A$.

১০। দেখাও যে, $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

১১। যদি $A \subset B$ এবং $C \subset D$ হয়, তবে দেখাও যে, $(A \times C) \subset (B \times D)$

১২। দেখাও যে, $A = \{1, 2, 3, \ldots \ldots n\}$ এবং $B = \{1, 2, 2^2, \ldots \ldots 2^{n-1}\}$ সেট দুইটি সমতুল।

১৩। দেখাও যে, স্বাভাবিক সংখ্যাসমূহের বর্গের সেট $S = \{1, 4, 9, 16, 25, 36 \ldots \ldots\}$ একটি অনন্ত সেট।

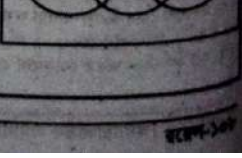
১৪। প্রমাণ কর যে, $n(A) = p, n(B) = q$ এবং $A \cap B = \Phi$ হলে, $n(A \cup B) = p + q$

১৫। প্রমাণ কর যে, A, B, C সান্তসেট হলে,
$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$

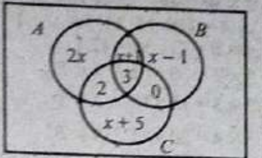
১৬। যদি $A = \{a, b, x\}$ এবং $B = \{c, y\}$ সার্বিক সেট $U = \{a, b, c, x, y, z\}$ এর উপসেট হলে, যাচাই কর যে,
(a) (i) $A \subset B'$, (ii) $A \cup B' = B'$, (iii) $A' \cap B = B$
(b) নির্ণয় কর: $(A \cap B) \cup (A \cap B')$

১৭। কোনো শ্রেণির 30 জন শিক্ষার্থীর মধ্যে 19 জন অর্থনীতি, 17 জন ভূগোল, 11 জন পৌরনীতি, 12 জন অর্থনীতি ও ভূগোল, 4 জন পৌরনীতি ও ভূগোল, 7 জন অর্থনীতি ও পৌরনীতি এবং 5 জন তিনটি বিষয়ই নিয়েছে। কতজন শিক্ষার্থী তিনটি বিষয়ের কোনটিই নেয়নি?

১৮। ভেনচিত্রে সার্বিক সেট U এবং উপসেট A, B, C এর সদস্য সংখ্যা উপস্থাপন করা হয়েছে।
(a) যদি $n(A \cap B) = n(B \cap C)$ হয়, তবে x এর মান নির্ণয় কর।
(b) যদি $n(B \cap C') = n(A' \cap C)$ হয়, তবে y এর মান নির্ণয় কর।
(c) $n(U)$ এর মান নির্ণয় কর।



১৯। ভেনচিত্রে A, B, C সেটের উপাদানগুলো এমনভাবে দেওয়া আছে যেন, $U = A \cup B \cup C$.
যদি $n(U) = 50$ হয়, তবে-



(a) x এর মান নির্ণয় কর।
(b) $n(B \cap C')$ এবং $n(A' \cap B)$ এর মান নির্ণয় কর।
(c) $n(A \cap B \cap C')$ এর মান নির্ণয় কর।

২০। তিনটি সেট A, B এবং C এমনভাবে দেওয়া আছে যেন, $A \cap B = \Phi$, $A \cap C = \Phi$ এবং $C \subseteq B$ ভেনচিত্র অংকন করে সেটগুলোর ব্যাখ্যা দাও।

২১। দেওয়া আছে, $A = \{x : 2 < x \leq 5, x \in R\}$, $B = \{x : 1 \leq x < 3, x \in R\}$ এবং $C = \{2, 4, 5\}$ নিম্নের সেটগুলো সেট গঠন পদ্ধতিতে প্রকাশ কর:
(a) $A \cap B$ (b) $A' \cap B'$ এবং (c) $A' \cup B$.

২২। দেওয়া আছে $U = \{x: x < 10, x \in R\}$, $A = \{x: 1 < x \leq 4\}$ এবং $B = \{x: 3 \leq x < 6\}$ নিচের সেটগুলো সেট গঠন পদ্ধতিতে প্রকাশ কর:
(a) $A \cap B$ (b) $A' \cap B$ (c) $A \cap B'$ এবং (d) $A' \cap B'$

২৩। নিম্নে A ও B সেট দেওয়া আছে। প্রতিক্ষেত্রে $A \cup B$ নির্ণয় কর এবং যাচাই কর যে $A \subset (A \cup B)$ এবং $B \subset (A \cup B)$
(i) $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ এবং $B = \{-3, 0, 3\}$
(ii) $A = \{x : x \in N, x < 10$ এবং x, 2 এর গুণিতক$\}$ এবং $B = \{x : x \in N, x < 10$ এবং x, 3 এর গুণিতক$\}$

২৪। নিম্নের সেটগুলো ব্যবহার করে $A \cap B$ নির্ণয় কর এবং যাচাই কর যে, $(A \cap B) \subset A$ এবং $(A \cap B) \subset B$
(i) $A = \{0, 1, 2, 3, 5\}$, $B = \{-1, 0, 2\}$ (ii) $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{b, x, c, y\}$

২৫। আনোয়ারা মহাবিদ্যালয়ের ছাত্রীদের মধ্যে বিচিত্রা, সন্ধানী ও পূর্বাণী পত্রিকার পাঠ্যাভ্যাস সম্পর্কে পরিচালিত এক সমীক্ষায় দেখা গেল 60% ছাত্রী বিচিত্রা, 50% ছাত্রী সন্ধানী, 50% ছাত্রী পূর্বাণী, 30% ছাত্রী বিচিত্রা ও সন্ধানী, 30% ছাত্রী বিচিত্রা ও পূর্বাণী, 20% ছাত্রী সন্ধানী ও পূর্বাণী এবং 10% ছাত্রী তিনটি পত্রিকাই পড়ে।
(i) শতকরা কতজন ছাত্রী উক্ত পত্রিকা তিনটির কোনটিই পড়ে না?
(ii) শতকরা কতজন ছাত্রী উক্ত পত্রিকাগুলোর মধ্যে কেবল দুইটি পড়ে?

২৬। $A = \{x : x \in R$ এবং $x^2 - (a + b)x + ab = 0\}$
$B = \{1, 2\}$ এবং $C = \{2, 4, 5\}$
ক. A সেটের উপাদানসমূহ নির্ণয় কর।
খ. দেখাও যে, $P(B \cap C) = P(B) \cap P(C)$
গ. প্রমাণ কর যে, $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

২৭। একটি শ্রেণির 100 জন ছাত্রের মধ্যে 42 জন ফুটবল, 46 জন ক্রিকেট এবং 39 জন হকি খেলে। এদের মধ্যে 13 জন ফুটবল ও ক্রিকেট, 14 জন ক্রিকেট ও হকি এবং 12 জন ফুটবল ও হকি খেলতে পারে। এছাড়া 7 জন কোনো খেলায় পারদর্শী নয়-
ক. উল্লিখিত তিনটি খেলায় পারদর্শী এমন ছাত্রদের সেট এবং কেনো খেলায় পারদর্শী নয় এমন ছাত্রদের সেট ভেনচিত্রে দেখাও-
খ. কতজন ছাত্র উল্লিখিত তিনটি খেলায় পারদর্শী তা নির্ণয় কর।
গ. কতজন ছাত্র কেবলমাত্র একটি খেলায় পারদর্শী এবং কতজন অন্তত দুইটি খেলায় পারদর্শী?

অনুশীলনী-১.১ এর সমাধান

১। i. কোনো সেটের সদস্য সংখ্যা $2n$ হলে, এর উপসেটের সংখ্যা হবে 4^n

ii. সকল মূলদ সংখ্যার সেট $Q = \left\{\frac{p}{q} : p, q \in Z; q \neq 0\right\}$

iii. $a, b \in R$; $]a, b[= \{x : x \in R$ এবং $a < x < b\}$

উপরের উক্তির আলোকে নিচের কোনটি সঠিক?
(ক) i ও ii (খ) ii ও iii (গ) i ও iii (ঘ) i, ii ও iii
উত্তর: (ঘ) i, ii ও iii
ব্যাখ্যা:
(i) নং সঠিক, কারণ: আমরা জানি, কোনো সেটের সদস্য সংখ্যা n হলে উপসেটের সংখ্যা হয় 2^n।
$\therefore$ কোনো সেটের সদস্য সংখ্যা $2n$ হলে উপসেটের সংখ্যা হয় $2^{2n} = (2^2)^n = 4^n$
(ii) নং সঠিক, কারণ: p, q পূর্ণসংখ্যা ও $q \neq 0$ হলে $\frac{p}{q}$ আকারের সংখ্যাকে মূলদ সংখ্যা বলে। যেমন: $\frac{3}{1}, \frac{3}{4}, \frac{2}{11}$ ইত্যাদি।
$\therefore$ সকল মূলদ সংখ্যার সেট, $Q = \left\{\frac{p}{q} : p, q \in Z, q \neq 0\right\}$
(iii) নং সঠিক, কারণ: $a, b \in R$ দ্বারা বুঝায় a ও b বাস্তব সংখ্যার উপাদান। $]a, b[$ দ্বারা a থেকে b পর্যন্ত সকল বাস্তব সংখ্যার সেট নির্দেশ করে, কিন্তু এ সেটে a ও b অন্তর্ভুক্ত নয়। $a < x < b$ দ্বারাও এমন একটি বাস্তব সংখ্যার সেট বুঝানো হয়েছে যা a এর চেয়ে বড় কিন্তু b এর চেয়ে ছোট।
$\therefore a, b \in R$; $]a, b[= \{x : x \in R$ এবং $a < x < b\}$ সঠিক।

নিচের তথ্যের আলোকে (২ - ৪)নং প্রশ্নের উত্তর দাও:
প্রত্যেক $n \in N$ এর জন্য $A_n = \{n, 2n, 3n, \dots \dots\}$

২। $A_1 \cap A_2$ এর মান নিচের কোনটি?
(ক) A_1 (খ) A_2
(গ) A_3 (ঘ) A_4
উত্তর: (খ) A_2
ব্যাখ্যা:
$n \in N$ দ্বারা বুঝায়, n যে কোনো স্বাভাবিক সংখ্যার উপাদান।
এখানে, $n \in N$ এর জন্য $A_n = \{n, 2n, 3n, \dots \dots\}$
$\therefore A_1 = \{1, 2, 3, 4, \dots \dots\}$ এবং $A_2 = \{2, 4, 6, \dots \dots\}$
$\therefore A_1 \cap A_2 = \{2, 4, 6, \dots \dots\} = A_2$

৩। নিচের কোনটি $A_3 \cap A_6$ এর মান নির্দেশ করে?
(ক) A_2 (খ) A_3
(গ) A_4 (ঘ) A_6
উত্তর: (ঘ) A_6
ব্যাখ্যা:
$A_n = \{n, 2n, 3n, \dots \dots\}$
$\therefore A_3 = \{3, 6, 9, 12, \dots \dots\}$ এবং $A_6 = \{6, 12, 18, \dots \dots\}$
$\therefore A_3 \cap A_6 = \{6, 12, \dots \dots\} = A_6$

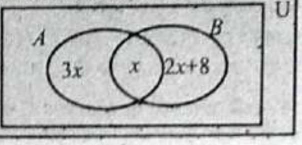
৪। $A_2 \cap A_3$ এর পরিবর্তে নিচের কোনটি লেখা যায়?
(ক) A_3 (খ) A_4
(গ) A_5 (ঘ) A_6
উত্তর: (ঘ) A_6
ব্যাখ্যা:
$A_n = \{n, 2n, 3n \dots \dots\}$
$\therefore A_2 = \{2, 4, 6, 8, 10, 12 \dots \dots\}$
এবং $A_3 = \{3, 6, 9, 12, \dots \dots\}$
$\therefore A_2 \cap A_3 = \{6, 12, \dots \dots\} = A_6$

৫। দেওয়া আছে $U = \{x : 3 \leq x \leq 20, n \in Z\}$, $A = \{x : x$ বিজোড় সংখ্যা$\}$ এবং $B = \{x : x$ মৌলিক সংখ্যা$\}$ নিম্নের সেটগুলো তালিকা পদ্ধতিতে লিপিবদ্ধ কর:
(i) A (ii) B (iii) $C = \{x : x \in A$ এবং $x \in B\}$ এবং
(iv) $D = \{x : x \in A$ অথবা $x \in B\}$

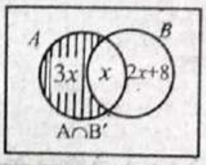
সমাধান:
এখানে, U হলো সার্বিক সেট এবং A, B, C, D হলো উপসেট।
দেওয়া আছে, $U = \{x : 3 \leq x \leq 20, x \in Z\}$,
$A = \{x : x$ বিজোড় সংখ্যা$\}$
$B = \{x : x$ মৌলিক সংখ্যা$\}$
(i) $A = \{x : x$ বিজোড় সংখ্যা$\}$
$\therefore A = \{3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$
(ii) $B = \{x : x$ মৌলিক সংখ্যা$\}$
$\therefore B = \{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$
(iii) $C = \{x : x \in A$ এবং $x \in B\}$
C হলো এমন একটি সেট যার উপাদানগুলো A এবং B উভয় সেটের মধ্যে বিদ্যমান অর্থাৎ $C = A \cap B$।
$C = \{x : x \in A \cap B\}$

এখন, $A \cap B = \{3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\} \cap \{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\} = \{3,5,7,11, 13,17,19\}$
$\therefore C = \{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$
বর্ণনা: C হলো 3 থেকে 20 পর্যন্ত সকল মৌলিক বিজোড় সংখ্যার সেট এবং $C = B$।
(iv) $D = \{x : x \in A$ অথবা $x \in B\}$
D হলো এমন একটি সেট, যার উপাদানগুলো হয় A সেট অথবা B সেটের মধ্যে বিদ্যমান অর্থাৎ $D = A \cup B$।
$\therefore D = \{x : x \in A \cup B\}$
এখন, $A \cup B$
$= \{3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\} \cup \{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$
$= \{3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$
$\therefore D = \{3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$
বর্ণনা: D হলো 3 থেকে 20 পর্যন্ত সকল বিজোড় সংখ্যার সেট এবং $D = A$।

৬। ভেনচিত্রে A এবং B সেটের উপাদানগুলোর সংখ্যা দেখানো হয়েছে। যদি $n(A) = n(B)$ হয়, তবে নির্ণয় কর :
(a) x এর মান
(b) $n(A \cup B)$ এবং $n(A \cap B')$



সমাধান: প্রদত্ত ভেনচিত্রে,
$n(A) = 3x + x$
$n(B) = x + 2x + 8$
$n(A \cup B) = 3x + x + 2x + 8$
$n(A \cap B') = 3x$
(a) দেওয়া আছে, $n(A) = n(B)$
$\Rightarrow 3x + x = x + 2x + 8$
$\Rightarrow 4x = 3x + 8$
$\Rightarrow 4x - 3x = 8$
$\therefore x = 8$ **(Ans.)**
(b) এখন, $n(A \cup B) = 3x + x + 2x + 8$
$= 6x + 8 = 6 \times 8 + 8$
$= 48 + 8$
$= 56$ **(Ans.)**



আবার, $n(A \cap B') = 3x$
$= 3 \times 8$
$= 24$ **(Ans.)**

দৃষ্টি আকর্ষণ: এখানে, $3x$, x ও $2x + 8$ দ্বারা A ও B সেটের উপাদান নয় বরং উপাদান সংখ্যা বুঝানো হয়েছে।

৭। যদি $U = \{x : x$ ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা$\}$, $A = \{x : x \geq 5\} \subset U$ এবং $B = \{x : x < 12\} \subset U$ হয়, তবে $n(A \cap B)$ এবং $n(A')$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান:
দেওয়া আছে, $U = \{x : x$ ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা$\}$
অর্থাৎ $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 \ldots\ldots\}$
$A = \{x : x \geq 5\}$
$A = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 \ldots \ldots\}$
এবং $B = \{x : x < 12\}$
অর্থাৎ $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$
এখন, $A \cap B = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$
$\therefore n(A \cap B) = 7$ **(Ans.)**
আবার, $A' = U \setminus A$
$= \{1, 2, 3, 4\}$
$\therefore n(A') = 4$ **(Ans.)**

বি.দ্র.: সার্বিক সেট U ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হওয়ায় A ও B এর মান শর্তানুযায়ী ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যাই হবে।

৮। যদি $U = \{x : x$ জোড় পূর্ণসংখ্যা$\}$, $A = \{x : 3x \geq 25\} \subset U$ এবং $B = \{x : 5x \leq 12\} \subset U$ হয়, তাহলে $n(A \cap B)$ এবং $n(A' \cap B')$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান:
দেওয়া আছে, $U = \{x : x$ জোড় পূর্ণসংখ্যা$\}$
অর্থাৎ $U = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 \ldots\ldots\}$
$A = \{x : 3x \geq 25\}$
এখানে, U এর ঐ সকল উপাদান x, A এর উপাদান হবে যাদের জন্য $3x \geq 25$
এখানে, $3 \times 8 = 24 \leq 25 \therefore 8 \notin A$
$3 \times 10 = 30 > 25 \therefore 10 \in A$
$\therefore A = \{10, 12, 14, 16 \ldots \ldots\}$
এবং $B = \{x : 5x < 12\}$
$5 \times 2 = 10 < 12 \therefore 2 \in B$
$5 \times 3 = 15 \nless 12 \therefore 3 \notin B$
$5 \times 4 = 20 \nless 12 \therefore 4 \notin B$
$\therefore B = \{2\}$
এখন, $(A \cap B) = \Phi$
$\therefore n(A \cap B) = 0$ (Ans.)

দ্বিতীয় অংশ:
$A' = U \setminus A = \{2, 4, 6, 8\}$
$B' = U \setminus B = \{4, 6, 8, 10, 12 \ldots\ldots\}$
তাহলে, $A' \cap B' = \{4, 6, 8\}$
$\therefore n(A' \cap B') = 3$ **(Ans.)**

৯। দেখাও যে, (ক) $A \setminus A = \Phi$. (খ) $A \setminus (A \setminus A) = A$.

(ক) এর সমাধান:
ধরি, $x \in A \setminus A$
তাহলে, $x \in A$ এবং $x \notin A$
$\Rightarrow x \in \Phi \quad \therefore A \setminus A \subset \Phi$
আবার, ধরি, $x \in \Phi$
তাহলে, $x \in A$ এবং $x \notin A$
$\Rightarrow x \in A \setminus A$
$\therefore \Phi \subset A \setminus A$
সুতরাং, $A \setminus A = \Phi$ [যেহেতু $A \subset \Phi$ হলে $A = \Phi$] [দেখানো হলো]

(খ) এর সমাধান:
ধরি, $x \in A \setminus (A \setminus A)$
তাহলে, $x \in A$ এবং $x \notin A / A \Rightarrow x \in A$ এবং $x \notin \Phi$ [$\because A \setminus A = \Phi$]
$\Rightarrow x \in A \qquad \therefore A \setminus (A \setminus A) \subset A$
আবার ধরি, $x \in A$
তাহলে, $x \in A$ এবং $x \notin \Phi \qquad [\because A \setminus A = \Phi]$
$\Rightarrow x \in A$ এবং $x \notin (A \setminus A)$
$\Rightarrow x \in A \setminus (A \setminus A)$
$\therefore A \subset A \setminus (A \setminus A)$
সুতরাং, $A \setminus (A \setminus A) = A$ [দেখানো হলো]

১০। দেখাও যে, $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

সমাধান:
কার্তেসীয় গুণজ সেটের সংজ্ঞানুসারে,
$A \times (B \cup C)$
$= \{(x, y) : x \in A$ এবং $y \in (B \cup C)\}$
$= \{(x, y) : x \in A$ এবং ($y \in B$ অথবা $y \in C$)$\}$
$= \{(x, y) : (x \in A$ এবং $y \in B)$ অথবা $(x \in A$ এবং $y \in C)\}$
$= \{(x, y) : (x, y) \in (A \times B)$ অথবা $(x, y) \in (A \times C)\}$
$= \{(x, y) : (x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C)\}$
$= (A \times B) \cup (A \times C)$
$\therefore A \times (B \cup C) \subset (A \times B) \cup (A \times C)$
আবার, $(A \times B) \cup (A \times C)$
$= \{(x, y) : (x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C)\}$
$= \{(x, y) : (x, y) \in A \times B$ অথবা $(x, y) \in A \times C\}$
$= \{(x, y) : (x \in A$ এবং $y \in B)$ অথবা $(x \in A$ এবং $x \in C)\}$
$= \{(x, y) : x \in A$ এবং ($y \in B$ অথবা $y \in C$)$\}$
$= \{(x, y) : x \in A$ এবং $y \in (B \cup C)\}$
$= \{(x, y) : (x, y) \in A \times (B \cup C)\}$
$\therefore (A \times B) \cup (A \times C) \subset A \times (B \cup C)$
$\therefore A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$. [দেখানো হলো]

১১। যদি $A \subset B$ এবং $C \subset D$ হয়, তবে দেখাও যে, $(A \times C) \subset (B \times D)$

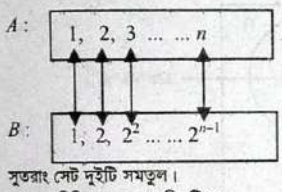
সমাধান:

উপসেটের সংজ্ঞা হতে জানি,
$A \subset B$ হলে $x \in A \Rightarrow x \in B$
অনুরূপভাবে, $y \in C \Rightarrow y \in D$
ধরি, $(x, y) \in (A \times C)$
তাহলে, $x \in A$ এবং $y \in C$
$\Rightarrow x \in B$ এবং $y \in D$ $[\because A \subset B$ এবং $C \subset D]$
$\Rightarrow (x, y) \in (B \times D)$
$\therefore (A \times C) \subset (B \times D)$ [দেখানো হলো]

১২। দেখাও যে, $A = \{1, 2, 3, \ldots \ldots n\}$ এবং $B = \{1, 2, 2^2, \ldots \ldots 2^{n-1}\}$ সেট দুইটি সমতুল।

সমাধান:

দেওয়া আছে, $A = \{1, 2, 3 \ldots \ldots n\}$
এবং $B = \{1, 2, 2^2 \ldots \ldots 2^{n-1}\}$
A ও B সেটদ্বয়ের মধ্যে একটি এক-এক মিল নিয়ে দেখানো হলো: আমরা জানি, দুটি সেটের মধ্যে এক-এক মিল দেখানো গেলে বোঝা যাবে সেটদ্বয় সমতুল বা *Equivalent set.*
এখানে, $n = 1$ হলে $2^{1-1} = 2^0 = 1$
$n = 2$ হলে $2^{2-1} = 2^1 = 2$



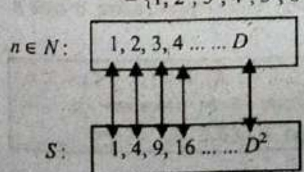
সুতরাং সেট দুইটি সমতুল।
ওপরের চিত্রিত এক-এক মিলটিকে
$A \leftrightarrow B : n \leftrightarrow 2^{n-1}, n \in N$ দ্বারা বর্ণনা করা যায়।

১৩। দেখাও যে, স্বাভাবিক সংখ্যাসমূহের বর্গের সেট $S = \{1, 4, 9, 16, 25, 36 \ldots \ldots\}$ একটি অনন্ত সেট।

সমাধান:

দেওয়া আছে, স্বাভাবিক সংখ্যাসমূহের বর্গের সেট
$S = \{1, 4, 9, 16, 25, 36 \ldots \ldots\}$
$= \{1, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2 \ldots \ldots\}$
অনন্ত সেটের সংজ্ঞা হতে পাই, যে সেটের সদস্য সংখ্যা গণনার সাহায্যে নির্দিষ্ট করা যায় না তাকে অনন্ত সেট বলা হয়। জানা আছে স্বাভাবিক সংখ্যাসমূহের সেটের সদস্য সংখ্যা গণনার সাহায্যে নির্দিষ্ট করা যায় না।
$\therefore$ স্বাভাবিক সংখ্যা সমূহের বর্গের সেটের সদস্য সংখ্যাও গণনার সাহায্যে নির্দিষ্ট করা যায় না।
$\therefore S$ একটি অনন্ত সেট।

বিকল্প সমাধান: $S = \{1, 4, 9, 16, 25, 36 \ldots \ldots\}$
$= \{1, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2 \ldots \ldots\}$



স্বাভাবিক সংখ্যার সেট $N = \{1, 2, 3, 4, 5 \ldots \ldots\}$
S ও N এর মধ্যে এক-এক মিল দেখানো যায়। যেহেতু N অনন্ত সেট এবং S ও N সমতুল সুতরাং S ও অনন্ত সেট। কারণ অনন্ত সেটের সমতুল সেটও একটি অনন্ত সেট। [দেখানো হলো]

১৪। প্রমাণ কর যে, $n(A) = p, n(B) = q$ এবং $A \cap B = \Phi$ হলে $n(A \cup B) = p + q$.

সমাধান:

আমরা জানি, যে কোন সান্ত সেট A ও B এর জন্য
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
এখানে, $n(A) = p, n(B) = q$ এবং $A \cap B = \Phi$
$\therefore n(A \cap B) = 0$
$\therefore n(A \cup B) = p + q - 0$
$= p + q$
$\therefore n(A \cup B) = p + q$ [প্রমাণিত]

[দ্রষ্টব্য: $n(A)$ বলতে A সেটের সদস্য সংখ্যা বোঝায়]

১৫। প্রমাণ কর যে, A, B, C সান্ত সেট হলে, $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$

সমাধান:

আমরা জানি, যে কোনো সান্ত সেট A ও B এর জন্য
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
এখন, $n(A \cup B \cup C) = n[A \cup (B \cup C)]$
$[\because A \cup B \cup C = A \cup (B \cup C)$ সহযোজন নিয়ম$]$
$= n(A) + n(B \cup C) - n[A \cap (B \cup C)]$
$= n(A) + n(B) + n(C) - n(B \cap C) - n[(A \cap B) \cup (A \cap C)]$
$[\because A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)]$
$= n(A) + n(B) + n(C) - n(B \cap C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) + n[(A \cap B) \cap (A \cap C)]$
$= n(A) + n(B) + n(C) - n(B \cap C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$ $[\because (A \cap B) \cap (A \cap C) = A \cap B \cap C]$
$= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$ $[\because A \cap C = C \cap A]$
$\therefore n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$ [প্রমাণিত]

[দৃষ্টি আকর্ষণ: সমাধানটির ৩য় ও ৫ম লাইনে যে সূত্রগুলো ব্যবহার হয়েছে প্রকৃতপক্ষে এগুলো কোন সূত্র নয়। বরং এদেরকে স্বতঃসিদ্ধ প্রমাণ বলা যায়।]

১৬। যদি $A = \{a, b, x\}$ এবং $B = \{c, y\}$ সার্বিক সেট $U = \{a, b, c, x, y, z\}$ এর উপসেট হলে, যাচাই কর যে,
(a) (i) $A \subset B'$, (ii) $A \cup B' = B'$, (iii) $A' \cap B = B$
(b) নির্ণয় কর: $(A \cap B) \cup (A \cap B')$

সমাধান:

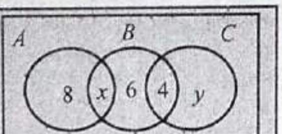
দেওয়া আছে, $A = \{a, b, x\}, B = \{c, y\}$ ও
$U = \{a, b, c, x, y, z\}$
(a) (i) এখন, $A = \{a, b, x\}$
$B' = U \setminus B = \{a, b, c, x, y, z\} \setminus \{c, y\}$
$= \{a, b, x, z\}$
$\therefore A \subset B'$ [যাচাই করা হলো]
(ii) $B' = \{a, b, x, z\}, A = \{a, b, x\}$
এখন, $A \cup B' = \{a, b, x, z\}$
$\therefore A \cup B' = B'$ [যাচাই করা হলো]
(iii) $B = \{c, y\}$
$A' = U \setminus A = \{a, b, c, x, y, z\} \setminus \{a, b, x\} = \{c, y, x\}$
এখন, $A' \cap B = \{c, y\}$
$\therefore A' \cap B = B$ [যাচাই করা হলো]
(b) $A \cap B = \{a, b, x\} \cap \{c, y\} = \Phi$
$A \cap B' = \{a, b, x\} \cap \{a, b, x, z\} = \{a, b, x\}$
এখন, $(A \cap B) \cup (A \cap B') = \Phi \cup \{a, b, x\} = \{a, b, x\}$ (Ans.)

১৭। কোনো শ্রেণির 30 জন শিক্ষার্থীর মধ্যে 19 জন অর্থনীতি, 17 জন ভূগোল, 11 জন পৌরনীতি, 12 জন অর্থনীতি ও ভূগোল, 4 জন পৌরনীতি ও ভূগোল, 7 জন অর্থনীতি ও পৌরনীতি এবং 5 জন তিনটি বিষয়ই নিয়েছে। কতজন শিক্ষার্থী তিনটি বিষয়ের কোনোটিই নেয়নি?

সমাধান:

মনে করি, ঐ শ্রেণির সকল শিক্ষার্থীর সেট S, যেসব ছাত্র অর্থনীতি নিয়েছে তাদের সেট E, যারা ভূগোল নিয়েছে তাদের সেট G এবং যারা পৌরনীতি নিয়েছে তাদের সেট C.
তাহলে প্রশ্নানুসারে,
$n(S) = 30, n(E) = 19, n(G) = 17, n(C) = 11,$
$n(E \cap G) = 12, n(C \cap G) = 4, n(E \cap C) = 7$ এবং
$n(E \cap G \cap C) = 5.$
তিনটি বিষয়ের কোনটিই নেয়নি,
অর্থাৎ $n(S) - n(E \cup G \cup C)$ বের করতে হবে।
এখন, $n(E \cup G \cup C) = n(E) + n(G) + n(C) - n(E \cap G) - n(C \cap G) - n(E \cap C) + n(E \cap G \cap C)$
$= 19 + 17 + 11 - 12 - 4 - 7 + 5 = 29$
$\therefore$ কোন বিষয়ে নেয়নি এমন শিক্ষার্থীর সংখ্যা
$= n(S) - n(E \cup G \cup C)$
$= 30 - 29 = 1$
উত্তর: 1 জন

১৮। ভেনচিত্রে সার্বিক সেট U এবং উপসেট A, B, C এর সদস্য সংখ্যা উপস্থাপন করা হয়েছে।



(a) যদি $n(A \cap B) = n(B \cap C)$ হয়, তবে x এর মান নির্ণয় কর।
(b) যদি $n(B \cap C') = n(A' \cap C)$ হয়, তবে y এর মান নির্ণয় কর।
(c) $n(U)$ এর মান নির্ণয় কর।

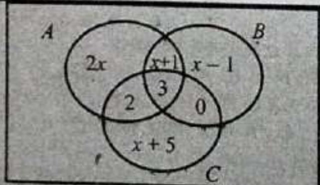
সমাধান:

(a) দেওয়া আছে, $n(A \cap B) = n(B \cap C)$
প্রদত্ত ভেনচিত্র অনুসারে,
$n(A \cap B) = x$ ও $n(B \cap C) = 4$
$\therefore x = 4$ **(Ans.)**

(b) দেওয়া আছে, $n(B \cap C') = n(A' \cap C)$
প্রদত্ত ভেনচিত্র অনুসারে,
$n(B \cap C') = x + 6$
ও $n(A' \cap C) = 4 + y$
$\therefore x + 6 = 4 + y$
বা, $4 + 6 = y + 4$ [$\because x = 4$]
$\therefore y = 6$ **(Ans.)**

(C) ভেনচিত্র অনুসারে,
$n(U) = 8 + x + 6 + 4 + y$
বা, $n(U) = 8 + 4 + 6 + 4 + 6$
$\therefore n(U) = 28$ **(Ans.)**

১৯। ভেনচিত্রে A, B, C সেটের উপাদানগুলো এমনভাবে দেওয়া আছে যেন,
$U = A \cup B \cup C.$
যদি $n(U) = 50$ হয়, তবে-

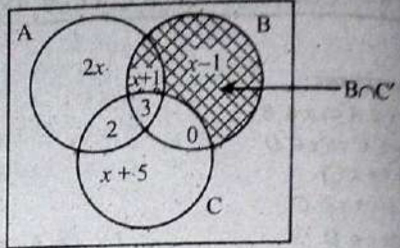


(a) x এর মান নির্ণয় কর।
(b) $n(B \cap C')$ এবং $n(A' \cap B)$ এর মান নির্ণয় কর।
(c) $n(A \cap B \cap C')$ এর মান নির্ণয় কর।

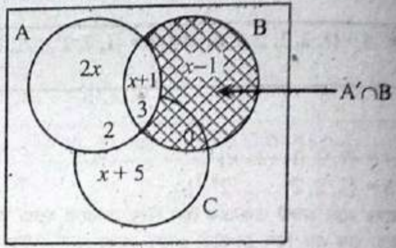
সমাধান:

(a) দেওয়া আছে, $n(U) = 50$
বা, $2x + x + 1 + 2 + 3 + 0 + x + 5 + x - 1 = 50$ [ভেনচিত্র অনুসারে]
বা, $5x + 10 = 50$
বা, $5x = 50 - 10$
বা, $5x = 40$
$\therefore x = 8$ **(Ans.)**

(b)

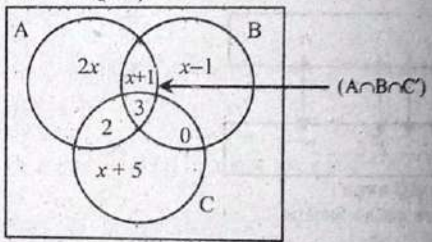


এখন, $n(B \cap C') = x + 1 + x - 1$ [ভেনচিত্র অনুসারে]
$= 2x = 2 \times 8 = 16$ **(Ans.)**



আবার, $n(A' \cap B) = x - 1 + 0$ [ভেনচিত্র অনুসারে]
$= 8 - 1 = 7$ **(Ans.)**

(C) এখন ভেনচিত্র অনুসারে,

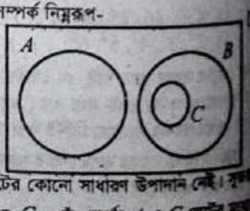


$n(A \cap B \cap C') = x + 1 = 8 + 1 = 9$ **(Ans.)**

২০। তিনটি সেট A, B এবং C এমনভাবে দেওয়া আছে যেন, $A \cap B = \Phi, A \cap C = \Phi$ এবং $C \subseteq B$ ভেনচিত্র অংকন করে সেটগুলোর ব্যাখ্যা দাও।

সমাধান:

দেওয়া আছে, A, B ও C তিনটি সেটের সম্পর্ক নিম্নরূপ-
$A \cap B = \Phi$, $A \cap C = \Phi$
এবং $C \subseteq B.$



উক্ত শর্তগুলো অনুসরণ করে ভেনচিত্রটি অংকিত হলো।
এখানে, $A \cap B = \Phi$ অর্থাৎ A ও B সেটের কোনো সাধারণ উপাদান নেই। সুতরাং A ও B সেটদ্বয় নিশ্ছেদ সেট। আবার, $A \cap C = \Phi$ অর্থাৎ A ও C সেটের মধ্যে কোনো সাধারণ নেই, সুতরাং A ও B সেটদ্বয় ও নিশ্ছেদ সেট। আবার $C \subseteq B$ অর্থাৎ C সেটের সকল উপাদানই B সেটের মধ্যে বিদ্যমান। সুতরাং ভেনচিত্রে, C সেটটি B সেটের ভিতরে অবস্থিত।

২১। দেওয়া আছে, $A = \{x : 2 < x \leq 5, x \in R\}$, $B = \{x : 1 \leq x < 3, x \in R\}$ এবং $C = \{2, 4, 5\}$। নিচের সেটগুলো সেট গঠন পদ্ধতিতে প্রকাশ কর।
(a) $A \cap B$ (b) $A' \cap B'$ এবং (c) $A' \cup B.$

সমাধান:

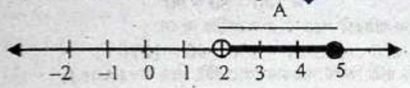
দেওয়া আছে, $A = \{x : 2 < x \leq 5, x \in R\}$
$B = \{x : 1 \leq x < 3, x \in R\}$
এবং $C = \{2, 4, 5\}$

(a) $A \cap B = \{x : 2 < x \leq 5, x \in R\} \cap \{x : 1 \leq x < 3, x \in R\}$
$= \{x : 2 < x < 3, x \in R\}$

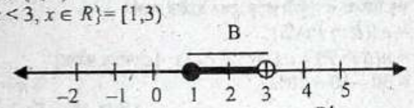
(b) এখানে সার্বিক সেট, $U = R$ এবং $A \cup B$
$= \{x : 2 < x \leq 5, x \in R\} \cup \{x : 1 \leq x < 3, x \in R\}$
$= \{x : 1 \leq x \leq 5, x \in R\}$
ডি মরগানের সূত্রানুসারে,
$A' \cap B' = (A \cup B)'$
$= U - (A \cup B)$
$= R - \{x : 1 \leq x \leq 5, x \in R\}$
$= \{x : x < 1$ অথবা $x > 5, x \in R\}$

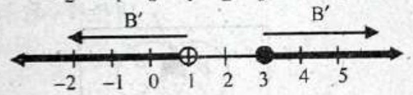
(c) এখানে, সার্বিক সেট $U = R$
$\therefore A' = R - \{x : 2 < x \leq 5, x \in R\}$
$= \{x : x \leq 2$ অথবা $x > 5, x \in R\}$
$B = \{x : 1 \leq x < 3, x \in R\}$
$\therefore A' \cup B$
$= \{x : x \leq 2$ অথবা $x > 5, x \in R\} \cup \{x : 1 \leq x < 3\ x \in R\}$
$= \{x : x < 3$ অথবা $x > 5\ x \in R\}$

বিকল্প সমাধান:
এখানে, $U = \{x : x \in R\}$
এখন, $A = \{x : 2 < x \leq 5, x \in R\} = (2,5]$

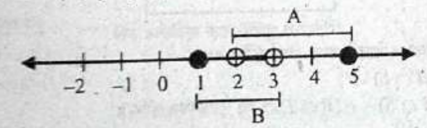


$A' = (-\infty, 2] \cup (5, \infty)$
$B = \{x : 1 \leq x < 3, x \in R\} = [1,3)$



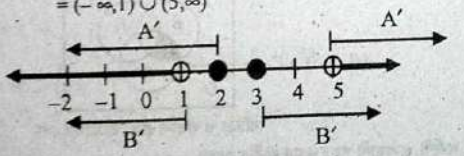


$B' = (-\infty, 1) \cup [3, \infty)$
(a) $A \cap B = (2,5] \cap [1,3) = (2,3)$



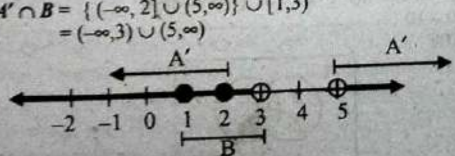
$\therefore A \cap B = \{x : 2 < x < 3, x \in R\}$ **(Ans.)**

(b) $A' \cap B' = \{(-\infty, 2] \cup (5, \infty)\} \cap \{(-\infty, 1) \cup [3, \infty)\}$
$= (-\infty, 1) \cup (5, \infty)$



$\therefore A' \cap B' = \{x : x < 1$ অথবা $x > 5, x \in R\}$ **(Ans.)**

(c) $A' \cap B = \{(-\infty, 2] \cup (5, \infty)\} \cup [1,3)$
$= (-\infty, 3) \cup (5, \infty)$



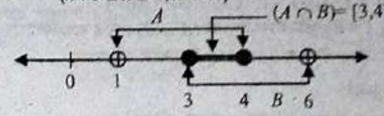
$\therefore A' \cup B = \{x : x < 3$ অথবা $x > 5\ x \in R\}$ **(Ans.)**

বি.দ্র.: অংশোভাবে বুঝার জন্য অনুশীলনী ১.২ এর প্রাথমিক আলোচনায় বন্ধনীর ব্যবহার এবং অনুশীলনী ৬.১ এর প্রাথমিক আলোচনায় সম্পর্ক প্রতীক ও বন্ধনীর ছক দেখে নাও।

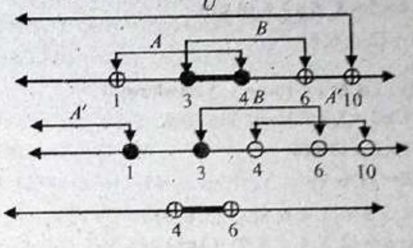
২২। দেওয়া আছে $U = \{x : x < 10, x \in R\}$, $A = \{x : 1 < x \leq 4\}$ এবং $B = \{x : 3 \leq x < 6\}$ নিচের সেটগুলো সেট গঠন পদ্ধতিতে প্রকাশ কর:
(a) $A \cap B$ (b) $A' \cap B$ (c) $A \cap B'$ এবং (d) $A' \cap B'$

সমাধান:
দেওয়া আছে, $U = \{x : x < 10, x \in R$
$A = \{x : 1 < x \leq 4\}$
$B = \{x : 3 \leq x < 6\}$

(a) $A \cap B = \{x \in A$ এবং $x \in B, x \in R\}$
$= \{x : 1 < x \leq 4$ এবং $3 \leq x < 6, x \in R\}$
$= \{x : 3 \leq x \leq 4, x \in R\}$

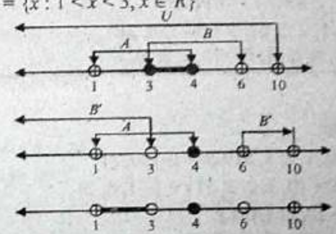


(b) $A' \cap B = \{x : x \in A'$ এবং $x : x \in B, x \in R\}$
$= \{x : -\infty < x \leq 1$ অথবা $4 < x < 10\} \cap \{x : 3 \leq x < 6, x \in R\}$
$= \{x : 4 < x < 6, x \in R\}$



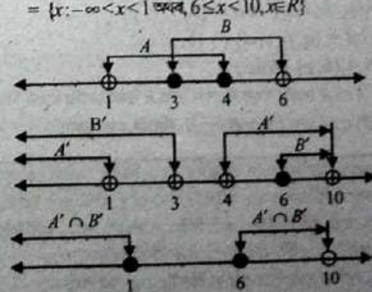
$A' \cap B$
(4, 6)

(c) $A \cap B' = \{x : x \in A$ এবং $x : x \in B', x \in R\}$
$= \{x : 1 < x \leq 4\}$ এবং $\{x : -\infty < x < 3$ অথবা $6 \leq x < 10, x \in R\}$
$= \{x : 1 < x \leq 4\} \cap \{x : -\infty < x < 3 \cup 6 \leq x < 10\}$
$= \{x : 1 < x < 3, x \in R\}$



$A \cap B'$
(1, 3)

(d) $A' \cap B' = \{x : x \in A'$ এবং $x \in B', x \in R\}$
$= \{x : -\infty < x < 1$ অথবা $4 < x < 10$ এবং $-\infty < x < 3$ অথবা $6 \leq x < 10\}$
$= \{x : -\infty < x < 1$ অথবা $6 \leq x < 10, x \in R\}$



$(-\infty, 1)$ $[-6, 10)$

২৩। নিম্নে A ও B সেট দেওয়া আছে। প্রতিক্ষেত্রে $A \cup B$ নির্ণয় কর এবং যাচাই কর যে $A \subset (A \cup B)$ এবং $B \subset (A \cup B)$

(i) $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ এবং $B = \{-3, 0, 3\}$

(ii) $A = \{x : x \in N, x < 10$ এবং x, 2 এর গুণিতক$\}$ এবং

$B = \{x : x \in N, x < 10$ এবং x, 3 এর গুণিতক$\}$

সমাধান:

(i) দেওয়া আছে,

$A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ এবং $B = \{-3, 0, 3\}$

এখন, $A \cup B = \{-2, -1, 0, 1, 2\} \cup \{-3, 0, 3\}$

$\therefore A \cup B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ **(Ans.)**

দেখা যাচ্ছে, A ও B সেটের সকল উপাদান $(A \cup B)$ সেটের মধ্যে বিদ্যমান।

$\therefore$ $A \subset (A \cup B)$ এবং $B \subset (A \cup B)$ [যাচাই করা হলো]

(ii) দেওয়া আছে,

$A = \{x : x \in N, x < 10$ এবং x, 2 এর গুণিতক$\}$

এখন, $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \ldots \ldots\}$

$1 \times 2 = 2,\ 2 \times 2 = 4,\ 3 \times 2 = 6$

$4 \times 2 = 8,\ 5 \times 2 = 10 \not< 10$

$\therefore A = \{2, 4, 6, 8\}$

আবার,

$B = \{x : x \in N, x < 10$ এবং x, 3 এর গুণিতক$\}$

$1 \times 3 = 3, 2 \times 3 = 6,\ 3 \times 3 = 9.$

$4 \times 3 = 12 \not< 10$

$\therefore$ $B = \{3, 6, 9\}$

এখন, $A \cup B = \{2, 4, 6, 8\} \cup \{3, 6, 9\}$

$\therefore A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9\}$ **(Ans.)**

দেখা যাচ্ছে $A \cup B$ সেটের মধ্যে A ও B উভয় সেটের সকল উপাদন বিদ্যমান।

$\therefore$ $A \subset (A \cup B)$ এবং $B \subset (A \cup B)$ **[যাচাই করা হলো]**

২৪। নিম্নের সেটগুলো ব্যবহার করে $A \cap B$ নির্ণয় কর এবং যাচাই কর যে, $(A \cap B) \subset A$ এবং $(A \cap B) \subset B$

(i) $A = \{0, 1, 2, 3, 5\}$, $B = \{-1, 0, 2\}$

(ii) $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{b, x, c, y\}$

সমাধান:

(i) দেওয়া আছে,

$A = \{0, 1, 2, 3, 5\}$ ও $B = \{-1, 0, 2\}$

এখন, $A \cap B = \{0, 1, 2, 3, 5\} \cap \{-1, 0, 2\}$

$\therefore A \cap B = \{0, 2\}$ **(Ans.)**

দেখা যাচ্ছে, $A \cap B$ সেটের সকল উপাদান A ও B উভয় সেটের মধ্যেই বিদ্যমান।

$\therefore (A \cap B) \subset A$ এবং $(A \cap B) \subset B$ **[যাচাই করা হলো]**

(ii) দেওয়া আছে,

$A = \{a, b, c, d\}$ ও $B = \{b, x, c, y\}$

এখন, $A \cap B = \{a, b, c, d\} \cap \{b, x, cy\}$

$\therefore A \cap B = \{b, c\}$ **(Ans.)**

দেখা যাচ্ছে, $A \cap B$ সেটের সকল উপাদান A ও B উভয় সেটের মধ্যেই বিদ্যমান।

$\therefore (A \cap B) \subset A$ এবং $(A \cap B) \subset B$ **[যাচাই করা হলো]**

২৫। আনোয়ারা মহাবিদ্যালয়ের ছাত্রীদের মধ্যে বিচিত্রা, সন্ধানী ও পূর্বাণী পত্রিকার পাঠ্যাভ্যাস সম্পর্কে পরিচালিত এক সমীক্ষায় দেখা গেল 60% ছাত্রী বিচিত্রা, 50% ছাত্রী সন্ধানী, 50% ছাত্রী পূর্বাণী, 30% ছাত্রী বিচিত্রা ও সন্ধানী, 30% ছাত্রী বিচিত্রা ও পূর্বাণী, 20% ছাত্রী সন্ধানী ও পূর্বাণী এবং 10% ছাত্রী তিনটি পত্রিকাই পড়ে।

(i) শতকরা কতজন ছাত্রী উক্ত পত্রিকা তিনটির কোনটিই পড়ে না?

(ii) শতকরা কতজন ছাত্রী উক্ত পত্রিকাগুলোর মধ্যে কেবল দুইটি পড়ে?

(i) এর সমাধান:

ধরি, সকল ছাত্রীর সেট U, বিচিত্রা পড়া ছাত্রীর সেট B, সন্ধানী পড়া ছাত্রীর সেট S ও পূর্বাণী পড়া ছাত্রীর সেট P.

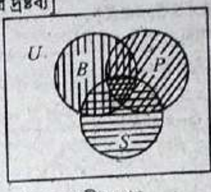
$\therefore$ শতকরা $n(U) = 100, n(B) = 60, n(S) = 50, n(P) = 50,$

$n(B \cap S) = 30, n(B \cap P) = 30,$

$n(P \cap S) = 20,\ n(P \cap B \cap S) = 10$

(১) তিনটি পত্রিকার অন্তত একটি পড়ে এমন শিক্ষার্থীর সেট,

$(B \cup P \cup S)$ [ভেনচিত্র দ্রষ্টব্য]



$\therefore$ তিনটির কোনোটিই পড়ে না এমন ছাত্রী সংখ্যা,

$n(U) - n(B \cup P \cup S)$ [ভেনচিত্রের সাদা অংশ]

এখন, $n(B \cup P \cup S) = n(B) + n(P) + n(S) - n(B \cap P) - n(B \cap S) - n(P \cap S) + n(B \cap P \cap S)$

$= 60 + 50 + 50 - 30 - 30 - 20 + 10$

$= 170 - 80 = 90$

$\therefore$ কোনো পত্রিকাই পড়ে না এমন ছাত্রীর সংখ্যা

$n(U) - n(B \cup P \cup S) = 100 - 90 = 10\%$

$\therefore$ 10% ছাত্রী তিনটি পত্রিকার কোনোটিই পড়ে না। **(Ans.)**

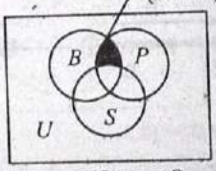
(ii) এর সমাধান:

শুধু বিচিত্রা ও পূর্বাণী পড়ে এমন ছাত্রীর সংখ্যা

$= n\{(B \cap P) \setminus S\}$

$= n(B \cap P) - n(B \cap P \cap S)$ [ভেনচিত্র দ্রষ্টব্য]

$= 30 - 10 = 20\%$



বিচিত্রা ও পূর্বাণী পড়া ছাত্রীদের সেট

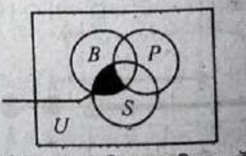
শুধু বিচিত্রা ও সন্ধানী পড়ে এমন ছাত্রীর সংখ্যা

$= n\{(B \cap S) \setminus P\}$

$= n(B \cap S) - n(B \cap P \cap S)$ [ভেনচিত্র দ্রষ্টব্য]

$= 30 - 10$

$= 20\%$ **(Ans.)**



বিচিত্রা ও সন্ধানী পড়া ছাত্রীদের সেট

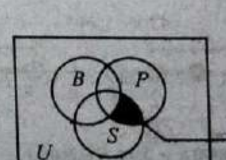
শুধু পূর্বাণী ও সন্ধানী পড়ে এমন ছাত্রীর সংখ্যা

$= n\{(P \cap S) \setminus B\}$

$= n(P \cap S) - n(P \cap B \cap S)$ [ভেনচিত্র দ্রষ্টব্য]

$= 20 - 10$

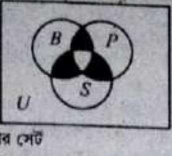
$= 10\%$



পূর্বাণী ও সন্ধানী পড়া ছাত্রীদের সেট

$\therefore$ কেবল দুইটি পত্রিকা পড়ে এমন ছাত্রীর সংখ্যা

$20 + 20 + 10 = 50\%$ [ভেনচিত্র দ্রষ্টব্য]



কেবল দুটি পত্রিকা পড়া ছাত্রীর সেট

Ans: 50% ছাত্রী দুইটি পত্রিকা পড়ে।

২৬। $A = \{x : x \in R$ এবং $x^2 - (a+b)x + ab = 0\}$
$B = \{1, 2\}$ এবং $C = \{2, 4, 5\}$
ক. A সেটের উপাদানসমূহ নির্ণয় কর।
খ. দেখাও যে, $P(B \cap C) = P(B) \cap P(C)$
গ. প্রমাণ কর যে, $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

(ক) এর সমাধান:

দেওয়া আছে, $A = \{x : x \in R$ এবং $x^2 - (a+b)x + ab = 0\}$

এখন, $x^2 - (a+b)x + ab = 0$

বা, $x^2 - ax - bx + ab = 0$

বা, $x(x-a) - b(x-a) = 0$

বা, $(x-a)(x-b) = 0$

$\therefore x = a$ ও $x = b$

$\therefore A = \{a, b\}$ **(Ans.)**

(খ) এর সমাধান:

এখানে, $B = \{1, 2\}$ এবং $C = \{2, 4, 5\}$ $\therefore B \cap C = \{2\}$

এখন, $P(B) = \{\{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \Phi\}$

ও $P(C) = \{\Phi, \{2\}, \{4\}, \{5\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{4,5\}, \ \{2,4,5\}\}$

এবং $P(B \cap C) = \{\{2\}, \Phi\}$

আবার, $P(B) \cap P(C) = \{\{2\}, \Phi\}$

সুতরাং, $P(B \cap C) = P(B) \cap P(C)$ **[দেখানো হল]**

(গ) এর সমাধান:

এখানে, $B \cup C = \{1,2\} \cup \{2,4,5\} = \{1,2,4,5\}$

এখন, $A \times (B \cup C) = \{a,b\} \times \{1, 2, 4, 5\}$
$= \{(a,1), (a,2), (a,4), (a,5), (b,1), (b,2), (b,4), (b,5)\}$

এখন, $A \times B = \{a,b\} \times \{1,2\}$
$= \{(a,1), (a,2), (b,1), (b,2)\}$

ও $A \times C = \{a, b\} \times \{2, 4, 5\}$
$= \{(a,2), (a,4), (a,5), (b,2), (b,4), (b,5)\}$

$\therefore (A \times B) \cup (A \times C)$
$= \{(a,1), (a,2), (b,1), (b,2)\} \cup \{(a,2), (a,4), (a,5), (b,2), (b,4), (b,5)\}$
$= \{(a,1), (a,2), (a,4), (a,5), (b,1), (b,2), (b,4), (b,5)\}$

$\therefore A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ **[প্রমাণিত]**

২৭। একটি শ্রেণির 100 জন ছাত্রের মধ্যে 42 জন ফুটবল, 46 জন ক্রিকেট এবং 39 জন হকি খেলে। এদের মধ্যে 13 জন ফুটবল ও ক্রিকেট, 14 জন ক্রিকেট ও হকি এবং 12 জন ফুটবল ও হকি খেলতে পারে। এছাড়া 7 জন কোনো খেলায় পারদর্শী নয়–
ক. উল্লিখিত তিনটি খেলায় পারদর্শী এমন ছাত্রদের সেট এবং কোনো খেলায় পারদর্শী নয় এমন ছাত্রদের সেট ভেনচিত্রে দেখাও-
খ. কতজন ছাত্র উল্লিখিত তিনটি খেলায় পারদর্শী তা নির্ণয় কর।
গ. কতজন ছাত্র কেবলমাত্র একটি খেলায় পারদর্শী এবং কতজন অন্তত দুইটি খেলায় পারদর্শী?

(ক) এর সমাধান:

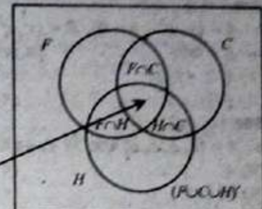
ধরি, ঐ শ্রেণির সকল ছাত্রের সেট U, ফুটবল খেলোয়াড়দের সেট F, ক্রিকেট খেলোয়াড়দের সেট C ও হকি খেলোয়াড়দের সেট H, অনুসারে,

$n(U) = 100, n(F) = 42, n(C) = 46, n(H) = 39,$

$n(F \cup C) = 13, n(C \cup H) = 14, n(F \cup H) = 12,$

$n(F \cup C \cup H)' = 7$

ভেনচিত্র,



এখানে $(F \cup C \cup H)'$ হলো কোনো খেলায় পারদর্শী নয় এমন ছাত্রদের সেট।

(খ) এর সমাধান:

তিনটি খেলায় পারদর্শী ছাত্রদের $(F \cap C \cap H)$ সেট।

আমরা জানি, $n(F \cup C \cup H)' = n(U) - n(F \cup C \cup H)$

বা, $n(F \cup C \cup H) = n(U) - n(F \cup C \cup H)'$
$= 100 - 7 = 93$

এখন, $n(F \cup C \cup H) = n(F) + n(C) + n(H) - n(F \cap C) - n(C \cap H) - n(F \cap H) + n(F \cap C \cap H)$

বা, $93 = 42 + 46 + 39 - 13 - 14 - 12 + n(F \cap C \cap H)$

বা, $93 = 88 + n(F \cap C \cap H)$

$\therefore n(F \cap C \cap H) = 93 - 88 = 5$

$\therefore$ তিনটি খেলায় পারদর্শী 5 জন **(Ans.)**

(গ) এর সমাধান:

শুধু ফুটবল খেলোয়াড়ের সংখ্যা,
$= n(F) - n(F \cap C) - n(F \cap H) + n(F \cap C \cap H)$
$= 42 - 13 - 12 + 5 = 22$

শুধু ক্রিকেট খেলোয়াড়ের সংখ্যা
$= n(C) - n(F \cap C) - n(C \cap H) + n(F \cap C \cap H)$
$= 42 - 13 - 14 + 5 = 24$

শুধু হকি খেলোয়াড়ের সংখ্যা
$= n(H) - n(F \cap H) - n(C \cap H) + n(F \cap C \cap H)$
$= 39 - 12 - 14 + 5 = 18$

$\therefore$ শুধু একটি খেলায় পারদর্শী $= (22 + 24 + 18) = 64$ জন।

কেবল ফুটবল ও ক্রিকেট খেলে $= n(F \cap C) - n(F \cap C \cap H)$
$= 13 - 5 = 8$ জন।

কেবল ক্রিকেট ও হকি খেলে $= n(C \cap H) - n(F \cap C \cap H)$
$= 14 - 5 = 9$ জন।

কেবল ফুটবল ও হকি খেলে $= n(F \cap H) - n(F \cap C \cap H)$
$= 12 - 5 = 7$ জন।

$\therefore$ কেবল মাত্র দুইটি খেলায় পারদর্শী ছাত্রের সংখ্যা $= (4 + 9 + 7)$ জন
$= 24$ জন।

আবার, তিনটি খেলায় পারদর্শী ছাত্রের সংখ্যা $= 5$ জন

$\therefore$ অন্তত দুইটি খেলায় পারদর্শী ছাত্রের সংখ্যা $= 24 + 5 = 29$ জন

উত্তর: 64 জন এবং 29 জন।

অনুশীলনী-১.২

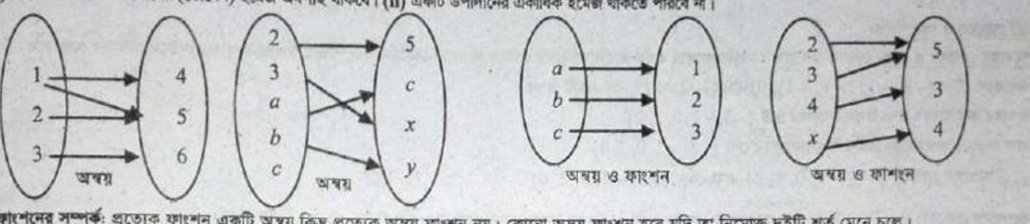
প্রাথমিক আলোচনা

অন্বয়: অন্বয় বলতে সাধারণত কোনো সম্পর্ককে বোঝায়। সেট বা সংখ্যার জগতে যেকোনো দুইটি সেট এর মধ্যে যেকোনো সম্পর্কই অন্বয়। সকল অন্বয় ফাংশন নয় কারণ ফাংশন হতে অন্বয়ের সুনির্দিষ্ট রূপ বা কাঠামো থাকতে হবে।

অন্বয়ের বৈশিষ্ট্য: (i) যেকোনো ধরনের সম্পর্কই অন্বয়। (ii) অন্বয়ের কোনো উপাদান কারও সাথে সম্পর্কিত নাও হতে পারে।

ফাংশন: ফাংশন হলো বিশেষ প্রকারের অন্বয়। যদি কোনো অন্বয়ে একই ১ম উপাদান বিশিষ্ট একাধিক ক্রমজোড় না থাকে তবে ঐ অন্বয়কে ফাংশন বলে। সুতরাং প্রত্যেক ফাংশনই অন্বয়।

বৈশিষ্ট্য: (i) ফাংশনের প্রতিটি উপাদানের (ডোমেন) ইমেজ অবশ্যই থাকবে। (ii) একটি উপাদানের একাধিক ইমেজ থাকতে পারবে না।

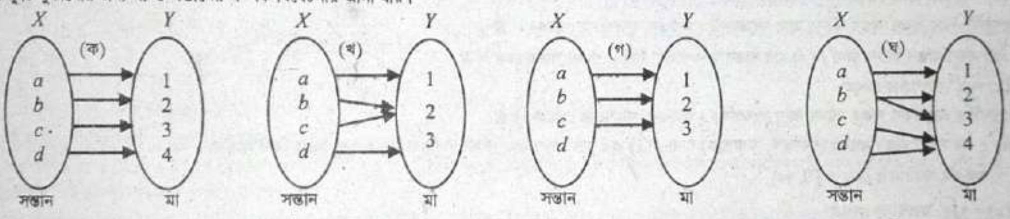


অন্বয় ও ফাংশনের সম্পর্ক: প্রত্যেক ফাংশন একটি অন্বয় কিন্তু প্রত্যেক অন্বয় ফাংশন নয়। কোনো অন্বয় ফাংশন হবে যদি তা নিম্নোক্ত দুইটি শর্ত মেনে চলে।
যথা: যদি X ও Y দুইটি সেট হয় এবং $F: X \rightarrow Y$ দ্বারা নির্দেশিত হয় তাহলে F ফাংশন হবে যদি নিম্নোক্ত শর্তদ্বয় পূরণ করে।

শর্ত: (১) X এর প্রত্যেকটি উপাদান Y এর কোনো না কোনো উপাদানের সাথে অবশ্যই সম্পর্ক করতে হবে।

(২) X এর প্রত্যেকটি উপাদান Y এর একাধিক উপাদানের সাথে সম্পর্ক করতে পারবেনা। কিন্তু X এর একাধিক উপাদান Y এর একটি উপাদানের সাথে সম্পর্ক করতে বাধা নেই। (ডোমেন রেঞ্জকে F ডোমেন এবং সার্বিক এই সম্পর্ক দ্বারা বুঝান হবে)

এ শর্ত দু'টি বুঝানোর জন্য মা ও সন্তানের সম্পর্ক বিবেচনায় আনা যায়।



অন্বয় ও ফাংশন | অন্বয় ও ফাংশন | অন্বয় কিন্তু ফাংশন নয় | অন্বয় কিন্তু ফাংশন নয়

ব্যাখ্যা: (ক) নং অন্বয় শর্ত-১ ও শর্ত-২ পূরণ করে তাই একই সাথে অন্বয় ও ফাংশন (এখানে একজন সন্তানকে এক-এক জন মায়ের সাথে সম্পর্ক দেখানো হয়েছে)

(খ) নং অন্বয় উভয় শর্ত পূরণ করে তাই একই-সাথে অন্বয় ও ফাংশন। এখানে X-এর দুইটি উপাদান (b,c) Y এর একটি উপাদানের সাথে সম্পর্ক দেখানো হয়েছে। (দুই সন্তানের মা একজন হতে পারে এতে কোনো সমস্যা নেই)

(গ) নং অন্বয় শর্ত-১ পালন করে না। তাই এটি অন্বয় কিন্তু ফাংশন নয়। এখানে X এর উপাদান d এর সাথে Y এর উপাদানের কোনো সম্পর্ক নেই (এমন কোনো সন্তান নেই যার মা নেই অর্থাৎ মায়ের গর্ভে জন্মগ্রহণ করেনি)

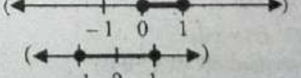
(ঘ) নং অন্বয় শর্ত-২ পালন করে না। তাই এটি অন্বয় কিন্তু ফাংশন নয়। এখানে X এর একটি উপাদান (b) Y এর দুই দুইটি উপাদানের সাথে সম্পর্কিত।
(বাস্তবে এমন কোনো সন্তান নেই যে দুইজন মায়ের গর্ভে অবস্থান করেছে অর্থাৎ প্রত্যেক সন্তানের জন্মদাতা মা একজনই)

বন্ধনীর ব্যবহার

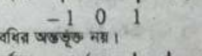
কোনো ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জকে সাধারণত ব্যবধি আকারে প্রকাশ করা হয়। ব্যবধিতে প্রথম বন্ধনী '( )' এবং তৃতীয় বন্ধনী '[ ]' কিংবা উভয়টি যুগপৎভাবে ব্যবহার করা হয়। এক্ষেত্রে তৃতীয় বন্ধনী দ্বারা '[ ]' অন্তর্ভূক্ত এবং প্রথম বন্ধনী দ্বারা '( )' অন্তর্ভূক্ত নয় এমন সংখ্যা নির্দেশ করে।

সুতরাং (ক) ৩য় বন্ধনী [ ] দ্বারা কোনো ব্যবধি আবদ্ধ হলে ব্যবধির সবগুলো সংখ্যাই এর অন্তর্ভূক্ত।

উদাহরণ: (i) $[0, 1]$ এর অর্থ হলো ব্যবধিতে 0 ও 1 সহ এর মধ্যবর্তী সকল বাস্তব সংখ্যাই ব্যবধির অন্তর্ভূক্ত।

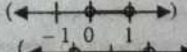


(ii) $[-1, 1]$ এর অর্থ হলো ব্যবধিতে -1 ও 1 সহ এর মধ্যবর্তী সকল বাস্তব সংখ্যাই ব্যবধির অন্তর্ভূক্ত।

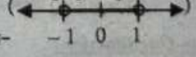


(খ) ১ম বন্ধনী দ্বারা '( )' কোনো ব্যবধি আবদ্ধ হলে শুধু ব্যবধির ১ম ও শেষ অর্থাৎ দুই প্রান্তের সংখ্যাদ্বয় ব্যবধির অন্তর্ভূক্ত নয়।

উদাহরণ: (i) $(0, 1)$ এর অর্থ হলো ব্যবধিতে ১ম ও শেষ সংখ্যা অর্থাৎ 0 ও 1 বিন্দু ছাড়া সকল বিন্দু ব্যবধির অন্তর্ভূক্ত



(ii) $(-1, 1)$ এর অর্থ হলো ব্যবধির ১ম ও শেষ সংখ্যা অর্থাৎ -1 ও 1 বিন্দু ছাড়া সকল বিন্দুই ব্যবধির অন্তর্ভূক্ত



১ম ও ৩য় বন্ধনীর যুগপৎ ব্যবহার: কোনো ব্যবধিতে ১ম ও ৩য় বন্ধনী যুগপৎভাবে ব্যবহৃত হতে পারে এক্ষেত্রে মনে রাখবে-

(i) ১ম বন্ধনীর চিহ্ন দ্বারা আবদ্ধ সংখ্যাটি ব্যবধির অন্তর্ভূক্ত নয়।

(ii) ৩য় বন্ধনীর চিহ্ন দ্বারা আবদ্ধ সংখ্যাটি ব্যবধির অন্তর্ভূক্ত।

উদাহরণ: $[0, 1)$ ব্যবধিতে 0 অন্তর্ভূক্ত কিন্তু 1 নয়।
$(0, 1]$ ব্যবধিতে 0 অন্তর্ভূক্ত নয় কিন্তু 1 অন্তর্ভূক্ত।

জেনে নাও:
(i) অসীম নির্দেশক প্রতীক '∞' সর্বদা প্রথম বন্ধনী দ্বারা আবদ্ধ হয়, কখনোই '∞' প্রতীককে তৃতীয় বন্ধনী দ্বারা আবদ্ধ করা যাবে না।
উদাহরণ: $(0, \infty)$, $[0, \infty)$, $(-\infty, 0)$, $(-\infty, 1]$, $(-\infty, \infty)$ ইত্যাদি।
(ii) প্রথম বন্ধনীকে খোলা ব্যবধি এবং তৃতীয় বন্ধনীকে বদ্ধ ব্যবধি বলা হয়।
(iii) অনেক সময় খোলা ব্যবধিতে প্রথম বন্ধনীর পরিবর্তে] [প্রতীক ব্যবহার করা হয়।
[এ ব্যাপারে বিস্তারিত বুঝার জন্য অনুশীলনী ৬.১ এর প্রাথমিক আলোচনা অংশ দেখে নাও।]

অসংজ্ঞায়িত রূপ:
(i) কোনো ঋণাত্মক সংখ্যার বর্গমূলের বাস্তব মান পাওয়া যায় না। যেমন: $\sqrt{-2}, \sqrt{-3}, \sqrt{-5}, \sqrt{-9}, \sqrt{-16}$ ইত্যাদির বাস্তব মান পাওয়া যায় না।
সুতরাং বর্গমূলের ভেতরে অবস্থানকারী সংখ্যা বা রাশিকে অবশ্যই অঋণাত্মক হতে হবে।
(ii) কোনো সংখ্যা বা রাশিকে শূন্য দ্বারা ভাগ করলে বাস্তব মান পাওয়া যায় না। যেমন: $\frac{1}{0} = \infty, \frac{2}{0} = \infty, \frac{x}{0} = \infty, \frac{-1}{0} = \infty, \frac{2x+3}{0} = \infty$

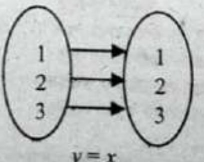
☑ ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয়:
অন্বয়ের ডোমেন ও রেঞ্জ: কোনো অন্বয়ের ক্রমজোড়গুলোর প্রথম উপাদানসমূহের সেটকে অন্বয়ের **ডোমেন** এবং দ্বিতীয় উপাদানসমূহের সেটকে অন্বয়ের **রেঞ্জ** বলে।
উদাহরণ: $S = (-3, -3) (-1, -1), (0, 0) (1, 2)$ ও $(2, 4)$ একটি অন্বয়।
অন্বয়ের ক্রমজোড়ের প্রথম উপাদানসমূহের সেট $\{-3, -1, 0, 1, 2\}$
এবং অন্বয়ের ক্রমজোড়ের দ্বিতীয় উপাদানসমূহের সেট $\{-3, -1, 0, 2, 4\}$
$\therefore S$ অন্বয়ের ডোমেন $\{-3, -1, 0, 1, 2\}$ এবং রেঞ্জ $\{-3, -1, 0, 2, 4\}$

ফাংশনের ডোমেন: $y = f(x)$ ফাংশনের **ডোমেন** বা আধার হলো x এর সে সকল মানের সেট যার জন্য $f(x)$ এর মান নির্ণয় সম্ভব।
ফাংশনের রেঞ্জ: ডোমেন x এর জন্য $f(x)$ এর যে সকল বাস্তব মান পাওয়া যায় এদের সেটকে **রেঞ্জ** বলে। অর্থাৎ $f(x)$ এর মানই রেঞ্জ।

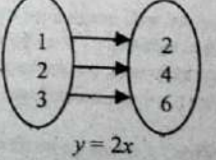
ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয়: সাধারণভাবে $y = f(x)$ ফাংশনের x এর মানকে ডোমেন এবং x এর জন্য প্রাপ্ত $f(x)$ বা y এর মানকে রেঞ্জ বলে। নিম্নে উদাহরণের সাহায্যে ব্যাখ্যা করা হলো।
(ক) $f(x) = x$ ফাংশনের ক্ষেত্রে–
(i) ফাংশনটি x এর সকল বাস্তব মানের জন্য সংজ্ঞায়িত। অতএব, ফাংশনের ডোমেন $= R$
(ii) x এর সকল বাস্তব মানের জন্য $f(x)$ এর বাস্তব মান পাওয়া যায়। $\therefore$ ফাংশনের রেঞ্জ $= R$
(খ) $f(x) = x^2$ ফাংশনের ক্ষেত্রে–
(i) ফাংশনটি x এর সকল বাস্তব মানের জন্য সংজ্ঞায়িত। অতএব, ফাংশনের ডোমেন $= R$
(ii) x এর সকল বাস্তব মানের (ধনাত্মক, ঋণাত্মক) জন্য $f(x)$ এর মান অঋণাত্মক সংখ্যা অর্থাৎ কখনোই শূন্য থেকে ছোট হবে না।
অতএব, ফাংশনের রেঞ্জ $= [0, \infty)$

(গ) $f(x) = \sqrt{x}$ ফাংশনের ক্ষেত্রে–
(i) আমরা জানি, ঋণাত্মক সংখ্যার বর্গমূলের বাস্তব মান পাওয়া যায় না। অতএব, $f(x) = \sqrt{x}$ ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত হবে যদি $x \geq 0$ হয়। অতএব, ফাংশনের ডোমেন $= [0, \infty)$
(ii) ফাংশনের ডোমেন অর্থাৎ $x \in [0, \infty)$ এর জন্য $f(x)$ অর্থাৎ $\sqrt{x}$ এর মান কখনোই ঋণাত্মক হবে না। অর্থাৎ $f(x) \geq 0$। অতএব, ফাংশনের রেঞ্জ $= [0, \infty)$

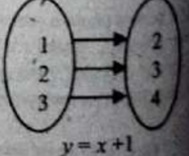
বিকল্প পদ্ধতিতে ফাংশনের রেঞ্জ নির্ণয়: সাধারণভাবে ডোমেন নির্ণয় অধিকতর সহজ। কোনো ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ যথাক্রমে বিপরীত ফাংশনের রেঞ্জ ও ডোমেন।
অর্থাৎ মূল ফাংশনের ডোমেন = বিপরীত ফাংশনের রেঞ্জ।
আবার, মূল ফাংশনের রেঞ্জ = বিপরীত ফাংশনের ডোমেন।
সুতরাং কোনো ফাংশনের রেঞ্জ নির্ণয় অর্থ হলো বিপরীত ফাংশনের ডোমেন নির্ণয়। নিম্নে উদাহরণের সাহায্যে বিষয়টি ব্যাখ্যা করা হলো।
(ক) মূল ফাংশন $y = x^2$
বিপরীত ফাংশন $y = x^2$
বা, $x^2 = y$
বা, $x = \pm\sqrt{y}$
$\therefore f^{-1}(x) = \pm\sqrt{x}$



$y = x$



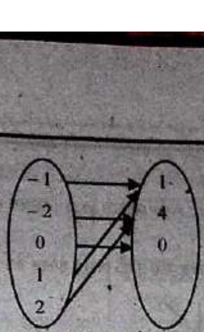
$y = 2x$



$y = x + 1$

$f^{-1}(x)$ এর বাস্তব মান পাওয়া যাবে যদি $x \geq 0$ হয়
$\therefore$ বিপরীত ফাংশনের ডোমেন $= [0, \infty)$ অর্থাৎ মূল ফাংশনের রেঞ্জ $= [0, \infty)$
(খ) $f(x) = \sqrt{x}$ ফাংশনের বিপরীত ফাংশন $f^{-1}(x) = x^2$ যখন $x \geq 0$
$\therefore$ বিপরীত ফাংশনের ডোমেন $= [0, \infty)$ অর্থাৎ মূল ফাংশনের রেঞ্জ $= [0, \infty)$

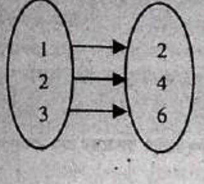
এক-এক ফাংশন (*One-One function*):
$f: x \rightarrow y$ ফাংশনের x এর একটি মানের জন্য y এর কেবলমাত্র একটি মান পাওয়া যায় তাকে এক-এক ফাংশন বলে।
সংজ্ঞা: যদি কোনো ফাংশনের অধীনে ডোমেনের ভিন্ন ভিন্ন সদস্যের ছবি সর্বদা ভিন্ন হয়, তবে ফাংশনটিকে এক-এক (*one-one*) ফাংশন বলে।
জেনে রাখা ভালো: যে কোনো একঘাত বিশিষ্ট সরল রৈখিক ফাংশন এক-এক ফাংশন। দ্বিঘাত সমীকরণ শর্তসাপেক্ষে এক-এক ফাংশন।



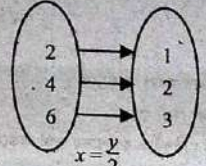
ফাংশন: $y = x^2$

সার্বিক ফাংশন বা অনটু ফাংশন (*Onto-function*): কোনো অন্বয় এবং তার বিপরীত অন্বয় উভয়ই ফাংশন হলে ফাংশনটি সার্বিক ফাংশন।

(ক)



ফাংশন: $y = 2x$

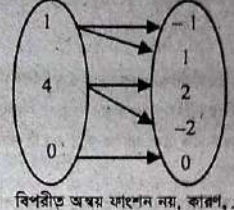


$x = \frac{y}{2}$

বিপরীত অন্বয় ও ফাংশন

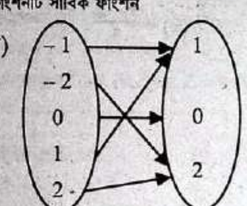
∴ ফাংশনটি সার্বিক ফাংশন

(খ)

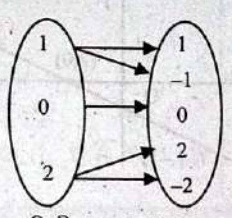


বিপরীত অন্বয় ফাংশন নয়, কারণ, x এর একটি উপাদান y এর দুইটি মানের সাথে সম্পর্কিত
$\therefore y = x^2$ ফাংশন সার্বিক নয়।

(গ)



ফাংশন: $y = |x|$



বিপরীত অন্বয় ফাংশন নয়

উল্লেখ্য যে,
(i) $y = x^2$ ফাংশনটি $R_+ \to R_+$ শর্তাধীনে এক-এক ও সার্বিক
(ii) $y = |x|$ ফাংশনটি $R_+ \to R_+$ শর্তাধীনে এক-এক ও সার্বিক।

অতএব, $y = |x|$ ফাংশন সার্বিক ফাংশন নয়।

সার্বিক বা অনটু (Onto) ফাংশন চেনার উপায়:

ডোমেন ও কোডোমেন: $f : x \to y$ এ কোনো ফাংশন বর্ণিত হলে x এর সেটকে ডোমেন এবং y এর সেটকে ফাংশনের কোডোমেন সেট বলে। কোনো ফাংশনের রেঞ্জ সেট = কোডোমেন সেট হলেই ফাংশনটি সার্বিক ফাংশন।

জেনে রাখা ভালো: (i) সকল একঘাত বিশিষ্ট সরলরৈখিক ফাংশনই এক-এক এবং সার্বিক।
(ii) দ্বিঘাতবিশিষ্ট ফাংশন শর্তসাপেক্ষে এক-এক এবং সার্বিক।

বিপরীত ফাংশন: মনে করি $f : A \to B$ একটি এক-এক এবং অনটু ফাংশন। তা হলে একটি ফাংশন $f^{-1}: B \to A$ বিদ্যমান আছে যেখানে প্রত্যেক $b \in B$ এর জন্য একটি অনন্য $f^{-1}(b) \in A$ বিদ্যমান। তবে f^{-1} কে f এর বিপরীত ফাংশন বলা হয়।

উদাহরণ: $f(x) = 3x + 1$ এর বিপরীত ফাংশন $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}(x - 1)$

বিকল্প সংজ্ঞা: $f : A \to B$ এবং $g : B \to A$ উভয়েই এক-এক এবং অনটু ফাংশন। তাহলে g কে f এর বিপরীত ফাংশন বলা হবে যদি $f(g(x)) = g(f(x)) = x$ হয়, যেখানে $f(x) \in B$ এবং $g(x) \in A$ এবং $g = f^{-1}$

কোনো ফাংশন এক-এক এবং সার্বিক হলেই শুধুমাত্র বিপরীত ফাংশন পাওয়া যায়

বিপরীত ফাংশন নির্ণয়ের নিয়ম: আমরা জানি, কোনো ফাংশনের বিপরীত ফাংশন পাওয়া যাবে যদি তা এক-এক এবং সার্বিক হয়। তাই প্রথমে ফাংশনটি এক-এক এবং সার্বিক কিনা তা যাচাই করতে হবে। অতঃপর নিম্নোক্ত যে কোনো পদ্ধতিতে বিপরীত ফাংশন নির্ণয় করা যাবে।

উদাহরণ: $f(x) = 2x + 3$; ফাংশনটি এক-এক এবং সার্বিক।

পদ্ধতি-১:
ধরি, $y = f(x) = 2x + 3$
এখন $y = f(x) \Rightarrow x = f^{-1}(y)$ ...... (1)
আবার, $y = 2x + 3$
$\Rightarrow y - 3 = 2x$
$\Rightarrow x = \frac{y-3}{2}$
$\Rightarrow f^{-1}(y) = \frac{y-3}{2}$ [(i) নং হতে]
$\therefore f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$

পদ্ধতি-২: ধরি $y = 2x + 3$
x ও y পরস্পর প্রতিস্থাপন করে পাই
$x = 2y + 3$
$\Rightarrow 2y = x - 3$
$\Rightarrow y = \frac{x-3}{2}$
$\therefore f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$

পদ্ধতি-৩: দেওয়া আছে, $f(x) = 2x + 3$
x এর পরিবর্তে $f^{-1}(x)$ বসিয়ে পাই
$\Rightarrow f(f^{-1}(x)) = 2f^{-1}(x) + 3$
$\Rightarrow x = 2f^{-1}(x) + 3$ $[\because f(f^{-1}(x)) = x]$
$\Rightarrow 2f^{-1}(x) = x - 3$
$\therefore f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$

বিভিন্ন প্রকার ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন:

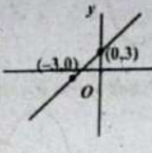
সরলরৈখিক ফাংশন: সরলরৈখিক ফাংশনের সাধারণ রূপ হলো $f(x) = mx + b$ যেখানে m ও b বাস্তব সংখ্যা।

এখানে দেখা যায়, সকল সরলরৈখিক ফাংশন একঘাত বিশিষ্ট সমীকরণ।

লেখ অঙ্কন: সরলরৈখিক ফাংশনের লেখ সর্বদা সরলরেখা। তাই লেখের উপরস্থ মাত্র দুইটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক জানা থাকলে যে কোনো সরলরৈখিক ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন করা ...

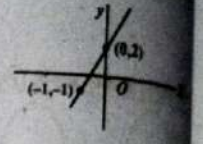
উদাহরণ: (i) $y = x + 3$;

x	0	−3
y	3	0



(ii) $y = 3x + 2$

x	0	−3
y	3	0

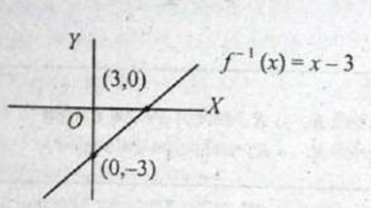


জেনে রাখা ভালো: (i) সকল সরলরৈখিক ফাংশন একঘাত বিশিষ্ট। (ii) সরলরৈখিক ফাংশনের লেখ সর্বদা সরলরেখা।
(iii) মাত্র দুইটি বিন্দুর স্থানাঙ্কের সাহায্যে সরলরৈখিক ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন করা যায়।

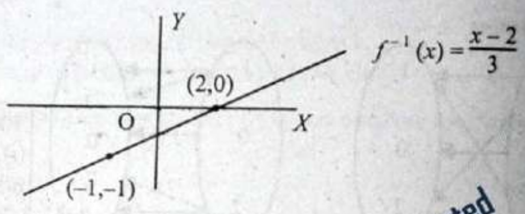
বি.দ্র.: সকল সরলরৈখিক ফাংশন এক-এক এবং সার্বিক বলে এর বিপরীত ফাংশনের লেখ পাওয়া যায়। বিপরীত ফাংশনের লেখ অঙ্কনের বিন্দুগুলোর স্থানাঙ্কের ক্রম ... পাওয়া যায়। যথা: উপরের উদাহরণে।

(ক) $y = x + 3$ এর বিপরীত ফাংশনের লেখ $(3,0)$ ও $(0,-3)$ বিন্দুগামী।

(খ) $y = 3x + 2$ এর বিপরীত ফাংশনের লেখ $(2,0)$ ও $(-1,-1)$ বিন্দুগামী।



'ক'



'খ'

$\boxed{\text{যেকোনো ফাংশন ও তার বিপরীত ফাংশনের লেখচিত্র } y = x \text{ রেখার সাপেক্ষে প্রতিসম}}$

দ্বিঘাত ফাংশন (*Quadratic function*):

সংজ্ঞা: দ্বিঘাত ফাংশন হলো একটি ফাংশন যা $y = ax^2 + bx + c$ সমীকরণ দ্বারা বর্ণিত যেখানে a, b, c বাস্তব সংখ্যা। এবং $a \neq 0$.

লেখচিত্র অঙ্কন: দ্বিঘাত ফাংশনের লেখচিত্র সর্বদাই বক্ররেখা এবং পরাবৃত্তাকার। তাই দ্বিঘাত ফাংশনের লেখ অঙ্কনে নিম্নোক্ত বিষয়গুলো মনে রাখা জরুরী।
(i) ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ সম্পর্কে ধারণা থাকতে হবে। (ii) ডোমেনের অন্তর্ভুক্ত একাধিক বিন্দুর স্থানাঙ্ক জানতে হবে।
(iii) প্রয়োজনে সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন বিন্দু নির্ণয় করতে হবে। (বিস্তারিত অনুশীলনী ৫.১ এবং অনুশীলনী ৫.৭ দ্রষ্টব্য)
মনে রাখতে হবে যে, দ্বিঘাত ফাংশন শর্তসাপেক্ষে এক-এক এবং সার্বিক। তাই দ্বিঘাত ফাংশনের বিপরীত ফাংশন সর্বদা পাওয়া যায় না।

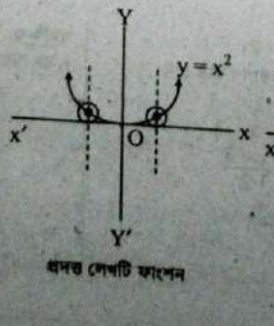
বৃত্তের সমীকরণ: $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$ একটি বৃত্তের সমীকরণ যার কেন্দ্র (p, q) এবং ব্যাসার্ধ r।

লেখচিত্র অঙ্কন: যেকোনো বৃত্তের সমীকরণকে উপরোক্ত আকারে লিখে এর কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় করে লেখচিত্র অঙ্কন করতে হবে।

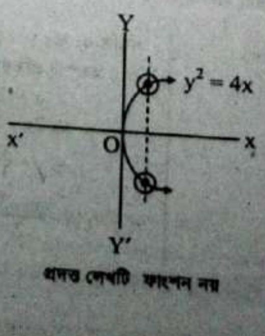
লেখচিত্র থেকে ফাংশন যাচাই:

কোন লেখচিত্র প্রতিটি বিন্দুর ক্রমজোড়ের ১ম উপাদানসমূহ ভিন্ন ভিন্ন হলে লেখচিত্রটি ফাংশন নির্দেশ করে, অন্যথায় তা ফাংশন হবে না। কোন ফাংশন $y = f(x)$ এর ... y অক্ষের সমান্তরালে অংকিত সরলরেখা লেখকে কেবল একটি বিন্দুতে ছেদ করে। একাধিক বিন্দুতে ছেদ করলে তা ফাংশন হবে না।

উদাহরণ:



প্রদত্ত লেখটি ফাংশন



প্রদত্ত লেখটি ফাংশন নয়

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনমূলক কাজের সমাধান

কাজ: [Ref: পাঠ্যবই পৃষ্ঠা: ২২]

Z সেটে "x হলো y এর বর্গ" অন্বয়টিকে ক্রমজোড়ের সেটরূপে বর্ণনা কর।

সমাধান: এক্ষেত্রে,

$Z =$ পূর্ণ সংখ্যার সেট $= \{..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}$

প্রশ্নমতে, Z সেটে "x হলো y এর বর্গ" অন্বয়টিকে ক্রমজোড়ের সেট রূপে বর্ণনা করতে হবে।

অর্থাৎ "x হলো y এর বর্গ" অন্বয়টির প্রতিটি ক্রমজোড়ের প্রতিটি সদস্য Z সেটের অন্তর্গত হবে, অর্থাৎ $x \in Z$ এবং $y \in Z$ হবে।

প্রদত্ত অন্বয়: x হলো y এর বর্গ অর্থাৎ $x = y^2$

এখন, Z সেটে প্রদত্ত অন্বয়টির ক্রমজোড়ের সেট A হলে

$A = \{(x, y) : x \in Z, y \in Z$ এবং $x = y^2\}$

$= \{(x, y) : x \in Z, y \in Z$ এবং $y = \pm\sqrt{x}\}$

এখন, $x = 0$ হলে $y = \pm\sqrt{0} = 0$; $\therefore$ ক্রমজোড়টি হবে $(0, 0) \in Z$

$x = 1$ হলে $y = \pm\sqrt{1} = \pm 1$

$\therefore$ ক্রমজোড় দুটি হবে $(1, 1) \in Z$ এবং $(1, -1) \in Z$

$x = 4$ হলে $y = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

$\therefore$ ক্রমজোড় দুটি হবে $(4, 2)$ এবং $(4, -2) \in Z$

$x = 9$ হলে $y = \pm\sqrt{9} = \pm 3$;

$\therefore$ ক্রমজোড় দুটি হবে $(9, 3) \in Z$ এবং $(9, -3) \in Z$

....

....

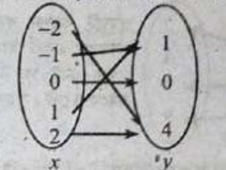
$\therefore$ উদ্দিষ্ট সেটটি হবে, $A = \{..., (9, -3), (4, -2), (1, -1), (0, 0), (1, 1), (4, 2), (9, 3), ...\}$

কাজ: [Ref: পাঠ্যবই পৃষ্ঠা: ২৩]

$F = \{(-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4)\}$ অন্বয়টি কী ফাংশন? এর ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। সম্ভব হলে f এর জন্য একটি সূত্র নির্ণয় কর।

সমাধান:

১ম অংশ: বর্ণিত F অন্বয়ের ক্রমজোড়গুলোর মধ্যকার সম্পর্ক হলো:



এখানে x এর প্রতিটি উপাদানের কমপক্ষে একটি ইমেজ (ছবি) y সেটে বিদ্যমান।

$\therefore$ বর্ণিত F অন্বয়টি ফাংশন।

২য় অংশ: F অন্বয়ের ক্রমজোড়গুলোর ১ম উপাদানের সেট $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ এবং দ্বিতীয় উপাদানের সেট $= \{1, 0, 4\}$

$\therefore$ ডোম $F = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

রেঞ্জ $F = \{1, 0, 4\}$

৩য় অংশ: F অন্বয়ে বর্ণিত ক্রমজোড়গুলোর মধ্যকার সম্পর্ক হলো:

$(-2, 4) \rightarrow (-2)^2 = 4$

$(-1, 1) \rightarrow (-1)^2 = 1$

$(0, 0) \rightarrow 0^2 = 0$

$(1, 1) \rightarrow 1^2 = 1$

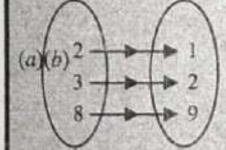
$(2, 4) \rightarrow 2^2 = 4$

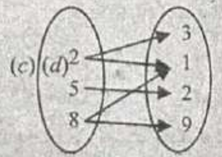
ক্রমজোড় (x, y) হলে এদের সম্পর্ক হবে $y = x^2$

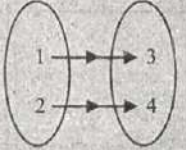
$\therefore F = \{(x, y) : x \in F, y \in F$ এবং $y = x^2\}$ এটি নির্ণেয় সূত্র।

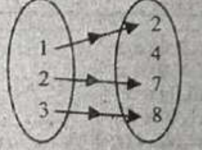
কাজ: [Ref: পাঠ্যবই পৃষ্ঠা: ২৭]

১। নিচের কোন অন্বয়টি ফাংশন নয়? যুক্তি দাও।









২। $f : x \rightarrow 4x + 2$ দ্বারা বর্ণিত ফাংশন যার ডোমেন $D = \{-1, 3, 5\}$ তাহলে ফাংশনটির ইমেজ সেট নির্ণয় কর।

৩। প্রদত্ত S অন্বয়টিকে তালিকা পদ্ধতিতে বর্ণনা কর এবং কোনগুলো ফাংশন তা নির্ধারণ কর। ডোম S ও রেঞ্জ S নির্ণয় কর। যেখানে $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

(ক) $S = \{(x, y) : x \in A, y \in A$ এবং $x + y = 1\}$ (খ) $S = \{(x, y) : x \in A, y \in A$ এবং $x - y = 1\}$

(গ) $S = \{(x, y) : x \in A, y \in A$ এবং $y = x^2\}$ (ঘ) $S = \{(x, y) : x \in A, y \in A$ এবং $y^2 = x\}$

৪। $f(x) = 2x - 1$ দ্বারা বর্ণিত ফাংশনের জন্য-

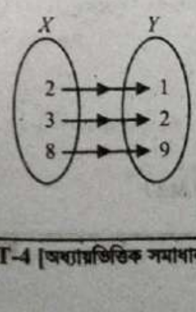
(ক) $F(-2), F(0)$ এবং $F(2)$ নির্ণয় কর (খ) $F\left(\frac{a+1}{2}\right)$ নির্ণয় কর, যেখানে $a \in R$

(গ) $F(x) = 5$ হলে, x নির্ণয় কর (ঘ) $F(x) = y$ হলে, x নির্ণয় কর যেখানে $y \in R$

(১) এর সমাধান:

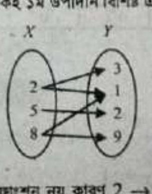
আমরা জানি কোনো অন্বয়ে একই ১ম উপাদান বিশিষ্ট একাধিক ক্রমজোড় না থাকে তবে ঐ অন্বয়কে ফাংশন বলে। এ মূলনীতি অনুসারে।

(a)



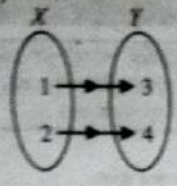
অন্বয়টি ফাংশন কারণ প্রতিটি উপাদানের কমপক্ষে একটি ইমেজ পাওয়া যায় এবং অন্বয়ে একই ১ম উপাদান বিশিষ্ট একাধিক ক্রমজোড় নেই। সুতরাং অন্বয়টি ফাংশন।

(b)



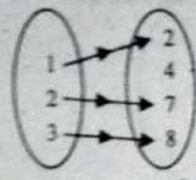
অন্বয়টি ফাংশন নয় কারণ $2 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 1$ অর্থাৎ X এর একটি উপাদান Y এর একাধিক উপাদানের সাথে সম্পর্কিত। এক কথায় একই ১ম উপাদান বিশিষ্ট একাধিক ক্রমজোড় বিদ্যমান। সুতরাং অন্বয়টি ফাংশন নয়।

(c)



অন্বয়টি ফাংশন কারণ প্রতিটি উপাদানের কমপক্ষে একটি ইমেজ পাওয়া যায় এবং অন্বয়ে একই ১ম উপাদান বিশিষ্ট একাধিক ক্রমজোড় নেই। সুতরাং অন্বয়টি ফাংশন।

(d)



অন্বয়টি ফাংশন কারণ প্রতিটি উপাদানের কমপক্ষে একটি ইমেজ পাওয়া যায় এবং অন্বয়ে একই ১ম উপাদান বিশিষ্ট একাধিক ক্রমজোড় নেই। সুতরাং অন্বয়টি ফাংশন।

জেনে রাখা ভালো: (i) ফাংশন হতে হলে X এর প্রত্যেকটি উপাদান Y এর কোনো না কোনো উপাদানের সাথে অবশ্যই সম্পর্ক থাকতে হবে।
(ii) কিন্তু Y এর কোনো উপাদান X এর সাথে সম্পর্কিত না হলে বাধা নেই অর্থাৎ তবুও ফাংশন হতে পারে।

২ এর সমাধান:

এখানে, $f : x \to 4x + 2$ অর্থাৎ $f(x) = 4x + 2$

এবং ডোমেন $D = \{-1, 3, 5\}$

-1 এর ইমেজ $f(-1) = 4(-1) + 2 = -2$

3 এর ইমেজ $f(3) = 4 \times 3 + 2 = 14$

5 এর ইমেজ $f(5) = 4 \times 5 + 2 = 22$

$\therefore$ নির্ণেয় ইমেজ সেট, $R = \{-2, 14, 22\}$. (Ans.)

৩ (ক) এর সমাধান:

দেওয়া আছে,

$S = \{(x, y) : x \in A, y \in A$ এবং $x + y = 1\}$

এবং $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

প্রত্যেক $x \in A$ এর জন্য $x + y = 1$ বা, $y = 1 - x$ এর মান নির্ণয় করি।

x	-2	-1	0	1	2
$y = 1 - x$	3	2	1	0	-1

এখানে,

$3 \notin A \therefore (-2, 3) \notin S$

$2 \in A \therefore (-1, 2) \in S$

$1 \in A \therefore (0, 1) \in S$

$0 \in A \therefore (1, 0) \in S$

$-1 \in A \therefore (2, -1) \in S$

$\therefore S = \{(x, y) : x \in A, y \in A$ এবং $x + y = 1\}$

$= \{(-1, 2), (0, 1), (1, 0), (2, -1)\}$

নির্ণিত S অন্বয়টিতে একই প্রথম উপাদানবিশিষ্ট দুইটি ভিন্ন ক্রমজোড় নেই। তাই S অন্বয়টি একটি ফাংশন।

এখানে S এর সদস্য ক্রমজোড়গুলোর প্রথম উপাদানসমূহের সেট $\{-1, 0, 1, 2\}$ এবং দ্বিতীয় উপাদানসমূহের সেট $\{-1, 0, 1, 2\}$

$\therefore$ ডোম $S = \{-1, 0, 1, 2\}$

$\therefore$ রেঞ্জ $S = \{-1, 0, 1, 2\}$

৩ (খ) এর সমাধান:

দেওয়া আছে, $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

প্রত্যেক $x \in A$ এর জন্য $x - y = 1$ বা, $y = x - 1$ নির্ণয় করি।

x	-2	-1	0	1	2
$y = x - 1$	-3	-2	-1	0	1

এখানে,

$-3 \notin A \quad \therefore (-2, -3) \notin S$

$-2 \in A \quad \therefore (-1, -2) \in S$

$-1 \in A \quad \therefore (0, -1) \in S$

$0 \in A \quad \therefore (1, 0) \in S$

$1 \in A \quad \therefore (2, 1) \in S$

$\therefore S = \{(x, y) : x \in A, y \in A$ এবং $x - y = 1\}$

$= \{(-1, -2), (0, -1), (1, 0), (2, 1)\}$

নির্ণিত S অন্বয়টিতে একই প্রথম উপাদানবিশিষ্ট দুইটি ভিন্ন ক্রমজোড় নেই। তাই S অন্বয়টি একটি ফাংশন।

এখানে, S এর সদস্য ক্রমজোড়গুলোর প্রথম উপাদানসমূহের সেট $\{-1, 0, 1, 2\}$ এবং দ্বিতীয় উপাদানসমূহের সেট $\{-2, -1, 0, 1\}$

$\therefore$ ডোম $S = \{-1, 0, 1, 2\}$ এবং রেঞ্জ $S = \{-2, -1, 0, 1\}$

৩ (গ) এর সমাধান:

দেওয়া আছে,

এখানে, $S = \{(x, y) : x \in A, y \in A$ এবং $y = x^2\}$

এবং $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

প্রত্যেক $x \in A$ এর জন্য $y = x^2$ এর মান নির্ণয় করি।

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4

এখন,

$4 \notin A \quad \therefore (-2, 4) \notin S$

$1 \in A \quad \therefore (-1, 1) \in S$

$0 \in A \quad \therefore (0, 0) \in S$

$1 \in A \quad \therefore (1, 1) \in S$

$4 \notin A \quad \therefore (2, 4) \notin S$

$\therefore S = \{(x, y) : x \in A, y \in A$ এবং $y = x^2\}$

$= \{(-1, 1), (0, 0), (1, 1)\}$

নির্ণিত S অন্বয়টিতে একই প্রথম উপাদানবিশিষ্ট দুইটি ভিন্ন ক্রমজোড় নেই। তাই S অন্বয়টি একটি ফাংশন।

এখানে, S এর সদস্য ক্রমজোড়গুলোর প্রথম উপাদানসমূহের সেট $\{-1, 0, 1\}$ এবং দ্বিতীয় উপাদানসমূহের সেট $\{0, 1\}$

$\therefore$ ডোম $S = \{-1, 0, 1\}$ এবং রেঞ্জ $S = \{0, 1\}$

৩ (ঘ) এর সমাধান:

দেওয়া আছে, $S = \{(x, y) : x \in A, y \in A$ এবং $y^2 = x\}$ এবং

$A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

প্রত্যেক $x \in A$ এর জন্য $y = \pm\sqrt{x}$ এর মান নির্ণয় করি।

x	-2	-1	0	1	2
$y = \pm\sqrt{x}$	$\pm\sqrt{-2}$	$\pm\sqrt{-1}$	0	± 1	$\pm\sqrt{2}$

এখানে, $\sqrt{-2}, -\sqrt{-2}, \sqrt{-1}$ এবং $-\sqrt{-1}$ অসংজ্ঞায়িত।

এবং $0 \in A \therefore (0, 0) \in S$

$1 \in A \quad \therefore (1, 1) \in S$

$-1 \in A \quad \therefore (1, -1) \in S$

$\sqrt{2} \notin A \quad \therefore \left(2, \sqrt{2}\right) \notin S$

$-\sqrt{2} \notin A \quad \therefore \left(2, -\sqrt{2}\right) \notin S$

$\therefore S = \{(x, y) : x \in A, y \in A$ এবং $y^2 = x\}$

$= \{(0, 0), (1, 1), (1, -1)\}$

নির্ণিত S অন্বয়টিতে একই প্রথম উপাদানবিশিষ্ট দুইটি ভিন্ন ক্রমজোড় আছে। তাই S অন্বয়টি ফাংশন নয়।

$\therefore S$ অন্বয়ের ডোম $= \{0, 1\}$ এবং S অন্বয়ের রেঞ্জ $= \{-1, 0, 1\}$

বি.দ্র.: কোনো অন্বয়ের ডোমেন ও রেঞ্জ বলতে সর্বদাই ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ বোঝায় না।

জেনে রাখা ভালো: $\sqrt{-1}$ সংখ্যাটি অবাস্তব এবং অসংজ্ঞায়িত। ... সংখ্যা নামক একটি ভিন্ন ধারণা দ্বারা এ জাতীয় সংখ্যাগুলোকে ... $\sqrt{-1}$ একটি জটিল সংখ্যা যাকে i দ্বারা প্রকাশ করা হয়। $i^2 = -1$

৪ (ক) এর সমাধান:

দেওয়া আছে, $F(x) = 2x - 1$

$\therefore F(-2) = 2.(-2) - 1 = -4 - 1 = -5$

$F(0) = 2.(0) - 1 = 0 - 1 = -1$

এবং $F(2) = 2.2 - 1 = 4 - 1 = 3$

__Ans.__ $-5, -1, 3$.

৪ (খ) এর সমাধান:

দেওয়া আছে, $F(x) = 2x - 1$

$$\therefore F\left(\frac{a+1}{2}\right) = 2\left(\frac{a+1}{2}\right) - 1$$

$= a + 1 - 1 = a$. (__Ans.__)

৪ (গ) এর সমাধান:

দেওয়া আছে, $F(x) = 2x - 1$

$\therefore 5 = 2x - 1 \quad [\because F(x) = 5]$

বা, $5 + 1 = 2x$

বা, $6 = 2x$

$\therefore x = 3$. **(Ans.)**

৪ (ঘ) এর সমাধান:

দেওয়া আছে, $F(x) = 2x - 1$

$\therefore y = 2x - 1 [\because F(x) = y]$

বা, $y + 1 = 2x$

বা, $2x = y + 1$

$\therefore x = \dfrac{y+1}{2}$. **(Ans.)**

১। নিম্নের প্রতিটি এক-এক ফাংশনের সংশ্লিষ্ট f^{-1} নির্ণয় কর। [Ref: [illegible]]

(ক) $f(x) = \dfrac{3}{x-1}, x \neq 1$ (খ) $f(x) = \dfrac{2x}{x-2}, x \neq 2$ (গ) $f : x \rightarrow \dfrac{2x+3}{2x-1}, x \neq \dfrac{1}{2}$

২। বর্ণিত ফাংশন $f(x) = \dfrac{4x-9}{x-2}, x \neq 2$ এর ক্ষেত্রে-

(ক) $f^{-1}(-1)$ এবং $f^{-1}(1)$ নির্ণয় কর। (খ) x এর মান নির্ণয় কর যেন $4f^{-1}(x) = x$

৩। বর্ণিত ফাংশন $f(x) = \dfrac{2x+2}{x-1}, x \neq 1$ এর জন্য

(ক) $f^{-1}(3)$ নির্ণয় কর। (খ) দেওয়া আছে $f^{-1}(p) = kp$, p এর সাপেক্ষে k কে প্রকাশ কর।

৪। নিম্নোক্ত প্রত্যেক ক্ষেত্রে প্রদত্ত সম্পর্ক F একটি ফাংশন কিনা তা নির্ণয় কর। F ফাংশন হলে এর ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর, উহা এক-এক কিনা তাও নির্ধারণ কর।

(ক) $F = \{(x, y) \in R^2 : y = x\}$ (খ) $F = \{(x, y) \in R^2 : y = x^2\}$

(গ) $F = \{(x, y) \in R^2 : y^2 = x\}$ (ঘ) $F = \left\{(x,y) \in R^2 : y = \sqrt{x}\right\}$

৫। (a) যদি $f : \{-2 -1, 0, 1, 2\} \rightarrow \{-8, -1, 0, 1, 8\}$ ফাংশনটি $f(x) = x^3$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত, দেখাও যে, f এক-এক এবং অনটু।

(b) $f : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow R$ একটি ফাংশন যা $f(x) = 2x + 1$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত, দেখাও যে, f এক-এক ফাংশন কিন্তু অনটু ফাংশন নয়।

১(ক) এর সমাধান:

$f(x) = \dfrac{3}{x-1}$

x এর পরিবর্তে $f^{-1}(x)$ বসিয়ে পাই,

$f(f^{-1}(x)) = \dfrac{3}{f^{-1}(x) - 1}$

বা, $x = \dfrac{3}{f^{-1}(x) - 1}$

বা, $f^{-1}(x) - 1 = \dfrac{3}{x}$

$\therefore f^{-1}(x) = \dfrac{3}{x} + 1 \quad ; x \neq 0$ (Ans)

বি.দ্র: যে সকল মানের জন্য ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত সেসব উল্লেখ করে দেয়া ভাল।

বিকল্প সমাধান:

দেওয়া আছে, $f(x) = \dfrac{3}{x-1}, x \neq 1$

ধরি, $y = f(x)$

তাহলে, $y = \dfrac{3}{x-1}$

বা, $x - 1 = \dfrac{3}{y}$

বা, $x = \dfrac{3}{y} + 1$ ……… (i)

এখানে, $y = f(x)$, তাহলে f^{-1} এর জন্য, $x = f^{-1}(y)$

$\therefore$ (i) নং থেকে পাই,

$f^{-1}(y) = 1 + \dfrac{3}{y}$

এখন, y এর স্থলে x স্থাপন করে পাই,

$f^{-1}(x) = 1 + \dfrac{3}{x}$. $\quad ; x \neq 0$ **[Ans.]**

বিকল্প সমাধান:

ধরি, $y = \dfrac{3}{x-1}$

x ও y পারস্পরিক পরিবর্তন করে পাই,

$x = \dfrac{3}{y-1}$

বা, $y - 1 = \dfrac{3}{x}$

বা, $y = \dfrac{3}{x} + 1$

$\therefore f^{-1}(x) = \dfrac{3}{x} + 1 \quad ; x \neq 0$ **[Ans.]**

১ (খ) এর সমাধান:

দেওয়া আছে, $f(x) = \dfrac{2x}{x-2}, x \neq 2$

x এর পরিবর্তে $f^{-1}(x)$ বসিয়ে পাই

$f(f^{-1}(x)) = \dfrac{2.f^{-1}(x)}{f^{-1}(x) - 2}$

বা, $x = \dfrac{2.f^{-1}(x)}{f^{-1}(x) - 2}$

বা, $x.f^{-1}(x) - 2x = 2.f^{-1}(x)$

বা, $x.f^{-1}(x) - 2.f^{-1}(x) = 2x$

বা, $f^{-1}(x)(x - 2) = 2x$

$\therefore f^{-1}(x) = \dfrac{2x}{x-2} \quad ; x \neq 2$ **[Ans.]**

বিকল্প সমাধান:

দেওয়া আছে, $f(x) = \dfrac{2x}{x-2}, x \neq 2$

ধরি, $y = f(x)$

তাহলে, $y = \dfrac{2x}{x-2}$

বা, $yx - 2y = 2x$
বা, $yx - 2x = 2y$
বা, $x(y-2) = 2y$

বা, $x = \frac{2y}{y-2}$ ……… (i)

এখানে, $y = f(x)$, তাহলে f^{-1} এর জন্য, $x = f^{-1}(y)$
$\therefore$ (i) নং থেকে পাই,

$f^{-1}(y) = \frac{2y}{y-2}, y \neq 2$

এখন, y এর স্থলে x স্থাপন করে পাই,

$f^{-1}(x) = \frac{2x}{x-2}, x \neq 2$ [Ans.]

১ (গ) এর সমাধান:

দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{2x+3}{2x-1}$

বা, $f(f^{-1}(x)) = \frac{2.f^{-1}(x)+3}{2.f^{-1}(x)-1}$
বা, $x.2f^{-1}(x) - x = 2f^{-1}(x) + 3$
বা, $f^{-1}(x)(2x-2) = x+3$
$\therefore f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2x-2}$

বিকল্প সমাধান:

দেওয়া আছে, $f : x \rightarrow \frac{2x+3}{2x-1}, x \neq \frac{1}{2}$

ধরি, $f : x \rightarrow y$

তাহলে, $y = \frac{2x+3}{2x-1}$
বা, $2yx - y = 2x + 3$
বা, $2yx - 2x = 2 + y$
বা, $x(2y-2) = 3 + y$

বা, $x = \frac{3+y}{2y-2}$

এখন, $f : x \rightarrow y$, তাহলে বিপরীত ফাংশন

$f^{-1} : y \rightarrow x$, যেখানে, $x = \frac{3+y}{2y-2}$

বা, $f^{-1} : y \rightarrow \frac{3+y}{2y-2}$

y এর স্থলে x স্থাপন করে পাই,

$f^{-1} : x \rightarrow \frac{3+x}{2x-2}$. [Ans.]

বি.দ্র. x ও y পরস্পর প্রতিস্থাপন করে $f^{-1}(x)$ নির্ণয় করা যায়।

২। বর্ণিত ফাংশন $f(x) = \frac{4x-9}{x-2}, x \neq 2$ এর ক্ষেত্রে
(ক) $f^{-1}(-1)$ এবং $f^{-1}(1)$ নির্ণয় কর।
(খ) x এর মান নির্ণয় কর যেন $4f^{-1}(x) = x$

সমাধান:

ধরি, $y = \frac{4x-9}{x-2}$

x ও y পরস্পর প্রতিস্থাপন করে পাই,

$x = \frac{4y-9}{y-2}$

বা, $xy - 2x = 4y - 9$
বা, $xy - 4y = 2x - 9$
বা, $y(x-4) = 2x - 9$
বা, $y = \frac{2x-9}{x-4}$

$\therefore f^{-1}(x) = \frac{2x-9}{x-4}$; $x \neq 4$ [Ans.]

বিকল্প সমাধান:

দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{4x-9}{x-2}, x \neq 2$

ধরি, $y = f(x)$

তাহলে, $y = \frac{4x-9}{x-2}$
বা, $yx - 2y = 4x - 9$
বা, $yx - 4x = 2y - 9$
বা, $x(y-4) = 2y - 9$

বা, $x = \frac{2y-9}{y-4}$

এখানে, $y = f(x)$ তাহলে f^{-1} এর জন্য, $x = f^{-1}(y)$.
$\therefore$ (i) নং থেকে পাই,

$f^{-1}(y) = \frac{2y-9}{y-4}$

y এর স্থলে x বসিয়ে পাই,

$f^{-1}(x) = \frac{2x-9}{x-4}$ … ; $x \neq 4$ [Ans.]

২ (ক) এর সমাধান:

এখানে, $f^{-1}(x) = \frac{2x-9}{x-4}$

$\therefore f^{-1}(-1) = \frac{2(-1)-9}{-1-4}$

$= \frac{-2-9}{-5}$

$= \frac{11}{5}$. (Ans.)

এবং $f^{-1}(1) = \frac{2(1)-9}{1-4} = \frac{2-9}{-3} = \frac{7}{3}$ [Ans.]

২ (খ) এর সমাধান:

দেওয়া আছে, $4f^{-1}(x) = x$

বা, $4\left(\frac{2x-9}{x-4}\right) = x$ [(ii) নং থেকে মান বসিয়ে]

বা, $8x - 36 = x^2 - 4x$
বা, $x^2 - 4x - 8x + 36 = 0$
বা, $x^2 - 12x + 36 = 0$
বা, $x^2 - 6x - 6x + 36 = 0$
বা, $x(x-6) - 6(x-6) = 0$
বা, $(x-6)(x-6) = 0$
অর্থাৎ, $x - 6 = 0$ অথবা $x - 6 = 0$
$\therefore x = 6$ $\quad \therefore x = 6$

সুতরাং নির্ণেয় x এর মান 6. (Ans.)

৩। বর্ণিত ফাংশন $f(x) = \dfrac{2x+2}{x-1}, x \neq 1$ এর জন্য-

(ক) $f^{-1}(3)$ নির্ণয় কর।

(খ) দেওয়া আছে $f^{-1}(p) = kp$, p এর মাধ্যমে k কে প্রকাশ কর।

সমাধান:

দেওয়া আছে,

$$f(x) = \frac{2x+2}{x-1}, x \neq 1$$

x এর পরিবর্তে $f^{-1}(x)$ বসিয়ে পাই,

$$f(f^{-1}(x)) = \frac{2f^{-1}(x)+2}{f^{-1}(x)-1}$$

বা, $x.(f^{-1}(x)-1) = 2f^{-1}(x)+2$

বা, $x.f^{-1}(x) - x = 2f^{-1}(x) + 2$

বা, $f^{-1}(x)(x-2) = x+2$

$\therefore f^{-1}(x) = \dfrac{x+2}{x-2}$; $x \neq 2$ **(Ans.)**

বিকল্প সমাধান:

দেওয়া আছে, $f(x) = \dfrac{2x+2}{x-1}, x \neq 1$

ধরি, $y = f(x)$

তাহলে, $y = \dfrac{2x+2}{x-1}$

বা, $yx - y = 2x + 2$

বা, $yx - 2x = 2 + y$

বা, $x(y-2) = y + 2$

$x = \dfrac{y+2}{y-2}$ ……(i)

এখানে, $y = f(x)$, তাহলে f^{-1} এর জন্য, $x = f^{-1}(y)$

$\therefore$ (i) নং থেকে পাই,

$$f^{-1}(y) = \frac{y+2}{y-2}$$

y এর স্থলে x বসিয়ে পাই,

$f^{-1}(x) = \dfrac{x+2}{x-2}$ … ; $x \neq 2$ **(Ans.)**

৩ (ক) এর সমাধান:

(ii) নং থেকে পাই,

$$f^{-1}(x) = \frac{x+2}{x-2}$$

$\therefore f^{-1}(3) = \dfrac{3+2}{3-2} = \dfrac{5}{1} = 5.$ **[Ans]**

৩ (খ) এর সমাধান:

দেওয়া আছে, $f^{-1}(p) = kp$

(ii) নং থেকে পাই, $f^{-1}(p) = \dfrac{p+2}{p-2}$

বা, $\dfrac{p+2}{p-2} = kp$

$\therefore k = \dfrac{p+2}{p(p-2)}$. **(Ans.)**

৩ নং প্রশ্নের বিকল্প সমাধান:

দেওয়া আছে, $f(x) = \dfrac{2x+2}{x-1}, x \neq 1$

(ক) ধরি, $f^{-1}(3) = a$

বা, $f(a) = 3$

বা, $\dfrac{2a+2}{a-1} = 3$

বা, $2a + 2 = 3a - 3$

বা, $3a - 2a = 2 + 3$

$\therefore a = 5$

$\therefore f^{-1}(3) = 5.$

(খ) ধরি, $f^{-1}(p) = kp$

বা, $f(kp) = p$

বা, $\dfrac{2kp+2}{kp-1} = p$

বা, $2kp + 2 = kp^2 - p$

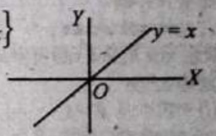
বা, $kp(p-2) = p + 2$

বা, $kp = \dfrac{p+2}{p-2}$

$\therefore k = \dfrac{p+2}{p(p-2)}; p \neq 2.$

৪ (ক) এর সমাধান:

দেওয়া আছে, $F = \{(x, y) \in R^2 : y = x\}$



এখানে $y = x$ যা $y = mx$ আকারের মূল বিন্দুগামী সরলরেখা। লেখ থেকে স্পষ্ট যে দুইটি সদস্যের একই প্রথম উপাদান নেই। অতএব, F একটি ফাংশন

আবার, সকল $x \in R$ এর জন্য $y = x$ সত্য অর্থাৎ x এর সকল বাস্তব মানের জন্য y এর বাস্তব মান পাওয়া যায়।

$\therefore$ ফাংশনের ডোম $= R$ এবং রেঞ্জ $= R$

এক-এক কিনা যাচাই করণ:

ধরি, $y = f(x) = x$

$a, b \in R$ এর জন্য $f(a) = a$ এবং $f(b) = b$

এখন $f(a) = f(b)$

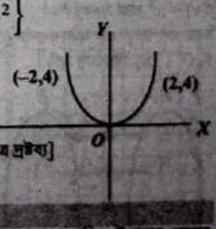
বা, $a = b$

$\therefore F$ এক এক ফাংশন

জেনে নাও: সকল সরল রৈখিক ফাংশন এক-এক।

৪ (খ) এর সমাধান:

দেওয়া আছে, $F = \{(x, y) \in R^2 : y = x^2\}$



এখানে $y = x^2$ যা $y = ax^2$ আকারের পরাবৃত্তের সমীকরণ। যেহেতু y অক্ষের সমান্তরাল কোনো রেখার ওপর লেখের দুইটি বিন্দু থাকেনা। তাই প্রদত্ত অম্বয়টি ফাংশন।

আবার, সকল $x \in R$ এর জন্য সর্বদা $y \geq 0$ [চিত্র দ্রষ্টব্য]

$\therefore$ ফাংশনের ডোমেন $= R$ এবং রেঞ্জ $= [0, \infty)$

বি.দ্র.: রেঞ্জ R_+ লেখা যাবে না কারণ, $0 \notin R_+$

এক-এক কিনা যাচাই করণ: প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেনের একাধিক উপাদান রেঞ্জের একটি উপাদানের সাথে সম্পর্কিত যেমন: $-1 \rightarrow 1, 1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 4, -2 \rightarrow 4$ সুতরাং F ফাংশনটি এক-এক নয়।

বিকল্প: x অক্ষের সমান্তরাল রেখা ফাংশনের লেখাকে একাধিক বিন্দুতে ছেদ করলে ফাংশন এক-এক নয়।

৪ (গ) এর সমাধান:

$F = \{(x, y) \in R^2 : y^2 = x\}$

$= \{(x, y) \in R^2 : y = \pm\sqrt{x}\}$

$= \{(1, 1), (1, -1), (4, 2), (4, -2), \dots \dots\}$

এখানে, F অন্বয়টি ফাংশন নয়। কারণ একই প্রথম উপাদানের জন্য ভিন্ন ভিন্ন দ্বিতীয় উপাদান আছে। যেমন: $(1, 1), (1, -1), (4, 2), (4, -2)$ ইত্যাদি।
অর্থাৎ $(1, 1) \in F$ হলে $(1, -1) \in F$.
সুতরাং F অন্বয়টি ফাংশন নয়।
যেহেতু ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় করতে বলা হয়েছে। তাই ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয়ের প্রয়োজন নেই। প্রদত্ত অন্বয়টি ফাংশন নয়, তাই এক-এক ফাংশন হওয়ার প্রশ্নই আসে না।
বি.দ্র: অন্বয়টির ডোমেন রেঞ্জ নির্ণয় করা সম্ভব।

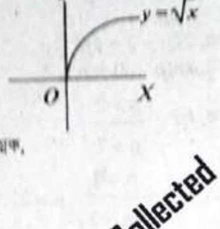
৪ (খ) এর সমাধান:

$F = \left\{(x, y) \in R^2 : y = \sqrt{x}\right\}$

সকল $x \geq 0$ এর জন্য $y = \sqrt{x}$ সংজ্ঞায়িত, যেমন:

$x = 1$ নিলে, $y = \sqrt{x}$ শর্তানুযায়ী $y = \sqrt{1} = 1$

$x = 4$ নিলে $y = \sqrt{4} = 2$



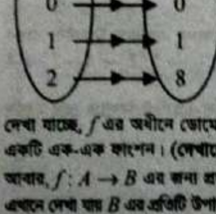
অর্থাৎ $(1, 1) \in F$ এবং $(4, 2) \in F$
সুতরাং F একটি ফাংশন।
শুধুমাত্র $x \geq 0$ এর জন্য F সংজ্ঞায়িত,
সুতরাং ডোম $F = [0, \infty)$
যেহেতু ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার বর্গমূল সর্বদাই ধনাত্মক,
সুতরাং রেঞ্জ $F = [0, \infty)$
আবার, যেকোনো x_1, x_2 ডোম F এর জন্য
$F(x_1) = F(x_2)$ হবে যদি $\sqrt{x_1} = \sqrt{x_2}$
বা, $x_1 = x_2$ হয়
$\therefore$ F ফাংশনটি এক-এক।

বি.দ্র.: রেঞ্জ R_+ লিখা যাবে না কারণ $0 \notin R_+$

জেনে নাও:
(*i*) বাস্তব সংখ্যা, $R = (-\infty, \infty) \therefore 0 \in R$
(*ii*) ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা, $R_+ = (0, \infty) \therefore 0 \notin R_+$
(*iii*) ঋণাত্মক বাস্তব সংখ্যা, $R_- = (-\infty, 0) \therefore 0 \notin R_-$
(*iv*) অঋণাত্মক বাস্তব সংখ্যা, $R_+ = [0, \infty) \therefore 0 \in R_+$
Ref: www.en.wikipedia.org/wiki/real_number#notation

৫। (*a*) যদি $f : \{-2 -1, 0, 1, 2\} \rightarrow \{-8, -1, 0, 1, 8\}$ ফাংশনটি দ্বারা $f(x) = x^3$ সংজ্ঞায়িত, দেখাও যে, f এক-এক এবং অনটু।
(*b*) $f : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow R$ একটি ফাংশন যা $f(x) = 2x + 1$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত, দেখাও যে, f এক-এক ফাংশন কিন্তু অনটু ফাংশন নয়।

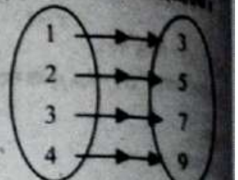
(a) এর সমাধান:
দেওয়া আছে, $f : \{-2, -1, 0, 1, 2\} \rightarrow \{-8, -1, 0, 1, 8\}$ ফাংশনটি $f(x) = x^3$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত।
চিত্রে ফাংশন f এর অধীনে সেট $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ এবং $B = \{-8, -1, 0, 1, 8\}$ বিবেচনা করি।



এখানে, $f(x) = x^3$
$f(-2) = (-2)^3 = -8$
$f(-1) = (-1)^3 = -1$
$f(0) = (0)^3 = 0$
$f(1) = (1)^3 = 1$
$f(2) = (2)^3 = 8$

দেখা যাচ্ছে, f এর অধীনে ডোমেনের ভিন্ন ভিন্ন সদস্যের ছবি সর্বদা ভিন্ন। সুতরাং f একটি এক-এক ফাংশন। (দেখানো হলো)
আবার, $f : A \rightarrow B$ এর জন্য প্রদত্ত ক্ষেত্রে, $f(A) = B$.
এখানে দেখা যায় B এর প্রতিটি উপাদানের কমপক্ষে একটি প্রতিচ্ছবি A সেট বিদ্যমান। অর্থাৎ বিপরীত অন্বয় ও একটি ফাংশন।
সুতরাং f একটি অনটু ফাংশন। (দেখানো হলো)

(b) এর সমাধান:
এখানে, $f : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow R$ ফাংশনটি $f(x) = 2x + 1$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত।
$f(x) = 2x + 1$
$\therefore f(1) = 2 \times 1 + 1 = 3$
$\therefore f(2) = 2 \times 2 + 1 = 5$
$\therefore f(3) = 3 \times 2 + 1 = 7$
$\therefore f(4) = 4 \times 2 + 1 = 9$



এখানে দেখা যাচ্ছে, $f(x)$ এর অধীনে ডোমেনের প্রত্যেকটি সদস্যের ছবি ভিন্ন। সুতরাং f এক-এক ফাংশন।
কিন্তু $\{3, 5, 7, 9\}$ এ উপাদানগুলো বাদেও R এর আরও অসংখ্য উপাদান আছে সেগুলোর প্রতিচ্ছবি পাওয়া যায় না। সুতরাং প্রদত্ত $f : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow R$ অনটু ফাংশন নয়। (দেখানো হলো)
বি.দ্র.: বিপরীত অন্বয় ফাংশন না হলে ফাংশনটি অনটু বা সার্বিক নয়।

> **কাজ:** [Ref: পাঠ্যবই পৃষ্ঠা ...]
> ১। নিম্নের ফাংশনের সাধারণ রূপ (Standard Form) লিখ:
> (ক) $y - 2 = 3(x - 5)$ (খ) $y - 2 = \frac{1}{2}(x + 3)$
> (গ) $y - (5) = -2(x + 1)$ (ঘ) $y - 5 = \frac{4}{3}(x - 3)$
> ২। লেখচিত্র অঙ্কন কর:
> (ক) $y = 3x - 1$ (খ) $x + y = 3$
> (গ) $x^2 + y^2 = 9$ (ঘ) $y = \frac{1}{3}x + 1$

সরলরৈখিক ফাংশনের সাধারণ রূপ হলো: $y = mx + b$.
যেখানে, m ও b বাস্তব সংখ্যা।

১ (ক) এর সমাধান:
$y - 2 = 3(x - 5)$
বা, $y - 2 = 3x - 15$
বা, $y = 3x - 15 + 2$
$\therefore y = 3x - 13$,
যেখানে $m = 3$, $b = -13$ যা প্রদত্ত ফাংশনের সাধারণ রূপ। **(Ans.)**

১ (খ) এর সমাধান:
$y - 2 = \frac{1}{2}(x + 3)$
বা, $y - 2 = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$
বা, $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} + 2$
বা, $y = \frac{1}{2}x + \frac{3 + 4}{2}$
$\therefore y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$, যেখানে $m = \frac{1}{2}$, $b = \frac{7}{2}$ যা প্রদত্ত ফাংশনের সাধারণ রূপ। **(Ans.)**

১ (গ) এর সমাধান:
$y - (5) = -2(x + 1)$
বা, $y - 5 = -2x - 2$
বা, $y = -2x - 2 + 5$
বা, $y = -2x + 3$
$\therefore y = (-2)x + 3$, যেখানে, $m = -2$, $b = 3$ যা প্রদত্ত ফাংশনের সাধারণ রূপ। **(Ans.)**

১ (ঘ) এর সমাধান:
$y - 5 = \frac{4}{3}(x - 3)$
বা, $y - 5 = \frac{4}{3}x - 4$

বা, $y = \frac{4}{3}x - 4 + 5$

$\therefore y = \frac{4}{3}x + 1,$

যেখানে, $m = \frac{4}{3}, b = 1$ যা প্রদত্ত ফাংশনের সাধারণ রূপ। (Ans.)

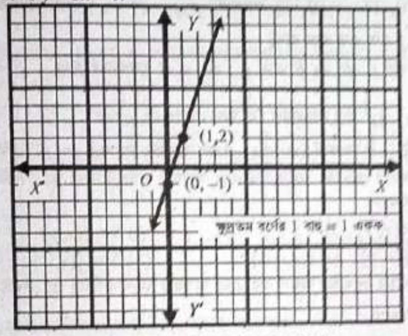
২ (ক) এর সমাধান:

$y = 3x - 1$ ... ... (i)

(i) নং সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x এর দুইটি মান নিয়ে তাদের প্রতিসঙ্গী y এর মান নির্ণয় করি:

x	0	1
y	-1	2

এখন, ছক কাগজে $X'OX$ অর্থাৎ x অক্ষ এবং YOY' অর্থাৎ y অক্ষ আঁকি। x ও y অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 1 বাহু = 1 একক ধরে (x, y) বিন্দুগুলো স্থাপন করি। বিন্দুগুলোকে সংযোগ করলেই $y = 3x - 1$.



সমীকরণটির লেখচিত্র পাওয়া যায় যা ছক কাগজে দেখানো হলো।

বি.দ্র. একঘাতবিশিষ্ট সমীকরণ অর্থাৎ সরলরেখার লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য মাত্র দুইটি বিন্দুর স্থানাঙ্কই যথেষ্ট। দুইটি বিন্দু যোগ করে রেখাকে ইচ্ছেমত বর্ধিত করলেই সুন্দর লেখচিত্র পাওয়া যায়।

২ (খ) এর সমাধান:

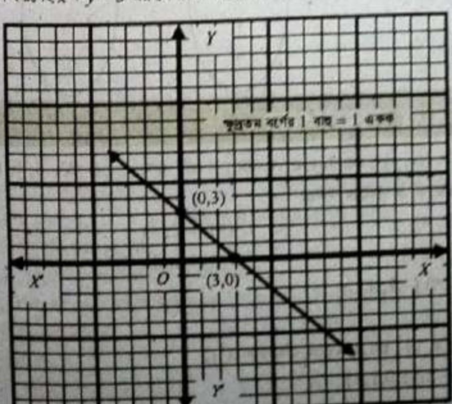
$x + y = 3$

বা, $y = 3 - x$ ... ... (i)

(i) নং সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x এর দুইটি মান নিয়ে তাদের অনুরূপ y এর মান নির্ণয় করি:

x	0	3
y	3	0

এখন, ছক কাগজে $X'OX$ অর্থাৎ x অক্ষ এবং YOY' অর্থাৎ y অক্ষ আঁকি। উভয় অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 1 বাহুর = 1 একক ধরে (x, y) বিন্দুগুলো স্থাপন করি। বিন্দুগুলোকে সংযোগ করলেই $x + y = 3$ এর লেখচিত্র পাওয়া যায় যা ছক কাগজে দেখানো হলো।

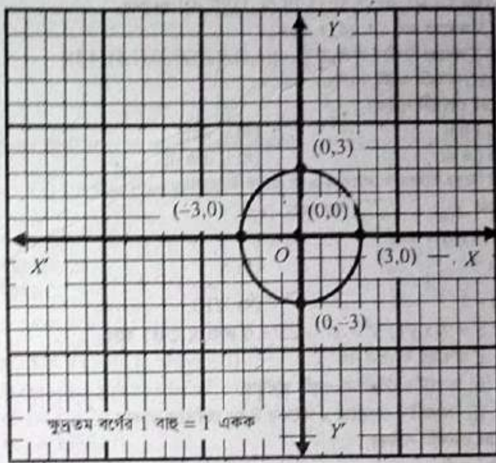


২ (গ) এর সমাধান:

$x^2 + y^2 = 9$ ... ... (i)

বা, $(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = (3)^2$

সুতরাং (i) নং সমীকরণটির লেখচিত্র একটি বৃত্ত যার কেন্দ্র $(0, 0)$ ও ব্যাসার্ধ 3। এখন, ছক কাগজে x অক্ষ ও y অক্ষ এঁকে $(0, 0)$ বিন্দু স্থাপন করি। $(0, 0)$ বিন্দুটিকে কেন্দ্র করে 3 একক ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত বৃত্তই প্রদত্ত সমীকরণের লেখচিত্র যা ছক কাগজে দেখানো হলো।

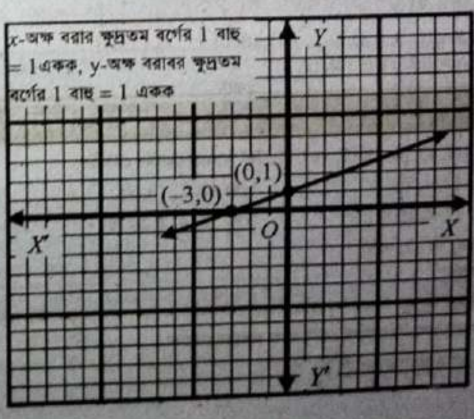


২ (ঘ) এর সমাধান:

$y = \frac{1}{3}x + 1$, সমীকরণটির লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x এর দুইটি মান নিয়ে তাদের অনুরূপ y এর মান নির্ণয় করি:

x	-3	0
y	0	1

এখন, ছক কাগজে $X'OX$ অর্থাৎ x অক্ষ এবং YOY' অর্থাৎ y অক্ষ আঁকি। x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 1 বাহু = 1 একক এবং y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 5 বাহু = 1 একক ধরে (x, y) বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করি। বিন্দুগুলোকে সংযোগ করলেই প্রদত্ত সমীকরণটির লেখচিত্র পাওয়া যাবে যা ছক কাগজে দেখানো হলো।



পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-১.২

১। $\{(2, 2), (4, 2), (2, 10), (7, 7)\}$ অম্বয়ের ডোমেন কোনটি?

(ক) $\{2, 4, 7\}$ (খ) $\{2, 2, 10, 7\}$
(গ) $\{2, 2, 10, 7\}$ (ঘ) $\{2, 4, 2, 5, 7\}$

২। $S = \{(x, y) : x \in A, y \in A$ এবং $y = x^2\}$ এবং $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ নিচের কোনটি S অম্বয়ের সদস্য?

(ক) $(2, 4)$ (খ) $(-2, 4)$
(গ) $(-1, 1)$ (ঘ) $(1, -1)$

৩। যদি $S = \{(1, 4), (2, 1), (3, 0), (4, 1), (5, 4)\}$ হয় তবে,

(i) S অম্বয়ের রেঞ্জ $S = \{4, 1, 0, 4\}$
(ii) S অম্বয়ের বিপরীত অম্বয়, $S^{-1} = \{(4,1),(1,2),(0,3),(1,4),(4,5)\}$
(iii) S অম্বয়টি একটি ফাংশন

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii (খ) ii ও iii
(গ) i ও iii (ঘ) i, ii ও iii

নিচের তথ্যের আলোকে ৪-৬ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

যদি $F(x) = \sqrt{x-1}$ হয় তবে-

৪। $F(10) =$ কত?

(ক) 9 (খ) 3
(গ) -3 (ঘ) $\sqrt{10}$

৫। $S = \{(x,y) : x^2 + y^2 - 25 = 0$ এবং $x \geq 0\}$ হলে,

i. অম্বয়টি ফাংশন নয়
ii. অম্বয়টির লেখচিত্র একটি অর্ধবৃত্ত
iii. অম্বয়টির লেখচিত্র x অক্ষের উপর অর্ধতলে থাকবে।

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii (খ) i ও iii
(গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

৬। $f(x) = 5$ হলে, x এর মান কত?

(ক) 5 (খ) 24
(গ) 25 (ঘ) 26

৭। ফাংশনটির ডোমেন নিচের কোনটি?

(ক) ডোম $F = \{x \in R : x \neq 1\}$ (খ) ডোম $F = \{x \in R : x \geq 1\}$
(গ) ডোম $F = \{x \in R : x \leq 1\}$ (ঘ) ডোম $F = \{x \in R : x > 1\}$

৮। (a) প্রদত্ত S অম্বয়ের ডোমেন, রেঞ্জ ও বিপরীত অম্বয় নির্ণয় কর।
(b) S অথবা S^{-1} ফাংশন কিনা তা নির্ধারণ কর।
(c) ফাংশনগুলো এক-এক কিনা?

(ক) $S = \{(1, 5), (2, 10), (3, 15), (4, 20)\}$
(খ) $S = \{(-3, 8), (-2, 3), (-1, 0), (0, -1), (1, 0), (2, 3), (3, 8)\}$
(গ) $S = \left\{\left(\frac{1}{2}, 0\right), (1,1), (1,-1), \left(\frac{5}{2}, 2\right), \left(\frac{5}{2}, -2\right)\right\}$
(ঘ) $S = \{(-3, -3), (-1, -1), (0, 0), (1, 1), (3, 3)\}$
(ঙ) $S = \{(2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$

৯। $F(x) = \sqrt{x-1}$ দ্বারা বর্ণিত ফাংশনের জন্য –

(ক) $F(1)$, $F(5)$ এবং $F(10)$ নির্ণয় কর
(খ) $F(a^2 + 1)$ নির্ণয় কর যেখানে $a \in R$
(গ) $F(x) = 5$ হলে, x নির্ণয় কর
(ঘ) $F(x) = y$ হলে, x নির্ণয় কর যেখানে $y \geq 0$.

১০। $F : R \rightarrow R$, $F(x) = x^2$ ফাংশনের জন্য –

(ক) ডোম F এবং রেঞ্জ F নির্ণয় কর।
(খ) দেখাও যে, F এক-এক ফাংশন নয়।
(গ) F^{-1} নির্ণয় কর।
(ঘ) দেখাও যে, F^{-1} এক-এক ফাংশন নয়।

১১। (ক) $f : R \rightarrow R$ একটি ফাংশন যা $f(x) = ax + b$; $a, b \in R$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হলে, দেখাও যে, f এক-এক এবং অনটু।

(খ) $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ ফাংশনটি $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত, তবে দেখাও যে, f এক-এক এবং অনটু।

১২। (ক) যদি $f : R \rightarrow R$ এবং $g : R \rightarrow R$ ফাংশনদ্বয় $f(x) = x^3 + 5$ এবং $g(x) = (x-5)^{\frac{1}{3}}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হয়, তবে দেখাও যে, $g = f^{-1}$.

(খ) যদি $f : R \rightarrow R$ ফাংশনটি $f(x) = 5x - 4$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হয়, তবে, $y = f^{-1}(x)$ নির্ণয় কর।

১৩। S অম্বয়ের লেখচিত্র অঙ্কন কর এবং অম্বয়টি ফাংশন কিনা তা লেখচিত্র থেকে নির্ণয় কর যেখানে:

(ক) $S = \{(x, y) : 2x - y + 5 = 0\}$ (খ) $S = \{(x, y) : x + y = 1\}$
(গ) $S = \{(x, y) : 3x + y = 4\}$ (ঘ) $S = \{(x, y) : x = -2\}$

১৪। S অম্বয়ের লেখচিত্র অঙ্কন কর এবং অম্বয়টি ফাংশন কিনা তা লেখচিত্র থেকে নির্ণয় কর যেখানে:

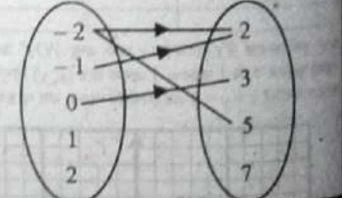
(ক) $S = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 25\}$ (খ) $S = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 9\}$

১৫। $F(x) = 2x - 1$

(ক) $F(x+1)$ এবং $F\left(\frac{1}{2}\right)$ এর মান নির্ণয় কর।

(খ) $F(x)$ ফাংশনটি এক-এক কি না তা নির্ণয় কর, যখন $x, y \in N$.

(গ) $F(x) = y$ হলে x এর তিনটি মান নির্ণয় কর, যখন $x, y \in N$ এবং $y = 2x - 1$ সমীকরণটির লেখচিত্র অঙ্কন।



অনুশীলনী-১.২ এর সমাধান

১। $\{(2, 2), (4, 2), (2, 10), (7, 7)\}$ অম্বয়ের ডোমেন কোনটি?

(ক) $\{2, 4, 7\}$ (খ) $\{2, 2, 10, 7\}$
(গ) $\{2, 2, 10, 7\}$ (ঘ) $\{2, 4, 2, 5, 7\}$

উত্তর: (ক) $\{2, 4, 7\}$

ব্যাখ্যা:

ডোমেন নির্ণয়: কোনো অম্বয়ের ডোমেন নির্ণয়ের ক্ষেত্রে ক্রমজোড়গুলোর প্রথম উপাদানগুলো নিয়ে গঠিত সেটই হলো অম্বয়ের ডোমেন।

$\therefore$ প্রদত্ত অম্বয়ের ডোমেন $\{2, 4, 7\}$.

২। $S = \{(x, y) : x \in A, y \in A$ এবং $y = x^2\}$ এবং $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ নিচের কোনটি S অম্বয়ের সদস্য?

(ক) $(2, 4)$ (খ) $(-2, 4)$
(গ) $(-1, 1)$ (ঘ) $(1, -1)$

উত্তর: (গ) $(-1, 1)$

ব্যাখ্যা:

$S = \{(x, y) : x \in A, y \in A$ এবং $y = x^2\}$,
$A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

প্রত্যেক $x \in A$ এর জন্য $y = x^2$ মান নির্ণয় করি:

x	−2	−1	0	1	2
y	4	1	0	1	4

কিন্তু $x \in A$ এবং $y \in A$ হওয়ায় x ও y উভয়কেই A এর সদস্য হতে হবে।
যেহেতু $4 \notin A$ সেহেতু $(-2, 4) \notin S$ এবং $(2, 4) \notin S$
$\therefore$ নির্ণেয় S অন্বয়ের সদস্য $(-1, 1), (0,0), (1,1)$

৩। যদি $S = \{(1, 4), (2, 1), (3, 0), (4, 1), (5, 4)\}$ হয় তবে,
(i) S অন্বয়ের রেঞ্জ $S = \{4, 1, 0, 4\}$
(ii) S অন্বয়ের বিপরীত অন্বয়, $S^{-1} = \{(4, 1), (1, 2), (0, 3), (1, 4), (4, 5)\}$
(iii) S অন্বয়টি একটি ফাংশন

উপরের তথ্যের আলোকে নিচের কোনটি সঠিক?
(ক) i ও ii (খ) ii ও iii
(গ) i ও iii (ঘ) i, ii ও iii

উত্তর: (ঘ) i, ii ও iii

ব্যাখ্যা:
(i) নং সঠিক কারণ, কোনো অন্বয়ের ক্রমজোড়গুলোর ২য় উপাদানই অন্বয়ের রেঞ্জ।
$\therefore S$ অন্বয়ের রেঞ্জ $= \{4,1,0\} = \{4,1,0,4\}$
দ্রষ্টব্য: $S = \{4,1,0\}$ এবং $S = \{4,1,0,4\}$ সেটদ্বয় সংজ্ঞানুসারে সমতা সেট।
[*Ref*: সাধারণ গণিত, পৃষ্ঠা-২৪ সেটের সমতা Topics দ্রষ্টব্য]
(ii) নং সত্য কারণ বিপরীত অন্বয়ের ক্ষেত্রে ক্রমজোড়গুলোর উপাদান স্থান বিনিময় করে।
$\therefore S^{-1} = \{(4, 1), (1, 2), (0, 3), (1, 4), (4, 5)\}$.
(iii) নং সত্য কারণ, $S = \{(1, 4), (2, 1), (3, 0), (4, 1), (5, 4)\}$
S অন্বয়ের ক্রমজোড়গুলোর একই প্রথম উপাদান বিশিষ্ট একাধিক ক্রমজোড় নেই। অতএব, S অন্বয় ফাংশন।

নিচের তথ্যের আলোকে ৪-৬ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:
যদি $F(x) = \sqrt{x-1}$ হয় তবে-

৪। $F(10) =$ কত?
(ক) 9 (খ) 3
(গ) −3 (ঘ) $\sqrt{10}$

উত্তর: (খ) 3

ব্যাখ্যা:
$F(x) = \sqrt{x-1}$
বা, $F(10) = \sqrt{10-1}$
$= \sqrt{9} = 3$

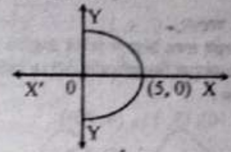
দৃষ্টি আকর্ষণ:
$\sqrt{9} = \pm 3$ নয়, কারণ যে কোনো ধনাত্মক সংখ্যার বর্গমূল সর্বদাই ধনাত্মক ধরা হয়। অর্থাৎ $\sqrt{9} = 3$ সঠিক।
কিন্তু, $x^2 = 9$ হলে
বা, $x = \pm\sqrt{9}$
বা, $x = \pm 3$ হবে।

৫। $S = \{(x,y) : x^2 + y^2 - 25 = 0$ এবং $x \geq 0\}$ হলে,
i. অন্বয়টি ফাংশন নয়
ii. অন্বয়টির লেখচিত্র একটি অর্ধবৃত্ত
iii. অন্বয়টির লেখচিত্র x অক্ষের উপর অর্ধতলে থাকবে।

নিচের কোনটি সঠিক?
(ক) i ও ii (খ) i ও iii
(গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

উত্তর: (ক) i ও ii

ব্যাখ্যা:
আমরা জানি, x এর একটি মানের জন্য কোন অন্বয়ের y এর একাধিক মান থাকলে অন্বয়টি ফাংশন নয়। এখন S সেটের বর্ণনাকারী সমীকরণ থেকে পাই, $y^2 = 25 - x^2$ বা $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$. সুতরাং দেখা যাচ্ছে x এর একটি মান এর জন্য y এর একাধিক মান পাওয়া যায়। অর্থাৎ অন্বয়টি ফাংশন না। আবার, সমীকরণটি থেকে বুঝা যায় যে, এটি একটি বৃত্তের সমীকরণ যার কেন্দ্র (0,0) এবং ব্যাসার্ধ 5। এখন যেহেতু x এর মান 0 থেকে ছোট হতে পারে না তাই একটি একটি অর্ধবৃত্ত হবে যার y অক্ষের বামপাশে কোন অংশ থাকবে না।



সুতরাং, চিত্রটি হতে দেখা যায় যে, অন্বয়টি লেখচিত্র y অক্ষের উপর অর্ধতলে থাকবে।

৬। $f(x) = 5$ হলে, x এর মান কত?
(ক) 5 (খ) 24
(গ) 25 (ঘ) 26

উত্তর: (ঘ) 26

ব্যাখ্যা:
$f(x) = \sqrt{x-1}$
বা, $5 = \sqrt{x-1}$ $[\because F(x) = 5]$
বা, $25 = x - 1$ [উভয় পক্ষে বর্গ করে]
বা, $x - 1 = 25$
বা, $x = 25 + 1$
$\therefore x = 26$

৭। ফাংশনটির ডোমেন নিচের কোনটি?
(ক) ডোম $F = \{x \in R : x \neq 1\}$ (খ) ডোম $F = \{x \in R : x \geq 1\}$
(গ) ডোম $F = \{x \in R : x \leq 1\}$ (ঘ) ডোম $F = \{x \in R : x > 1\}$

উত্তর: (খ) ডোম $F = \{x \in R : x \geq 1\}$

ব্যাখ্যা:
$F(x) = \sqrt{x-1}$
x এর যে সকল বাস্তব মানের জন্য $F(x)$ এর বাস্তব মান পাওয়া যায়, সেই মানগুলোই $F(x)$ এর ডোমেন হবে।
$x - 1$ এর যেকোনো অঋণাত্মক মানের জন্য $F(x)$ এর বাস্তব মান পাওয়া যাবে। সুতরাং ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত হবে যদি, $x - 1 \geq 0$ হয়।
$\therefore x \geq 1$.

মনে রাখবে: বর্গমূল চিহ্ন ($\sqrt{\ }$) এর ভিতরে কোনো ঋণাত্মক সংখ্যার বাস্তব মান পাওয়া যায় না।

৮। (a) প্রদত্ত S অন্বয়ের ডোমেন, রেঞ্জ ও বিপরীত অন্বয় নির্ণয় কর।
(b) S অথবা S^{-1} ফাংশন কিনা তা নির্ধারণ কর।
(c) ফাংশনগুলো এক-এক কিনা?
(ক) $S = \{(1, 5), (2, 10), (3, 15), (4, 20)\}$
(খ) $S = \{(-3, 8), (-2, 3), (-1, 0), (0, -1), (1, 0), (2, 3), (3, 8)\}$
(গ) $S = \left\{\left(\frac{1}{2}, 0\right), (1,1), (1,-1), \left(\frac{5}{2}, 2\right), \left(\frac{5}{2}, -2\right)\right\}$
(ঘ) $S = \{(-3, -3), (-1, -1), (0, 0), (1, 1), (3, 3)\}$
(ঙ) $S = \{(2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$

সমাধান বুঝার জন্য প্রাসঙ্গিক আলোচনা অংশে ভালোভাবে পড়ে নাও।

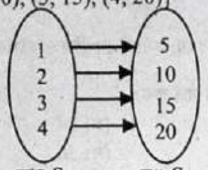
(ক) এর সমাধান:
(a) এখানে, $S = \{(1, 5), (2, 10), (3, 15), (4, 20)\}$
S অন্বয়ের ক্রমজোড়গুলোর প্রথম উপাদানগুলোর সেট হলো ডোমেন এবং দ্বিতীয় উপাদানগুলোর সেট হলো রেঞ্জ,

সুতরাং ডোম $S = \{1, 2, 3, 4\}$ এবং রেঞ্জ $S = \{5, 10, 15, 20\}$
বিপরীত অম্বয় নির্ণয়ে প্রতিটি ক্রমজোড় হলে উপাদানগুলো স্থান বিনিময় করে।
$\therefore S^{-1} = \{(5, 1), (10, 2), (15, 3), (20, 4)\}$

জেনে নাও: $F : X \to Y$ ফাংশন হলে–
(i) X এর মানের ইমেজ Y এ পাওয়া যায়।
(ii) Y এর যে মানের ইমেজ X সেটে পাওয়া যায় তাকে প্রতিচ্ছবি বলে।

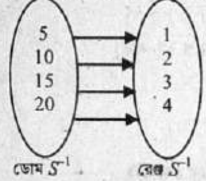
(*b*) এখন, S এর ক্রমজোড়গুলোর প্রথম উপাদান একই প্রথম উপাদান বিশিষ্ট একাধিক ক্রমজোড় নেই। অর্থাৎ ডোমেনের প্রতিটি উপাদানের ভিন্ন ভিন্ন ইমেজ পাওয়া যায়।
সুতরাং S অম্বয়টি একটি ফাংশন।
আবার S^{-1} অম্বয়েরও একই প্রথম উপাদান বিশিষ্ট একাধিক ক্রমজোড় নেই। অর্থাৎ রেঞ্জ সেটের প্রত্যেকটি উপাদানের ভিন্ন প্রতিচ্ছবি ডোমেন সেটে বিদ্যমান।
$\therefore S^{-1}$ অম্বয়টিও ফাংশন।

(c) $S = \{(1, 5), (2, 10), (3, 15), (4, 20)\}$



ডোম S রেঞ্জ S

S ফাংশনের ডোমেনের ভিন্ন ভিন্ন সদস্যের ইমেজ ভিন্ন ভিন্ন।
$\therefore S$ এক-এক ফাংশন।
আবার, $S^{-1} = \{(5, 1), (10, 2), (15, 3), (20, 4)\}$

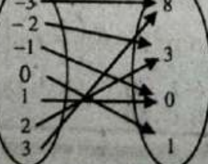


ডোম S^{-1} রেঞ্জ S^{-1}

S^{-1} ফাংশনের ডোমেনের ভিন্ন ভিন্ন সদস্যের প্রতিচ্ছবি ভিন্ন ভিন্ন।
$\therefore S^{-1}$ এক-এক ফাংশন।

(খ) এর সমাধান:
(*a*) এখানে,
$S = \{(-3, 8), (-2, 3), (-1, 0), (0, -1), (1, 0), (2, 3), (3, 8)\}$
S অম্বয়ের ক্রমজোড়গুলোর প্রথম উপাদানগুলোর সেট হলো ডোমেন এবং দ্বিতীয় উপাদানগুলোর সেট হলো রেঞ্জ, সুতরাং
ডোম $S = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
রেঞ্জ $S = \{-1, 0, 3, 8\}$
প্রতিটি ক্রমজোড়ের উপাদানগুলো বিনিময় করে পাই, বিপরীত অম্বয়।
$S^{-1} = \{(8, -3), (3, -2), (0, -1), (-1, 0), (0, 1), (3, 2), (8, 3)\}$
(*b*) S এর একই প্রথম উপাদান বিশিষ্ট একাধিক ক্রমজোড় নেই। অর্থাৎ ডোমেন সেটের প্রতিটি উপাদানের ইমেজ রেঞ্জ সেটে বিদ্যমান।
$\therefore S$ একটি ফাংশন।
কিন্তু S^{-1} এর একই প্রথম উপাদান বিশিষ্ট একাধিক ভিন্ন ক্রমজোড় আছে। অর্থাৎ রেঞ্জ সেটের কোনো কোনো উপাদানের একাধিক প্রতিচ্ছবি ডোমেন সেটে বিদ্যমান।। যেমন: $(0, -1)$ এবং $(0, 1)$
$\therefore S^{-1}$ ফাংশন নয়।

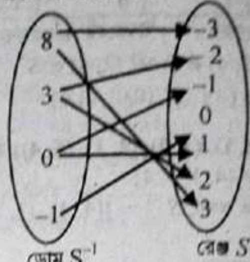
(*c*) $S = \{(-3, 8), (-2, 3), (-1, 0), (0, -1), (1, 0), (2, 3), (3, 8)\}$



ডোম S রেঞ্জ S

এই ফাংশনের একই প্রথম উপাদান বিশিষ্ট একাধিক ক্রমজোড় নেই। কিন্তু একই দ্বিতীয় উপাদান বিশিষ্ট একাধিক ক্রমজোড় আছে যেমন: $(-3, 8)$ ও $(3, 8)$ সুতরাং এটি এক-এক ফাংশন নয়।

$\therefore S$ এক-এক ফাংশন নয়।
$S^{-1} = \{(8, -3), (3, -2), (0, -1), (-1, 0), (0, 1), (3, 2), (8, 3)\}$
S^{-1} ফাংশন নয়, তাই এক-এক ফাংশনও নয়।



ডোম S^{-1} রেঞ্জ S^{-1}

(গ) এর সমাধান:

(*a*) এখানে, $S = \left\{\left(\frac{1}{2}, 0\right), (1, 1), (1, -1), \left(\frac{5}{2}, 2\right), \left(\frac{5}{2}, -2\right)\right\}$

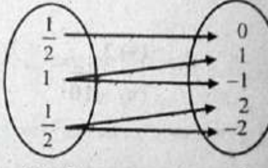
S অম্বয়ের ক্রমজোড়গুলোর প্রথম উপাদানগুলোর সেট হলো ডোমেন এবং দ্বিতীয় উপাদানগুলোর সেট হলো রেঞ্জ, সুতরাং

ডোম $S = \left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{5}{2}\right\}$ এবং রেঞ্জ $S = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

S এর বিপরীত অম্বয় $S^{-1} = \left\{\left(0, \frac{1}{2}\right), (1, 1), (-1, 1), \left(2, \frac{5}{2}\right), \left(-2, \frac{5}{2}\right)\right\}$

(*b*) S এর একই প্রথম উপাদান বিশিষ্ট একাধিক ক্রমজোড় আছে, যেমন: $(1, 1)$ এবং $(1, -1)$
$\therefore S$ ফাংশন নয়।
S^{-1} এর একই প্রথম উপাদান বিশিষ্ট একাধিক ক্রমজোড় নেই।
সুতরাং S^{-1} ফাংশন।

(*c*) $S = \left\{\left(\frac{1}{2}, 0\right), (1, 1), (1, -1), \left(\frac{5}{2}, 2\right), \left(\frac{5}{2}, -2\right)\right\}$

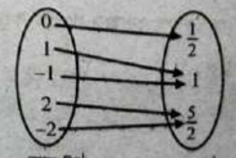


ডোম S রেঞ্জ S

S ফাংশন নয় তাই এক-এক ফাংশন হওয়ার প্রশ্নই আসে না।

$S^{-1} = \left\{\left(0, \frac{1}{2}\right), (1, 1), (-1, 1), \left(2, \frac{5}{2}\right), \left(-2, \frac{5}{2}\right)\right\}$

S^{-1} ফাংশনটির একই দ্বিতীয় উপাদান বিশিষ্ট একাধিক ক্রমজোড় রয়েছে, যেমন $(1, 1)$ ও $(-1, 1)$



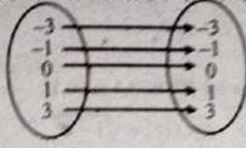
ডোম S^{-1} রেঞ্জ S^{-1}

সুতরাং S^{-1} ফাংশনটি এক এক নয়।
[বি.দ্র: পাঠ্যবইয়ের উত্তরে ভুল আছে।]

(ঘ) এর সমাধান:
(*a*) এখানে,
$S = \{(-3, -3), (-1, -1), (0, 0), (1, 1), (3, 3)\}$
S অম্বয়ের ক্রমজোড়গুলোর প্রথম উপাদানগুলোর সেট হলো ডোমেন এবং দ্বিতীয় উপাদানগুলোর সেট হলো রেঞ্জ,
সুতরাং ডোম $S = \{-3, -1, 0, 1, 3\}$
রেঞ্জ $S = \{-3, -1, 0, 1, 3\}$
S এর বিপরীত অম্বয় $S^{-1} = \{(-3, -3), (-1, -1), (0, 0), (1, 1), (3, 3)\}$

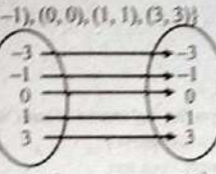
(b) S এর একটি প্রথম উপাদান বিশিষ্ট একাধিক ক্রমজোড় নেই।
সুতরাং S একটি ফাংশন।
S^{-1} এরও একটি প্রথম উপাদান বিশিষ্ট একাধিক ক্রমজোড় নেই।
সুতরাং S^{-1} একটি ফাংশন।

(c) $S = \{(-3, -3), (-1, -1), (0, 0), (1, 1), (3, 3)\}$



ডোম S রেঞ্জ S

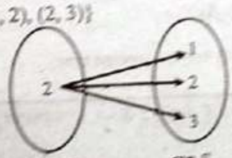
S ফাংশনের ডোমেনের ভিন্ন ভিন্ন সদস্যের প্রতিচ্ছবি ভিন্ন।
সুতরাং, S এক-এক ফাংশন।
$S^{-1} = \{(-3, -3), (-1, -1), (0, 0), (1, 1), (3, 3)\}$



ডোম S^{-1} রেঞ্জ S^{-1}

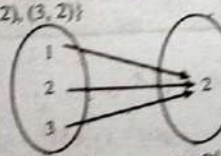
S^{-1} ফাংশনের ডোমেনের ভিন্ন ভিন্ন সদস্যের প্রতিচ্ছবি ভিন্ন।
সুতরাং, S^{-1} এক-এক ফাংশন।

(ঙ) এর সমাধান:
(a) এখানে, $S = \{(2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$
S অন্বয়ের ক্রমজোড়গুলোর প্রথম উপাদানগুলোর সেট হলো ডোমেন এবং দ্বিতীয় উপাদানগুলোর সেট হলো রেঞ্জ, সুতরাং
ডোম $= \{2\}$ এবং রেঞ্জ $= \{1, 2, 3\}$
S এর বিপরীত অন্বয় $S^{-1} = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2)\}$
(b) এখন, S এর একই প্রথম উপাদান বিশিষ্ট একাধিক ক্রমজোড় আছে। যেমন: $(2, 1), (2, 2)$ এবং $(2, 3)$
সুতরাং S ফাংশন নয়।
S^{-1} এর একই প্রথম উপাদান বিশিষ্ট একাধিক ক্রমজোড় নেই।
সুতরাং S^{-1} ফাংশন।
(c) $S = \{(2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$



ডোম S রেঞ্জ S

S ফাংশন নয় তাই এক-এক হওয়ার প্রশ্নই আসে না।
$S^{-1} = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2)\}$



ডোম S^{-1} রেঞ্জ S^{-1}

S^{-1} ফাংশনটির একই দ্বিতীয় উপাদান বিশিষ্ট একাধিক ক্রমজোড় রয়েছে। যেমন- $(1, 2)$ ও $(2, 2)$।
সুতরাং S^{-1} ফাংশনটি এক-এক নয়।

৯। $F(x) = \sqrt{x-1}$ দ্বারা বর্ণিত ফাংশনের জন্য –
(ক) $F(1)$, $F(5)$ এবং $F(10)$ নির্ণয় কর
(খ) $F(a^2+1)$ নির্ণয় কর যেখানে $a \in R$
(গ) $F(x) = 5$ হলে, x নির্ণয় কর
(ঘ) $F(x) = y$ হলে, x নির্ণয় কর যেখানে $y \geq 0$.

(ক) এর সমাধান:
দেওয়া আছে, $F(x) = \sqrt{x-1}$
$\therefore F(1) = \sqrt{1-1} = \sqrt{0} = 0$
$F(5) = \sqrt{5-1} = \sqrt{4} = 2$
এবং $F(10) = \sqrt{10-1} = \sqrt{9} = 3$

(খ) এর সমাধান:
দেওয়া আছে, $F(x) = \sqrt{x-1}$
সুতরাং $F(a^2+1) = \sqrt{a^2+1-1}$
$= \sqrt{a^2}$
$= a$

(গ) এর সমাধান:
দেওয়া আছে, $F(x) = \sqrt{x-1}$
$\therefore 5 = \sqrt{x-1}$ $[\because F(x) = 5]$
বা, $(5)^2 = \left(\sqrt{x-1}\right)^2$ [বর্গ করে]
বা, $25 = x - 1$
বা, $25 + 1 = x$
$\therefore x = 26$

(ঘ) এর সমাধান:
দেওয়া আছে, $F(x) = \sqrt{x-1}$
$\therefore y = \sqrt{x-1}$ $[\because F(x) = y]$
বা, $y^2 = x - 1$ [বর্গ করে]
$\therefore x = y^2 + 1$

১০। $F : R \to R$, $F(x) = x^2$ ফাংশনের জন্য – (VVI)
(ক) ডোম F এবং রেঞ্জ F নির্ণয় কর।
(খ) দেখাও যে, F এক-এক ফাংশন নয়।
(গ) F^{-1} নির্ণয় কর।
(ঘ) দেখাও যে, F^{-1} একটি ফাংশন।

(ক) এর সমাধান:
এখানে, $F : R \to R$, $F(x) = x^2$
ডোমেন নির্ণয়: x এর যে সকল বাস্তব মানের জন্য $F(x)$-এর বাস্তব মান পাওয়া যায় সেগুলোই $F(x)$-এর ডোমেন।
এখানে, x এর যে সকল বাস্তব মানের জন্য $F(x)$-এর বাস্তব মান পাওয়া যায়।
$\therefore$ ডোম $F = R$
রেঞ্জ নির্ণয়: ডোমেনের অন্তর্ভুক্ত x এর যেকোনো মানের জন্য $F(x)$ এর যে সকল বাস্তব মান পাওয়া যায় সেগুলোই ফাংশনটির রেঞ্জ।
$F(x) = x^2$ ফাংশনের $x \in R$ অর্থাৎ x এর সকল বাস্তব মানের জন্য $F(x)$ এর অঋণাত্মক মান পাওয়া যায়।
সুতরাং x এর সকল মানের জন্য $F(x) \geq 0$
$\therefore$ রেঞ্জ $F = [0, \infty)$

বিকল্প পদ্ধতি:
ধরি, $y = F(x) = x^2$
বা, $y = x^2$
বা, $x = \pm\sqrt{y}$
$\sqrt{y} \in R$ হবে যদি এবং কেবল যদি $y \geq 0$ হয়।
সুতরাং x এর সকল মানের জন্য $F(x) \geq 0$
$\therefore$ রেঞ্জ $F = [0, \infty)$

(খ) এর সমাধান:
x এর মান হচ্ছে সকল বাস্তব সংখ্যা। অর্থাৎ ডোম $F = R$
ডোম F এর দুটি উপাদান, $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, এর জন্য
$\therefore y_1 = F(x_1) = (1)^2$ $y_2 = F(x_2) = (-1)^2$
$\Rightarrow y_1 = 1$ $\Rightarrow y_2 = 1.$
দেখা যাচ্ছে রেঞ্জ F এর দুটি উপাদানের মান একই। সুতরাং এটি এক-এক ফাংশন নয়।
অর্থাৎ, $F : R \to R$, $F(x) = x^2$ এক-এক ফাংশন নয়। (দেখানো হলো)

জেনে নাও:
(i) বাস্তব সংখ্যা, $R = (-\infty, \infty)$ $\therefore 0 \in R$
(ii) ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা, $R_+ = (0, \infty)$ $\therefore 0 \notin R_+$
(iii) ঋণাত্মক বাস্তব সংখ্যা, $R_- = (-\infty, 0)$ $\therefore 0 \notin R_-$
(iv) অঋণাত্মক বাস্তব সংখ্যা, $R_o = [0, \infty)$ $\therefore 0 \in R_o$
Ref: www.en.wikipedia.org/wiki/real_number#notation

(গ) এর সমাধান:
ধরি, $F(x) = y = y^2$ .... (i)
$\therefore F(x) = y$
$\Rightarrow x = F^{-1}(y)$
আবার, $y = x^2$
$\Rightarrow x = \pm\sqrt{y}$
$\Rightarrow F^{-1}(y) = \pm\sqrt{y}$
$\therefore F^{-1}(x) = \pm\sqrt{x}$ **(Ans)**

(ঘ) এর সমাধান:
(গ) নং হতে পাই, $F^{-1}(x) = \pm\sqrt{x}$
যেহেতু $x \in R$ তাই x এর মান সুবিধামতো নির্ধারণ করা হলো।
$x = 4$ হলে $F^{-1}(4) = \pm\sqrt{4} = \pm 2$
$x = 9$ হলে $F^{-1}(9) = \pm\sqrt{9} = \pm 3$
এখানে দেখা যাচ্ছে যে, ডোমেন সেট (x এর) এর একটি উপাদানের একাধিক ইমেজ বিদ্যমান।
$\therefore F^{-1}(x)$ ফাংশন নয়।

জেনে নাও:
(i) $F : R \to R$; $F(x) = x^2$ বর্ণিত ফাংশনের বিপরীত অন্বয় ফাংশন নয় অর্থাৎ $F^{-1}(x)$ ফাংশন নয়। [*Ref: Anton-calculus (function)*]
(ii) $F^{-1}(x) = \pm\sqrt{x}$ কে ফাংশন না বলে $F(x)$ এর বিপরীত অন্বয় বলা যেতে পারে।
(iii) $F : R_+ \to R_+$; $F(x) = x^2$ ফাংশনের বিপরীত ফাংশন $F^{-1}(x) = \sqrt{x}$

১১। (ক) $f : R \to R$ একটি ফাংশন যা $f(x) = ax + b$; $a, b \in R$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হলে, দেখাও যে, f এক-এক এবং অনটু। (VVI)
(খ) $f : [0, 1] \to [0, 1]$ ফাংশনটি $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত, তবে দেখাও যে, f এক-এক এবং অনটু।

(ক) এর সমাধান:
দেওয়া আছে, $f(x) = ax + b$
ডোম f এর দুটি উপাদান x_1 ও x_2 নিই
এখন, $f(x_1) = ax_1 + b$ এবং $f(x_2) = ax_2 + b$
যদি $f(x_1) = f(x_2)$ হয় তবে
$ax_1 + b = ax_2 + b$
বা, $ax_1 = ax_2$
$\therefore x_1 = x_2$
অর্থাৎ f এর অধীনে ডোমেনের ভিন্ন ভিন্ন সদস্যের প্রতিচ্ছবি ভিন্ন ভিন্ন।
অতএব প্রদত্ত ফাংশন এক-এক ফাংশন।
আবার, $y \in R$ যেকোনো সংখ্যা হলে,
ধরি, $y = ax + b = f(x)$
বা, $ax = y - b$
$\therefore x = \dfrac{y-b}{a}$
এখন $f\left(\dfrac{y-b}{a}\right) = a.\dfrac{y-b}{a} + b$
$= y - b + b = y$
$\therefore f\left(\dfrac{y-b}{a}\right) = y = f(x)$
$\therefore$ ফাংশনটি অনটু বা সার্বিক।
সুতরাং ফাংশনটি এক-এক এবং অনটু। **(দেখানো হলো)**
জেনে নাও: যদি x সেট হতে y সেটে f একটি ফাংশন হয়, তবে তাকে $f: x \to y$ লিখে প্রকাশ করা হয়। x সেটকে f ফাংশনের ডোমেন এবং y সেটে f ফাংশনের কোডোমেন বলা হয়।

(খ) এর সমাধান:
$f(x) = \sqrt{1 - x^2}$
ডোম f এর দুইটি সদস্য a ও b নিই বা, $a, b \in [0,1]$
এখন, $f(a) = \sqrt{1 - a^2}$ এবং $f(6) = \sqrt{1 - b^2}$
যদি $f(a) = f(b)$ হয়, তবে
$\sqrt{1 - a^2} = \sqrt{1 - b^2}$
বা, $1 - a^2 = 1 - b^2$
বা, $-a^2 = -b^2$
বা, $a^2 = b^2$
$\therefore a = b$ $\because b \in [0, 1]$
অর্থাৎ f এর অধীনে ডোমেনের ভিন্ন ভিন্ন সদস্যের প্রতিচ্ছবি ভিন্ন ভিন্ন।
অতএব, প্রদত্ত ফাংশন f এক-এক ফাংশন।
আবার, $y \in [0, 1]$ যেকোনো সংখ্যা হলে,
ধরি, $y = \sqrt{1 - x^2} = f(x)$
বা, $y^2 = 1 - x^2$
বা, $x^2 = 1 - y^2$
$\therefore x = \sqrt{1 - y^2}$
এখন $f\left(\sqrt{1-y^2}\right) = \sqrt{1 - \left(\sqrt{1-y^2}\right)^2}$
$= \sqrt{1 - (1 - y^2)}$
$= \sqrt{1 - 1 + y^2}$
$= \sqrt{y^2}$
$= y$
$= f(x)$
$\therefore$ ফাংশনটি অনটু
সুতরাং f এক-এক ও অনটু ফাংশন। **(দেখানো হলো)**

১২। (ক) যদি $f : R \to R$ এবং $g : R \to R$ ফাংশনদ্বয় $f(x) = x^3 + 5$ এবং $g(x) = (x - 5)^{\frac{1}{3}}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হয়, তবে দেখাও যে, $g = f^{-1}$.
(খ) যদি $f : R \to R$ ফাংশনটি $f(x) = 5x - 4$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হয়, তবে $y = f^{-1}(x)$ নির্ণয় কর।

(ক) এর সমাধান:
এখানে, $f : R \to R$ এবং $g : R \to R$
$f(x) = x^3 + 5$ $\quad g(x) = (x - 5)^{\frac{1}{3}}$
ধরি, $y = f(x)$
তাহলে, $y = x^3 + 5$
বা, $x^3 = y - 5$
$\therefore x = (y - 5)^{\frac{1}{3}}$ ...... (i)
যেহেতু $y = f(x)$ সুতরাং বিপরীত ফাংশন f^{-1} এর জন্য
$x = f^{-1}(y)$
(i) নং এ $x = f^{-1}(y)$ বসিয়ে পাই,
$f^{-1}(y) = (y - 5)^{\frac{1}{3}}$

y এর স্থলে x স্থাপন করে পাই,

$$f^{-1}(x) = (x-5)^{\frac{1}{3}}$$

বা, $f^{-1}(x) = g(x)$ $\quad [\because g(x) = (x-5)^{\frac{1}{3}}]$

সুতরাং প্রদত্ত ক্ষেত্রে, $g = f^{-1}$. (দেখানো হল)

বিকল্প সমাধান:

দেওয়া আছে, $f(x) = x^3 + 5$

এবং $g(x) = (x-5)^{\frac{1}{3}}$

এখন, $f(g(x)) = f\{(x-5)^{\frac{1}{3}}\}$

$$= \left\{(x-5)^{\frac{1}{3}}\right\}^3 + 5$$

$$= x - 5 + 5 = x$$

এবং $g(f(x)) = g(x^3 + 5)$

$$= (x^3 + 5 - 5)^{\frac{1}{3}} = (x^3)^{\frac{1}{3}} = x$$

যেহেতু $f(g(x)) = g(f(x)) = x$

সুতরাং f এর বিপরীত ফাংশন g অর্থাৎ $g = f^{-1}$.

বিকল্প সমাধান:

ধরি, $f(x) = y = x^3 + 5$

বা, $y = x^3 + 5$

বা, $x = y^3 + 5$ [x ও y পরস্পর প্রতিস্থাপন করে]

বা, $y^3 = x - 5$

বা, $y = (x-5)^{\frac{1}{3}}$ [ঘনমূল করে]

$\therefore f^{-1}(x) = (x-5)^{\frac{1}{3}}$ ...(i)

আবার, $g(x) = (x-5)^{\frac{1}{3}}$ ......(ii)

(i) ও (ii) নং সমীকৃত করে পাই, $g = f^{-1}$ (দেখানো হলো)

(খ) এর সমাধান:

দেওয়া আছে, $f: R \to R$ এবং $f(x) = 5x - 4$

ধরি, $y = f(x) = 5x - 4$

$\therefore f(x) = y$

$\Rightarrow x = f^{-1}(y)$ .... (ii)

আবার, $y = 5x - 4$

$\Rightarrow 5x = y + 4$

$\Rightarrow x = \dfrac{y+4}{5}$

$\Rightarrow f^{-1}(y) = \dfrac{y+4}{5}$

$\therefore f^{-1}(x) = \dfrac{x+4}{5}$

$\therefore y = f^{-1}(x) = \dfrac{x+4}{5}$ **[Ans.]**

১৩। S অন্বয়ের লেখচিত্র অঙ্কন কর এবং অন্বয়টি ফাংশন কিনা তা লেখচিত্র থেকে নির্দিষ্ট কর বোঝাতে:

(ক) $S = \{(x, y) : 2x - y + 5 = 0\}$ (খ) $S = \{(x, y) : x + y = 1\}$

(গ) $S = \{(x, y) : 3x + y = 4\}$ (ঘ) $S = \{(x, y) : x = -2\}$

(ক) এর সমাধান:

দেওয়া আছে, $S = \{(x, y) : 2x - y + 5 = 0\}$

এখানে, S-এর বর্ণনাকারী সমীকরণ: $2x - y + 5 = 0$ বা, $y = 2x + 5$ থেকে x ও y-এর নিম্নরূপ সংশ্লিষ্ট মান পাওয়া যায়:

x	-2	-1	0	1	2
y	1	3	5	7	9

$\therefore P = \{(-2, 1), (-1, 3), (0, 5), (1, 7), (2, 9)\} \subset S$

এখন, স্থানাঙ্কিত ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে $(-2, 1)$, $(-1, 3)$, $(0, 5)$, $(1, 7)$, $(2, 9)$ বিন্দুগুলো স্থাপন করে যোগ করলে সরলরেখা পাওয়া যায়। এটাই $S = \{(x, y) : 2x - y + 5 = 0\}$ অন্বয়টির লেখ।

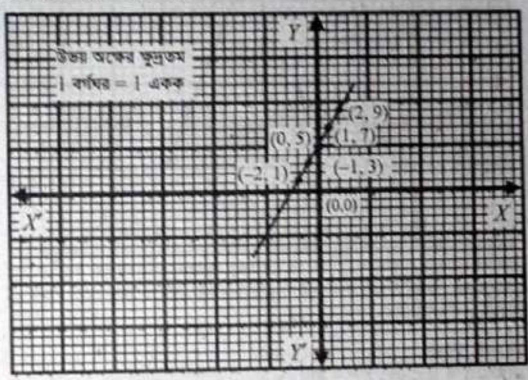
জেনে রাখা ভালো:

(i) একমাত্র বিশিষ্ট চলকের সকল সমীকরণের লেখ সর্বদা সরলরেখা।

(ii) একমাত্র বিশিষ্ট চলকের সমীকরণ সর্বদা ফাংশন। শুধু y অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখা ব্যতীত।

(iii) একমাত্র বিশিষ্ট চলকের সমীকরণের ডোমেন ও রেঞ্জ সর্বদা R।

লেখচিত্র থেকে দেখা যায় যে, Y অক্ষের সমান্তরাল কোনো রেখায় লেখের একাধিক বিন্দু অবস্থিত নয় অর্থাৎ S এর কোনো দুটি সদস্যেরই একই প্রথম উপাদান নেই। সুতরাং S অন্বয়টি একটি ফাংশন।



(খ) এর সমাধান:

দেওয়া আছে, $S = \{(x, y) : x + y = 1\}$

এখানে, S এর বর্ণনাকারী সমীকরণ,

$x + y = 1$

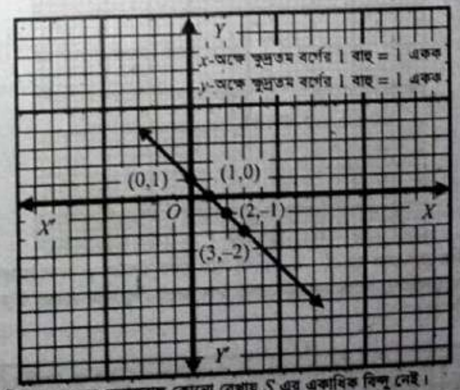
বা, $y = 1 - x$ ... ... (i)

এখন, (i) নং সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x এর কয়েকটি মান নিয়ে তাদের অনুরূপ y এর মান নির্ণয় করি:

x	0	1	2	3
y	1	0	-1	-2

এখন ছক কাগজে (x, y) বিন্দুগুলো স্থাপন করে সংযোগ করলে $y = 1 - x$ অর্থাৎ $x + y = 1$ সমীকরণের লেখচিত্র পাওয়া যাবে। এটিই হবে S অন্বয়ের লেখচিত্র যা ছক কাগজে দেখানো হলো।

লেখচিত্রে, XOX' দ্বারা x অক্ষ এবং YOY' দ্বারা y অক্ষ বোঝানো হয়েছে। x অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 1 বাহু = 1 একক এবং y অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 1 একক ধরা হয়েছে।



লেখচিত্রে, y অক্ষের সমান্তরাল কোনো রেখায় S এর একাধিক বিন্দু নেই।

$\therefore$ S অন্বয়টি একটি ফাংশন। **(Ans.)**

(গ) এর সমাধান:

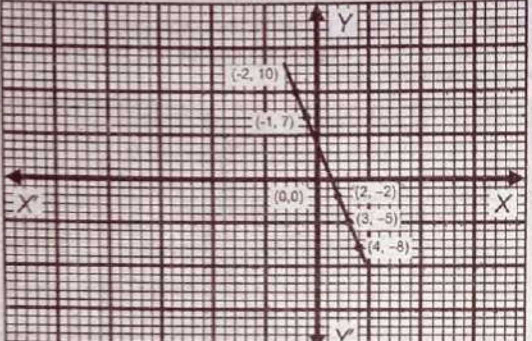
দেওয়া আছে, $S = \{(x, y) : 3x + y = 4\}$

এখানে, S-এর বর্ণনাকারী সমীকরণ : $3x + y = 4$ বা, $y = 4 - 3x$ থেকে x ও y –এর নিম্নরূপ সংশ্লিষ্ট মান পাওয়া যায়:

x	-2	-1	2	3	4
y	10	7	-2	-5	8

$\therefore P = \{(-2, 10), (-1, 7), (2, -2), (3, -5), (4, -8)\} \subset S.$

এখন, ছানাঙ্কায়িত ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গের এক বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে $(-2, 10), (-1, 7), (2, -2), (3, -5)$ $(4, -8)$ বিন্দুগুলো স্থাপন করে যোগ করলে একটি সরলরেখা পাওয়া যায়। এটাই $S = \{(x, y) : 3x + y = 4\}$ অম্বয়টির লেখ।



লেখচিত্র থেকে দেখা যায় যে, Y–অক্ষের সমান্তরাল কোনো রেখায় লেখের একাধিক বিন্দু অবস্থিত নয়। অর্থাৎ S–এর কোন দুটি সদস্যেরই একই প্রথম উপাদান নেই। সুতরাং S অম্বয়টি একটি ফাংশন।

(ঘ) এর সমাধান:

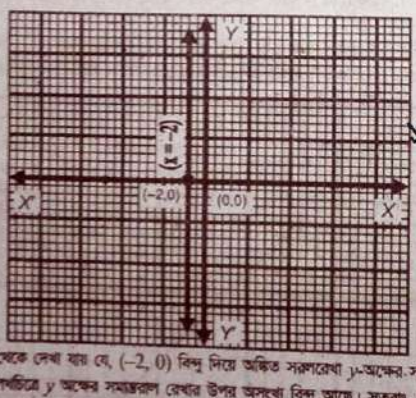
দেওয়া, $S = \{(x, y) : x = -2\}$

এখানে, S-এর বর্ণনাকারী সমীকরণ: $x = -2$ এ y যুক্ত কোন পদ নেই। y-এর মান যাই হোক না কেন x-এর মান সর্বদায় -2 পাওয়া যায়:

x	-2	-2	....
y	0	0	....

$\therefore S = \{(x, y) : x = -2\}$
$= \{(-2, 0), (-2, 0), \ldots\ldots\}$

এখন, ছানাঙ্কায়িত ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম একটি বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্যের এককে একক ধরে $(-2, 0)$ বিন্দুটি স্থাপন করলে y-অক্ষের সমান্তরাল একটি সরলরেখা পাওয়া যায়। এটাই $S = \{(x, y) : x = -2\}$ অম্বয়টি লেখ।



লেখচিত্র থেকে দেখা যায় যে, $(-2, 0)$ বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত সরলরেখা y-অক্ষের সমান্তরাল। অর্থাৎ লেখচিত্রে y অক্ষের সমান্তরাল রেখার উপর অসংখ্য বিন্দু আছে। সুতরাং S অম্বয়টি ফাংশন নয়।

> ১৪। S অম্বয়ের লেখচিত্র অঙ্কন কর এবং অম্বয়টি ফাংশন কিনা তা লেখচিত্র থেকে নির্ণয় কর যেখানে:
> (ক) $S = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 25\}$ (খ) $S = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 9\}$

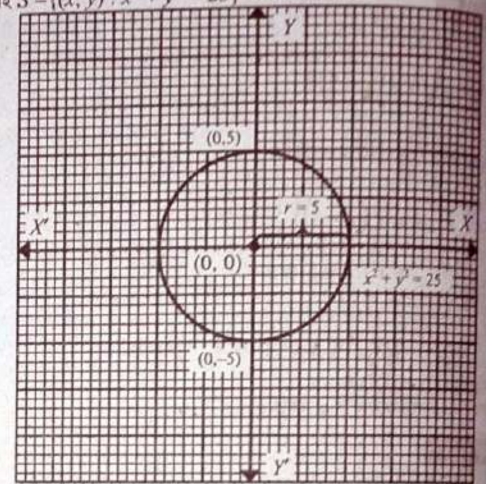
(ক) এর সমাধান:

দেওয়া আছে, $S = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 25\}$

প্রদত্ত S অম্বয়টির বর্ণনাকারী সমীকরণ: $x^2 + y^2 = 25$

বা, $(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = (5)^2$ একটি বৃত্তের সমীকরণ; যার কেন্দ্র (0, 0) (অর্থাৎ কেন্দ্র মূলবিন্দুতে অবস্থিত) এবং ব্যাসার্ধ, $r = 5$.

এখন, স্থানাঙ্কায়িত ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্যের দ্বিগুণকে একক ধরে $(0, 0)$ বিন্দুকে কেন্দ্র ধরে এবং 5 একক ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত অঙ্কন করি। এটাই $S = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 25\}$ অম্বয়টির লেখ।



লেখচিত্র থেকে দেখা যায় যে, Y-অক্ষের সমান্তরাল রেখায় লেখের একাধিক বিন্দু অবস্থিত যথা $(0,5)$ ও $(0, -5)$। অর্থাৎ S-এর একাধিক সদস্যের প্রথম উপাদান একই। সুতরাং S অম্বয়টি ফাংশন নয়।

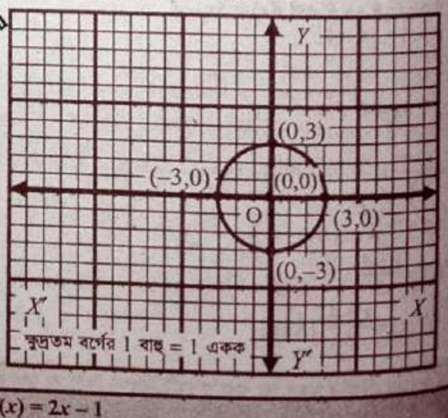
(খ) এর সমাধান:

এখানে, $S = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 9\}$

অর্থাৎ S এর বর্ণনাকারী সমীকরণ, $x^2 + y^2 = 9 \ldots\ldots\ldots$ (i)

বা, $(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = (3)^2$

সুতরাং (i) নং সমীকরণের লেখচিত্র একটি বৃত্ত যার কেন্দ্র $(0, 0)$ ও ব্যাসার্ধ 3। এখন ছক কাগজে $(0, 0)$ বিন্দু স্থাপন করি। $(0, 0)$ বিন্দুকে কেন্দ্র করে ও একক ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত বৃত্তই হবে (i) নং সমীকরণ অর্থাৎ S এর লেখচিত্র যা ছক কাগজে দেখানো হলো। y অক্ষের উপর লেখের দুটি বিন্দু $(0, 3)$ ও $(0, -3)$ অবস্থিত অর্থাৎ x এর একটি মানের জন্য y এর দুটি মান বিদ্যমান। সুতরাং S অম্বয়টি ফাংশন নয়।



> ১৫। $F(x) = 2x - 1$
> (ক) $F(x + 1)$ এবং $F\left(\frac{1}{2}\right)$ এর মান নির্ণয় কর।
> (খ) $F(x)$ ফাংশনটি এক-এক কি না তা নির্ণয় কর, যখন $x, y \in N$.
> (গ) $F(x) = y$ হলে x এর তিনটি মান নির্ণয় কর, যখন $x, y \in N$ এবং $y = 2x - 1$ সমীকরণটির লেখচিত্র অঙ্কন।

(ক) এর সমাধান:

এখানে, $F(x) = 2x - 1$.

$F(x+1) = 2(x+1) - 1$
$= 2x + 2 - 1 = 2x + 1$

$\therefore F(x+1) = 2x + 1$. (Ans.)

আবার, $F\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = 1 - 1 = 0$

$\therefore F\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. (Ans.)

(খ) এর সমাধান:

$F(x) = 2x - 1$ যেখানে, $x, y \in N$.
ধরি, x_1 ও x_2 ডোম F এর দুটি উপাদান।
এখন, $F(x_1) = F(x_2)$ হবে যদি এবং কেবল যদি,
$2x_1 - 1 = 2x_2 - 1$
বা, $2x_1 = 2x_2$ বা, $x_1 = x_2$ হয়।
অর্থাৎ, $F(x)$ এর অধীনে ডোমেনের ভিন্ন ভিন্ন সদস্যের জন্য প্রতিচ্ছবি ভিন্ন।
$\therefore$ প্রদত্ত $F(x)$ ফাংশনটি এক-এক ফাংশন। (Ans.)

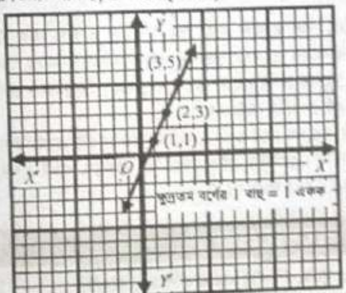
(গ) এর সমাধান:

এখানে, $F(x) = y$ অর্থাৎ, $y = 2x - 1$
বা, $y + 1 = 2x$
বা, $x = \frac{y+1}{2}$ ……… (i)

যখন, $x, y \in N$ তখন (i) নং থেকে x ও y এর তিনটি নিম্নরূপ সংশ্লিষ্ট মান পাওয়া যায়:

x	1	3	5
y	1	2	3

$\therefore x$ এর নির্ণেয় তিনটি মান 1, 2 ও 3. (Ans.)



এখন, $y = 2x - 1$ সমীকরণটির লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য ছক কাগজে XOX' অর্থাৎ x অক্ষ এবং YOY' অর্থাৎ y অক্ষ আঁকি।
উভয় অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 1 বাহুর = 1 একক ধরে (x, y) অর্থাৎ (1, 1) (2, 3) ও (3, 5) বিন্দুগুলো সংযোগ করলেই $y = 2x - 1$ সমীকরণের লেখচিত্র পাওয়া যাবে যা ছক কাগজে দেখানো হলো।

১৬। $f : R \to R$ এবং $g : R \to R$ ফাংশন দুইটি $f(x) = 3x + 3$ এবং $g(x) = \frac{x-3}{3}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত
(ক) $g^{-1}(-3)$ এর মান নির্ণয় কর।
(খ) দেখাও যে, $g = f^{-1}$
(গ) $f(x)$ অনটু ফাংশন কিনা তা নির্ধারণ কর।

(ক) এর সমাধান:

ধরি, $g(x) = y$
$\therefore x = g^{-1}(y)$
এখন,
$g(x) = \frac{x-3}{3}$
বা, $y = \frac{x-3}{3}$
বা, $3y = x - 3$
বা, $x = 3y + 3$
বা, $g^{-1}(y) = 3y + 3$ [$\because x = g^{-1}(y)$]
বা, $g^{-1}(-3) = 3.(-3) + 3$ [মান বসিয়ে]
বা, $g^{-1}(-3) = -9 + 3$
$\therefore g^{-1}(-3) = -6$ [Ans.]

(খ) এর সমাধান:

দেওয়া আছে,
$g(x) = \frac{x-3}{3}$ এবং $f(x) = 3x + 3$
ধরি,
$f(x) = y$
$\therefore x = f^{-1}(y)$
এখন,
$f(x) = 3x + 3$
বা, $y = 3x + 3$
বা, $3x = y - 3$
বা, $x = \frac{y-3}{3}$
বা, $f^{-1}(y) = \frac{y-3}{3}$
বা, $f^{-1}(x) = \frac{x-3}{3} = g(x)$
$\therefore g = f^{-1}$ [দেখানো হলো]

(গ) এর সমাধান:

দেওয়া আছে,
$f(x) = 3x + 3$.
এখন, $f(x_1)$ এর দুইটি উপাদান x_1 ও x_2 নিই
এখন, $f(x_1) = 3x_1 + 3$ এবং $f(x_2) = 3x_2 + 3$
যদি $f(x_1) = f(x_2)$ হয় তবে
$3x_1 + 3 = 3x_2 + 3$
$\therefore x_1 = x_2$
অর্থাৎ f এর অধীনে ডোমেনের ভিন্ন ভিন্ন সদস্যের প্রতিচ্ছবি ভিন্ন ভিন্ন।
অতএব, প্রদত্ত ফাংশন এক-এক।
আবার, $y \in R$ যে কোন সংখ্যা হলে,
ধরি, $y = 3x + 3 = f(x)$.
$3x = y - 3$ বা $x = \frac{y-3}{3}$
এখন, $\left(\frac{y-3}{3}\right) = 3.\frac{y-3}{3} + 3$.
$= y - 3 + 3 = y$
$\therefore f\left(\frac{y-3}{3}\right) = y = f(x)$
$\therefore$ ফাংশনটি অনটু বা সার্বিক।

১৭। $f(x) = \sqrt{x-4}$
(ক) $f(x)$ এর ডোমেন নির্ণয় কর।
(খ) $f(x)$ এক-এক ফাংশন কিনা নির্ধারণ কর।
(গ) $f^{-1}(x)$ ফাংশন কিনা তা লেখচিত্রের সাহায্যে নির্ণয় কর।

(ক) এর সমাধান:

দেওয়া আছে, $f(x) = \sqrt{x-4}$
x এর যেসকল বাস্তব মানের জন্য $f(x)$ এর বাস্তব মান পাওয়া যায় সেগুলোই $f(x)$ এর ডোমেন।
$f(x) = \sqrt{x-4} \in R$ হবে যদি এবং কেবল যদি $x - 4 \geq 0$ হয়।
বা, $x \geq 4$
$\therefore f(x)$ এর ডোমেন, ডোম $f = \{x \in R : x \geq 4\}$ [Ans.]

(খ) এর সমাধানঃ

আমরা জানি,

একটি ফাংশন $f : A \rightarrow B$ এক-এক ফাংশন হবে, যদি ও কেবল যদি $f(x_1) = f(x_2)$ হলে $x_1 = x_2$ হয় (যেখানে $x_1, x_2 \in A$)

এখন, $f(x) = \sqrt{x-4}$

ধরি, $a, b \in R$

তাহলে, $f(a) = \sqrt{a-4}$ এবং $f(b) = \sqrt{b-4}$

এখানে,

$f(a) = f(b)$

বা, $\sqrt{a-4} = \sqrt{b-4}$

বা, $a - 4 = b - 4$

$\therefore a = b$

সুতরাং $f(x)$ ফাংশনটি এক-এক ফাংশন।

(গ) এর সমাধানঃ

ধরি, $f(x) = y$

$\therefore f^{-1}(y) = x$

এখন, $f(x) = \sqrt{x-4}$

বা, $y = \sqrt{x-4}$

বা, $y^2 = x - 4$

বা, $x = y^2 + 4$

বা, $f^{-1}(y) = y^2 + 4$ $\quad [\because f^{-1}(y) = x]$

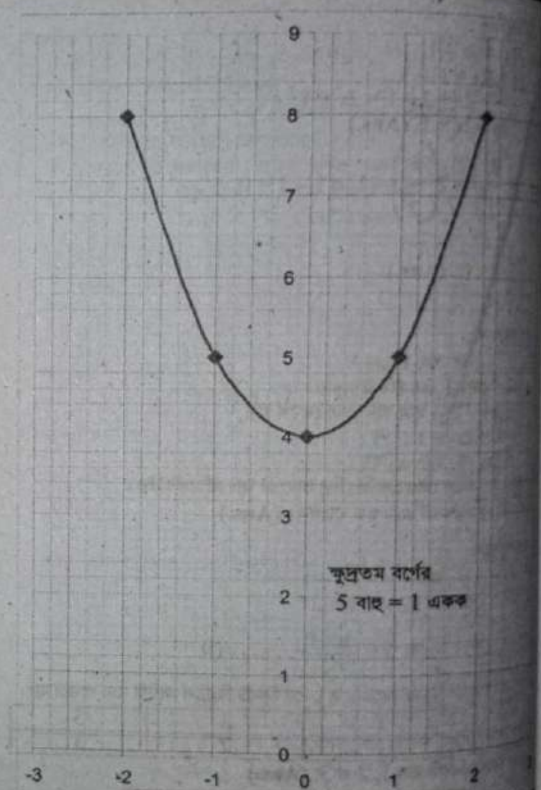
$\therefore f^{-1}(x) = x^2 + 4$ [চলক পরিবর্তন করে]

আবার,

ধরি, $f^{-1}(x) = x^2 + 4 = y$

$\therefore y = x^2 + 4$ থেকে x ও এর নিম্নরূপ সংশ্লিষ্ট মান পাওয়া যায়।

x	0	1	–1	2	–2
y	4	5	5	8	8



লেখচিত্রে XOX′ কে x-অক্ষ এবং YOY′ কে y অক্ষ এবং O মূলবিন্দু হয়েছে। ছক কাগজের x ধরে ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতি 5 বাহুর দৈর্ঘ্যকে 1 (0, 4), (1, 5), (–1, 5), (2, 8), (–2, 80) বিন্দুগুলো স্থাপন করে করলে $f^{-1}(x)$ এর লেখচিত্র পাওয়া যায়।

$F^{-1}(x)$ তখনই ফাংশন হবে যখন লেখচিত্রটিতে একই প্রথম উপাদানবিশিষ্ট একাধিক থাকবে না। লেখচিত্র হতে দেখা যায় এখানে একই প্রথম উপাদানবিশিষ্ট বিন্দু নেই অর্থাৎ $f^{-1}(x)$ ফাংশন।