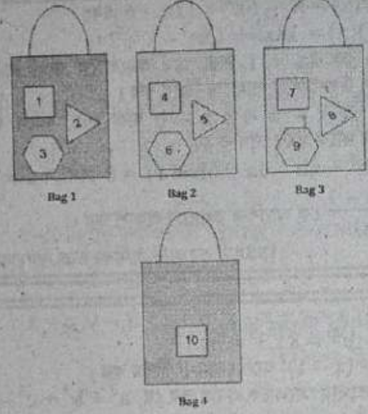
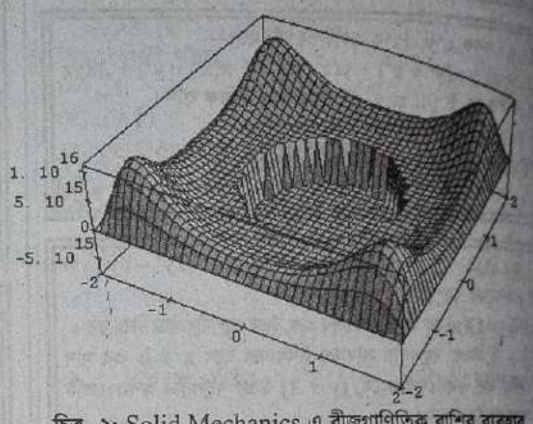
বাস্তব জীবনে এ অধ্যায়ের প্রয়োগ

দৈনন্দিন জীবনে আমরা বিভিন্ন সমস্যার সম্মুখীন হয়ে থাকি। আর সেই সকল সমস্যা হতে উত্তোরণের জন্য আমরা যেসমস্ত ব্যবস্থা গ্রহণ করে থাকি তার মধ্যে বীজগণিতের বীজগাণিতিক রাশির ব্যবহার অন্যতম। যেমন ধর, তুমি শপিং মলে গিয়ে ১০টি আইটেম কিনলে বাসায় নেওয়ার জন্য। কিন্তু তুমি দেখলে যে একটি ব্যাগে সর্বোচ্চ ৩টি আইটেম রাখা সম্ভব। এখন সবগুলো আইটেম নিতে হলে তোমাকে কতটি ব্যাগ ক্রয়তে হবে তা নির্ণয় করার জন্য তুমি অবশ্যই একটি অজানা চলক ধরে অর্থাৎ বীজগাণিতিকরাশির মাধ্যমে সমাধান করবে।

অর্থাৎ $\frac{10 \text{ items}}{3 \text{ items/bag}} = 3.33 \text{ bags} \approx 4 \text{ bags}$



চিত্র- ১: ব্যাগের সংখ্যা নির্ণয়ে বীজগাণিতিক রাশির ব্যবহার



চিত্র- ২: Solid Mechanics এ বীজগাণিতিক রাশির ব্যবহার

চিত্র- ৩: জাহাজের ক্রস সেকশনে বীজগাণিতিক রাশির ব্যবহার

এরূপ বিভিন্ন সময়েই আমরা অবচেতনভাবেই বীজগাণিতিক রাশির ব্যবহার করে যাচ্ছি।

তাছাড়া, উচ্চতর শিক্ষায় বীজগাণিতিক রাশির ব্যবহার অনস্বীকার্য। যেমন- বিভিন্ন ধরনের ইঞ্জিনিয়ারিং সেকশনে (নৌযন্ত্র কৌশলে জাহাজের Cross Sectional Area নির্ণয়ে, যন্ত্র কৌশলে Solid Mechanics এর ক্ষেত্রে Section Modulus, Deformation ইত্যাদি নির্ণয়ে) বীজগাণিতিক রাশির বহুবিধ ব্যবহার রয়েছে। মোটকথা, উচ্চতর শিক্ষায় বিজ্ঞান ভিত্তিক প্রতিটি শাখায়ই বীজগাণিতিক রাশি ব্যবহৃত হয়ে থাকে।

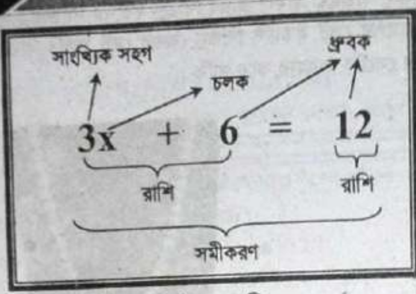
"A creative man is motivated by the desire to achieve, not by the desire to beat others".

– Ayn Rand

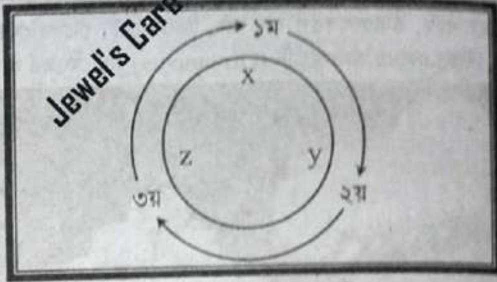
২ বীজগাণিতিক রাশি

[Algebraic Expressions]

অনুশীলনী-২



চিত্র: বীজগাণিতিক রাশি



চিত্র: চক্র-ক্রমিক রাশি

ভূমিকা [Introduction]

দৈনন্দিন কাজে বিভিন্ন সময়ে আমরা বিভিন্ন সমস্যার সম্মুখীন হই। এই সমস্যাগুলোকে বীজগাণিতিক রাশির মাধ্যমে প্রকাশ করে সহজেই সমাধান করা যা... এক্ষেত্রে প্রথমে কোনগুলো অজ্ঞাত এবং কোনগুলো নির্ণয় করতে হবে তা চিহ্নিত করতে হয়। এরপর অজ্ঞাত রাশিগুলোর একটিকে যেকোনো চলক (x) দ্বারা সূচিত করতে হয়। এভাবে একটি সমীকরণ তৈরি করে সমীকরণটি সমাধান করলে অজ্ঞাত রাশিটির মান পাওয়া যায়।

আল খোয়ারিজমি (790-850) এর পূর্ণ নাম *Abu-Abudullah Muhammad Ibn Musa Al-Khwarizmi*. তিনি মধ্যযুগীয় মুসলিম বিজ্ঞানীদের মধ্যে শ্রেষ্ঠত্বের দাবীদার। তিনি ছিলেন একাধারে গণিতজ্ঞ, ভূগোলবিদ ও জ্যোতির্বিজ্ঞানী। এলজেবরা শব্দটি এসেছে দ্বিঘাত সমীকরণ (কোয়াড্রেটিক ইকুয়েশন, যার প্রমিত রূপ $ax^2 + bx + c = 0$) সমাধান করার জন্য তাঁর আবিষ্কৃত পদ্ধতি আল জাবর থেকে যে কারণে তাঁকে এলজেবরা তথা জীবগণিতের জনক বলা হয়। এলগরিদম শব্দটি এসেছে তাঁর ল্যাটিন রূপ এলগরিদমি (আলখোয়ারিজমী > এলগরিদমি) থেকে।

Al-Khwarizmi

বোর্ড প্রশ্নাবলির বিশ্লেষণ [Board Questions Analysis]

এই অধ্যায় থেকে বিভিন্ন বোর্ডে বিগত দু'বছরের এসএসসি পরীক্ষায় মোট ১০টি সৃজনশীল প্রশ্ন ও ৫০টি বহুনির্বাচনি প্রশ্ন এসেছে। নিচের 'Board Analysis' অংশে এ অধ্যায় থেকে কোন সালে কোন বোর্ডে কতটি প্রশ্ন হয়েছে তা দেওয়া আছে।

সৃজনশীল প্রশ্ন:

বোর্ড / সাল	ঢাকা	রাজশাহী	কুমিল্লা	যশোর	চট্টগ্রাম	বরিশাল	সিলেট	দিনাজপুর
২০১৬	১	–	–	১	১	–	১	১
২০১৫	১	১	–	১	১	–	–	১

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন:

বোর্ড / সাল	ঢাকা	রাজশাহী	কুমিল্লা	যশোর	চট্টগ্রাম	বরিশাল	সিলেট	দিনাজপুর
২০১৬	২	২	২	২	৩	২	২	২
২০১৫	২	৩	৩	৪	২	২	৩	২

মূল শব্দাবলি [Key Words]

বীজগাণিতিক রাশি (*Algebraic expression*), সহগ (*Coefficient*), ঘাত বা মাত্রা (*Degree*), চলক (*Variable*), ধ্রুবক (*Constant*), আদর্শ রূপ (*Standard forms*), বহুপদী (*Polynomial*), অভেদ (*Identify*), ভাগশেষ উপপাদ্য (*Remainder theorem*), উৎপাদক উপপাদ্য (*Factor Theorem*), সমমাত্রিক বহুপদী (*Homogenous Polynomial*), প্রতিসম রাশি (*symmetric Expression*), চক্র-ক্রমিক রাশি (*Cyclic Expression*), চক্র-প্রতিসম রাশি (*Cyclic Symmetric Expression*), চক্র-ক্রমিক বহুপদী (*Cyclic Polynomial*), মূলদ ভগ্নাংশ (*Rational fraction*), আংশিক ভগ্নাংশ (*Partial Fraction*), প্রকৃত ভগ্নাংশ (*Proper Fraction*), অপকৃত ভগ্নাংশ (*Improper Fraction*).

এ অধ্যায়ের আলোচ্যসূচি

- এক চলকের বহুপদী
- দুই চলকের বহুপদী
- তিন চলকের বহুপদী
- বহুপদীর গুণফল ও ভাগফল
- ভাগ সূত্র
- সমতা সূত্র
- ভাগশেষ উপপাদ্যের বিপরীত উপপাদ্য
- সমমাত্রিক বহুপদী
- প্রতিসম ও চক্র-ক্রমিক রাশি
- চক্র-ক্রমিক বহুপদীর উৎপাদকে বিশ্লেষণ
- মূলদ ভগ্নাংশ
- আংশিক ভগ্নাংশ
- ভাগশেষ ও উৎপাদক উপপাদ্য

প্রাথমিক আলোচনা

বীজগাণিতিক রাশি (*Algebraic expression*): এক বা একাধিক সংখ্যা ও সংখ্যা নির্দেশক প্রতীককে (যেমন- x, y, z) $+, -, \times, \div$, ঘাত বা মূল চিহ্নের যেকোন একটি বা একাধিকের সাহায্যে অর্থবহভাবে সংযুক্ত করলে যে নতুন সংখ্যা নির্দেশক প্রতীকের সৃষ্টি হয় (যেমন: $x^2 + 2x + 3$) তাকে বীজগাণিতিক রাশি বলে।

যেমন: $3x, ax + by, x^3 + a, x + \sqrt{y}$ ইত্যাদি।

ব্যাখ্যা: নিম্নে কতিপয় রাশির উদাহরণমূলক ব্যাখ্যা দেওয়া হলো:

(i) $2 \rightarrow$ সংখ্যা দ্বারা গঠিত অর্থবহ রাশি।

(ii) $x \rightarrow$ সংখ্যা নির্দেশক প্রতীক (x) সম্বলিত অর্থবহ রাশি, যাকে সাধারণত 'চলক' নামে অভিহিত করা হয়।

(iii) $x^2 \rightarrow$ সংখ্যা নির্দেশক প্রতীক, (x) এর ঘাত (এক্ষেত্রে দ্বিঘাত) সম্বলিত রাশি।

(iv) $2x \rightarrow$ একটি ধ্রুব সংখ্যা ও একটি চলকের গুণফল সম্বলিত অর্থবহ রাশি।

(v) $2 + x \rightarrow$ একটি ধ্রুব সংখ্যা ও একটি চলকের যোগফল সম্বলিত রাশি।

(vi) $\sqrt{2} \rightarrow$ মূল চিহ্ন সম্বলিত (এক্ষেত্রে বর্গমূল) অর্থবহ রাশি।

(vii) $\sqrt{x} \rightarrow$ মূল বা ঘাত চিহ্নযুক্ত সম্বলিত সংখ্যা নির্দেশক প্রতীক (x) সম্বলিত অর্থবহ রাশি।

◀ বৈশিষ্ট্য অনুসারে $6 + a + y^2 + \sqrt{x} + \sqrt[3]{z}$ রাশিটির বৈশিষ্ট্য হলো:

(ক) ১ম পদে একটি সংখ্যা আছে যা হলো 6 (ধ্রুব পদ)।

(খ) ২য় পদে একটি সংখ্যা নির্দেশক প্রতীক রয়েছে যা হলো a (ধ্রুব পদ)।

(গ) ৩য় পদে y একটি সংখ্যা নির্দেশক অক্ষর প্রতীক যা সাধারণ চলক নামে অভিহিত।
এখানে $2 \rightarrow$ ঘাত, $y \rightarrow$ সংখ্যা নির্দেশক প্রতীক (চলক)

(ঘ) ৪র্থ পদে $\sqrt{x}$ -এ মূলচিহ্ন ($\sqrt{\ }$) সম্বলিত একটি সংখ্যা নির্দেশক প্রতীক (x) রয়েছে।
এখানে $\sqrt{\ } \rightarrow$ বর্গমূল চিহ্ন, $x \rightarrow$ সংখ্যা নির্দেশক প্রতীক (চলক)

(ঙ) ৫ম পদে $\sqrt[3]{z}$ -এ ঘনমূল চিহ্ন সম্বলিত একটি সংখ্যা নির্দেশক প্রতীক (z) রয়েছে।
এখানে $\sqrt[3]{\ } \rightarrow$ ঘনমূল চিহ্ন, $z \rightarrow$ সংখ্যা নির্দেশক প্রতীক (চলক)

পদ: কোনো একটি বীজগাণিতিক চলকের (যেমন: x, y, z ইত্যাদি) শুধুমাত্র অঋণাত্মক পূর্ণসাংখ্যিক ঘাত (*power*) ও ধ্রুবকের (যেমন: 2, 3, 4 ইত্যাদি) গুণফলকে পদ বলে। যেমন: $2x^2, 5x, bx^3, cy^2, 3z^3$ ইত্যাদি প্রত্যেকটি এক একটি পদ।

আবার, A, B, C ইত্যাদি রাশিগুলোর কোনটিই যদি একাধিক রাশির যোগফল বা বিয়োগফল না হয়, তবে এদের প্রত্যেকটিকে $A + B + C + \ldots\ldots$ আকারের রাশির এক একটি পদ বলা হয়।

$5x \times q + p + y - 3z$ রাশিটিতে পদ হলো 3টি যথা: $5x \times q + p, y$ ও $-3z$.
এখানে, p ও q আলাদা কোনো পদ নয়। পাশাপাশি দুইটি অর্থবহ প্রতীক গুণ বা ভাগ চিহ্ন দ্বারা যুক্ত হলে এরা আলাদা পদ হবে না।

চলক: কোনো আলোচনায় সংখ্যা নির্দেশক একটি অক্ষর প্রতীক চলক হবে যদি অক্ষর প্রতীকটি একাধিক সদস্যবিশিষ্ট কোনো সংখ্যা সেটের যেকোনো অনির্ধারিত সদস্য নির্দেশ করে। সাধারণত বীজগাণিতিক রাশিতে x, y, z দ্বারা চলক নির্দেশ করা হয়।
উদাহরণ: $5x^2 + 3y, 2x + 3y$ ইত্যাদি বীজগাণিতিক রাশিতে x ও y দুইটি চলক।

ডোমেন: চলকের মানের সেটকে এর ডোমেন বলে।
আবার, $x + y = 4$ রাশিটি x ও y চলকের বিভিন্ন মানের জন্য সত্য। এক্ষেত্রে x ও y চলকের মানগুলো প্রত্যেক চলকের ডোমেন।
ধরি, $x = 1, 2, 3$ হলে যথাক্রমে পাই, $y = 3, 2, 1$.
$\therefore x$ চলকের ডোমেন $= \{1,2,3\}$ $\quad$ y চলকের ডোমেন $= \{3,2,1\}$

ধ্রুবক: কোনো আলোচনায় সংখ্যা নির্দেশক অক্ষর প্রতীক যদি একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা হয় তবে তাকে ধ্রুবক বলে।
যেমন: $x + 2$ রাশিতে ধ্রুবক পদ 2।

কোনো আলোচনায় একটি চলক এর ডোমেন থেকে যেকোনো মান গ্রহণ করতে পারে, কিন্তু একটি ধ্রুবকের মান কোনো আলোচনায় নির্দিষ্ট থাকে। চলক তার ডোমেন থেকে যেকোনো মান গ্রহণ করতে পারে, কিন্তু ধ্রুবকের মান একটিই। তাই ধ্রুবকের মান নির্দিষ্ট থাকে।

লক্ষণীয়:

(i) পদ কখনোই একাধিক রাশির যোগফল বা বিয়োগফল হবে না। কারণ, একটি সংখ্যা বা সংখ্যা নির্দেশক রাশিও পদ। যেমন: $xy, \frac{x}{y}, x^2, 2x$ ইত্যাদি।

(ii) রাশিগুলো একটিমাত্র সংখ্যা বা সংখ্যা নির্দেশক প্রতীকও হতে পারে। আবার একাধিক সংখ্যা বা সংখ্যা নির্দেশক প্রতীকও রাশি।

(iii) একাধিক রাশির যোগফল বা বিয়োগফলও একটি রাশি। যেমন: $x + y, x - y, y - z$ ইত্যাদি এক একটি রাশি।

সকল পদই রাশি কিন্তু সকল রাশিই পদ নয়।

বহুপদী: বহুপদী বিশেষ ধরনের বীজগাণিতিক রাশি যাতে এক বা একাধিক পদ থাকে। যেমন: $2x^2 + 5x + bx^3, cy^2 - 3z^3$ ইত্যাদি।

বহুপদী সংশ্লিষ্ট রাশিসমূহ: বহুপদী রাশি সম্পর্কে সুস্পষ্ট ধারণা লাভের জন্য Cx^p রাশিটি বিবেচনা করা হয়।

Cx^p-এ: p হলো ঘাত বা মাত্রা; x হলো চলক; x^p এর সহগ C

উদাহরণ, $3x^2$: $p = 2$ হলো বহুপদীর ঘাত; x হলো চলক; 3 হলো x^2 (x^p) এর সহগ

উল্লেখ্য যে, বহুপদীর ক্ষেত্রে

(i) p এর মান অবশ্যই অঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা হতে হবে। অর্থাৎ $p = 0,1,2,3\ldots\ldots$ হতে পারবে কিন্তু $-1, -2$ অথবা, $1.2, 2.4, 5.6, \sqrt{2}$ ইত্যাদি হতে পারবেনা।

(ii) $p = 0$ হলে $Cx^p = Cx^0 = C.1 = C$ অর্থাৎ চলক বর্জিত রাশি হবে।

(iii) C এর মান ধনাত্মক, ঋণাত্মক বা ভগ্নাংশ হতে পারে।

(iv) $C = 0$ হলে $Cx^p = 0.x^p = 0$ অর্থাৎ রাশিটি শূন্য হয়। অর্থাৎ $C = 0$ হলে পদটি বহুপদীতে উল্লেখ থাকেনা।

বহুপদীর মাত্রা: কোনো বহুপদীতে উল্লিখিত পদসমূহের গরিষ্ঠ মাত্রা (সবচেয়ে বড় মাত্রা) কে বহুপদীটির মাত্রা বলা হয়।
উদাহরণ: $2x^6 - 3x^5 + 2x - 5$ বহুপদীটির ক্ষেত্রে
১ম পদ $2x^6$ -এ x চলকের মাত্রা বা ঘাত 6, ২য় পদ ($-3x^5$)-এ x চলকের মাত্রা বা ঘাত 5
৩য় পদ $2x$ -এ x চলকের মাত্রা বা ঘাত 1, ৪র্থ পদ ($5x^0$)-এ x চলকের মাত্রা বা ঘাত 0
এখানে ১ম পদের মাত্রাই গরিষ্ঠ মাত্রা বা ঘাত। $\therefore$ প্রদত্ত বহুপদীর মাত্রা বা ঘাত 6।

ধ্রুবপদ: শূন্য মাত্রাযুক্ত চলককে অর্থাৎ চলক বর্জিত পদকে ধ্রুবপদ বলা হয়।
উদাহরণ: $2x^6 - 3x^5 + 2x + 5$ বহুপদীর ক্ষেত্রে চতুর্থ পদ $5(= 5x^0)$ হলো ধ্রুবক পদ। এ পদে চলকের মাত্রা বা ঘাত শূন্য।

মুখ্যপদ ও মুখ্যসহগ: বহুপদীতে গরিষ্ঠ মাত্রাযুক্ত পদটিকে মুখ্যপদ এবং মুখ্যপদের সহগকে মুখ্যসহগ বলা হয়।
উদাহরণ: $2x^6 - 3x^5 + 2x - 5$ বহুপদীতে গরিষ্ঠ মাত্রাযুক্ত পদ $2x^6$ যার ঘাত 6। অতএব মুখ্যপদ $2x^6$ এক্ষেত্রে মুখ্যপদের ($2x^6$) এর সহগ হলো 2 অর্থাৎ মুখ্যসহগ হলো 2।

আদর্শ রূপ: যেকোনো বহুপদীকে চলকের ঘাতের অধঃক্রমে অর্থাৎ মুখ্যপদ থেকে শুরু করে ক্রমে ক্রমে ধ্রুবক পদ পর্যন্ত বর্ণনা করা হয়। এরূপ বর্ণনাকে বহুপদীটিকে আদর্শ রূপ বলা হয়।
উদাহরণ: $2x^6 - x^4 + 3x^5 - 2x^2 + 5$ হলো x চলকের বহুপদী। এক্ষেত্রে পদসমূহের ঘাত যথাক্রমে 6,4,5,2,0। ঘাতগুলোকে অধঃক্রমে সাজিয়ে (6,5,4,2,0) আদর্শ আকারে লিখে পাই, $2x^6 + 3x^5 - x^4 - 2x^2 + 5$।

এক চলকের বহুপদী: যে বহুপদী একটি মাত্র চলকের সমন্বয়ে গঠিত একে এক চলকের বহুপদী বলে। সাধারণভাবে x চলকের বহুপদীকে Cx^p আকারে প্রকাশ করা হয়। যেখানে Cx^p: p একটি অঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা; C একটি নির্দিষ্ট; x হলো চলক

এক চলকের বহুপদী	p (ঘাত বা মাত্রা)	মুখ্যপদ	মুখ্যপদের সহগ
a	$0(ax^0)$	$ax^0 (\neq 0)$	a
$ax + b$	1	ax	a
$ax^2 + bx + c$	2	ax^2	a
$ax^3 + bx^2 + cx + d$	3	ax^3	a

জেনে রাখা ভালো: $\sqrt{x}, \sqrt{x-1}, \frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, x^{-3}$ ...... ইত্যাদি এক চলকের বহুপদী মনে হলেও বহুপদীর সংজ্ঞানুসারে বহুপদী নয়। কারণ, P এর মান সর্বদা $\{0, 1, 2, 3, ...\}$ অর্থাৎ অঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা হতে হবে।

দুই চলকের বহুপদী: সাধারণভাবে x ও y দুইটি চলক নিয়ে গঠিত বহুপদীকে দুই চলকের বহুপদী বলে। এ বহুপদীর পদগুলো Cx^py^q আকারে প্রকাশ করা হয়।

Cx^py^q —
- C হলো x^py^q এর সহগ যা নির্দিষ্ট সংখ্যা।
- x ও y হলো চলক
- p অঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা অর্থাৎ $p = \{0,1,2,3...\}$
- q অঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা অর্থাৎ $q = \{0,1,2,3, ...\}$

দুই চলকের বহুপদীর ক্ষেত্রে লক্ষণীয়:

মুখ্যপদ ও মাত্রা: $p+q$ হলো দুই চলকের বহুপদীর মাত্রা। এরূপ বহুপদীর $(p+q)$ এর মান যে পদে গরিষ্ঠ ঐ পদটিই মুখ্যপদ এবং ঐ পদের মাত্রাই বহুপদীর মাত্রা।

উদাহরণ: (১) $2x + 3xy$ বহুপদীকে Cx^py^q এর সাথে তুলনা করে।

(ক) ১ম পদের $(2x^1y^0 \rightarrow C = 2, p = 1, q = 0)$ মাত্রা $p+q = 1$

(খ) ২য় পদের $(3x^1y^1) \rightarrow C = 3, p = 1, q = 1)$ মাত্রা $p + q = 1+1 = 2$

$\therefore 2x + 3xy$ বহুপদীর মাত্রা দুই, মুখ্যপদ $3xy$, মুখ্যপদের সহগ 3

তিনচলকের বহুপদী: x,y ও z চলকের বহুপদীর পদগুলো অর্থাৎ তিন চলকের সমন্বয়ের গঠিত বহুপদীকে তিন চলকের বহুপদী বলে। এ ধরনের বহুপদীকে $Cx^py^qz^r$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

যেমন: $p(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 + z^3 - 3xyz$

$Cx^py^qz^r$ —
- C হলো একটি সংখ্যা
- x, y ও z হলো চলক
- p, q ও r হলো অঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা

তিন চলকের বহুপদীর মাত্রা: $(p+q+r)$ এর গরিষ্ঠ মানকে এরূপ বহুপদীর মাত্রা ব...

উদাহরণ: $x^3 + y^3 + z^3 - 3x^2yz^2$ বহুপদীকে $Cx^py^qz^r$-এর সাথে তুলনা করে...

১ম পদের $(1.x^3.y^0.z^0 \rightarrow C = 1, p = 3, q = 0, r = 0)$ মাত্রা $p+q+r$...

২য় পদের $(1.x^0.y^3.z^0 \rightarrow C = 1, p = 0, q = 3, r = 0)$ মাত্রা $p+q+r$...

৩য় পদের $(1.x^0.y^0.z^3 \rightarrow C = 1, p = 0, q = 0, r = 3)$ মাত্রা $p+q+r$...

৪র্থ পদের $(-3.x^2.y^1.z^2 \rightarrow C = -3, p = 2, q = 1, r = 2)$ মাত্রা $p+q+r$

$= 2 + 1 + 2 = 5$

$\therefore x^3+y^3+z^3-3x^2yz^2$ বহুপদীটির মাত্রা 5।

জেনে নাও: দুইটি বহুপদীর যোগফল, বিয়োগফল এবং গুণফল সবসময় বহুপদী... কিন্তু বহুপদীর ভাগফল বহুপদী হতেও পারে নাও হতে পারে।

উদাহরণ: $x + 1$ ও $1 - x$ দুইটি বহুপদী।

বহুপদীদ্বয়ের যোগফল $= x + 1 + 1 - x = 2 = 2x^0$ (যা শূন্য মাত্রার বহুপদী...)

বহুপদীদ্বয়ের বিয়োগফল $= x + 1 - 1 + x = 2x$, যা এক মাত্রার এক চলকের বহুপদী...

বহুপদীদ্বয়ের গুণফল $= (x+1)(1-x) = -(x^2-1)$ যা দুই মাত্রার এক চলকের বহুপদী...

বহুপদীদ্বয়ের ভাগফল $= \frac{x+1}{1-x} = \frac{x+1}{1-x} = (x+1)(1-x)^{-1}$ বহুপদী ন...

কারণ: $(x + 1)(1 - x)^{-1} = (x + 1)(1 + x + x^2 + ...)$ যা অসীম ...

জেনে রাখা ভালো: ঋণাত্মক বা পূর্ণসাংখ্যিক নয় এমন ঘাতযুক্ত ... অসীম পদ পর্যন্ত হয়। কিন্তু বহুপদী বলতে সসীম সংখ্যক পদকেই বুঝায়... অসীম সংখ্যক পদ বহুপদীর অন্তর্ভুক্ত নয়।

বহুপদীর প্রকারভেদ (পাঠ্যবই অনুসারে)

মাত্রা অনুসারে:

- **শূন্য বহুপদী:** শূন্য (0) সংখ্যাটিকে শূন্য বহুপদী বিবেচনা করা হয়। শূন্য বহুপদীর মাত্রা অসংজ্ঞায়িত।
- **শূন্য মাত্রার বহুপদী:**
  - যেকোনো অশূন্য ধ্রুবককে $(a \neq 0)$ চলকের 0 মাত্রার বহুপদী বলা হয়।
  - $a = ax^0$ বিবেচ্য
  - উদাহরণ: $-2, 0.5, 2$ ইত্যাদি
- **সমমাত্রিক বহুপদী:** কোনো বহুপদীর প্রত্যেক পদের মাত্রা একই হলে একে, সমমাত্রিক বহুপদী বলা হয়।
  যেমন: $x^2 + 2xy + xy^2$ রাশিটি x ও y চলকের দুই মাত্রার একটি সমমাত্রিক বহুপদী।
  $2x^2y + y^2z + 9z^2x - 5xyz$ রাশিটি x, y, z চলকের তিনমাত্রার সমমাত্রিক বহুপদী।

চলক অনুসারে:

- **এক চলকের** → Cx^p আকারের →
  - একটি মাত্র চলকযুক্ত বহুপদীকে এক চলকযুক্ত বহুপদী বলা হয়।
  - এদেরকে Cx^p আকারে প্রকাশ করা ... যেখানে, x হলো চলক C সহগ (ধ্রুবক), p হলো বহুপদীটির মাত্রা। (p সর্বদা অঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা)
  - এদেরকে $P(x)$ বা, $Q(x)$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। যেমন: $P(x) = ax^2 + bx + c$
  উদাহরণ: (i) a (ii) $ax + b$ (iii) $ax^2 + bx + c$ (iv) $ax^4 + bx^3 + cx^2 + ...$ হলো একটি মাত্র চলক দ্বারা গঠিত বহুপদী।
- **দুই চলকের** → Cx^py^q আকারের →
  - দুইটি চলকযুক্ত বহুপদীকে দুই চলকের বহুপদী বলা হয়।
  - এদেরকে Cx^py^q আকারে প্রকাশ করা ... যেখানে, x ও y হলো চলক, C সহগ ... P হলো বহুপদীটির মাত্রা। (p সর্বদা অঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা)
  - এদেরকে $P(x,y)$ বা, $Q(x,y)$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।
  যেমন: $P(x,y) = 8x^3 + y^3 + 7xy - 5$
  উদাহরণ: (i) $2x + 3y - 1$ (ii) $x^2 - 4xy + y^2 - 5x + 7y + 1$ (iii) $7x^3 - y^3 + 10x^2y + 6xy^2 - ...$
- **তিন চলকের** → $Cx^py^qz^r$ আকারের →
  - তিনটি চলকযুক্ত বহুপদীকে তিন চলকের বহুপদী বলা হয়।
  - এদেরকে $Cx^py^qz^r$ আকারে প্রকাশ করা ... যেখানে, x,y,z হলো চলক, C সহগ ... p,q,r হলো বহুপদীটির মাত্রা ... অঋণাত্মক।
  - এদেরকে $P(x,y,z)$ বা, $Q(x,y,z)$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।
  যেমন: $P(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3...$
  উদাহরণ: (i) $x^3 + 2xyz + y^2 + z^2$ (ii) $x^2 + xy + xyz + y + z$ (iii) $x + y + z^2 + xy + yz + ...$

[বি.দ্র. বহুপদীর প্রতিটি পদই আলাদা-আলাদাভাবে এক একটি বহুপদী। অর্থাৎ কোনো রাশির একটি পদ বহুপদী না হলে ঐ রাশিটি বহুপদী হবে না।]

ভাগ সূত্র: ধরি, ভাজ্য, $N(x) \rightarrow x$ চলকে বহুপদী।

ভাজক, $D(x) \rightarrow x$ চলকের বহুপদী।

ভাগফল, $Q(x) \rightarrow x$ চলকের বহুপদী।

ভাগশেষ, $R(x) \rightarrow x$ চলকের বহুপদী।

(ক) $Q(x)$ এর মাত্রা $= N(x)$ এর মাত্রা $- D(x)$ এর মাত্রা।

$Q(x)$ এর 1. $N(x)$ এর মাত্রা 2. $D(x)$ এর মাত্রা 1

$\therefore Q(x)$ এর মাত্রা $= [N(x) - D(x)]$ এর মাত্রা $= (2-1) = 1$

উদাহরণ:

$x+2)\ x^2+4x+6($

x^2+2x

$2x+6$

$2x+4$

2

(খ) ভাগশেষ $R(x)$ শূন্য হতে পারে, এখানে $R(x)$ এর মাত্রা $(0) < D(x)$ এর মাত্রা...

(গ) সকল x এর জন্য $N(x) = D(x)\,Q(x) + R(x)$ $[x^2+4x+6 = (x+2)(x+2)+2$...

সমতা সূত্র:

(১) যদি সকল x এর জন্য $ax + b = px + q$ হয়, তবে $x = 0$ ও $x = 1$ বসিয়ে পাই, $b = q$ এবং $a + b = p + q$; যা থেকে দেখা যায়, $a = p, b = q$.

(২) যদি সকল x এর জন্য $ax^2 + bx + c = px^2 + qx + r$ হয়, তবে $x = 0, x = 1$ ও $x = -1$ বসিয়ে পাই, $c = r$,
$a + b + c = p + q + r$ এবং $a - b + c = p - q + r$; যা থেকে দেখা যায় যে, $a = p, b = q, c = r$.

(৩) সাধারণভাবে দেখা যাবে যে, যদি সকল x এর জন্য $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots\dots \dots + a_{n-1}x + a_n = P_0x^n + P_1x^{n-1} + \dots\dots\dots + P_{n-1}x + P_n$ হয়, তবে $a_0 = P_0, a_1 = P_1, \dots\dots\dots, a_{n-1} = P_{n-1}, a_n = P_n$. অর্থাৎ সমতা চিহ্নের উভয়পক্ষে x এর একই ঘাতের সহগদ্বয় সমান।

অভেদ: দুইটি বহুপদী $P(x)$ ও $Q(x)$ সকল এর জন্য সমান হলে, এদের সমতাকে অভেদ বলা হয় এবং তা বোঝাতে অনেক সময় $P(x) \equiv Q(x)$ লেখা হয়। এক্ষেত্রে $P(x)$ ও $Q(x)$ বহুপদী দুইটি অভিন্ন হয়। $\equiv$ চিহ্নকে অভেদ চিহ্ন বলা হয়। সাধারণভাবে, দুইটি বীজগণিতীয় রাশির সমতাকে অভেদ (*identity*) বলা হয়, যদি রাশি দুইটিতে কোনো একটি চলকের ডোমেন একই হয় এবং চলকসমূহের ডোমেনভুক্ত মানের জন্য রাশি দুইটির মান সমান হয়। যেমন, $x(y + z) = xy + xz$ একটি অভেদ।

ভাগশেষ উপপাদ্য (*Remainder Theorem*):

প্রতিজ্ঞা ১। যদি $P(x)$ ধনাত্মক মাত্রার বহুপদী হয় এবং a কোনো নির্দিষ্ট সংখ্যা হয়, তবে $P(x)$ কে $x - a$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ $P(a)$ হবে।

প্রমাণ: $P(x)$ কে $x - a$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হয় 0 অথবা অশূন্য ধ্রুবক হবে।
মনে করি, ভাগশেষ R এবং ভাগফল $Q(x)$ তাহলে, ভাগের নিয়মে, সকল x এর জন্য-
$P(x) = (x - a)\, Q(x) + R$ ......(1)
(1) নং এ $x = a$ বসিয়ে পাই, $P(a) = 0.\, Q(a) + R = R$.
সুতরাং, $P(x)$ কে $x - a$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ $P(a)$ হবে।

উদাহরণ: $P(x) = x^3 - 8x^2 + 6x + 60$ বহুপদীকে $x + 2$ দ্বারা ভাগ করলে, ভাগশেষ কত হবে?

সমাধান: যেহেতু $x - a = x + 2$, $\therefore x + 2 = x - (-2) \Rightarrow a = -2$
সুতরাং, ভাগশেষ $p(-2), = (-2)^3 - 8(-2)^2 + 6(-2) + 60 = 8$

প্রতিজ্ঞা ১ এর অনুকরণে প্রমাণ করা যায় যে,

প্রতিজ্ঞা ২। যদি $P(x)$ ধনাত্মক মাত্রার বহুপদী হয় এবং $a \neq 0$ হয়, তবে $P(x)$ কে $ax + b$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ $P\left(\frac{-b}{a}\right)$ হবে।

উদাহরণ: বহুপদী $P(x) = 36x^2 - 8x + 5$ কে $(2x - 1)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে?

সমাধান: নির্ণেয় ভাগশেষ $P\left(\frac{1}{2}\right) = 36\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 8\left(\frac{1}{2}\right) + 5 = 9 - 4 + 5 = 10$

উৎপাদক উপপাদ্য (*Factor Theorem*):

প্রতিজ্ঞা ৩। যদি $P(x)$ ধনাত্মক মাত্রার বহুপদী হয় এবং $P(a) = 0$ হয়, তবে $P(x)$ এর একটি উৎপাদক $x - a$ হবে।

প্রমাণ: $P(x)$ বহুপদীকে $x - a$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ $= P(a)$
[ভাগশেষ উপপাদ্য অনুযায়ী]
$= 0$ [প্রদত্ত শর্ত থেকে]

অর্থাৎ $P(x)$ বহুপদী $x - a$ দ্বারা বিভাজ্য, $\therefore x - a$ হচ্ছে $P(x)$ এর একটি উৎপাদক।

উদাহরণ: $P(x) = x^2 - 5x + 6$ হলে $P(2) = 2^2 - 5 \times 2 + 6 = 0$
সুতরাং $x - 2$, $P(x)$ এর উৎপাদক হবে।
এখানে, $x^2 - 5x + 6 = x^2 - 3x - 2x + 6 = (x - 2)(x - 3)$
অর্থাৎ $x - 2$, $P(x)$ এর একটি উৎপাদক।

উৎপাদক উপপাদ্যের বিপরীত উপপাদ্য:

প্রতিজ্ঞা ৪। যদি $P(x)$ বহুপদীর $x - a$ একটি উৎপাদক হয়, তবে দেখাও যে, $P(a) = 0$

প্রমাণ: যেহেতু $P(x)$ বহুপদীর $x - a$ একটি উৎপাদক, সুতরাং আরেকটি বহুপদী $Q(x)$ পাওয়া যায় যেন, $P(x) = (x - a)\, Q(x)$
এখানে $x = a$ বসিয়ে দেখা যায় যে, $P(a) = (a - a)\, Q(a) = 0.\, Q(a) = 0$.

উদাহরণ: $P(x) = x^2 - 5x + 6$ এর $(x - 3)$ একটি উৎপাদক।
$\therefore P(3) = 0$ হবে। এখানে, $P(3) = 3^2 - 5 \times 3 + 6 = 9 - 15 + 6 = 0$

উদাহরণ: দেখাও যে, $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ বহুপদীর $x - 1$ একটি উৎপাদক হবে যদি ও কেবল যদি $a + b + c + d = 0$ হয়।

সমাধান: মনে করি, $a + b + c + d = 0$
তাহলে, $P(1) = a + b + c + d = 0$ [শর্তানুসারে]
সুতরাং, $x - 1$, $P(x)$ এর একটি উৎপাদক [উৎপাদক উপপাদ্যের সাহায্যে]
এবার মনে করি, $P(x)$ এর একটি উৎপাদক $x - 1$
তবে, উৎপাদকের বিপরীত উপপাদ্যের সাহায্যে পাই, $P(1) = 0$ অর্থাৎ $a + b + c + d = 0$.

মন্তব্য: ধনাত্মক মাত্রার যেকোনো বহুপদীর $x - 1$ একটি উৎপাদক হবে যদি ও কেবল যদি বহুপদীটির সহগসমূহের সমষ্টি 0 হয়।

দ্রষ্টব্য: কোনো বহুপদী $P(x)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করার জন্য প্রথমে $(x - r)$ আকারের একটি উৎপাদক নির্ণয় করে $P(x)$ কে সরাসরি $(x - r)$ দ্বারা ভাগ করে অথবা $P(x)$ এর পদসমূহকে পুনর্বিন্যাস করে $P(x)$ কে $P(x) = (x - r)Q(x)$ আকারে লেখা যায়। সেখানে $Q(x)$ বহুপদীর মাত্রা $P(x)$ এর মাত্রা থেকে 1 কম। অতঃপর $Q(x)$ এর উৎপাদক নির্ণয় করে অগ্রসর হতে হয়।

উদাহরণ: $P(x) = x^3 - 4x^2 + 4x - 3$ হলে $P(3) = 0$ অর্থাৎ $(x - 3)$, $P(x)$ এর একটি উৎপাদক
এবং $P(x) = (x - 3)(x^2 - x + 1)$
এখানে, $x - r = x - 3$ ও $Q(x) = x^2 - x + 1$.
এবং $Q(x)$ এর মাত্রা, $P(x)$ এর মাত্রা অপেক্ষা 1 কম।

উদাহরণ: উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর:
$18x^3 + 15x^2 - x - 2$

সমাধান: মনে করি, $P(x) = 18x^3 + 15x^2 - x - 2$
$P(x)$ এর ধ্রুব পদ -2 এর উৎপাদকসমূহের সেট $F_1 = \{1, -1, 2, -2\}$.
$P(x)$ এর মুখ্য সহগ 18 এর উৎপাদকসমূহের সেট $F_2 = \{1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6, 9, -9, 18, -18\}$.

এখন $P(a)$ বিবেচনা করি, যেখানে, $a = \frac{r}{s}$ এবং $r \in F_1, s \in F_2$

$a = 1$ হলে, $P(1) = 18 + 15 - 1 - 2 \neq 0$
$a = -1$ হলে, $P(-1) = -18 + 15 + 1 - 2 \neq 0$

$a = -\frac{1}{2}$ হলে, $P\left(-\frac{1}{2}\right) = -18\left(\frac{1}{8}\right) + 15\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2} - 2$

$$= \frac{-9}{4} + \frac{15}{4} + \frac{1}{2} - 2 = \frac{17}{4} - \frac{17}{4} = 0$$

সুতরাং $x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(2x + 1)$ অর্থাৎ $(2x + 1)$, $P(x)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $18x^3 + 15x^2 - x - 2 = 18x^3 + 9x^2 + 6x^2 + 3x - 4x - 2$
$= 9x^2(2x + 1) + 3x(2x + 1) - 2(2x + 1)$
$= (2x + 1)(9x^2 + 3x - 2)$

এবং $9x^2 + 3x - 2 = 9x^2 + 6x - 3x - 2 = 3x(3x + 2) - 1(3x + 2)$
$= (3x + 2)(3x - 1)$

$\therefore P(x) = (2x + 1)(3x + 2)(3x - 1)$

দ্রষ্টব্য: উপরের উদাহরণ থেকে আমরা লক্ষ করি যে, উৎপাদক উপপাদ্যের সাহায্যে পূর্ণসাংখ্যিক সহগবিশিষ্ট বহুপদী $P(x)$ এর উৎপাদক নির্ণয়ের জন্য প্রথমে $P(r)$ এবং পরে $P\left(\frac{r}{s}\right)$ পরীক্ষা করা যেতে পারে, যেখানে, r বহুপদীটির ধ্রুব পদের বিভিন্ন উৎপাদক ($r = \pm 1$ সহ) এবং S বহুপদীটির মুখ্য সহগের বিভিন্ন উৎপাদক ($S = \pm 1$ সহ)।

ব্যাখ্যা:
$P(a) = 2a^3 - a^2 - 2a + 1$ হলে এর ধ্রুবক পদ $r = 1$ এবং মুখ্য সহগ $S = 2$
ওপরের আলোচনা অনুযায়ী $P(r) = P(1) = 0$ অথবা $P\left(\frac{r}{s}\right) = P\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ হতে পারে।
এখানে, $P(1) = 2 \times 1^3 - 1^2 - 2 \times 1 + 1 = 2 - 1 - 2 + 1 = 0$
এবং $P\left(\frac{r}{s}\right) = P\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \times \frac{1}{2} + 1$
$= \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - 1 + 1 = 0$

অর্থাৎ, $(a - r) = a - 1$ এবং $\left(a - \frac{r}{s}\right) = \left(a - \frac{1}{2}\right)$ বা $(2a - 1)$, $P(a)$ এর উৎপাদক।

সমমাত্রিক, প্রতিসম ও চক্র-ক্রমিক রাশি

সমমাত্রিক বহুপদী: কোনো বহুপদীর প্রত্যেক পদের মাত্রা একই হলে, একে সমমাত্রিক বহুপদী (*Homogeneous Polynomial*) বলা হয়।

উদাহরণ: $x^2 + 2xy + 5y^2$ রাশিটি x, y চলকের একটি বহুপদী।

এখানে, $x^2 + 2xy + 5y^2 = x^2y^0 + 2xy + 5x^0y^2$ এর
১ম পদের মাত্রা $= 2 + 0 = 2$, ২য় পদের মাত্রা $= 1 + 1 = 2$
৩য় পদের মাত্রা $= 0 + 2 = 2$
$\therefore x^2 + 2xy + 5y^2$ রাশিটি x ও y চলকের দুই মাত্রার একটি সমমাত্রিক বহুপদী।

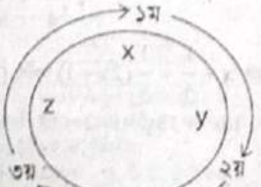
(i) $ax^2 + 2hxy + by^2$ রাশিটি x, y চলকের একটি দুই মাত্রার সমমাত্রিক রাশি, যেখানে a, h, b নির্দিষ্ট সংখ্যা।
(ii) x, y, a, h, b প্রত্যেককে চলক বিবেচনা করা হলে এটি এই চলকসমূহের তিন মাত্রার সমমাত্রিক বহুপদী হয়।
(iii) $2x^2y + y^2z + 9z^2x - 5xyz$ রাশিটি x, y, z চলকের তিন মাত্রার সমমাত্রিক বহুপদী। (এখানে প্রত্যেক পদের মাত্রা 3)।

প্রতিসম রাশি (*Symmetric*):
একাধিক চলক ধারণকারী কোনো বীজগাণিতিক রাশির যেকোনো দুইটি চলক স্থান বিনিময়ে যদি রাশিটি অপরিবর্তিত থাকে, তবে রাশিটিকে ঐ চলকসমূহের প্রতিসম (*Symmetric*) রাশি বলা হয়।

(i) $a + b + c$ রাশিটি a, b, c চলকের প্রতিসম রাশি। কারণ, a, b, c চলক তিনটির যেকোনো দুইটির স্থান বিনিময়ে রাশিটি অপরিবর্তিত থাকে।
(ii) একইভাবে, $ab + bc + ca$ রাশিটি a, b, c চলকের প্রতিসম রাশি।
(iii) $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx$ রাশিটি x, y, z চলকের প্রতিসম রাশি।
(iv) কিন্তু $2x^2 + 5xy + 6y^2$ রাশিটি x ও y চলকের প্রতিসম নয় কারণ রাশিটিতে x ও y এর পরস্পর স্থান বিনিময়ে $2y^2 + 5xy + 6x^2$ রাশিতে পরিবর্তিত হয়, যা পূর্বের রাশি থেকে ভিন্ন।

চক্র-ক্রমিক রাশি (*Cyclic*):
তিনটি চলক সম্বলিত কোনো বীজগাণিতিক রাশিতে প্রথম চলক দ্বিতীয় চলকের স্থলে, দ্বিতীয় চলক তৃতীয় চলকের স্থলে এবং তৃতীয় চলক প্রথম চলকের স্থলে বসালে রাশিটি যদি পরিবর্তিত না হয়, তবে রাশিটিকে ঐ তিন চলকের উল্লিখিত ক্রমে একটি চক্র-ক্রমিক রাশি বা চক্র প্রতিসম রাশি বা (*Cyclically Symmetic Expression*) বলা হয়। চলকগুলোর স্থান পরিবর্তন পাশের চিত্রের মতো চক্রাকারে করা হয় বলেই এরূপ রাশিকে চক্র-ক্রমিক রাশি বলা হয়ে থাকে।

(i) $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx$ রাশিটি x, y, z চলকের একটি চক্র-ক্রমিক রাশি, কারণ এতে চক্রাকারে x এর পরিবর্তে y, y এর পরিবর্তে z এবং z এর পরিবর্তে x বসালে রাশিটি একই থাকে। একইভাবে -



(ii) $x^2y + y^2z + z^2x$ রাশিটি x, y, z চলকের একটি চক্র-ক্রমিক রাশি। $x^2 - y^2 + z^2$ রাশিটি চক্র-ক্রমিক রাশি নয়, কারণ এতে x এর স্থলে y, y এর স্থলে z এবং z এর স্থলে x বসালে রাশিটি $y^2 - z^2 + x^2$ রাশিতে পরিবর্তিত হয় যা পূর্বের রাশি থেকে ভিন্ন।

লক্ষণীয়: তিনটি চলকের প্রত্যেক প্রতিসম রাশি চক্র-ক্রমিক। কিন্তু প্রত্যেক চক্র-ক্রমিক রাশি প্রতিসম নয়। যেমন: $x^2(y - z) + y^2(z - x) + z^2(x - y)$ রাশিটি চক্র-ক্রমিক, কিন্তু প্রতিসম নয়। কারণ, রাশিটিতে x এবং y স্থান বিনিময় করলে $y^2(x - z) + x^2(z - y) + z^2(y - x)$ রাশি পাওয়া যায় যা পূর্বের রাশিটি থেকে ভিন্ন।

দ্রষ্টব্য: বর্ণনার সুবিধার্থে x, y চলকের রাশিকে $F(x, y)$ আকারের এবং x, y, z চলকের রাশিকে $F(x, y, z)$ আকারের প্রতীক দ্বারা সূচিত করা হয়।

চক্র-ক্রমিক বহুপদীর উৎপাদকে বিশ্লেষণ:
এরূপ বহুপদীকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করার কোনো ধরা-বাঁধা নিয়ম নেই। সাধারণত, রাশিটির পদগুলোকে পুনর্বিন্যাস করে উৎপাদক বের করা হয়। অনেক সময় রাশিটিকে কোনো একটি চলকের বহুপদী ধরে উৎপাদক উপপাদ্যের সাহায্যে এক বা একাধিক উৎপাদক নির্ণয় করা হয় এবং রাশিটির চক্র-ক্রমিক ও সমমাত্রিক বৈশিষ্ট্য বিবেচনা করে অপরাপর উৎপাদক নির্ণয় করা হয়।
এ প্রসঙ্গে উল্লেখ্য যে, a, b, c চলকের–

(ক) কোনো চক্র-ক্রমিক বহুপদীর $(a-b)$ একটি উৎপাদক হলে, $(b-c)$ এবং $(c-a)$ রাশিটির উৎপাদক হবে।
(খ) এক মাত্রার ও দুই মাত্রার সমমাত্রিক চক্র-ক্রমিক বহুপদী যথাক্রমে $k(a+b+c)$ ও $k(a^2+b^2+c^2)+m(ab+bc+ca)$ যেখানে k ও m ধ্রুবক।
(গ) দুইটি বহুপদী যদি এমন হয় যে, চলকগুলোর সকল মানের জন্য এদের মান সমান হয়, তবে বহুপদী দুইটির অনুরূপ পদ দুইটির সহগ পরস্পর সমান হবে।

উদাহরণ: $bc(b-c) + ca(c-a) + ab(a-b)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

সমাধান:
$\boxed{\text{প্রথম পদ্ধতি}}$ $bc(b - c) + ca(c - a) + ab(a - b)$

$$= bc(b - c) + c^2a - ca^2 + a^2b - ab^2$$
$$= bc(b - c) + a^2b - ca^2 - ab^2 + c^2a$$
$$= bc(b - c) + a^2(b - c) - a(b^2 - c^2)$$
$$= (b - c)\{bc + a^2 - a(b + c)\}$$
$$= (b - c)\{bc + a^2 - ab - ac\}$$
$$= (b - c)\{bc - ab - ac + a^2\}$$
$$= (b - c)\{b(c - a) - a(c - a)\}$$
$$= (b - c)(c - a)(b - a)$$
$$= -(a - b)(b - c)(c - a)$$

$\boxed{\text{দ্বিতীয় পদ্ধতি:}}$ প্রদত্ত রাশিটিকে a এর বহুপদী $P(a)$ ধরে তাতে a এর পরিবর্তে বসিয়ে দেখি যে, $P(b) = bc(b - c) + cb(c - b) + b^2(b-b) = 0$ সুতরাং উৎপাদক উপপাদ্য অনুযায়ী $(a-b)$ প্রদত্ত রাশির একটি উৎপাদক। এখন যেহেতু প্রদত্ত রাশিটি চক্র-ক্রমিক রাশি সেহেতু $(b-c)$ এবং $(c-a)$ উভয়ে প্রদত্ত রাশির উৎপাদক। প্রদত্ত রাশিটি তিন মাত্রার সমমাত্রিক এবং এর তিনটি এক মাত্রার উৎপাদক পাওয়া গেছে। সুতরাং অন্য উৎপাদক যদি থাকে তা ধ্রুবক হবে।
অর্থাৎ, $bc(b-c) + ca(c-a) + ab(a-b) = k(a-b)(b-c)(c-a)$ ....(1)
যেখানে k একটি ধ্রুবক। a, b, c এর সকল মানের জন্য (1) সত্য। (1) এ
$a = 0, b = 1, c = 2$ বসিয়ে পাই, $2(-1) = k(-1)(-1)(2)$ $\therefore k = -1$
$\therefore bc(b - c) + ca(c - a) + ab(a - b) = -(a - b)(b - c)(c - a)$

○ <u>মূলদ ভগ্নাংশ</u>: একটি বহুপদীকে হর এবং অপর একটি বহুপদীকে লব নিয়ে গঠিত ভগ্নাংশকে মূলদ ভগ্নাংশ বলে।
যেমন- $(a^2 + a + 1)$ রাশিটিকে লব ও $(a - b)(a - c)$ রাশিটিকে হর নিয়ে
মূলদ ভগ্নাংশ হবে $\dfrac{a^2 + a + 1}{(a - b)(a - c)}$

○ <u>আংশিক ভগ্নাংশ</u>: একটি মূলদ ভগ্নাংশকে ভেঙ্গে একাধিক মূলদ ভগ্নাংশে পরিণত করলে একাধিক মূলদ ভগ্নাংশের প্রত্যেকটি আংশিক ভগ্নাংশ (*Partial fraction*) বলা হয়। যেমন- $\dfrac{3x - 8}{x^2 - 5x + 6} = \dfrac{2}{x - 2} + \dfrac{1}{x - 3}$

○ <u>প্রকৃত ভগ্নাংশ</u>: যে ভগ্নাংশে লবের চলকের সর্বোচ্চ মাত্রার চেয়ে হরের চলকের সর্বোচ্চ মাত্রা বেশী থাকে, তাকে প্রকৃত ভগ্নাংশ বলে।

○ <u>অপ্রকৃত ভগ্নাংশ</u>: যে ভগ্নাংশে হরের চলকের সর্বোচ্চ মাত্রার চেয়ে লবের চলকের সর্বোচ্চ মাত্রা বেশী অথবা সমান থাকে, তাকে অপ্রকৃত ভগ্নাংশ বলে। যেমন- $\dfrac{(x^3 + 2x^2 + 1)}{(x^2 + 2x - 3)}$

কতিপয় গুরুত্বপূর্ণ উৎপাদকীকরণ সূত্র:-

১। $bc(b - c) + ca(c - a) + ab(a - b) = -(b - c)(c - a)(a - b)$
২। $a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b) = -(b - c)(c - a)(a - b)$
৩। $a(b^2 - c^2) + b(c^2 - a^2) + c(a^2 - b^2) = (b - c)(c - a)(a - b)$
৪। $a^3(b - c) + b^3(c - a) + c^3(a - b) = -(b - c)(c - a)(a - b)(a + b + c)$
৫। $b^2c^2(b^2 - c^2) + c^2a^2(c^2 - a^2) + a^2b^2(a^2 - b^2) = -(b - c)$
$a) (a - b)(b + c)(c + a)(a + b)$
৬। $(ab + bc + ca)(a + b + c) - abc = (a + b)(b + c)(c + a)$
৭। $(b + c)(c + a)(a + b) + abc = (a + b + c)(ab + bc + ca)$
৮। $(a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = 3(a + b)(b + c)(c + a)$

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনমূলক কাজের সমাধান

কাজ: [Ref: পাঠ্যবই পৃষ্ঠা: ৩৯]

১। নিচের কোনটি বহুপদী নির্ণয় কর:

(ক) $2x^3$ (খ) $7-3a^2$ (গ) x^3+x^{-2} (ঘ) $\frac{a^2+a}{a^3-a}$ (ঙ) $5x^2-2xy+3y^2$ (চ) $6a+3b$

(ছ) $c^2+\frac{2}{c}-3$ (জ) $3\sqrt{n-4}$ (ঝ) $2x(x^2+3y)$ (ঞ) $3x-(2y+4z)$ (ট) $\frac{6}{x}+2y$ (ঠ) $\frac{3}{4}x-2y$

২। নিচের বহুপদীগুলোতে চলকের সংখ্যা ও মাত্রা নির্ণয় কর:

(ক) $x^2+10x+5$ (খ) $3a+2b$ (গ) $4xyz$ (ঘ) $2m^2n-mn^2$ (ঙ) $7a+b-2$ (চ) $6a^2b^2c^2$

৩। নিচের বহুপদীগুলোর প্রত্যেকটি (i) x চলকের বহুপদীর আদর্শ আকারে বর্ণনা কর এবং x চলকের বহুপদী রূপে এর মাত্রা, মুখ্য সহগ ও ধ্রুব পদ নির্ণয় কর।
(ii) y চলকের বহুপদীর আদর্শ আকারের বর্ণনা কর এবং y চলকের বহুপদীরূপে এর মাত্রা, মুখ্য সহগ ও ধ্রুব পদ নির্ণয় কর।

(ক) $3x^2-y^2+x-3$ (খ) $x^2-x^6+x^4+3$ (গ) $5x^2y-4x^4y^4-2$ (ঘ) $x+2x^2+3x^3+6$ (ঙ) $3x^3y+2xyz-x^4$

৪। যদি $P(x)=2x^2+3$ হয়, তবে $P(5), P(6), P\left(\frac{1}{2}\right)$ এর মান নির্ণয় কর।

বুঝার সুবিধার্থে প্রাথমিক আলোচনার *Concept Map* টি দেখুন।

১(ক) এর সমাধান:
$2x^3$ রাশিটিতে চলক x এবং এটি Cx^p আকারের যেখানে, $C=2$ এবং $p=3$.
এখানে $p=3$ একটি অঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং $C=2$ হলো $x^p=x^3$ এর সহগ।
সুতরাং $2x^3$ রাশিটি একটি বহুপদী। **[Ans.]**

১(খ) এর সমাধান:
$7-3a^2=-3a^2+7$ রাশিটিতে a একটি চলক
এখানে, $-3a^2+7$ রাশিটির প্রথম পদ $-3a^2$ যা Cx^p আকারের, যেখানে $C=-3$ এবং $p=2$.
এখানে $p=2$ একটি অঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং $C=-3$ হলো $a^p=a^2$ এর সহগ। এবং $-3a^2+7$ রাশিটির দ্বিতীয় পদ 7 একটি ধ্রুবপদ।
$\therefore -3a^2+7=7-3a^2$ রাশিটি একটি বহুপদী। **[Ans.]**

১(গ) এর সমাধান:
এখানে, x^3+x^{-2} রাশিটির প্রথম পদ x^3, Cx^p আকারের যেখানে $C=1$ এবং $p=3$ একটি অঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা।
এখানে, x^3 একটি বহুপদী।
আবার, প্রদত্ত রাশিটির ২য় পদ x^{-2} এখানে $C=1, p=-2$
এখানে, $p=-2$, যা ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা।
অতএব, x^{-2} পদটি বহুপদী নয়।
$\therefore x^3+x^{-2}$ রাশিটি বহুপদী নয়। **[Ans.]**

দ্রষ্টব্য: বহুপদীর প্রতিটি পদই আলাদা-আলাদাভাবে এক একটি বহুপদী। অর্থাৎ কোনো রাশির একটি পদ বহুপদী না হলে ঐ রাশিটি বহুপদী হবে না।

১(ঘ) এর সমাধান:
$\frac{a^2+a}{a^3-a}=\frac{a(a+1)}{a(a^2-1)}=\frac{a(a+1)}{a(a+1)(a-1)}=\frac{1}{(a-1)}=(a-1)^{-1}$ যা Cx^p আকারের নয়।
তাছাড়া $(a-1)^{-1}$ কে অসীম ধারায় বিস্তৃত করা যায়, যা বহুপদী নয়, যদিও এর পদগুলো Cx^p আকারের হয়।
সুতরাং $\frac{a^2+a}{a^3-a}$ রাশিটি বহুপদী নয়। **[Ans.]**

জেনে রাখা ভাল: ঋণাত্মক বা পূর্ণ সাংখ্যিক নয় এমন ঘাতযুক্ত ধারার বিস্তৃতি অসীম পদ পর্যন্ত হয়। কিন্তু বহুপদী বলতে সসীম সংখ্যক পদকেই বুঝানো হয়। অসীম সংখ্যক পদ বহুপদীর অন্তর্ভুক্ত নয়। [এ বিষয়ে উচ্চতর শ্রেণিতে জানবে।]

১(ঙ) এর সমাধান:
$5x^2-2xy+3y^2$ রাশিটি x ও y চলকবিশিষ্ট। এর প্রতিটি পদ Cx^py^q আকারের, যথা:
১ম পদ $5x^2=5x^2y^0$ এ $C=5, p=2, q=0$
২য় পদ $-2xy$ এ $C=-2, p=1, q=1$
৩য় পদ $3y^2=3x^0y^2$ এ $C=3, p=0, q=2$
যেখানে p ও q অঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা।
আবার, $5x^2, -2xy, 3y^2$ প্রত্যেকে এক একটি বহুপদী।
$\therefore 5x^2-2xy$ ও $3xy^2$ রাশিটি একটি বহুপদী। **[Ans.]**

১(চ) এর সমাধান:
$6a+3b$ রাশিটি a ও b চলকবিশিষ্ট। এর প্রতিটি পদ Cx^py^q আকারের।
যথা: ১ম পদ $6a=6a^1b^0$-এ $C=6, p=1, q=0$
২য় পদ $3b=3a^0b^1$-এ $C=3, p=0, q=1$
যেখানে p ও q অঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা।
$\therefore 6a$ ও $3b$ প্রত্যেকে এক-একটি বহুপদী।
$\therefore 6a+3b$ একটি বহুপদী। **[Ans.]**

১(ছ) এর সমাধান:
$c^2+\frac{2}{c}-3$ রাশিটির ২য় পদ $\frac{2}{c}$ বা $2c^{-1}$ কে cx^p এর সাথে তুলনা করে পাই, $p=-1$ যা ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা। বহুপদীর সংজ্ঞানুসারে রাশিটির ১ম ও ৩য় পদ বহুপদী হলেও ২য় পদ বহুপদী না হওয়ায় রাশিটিও বহুপদী নয়।
$\therefore$ রাশিটি বহুপদী নয়। **[Ans.]**

১(জ) এর সমাধান:
$3\sqrt{n-4}=3(n-4)^{\frac{1}{2}}$ রাশিটি Cx^p আকারের নয়।
তাছাড়া রাশিটির বিস্তৃতি একটি অসীম ধারা যা বহুপদী নয়।
$\therefore 3\sqrt{n-4}$ রাশিটি বহুপদী নয়। **[Ans.]**

১(ঝ) এর সমাধান:
$2x(x^2+3y)=2x^3+6xy$ রাশিটি x ও y চলকবিশিষ্ট। এর দুইটি পদই Cx^py^q আকারের।
যথা: ১ম পদ $2x^3=2x^3y^0$ এ $C=2, P=3, q=0$
২য় পদ $6xy=6x^1y^1$ এ $C=6, P=1, q=1$
যেখানে p ও q অঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা।
$\therefore 2x^3$ ও $6xy$ উভয় পদই বহুপদী।
$\therefore 2x(x^2+3y)$ রাশিটি একটি বহুপদী। **[Ans.]**

১(ঞ) এর সমাধান:
$3x-(2y+4z)=3x-2y-4z$ রাশিটি x, y ও z চলকবিশিষ্ট। এর প্রতিটি পদই $Cx^py^qz^r$ আকারের।

যথা: ১ম পদ $3x = 3x^1y^0z^0$ এ
$C = 1, p = 1, q = 0, r = 0$
২য় পদ $-2y = -2x^0y^1z^0$ এ
$C = -2, p = 0, q = 1, r = 0$
৩য় পদ $-4z = -4x^0y^0z^1$ এ
$C = -4, p = 0, q = 0, r = 1$
যেখানে p, q ও r অঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা।
$\therefore 3x, -2y$ ও $-4z$ প্রত্যেক পদই এক-একটি বহুপদী।
$\therefore 3x - 2y - 4z$ রাশিটি একটি বহুপদী। **[Ans.]**

১(ট) এর সমাধান:

$\frac{6}{x} + 2y = 6x^{-1} + 2y$ রাশিটি x ও y চলকবিশিষ্ট। এর ১ম পদ $6x^{-1}$ কে Cx^p এর সাথে তুলনা করে পাই $p = -1$ যা ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা।
$\therefore 6x^{-1} = \frac{6}{x}$ পদটি বহুপদী নয়। কিন্তু দ্বিতীয় পদ একটি বহুপদী।
যেহেতু একটি রাশির একটি পদ বহুপদী না হলে, উক্ত রাশিটি বহুপদী নয়।
$\therefore \frac{6}{x} + 2y$ রাশিটি বহুপদী নয়। **[Ans.]**

১(ঠ) এর সমাধান:

$\frac{3}{4}x - 2y$ রাশিটি x ও y চলকবিশিষ্ট। এর প্রতিটি পদ Cx^py^q আকারের।
যথা: ১ম পদ $\frac{3}{4}x = \frac{3}{4}x^1y^0$ এ $C = 1, p = 1, q = 0$
২য় পদ $-2y = -2x^0y^1$ এ $C = -2, p = 0, q = 1$
যেখানে, p ও q অঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা।
$\therefore \frac{3}{4}x$ ও $-2y$ প্রত্যেকটি পদই বহুপদী।
$\therefore \frac{3}{4}x - 2y$ রাশিটি একটি বহুপদী। **[Ans.]**

২। নিচের বহুপদীগুলোতে চলকের সংখ্যা ও মাত্রা নির্ণয় কর:
বুঝার সুবিধার্থে প্রাথমিক আলোচনা দেখুন।

সমাধান:
(ক) $x^2 + 10x + 5$ রাশিটি এক চলকের তিন পদবিশিষ্ট বহুপদী।
(খ) $3a + 2b$ রাশিটি দুই চলকের দুই পদবিশিষ্ট বহুপদী।
(গ) $4xyz$ রাশিটি তিন চলকের এক পদবিশিষ্ট বহুপদী।
(ঘ) $2m^2n - mn^2$ রাশিটি দুই চলকের দুই পদবিশিষ্ট বহুপদী।
(ঙ) $7a + b - 2$ রাশিটি দুই চলকের তিন পদবিশিষ্ট বহুপদী।
(চ) $6a^2b^2c^2$ রাশিটি তিন চলকের এক পদবিশিষ্ট বহুপদী।

৩ (ক) এর সমাধান:
(i) $3x^2 - y^2 + x - 3 = 3x^2 + x - y^2 - 3$
রাশিটি x চলকের বহুপদীর আর্দশ আকার।
বহুপদী রাশিটির x চলকের মাত্রা 2, মুখ্য সহগ 3, ধ্রুবপদ -3
(ii) $3x^2 - y^2 + x - 3 = -y^2 + 3x^2 + x - 3$
রাশিটি y চলকের বহুপদীর আর্দশ আকার।
বহুপদী রাশিটির y চলকের মাত্রা 2, মুখ্য সহগ -1, ধ্রুবপদ -3

৩ (খ) এর সমাধান:
(i) $x^2 - x^6 + x^4 + 3 = -x^6 + x^4 + x^2 + 3$
ইহা x চলকের বহুপদীর আর্দশ আকার। যেখানে x চলকের মাত্রা 6, মুখ্য সহগ -1, এক ধ্রুবপদ 3
(ii) এই বহুপদী রাশিতে যেহেতু y চলক বিশিষ্ট কোন পদ নেই। সেহেতু y চলকের আদর্শ আকারে লিখলে হয় $(x^2 - x^6 + x^4 + 3)y^0$ যেখানে মাত্রা 0, মুখ্য সহগ
$x^2 - x^6 + x^4 + 3$ ও ধ্রুব পদ 0.

৩ (গ) এর সমাধান:
(i) $5x^2y - 4x^4y^4 - 2 = -4x^4y^4 + 5x^2y - 2$
ইহা x চলকের বহুপদীর আর্দশ আকার। যেখানে x চলকের মাত্রা 4, মুখ্য সহগ $-4y^4$, এক ধ্রুবপদ -2
(ii) $5x^2y - 4x^4y^4 - 2 = -4x^4y^4 + 5x^2y - 2$
ইহা y চলকের বহুপদীর আর্দশ আকার। যেখানে y চলকের মাত্রা 4, মুখ্য সহগ $-4x^4$, এক ধ্রুবপদ -2

৩ (ঘ) এর সমাধান:
(i) $x + 2x^2 + 3x^3 + 6 = 3x^3 + 2x^2 + x + 6$
ইহা x চলকের বহুপদীর আর্দশ আকার। যেখানে x চলকের মাত্রা 3, মুখ্য সহগ 3, এক ধ্রুবপদ 6.
(ii) এখানে বহুপদী রাশিটিতে y চলক বিশিষ্ট কোনো পদ নেই। সুতরাং এ বহুপদী রাশিকে y চলকের আদর্শ আকারে লিখলে হয় $(x + 2x^2 + 3x^3 + 6)y^0$ যার মাত্রা 0, মুখ্য সহগ $x + 2x^2 + 3x^3 + 6$ ধ্রুব পদ 0.

৩ (ঙ) এর সমাধান:
(i) $3x^3y + 2xyz - x^4 = -x^4 + 3x^3y + 2xyz$ ইহা x চলকের বহুপদীর আদর্শ আকার যেখানে x চলকের মাত্রা 4, মুখ্য সহগ -1 এক ধ্রুবপদ 0
(ii) $3x^3y + 2xyz - x^4 = (3x^3 + 2zx)y - x^4$ ইহা y চলকের বহুপদীর আদর্শ আকার যেখানে y চলকের মাত্রা 1, মুখ্য সহগ $(3x^3 + 2zx)$ এক ধ্রুবপদ

৪ এর সমাধান:
এখানে, $P(x) = 2x^2 + 3$

এখানে, $P(x)$ বহুপদীটিতে $x = 5, 6, \frac{1}{2}$ বসিয়ে পাই,

$P(5) = 2(5)^2 + 3 = 53$
$P(6) = 2(6)^2 + 3 = 75$
$P\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 = 2.\frac{1}{4} + 3 = \frac{1}{2} + 3 = \frac{1+6}{2} = \frac{7}{2}$

কাজ: [Ref: পাঠ্যবই পৃষ্ঠা]
১। যদি $P(x) = 2x^4 - 6x^3 + 5x - 2$ হয়, তবে $P(x)$ কে নিম্নলিখিত বহুপদী দ্বারা ভাগ করে ভাগশেষ নির্ণয় কর।
(i) $x - 1$ (ii) $x - 2$ (iii) $x + 2$ (iv) $x + 3$ (v) $2x - 1$ (vi) $2x + 1$
২। ভাগশেষ উপপাদ্যের সাহায্যে ভাগশেষ নির্ণয় কর।
(i) ভাজ্য : $4x^3 - 7x + 10$, ভাজক : $x - 2$ (ii) ভাজ্য : $5x^3 - 11x^2 - 3x + 4$, ভাজক : $x + 1$
(iii) ভাজ্য : $2y^3 - y^2 - y - 4$, ভাজক : $y + 3$ (iv) ভাজ্য : $2x^3 + x^2 - 18x + 10$, ভাজক : $2x + 1$
৩। দেখাও যে, $3x^3 - 4x^2 + 4x - 3$ এর একটি উৎপাদক $(x - 1)$
৪। যদি $2x^3 + x^2 + ax - 9$ বহুপদীর একটি উৎপাদক $x + 3$ হলে a এর মান নির্ণয় কর।
৫। দেখাও যে, $x^3 - 4x^2 + 4x - 3$ বহুপদীর একটি উৎপাদক $x - 3$.
৬। যদি $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7x - 8$ হয়, তবে $P(x)$ কে $x - 2$ দ্বারা ভাগ করলে যে ভাগশেষ থাকে একে ভাগশেষ উপপাদ্যের সাহায্যে নির্ণয় কর।
৭। দেখাও যে, $4x^4 - 5x^3 + 5x - 2$ রাশি $x + 1$ এবং $x - 1$ বহুপদীদ্বয়ের সাধারণ উৎপাদক।
৮। উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর:
(i) $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ (ii) $x^3 + 4x^2 + x - 6$ (iii) $a^3 - a^2 - 10a - 8$ (iv) $x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 8x + 5$

১ (i) এর সমাধান:

এখানে, $P(x) = 2x^4 - 6x^3 + 5x - 2$

$x-1)\ 2x^4 - 6x^3 + 5x - 2\ (2x^3 - 4x^2 - 4x + 1$

$2x^4 - 2x^3$

(বিয়োগ করে) $-4x^3 + 5x$

$-4x^3 + 4x^2$

$(+)\quad(-)$

$-4x^2 + 5x$

$-4x^2 + 4x$

$(+)\quad(-)$

$x - 2$

$x - 1$

$(-)\quad(+)$

-1

$\therefore$ ভাগশেষ $= -1$ **[Ans.]**

১ (ii) এর সমাধান:

এখানে, $P(x) = 2x^4 - 6x^3 + 5x - 2$

$x-2)\ 2x^4 - 6x^3 + 5x - 2\ (2x^3 - 2x^2 - 4x - 3$

$2x^4 - 4x^3$

(বিয়োগ করে) $-2x^3 + 5x$

$-2x^3 + 4x^2$

$(+)\quad(-)$

$-4x^2 + 5x$

$-4x^2 + 8x$

$(+)\quad(-)$

$-3x - 2$

$-3x + 6$

$(+)\quad(-)$

-8

$\therefore$ নির্ণেয় ভাগশেষ $= -8$ **[Ans.]**

১ (iii) এর সমাধান:

$x+2)\ 2x^4 - 6x^3 + 5x - 2\ (2x^3 - 10x^2 + 20x - 35$

$2x^4 + 4x^3$

(বিয়োগ করে) $-10x^3 + 5x$

$-10x^3 - 20x^2$

$(+)\quad(+)$

$20x^2 + 5x$

$20x^2 + 40x$

$(-)\quad(-)$

$-35x - 2$

$-35x - 70$

[বিয়োগ করে] 68

$\therefore$ নির্ণেয় ভাগশেষ $= 68$ **[Ans.]**

১ (iv) এর সমাধান:

এখানে, $P(x) = 2x^4 - 6x^3 + 5x - 2$

$x+3)\ 2x^4 - 6x^3 + 5x - 2\ (2x^3 - 12x^2 + 36x - 103$

$2x^4 + 6x^3$

$(-)\quad(-)$

$-12x^3 + 5x$

$-12x^3 - 36x^2$

$(+)\quad(+)$

$36x^2 + 5x$

$36x^2 + 108x$

$(-)\quad(-)$

$-103x - 2$

$-103x - 309$

[বিয়োগ করে] 307

$\therefore$ নির্ণেয় ভাগশেষ $= 307$ **[Ans.]**

১ (v) এর সমাধান:

এখানে, $P(x) = 2x^4 - 6x^3 + 5x - 2$

$2x-1)\ 2x^4 - 6x^3 + 5x - 2\ \left(x^3 - \frac{5}{2}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{15}{8}\right.$

$2x^4 - x^3$

$-5x^3 + 5x$

$-5x^3 + \frac{5}{2}x^2$

$-\frac{5}{2}x^2 + 5x$

$-\frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{4}x$

$\frac{15}{4}x - 2$

$\frac{15}{4}x - \frac{15}{8}$

[বিয়োগ করে] $-\frac{1}{8}$

$\therefore$ নির্ণেয় ভাগশেষ $= -\frac{1}{8}$ **[Ans.]**

১ (vi) এর সমাধান:

এখানে, $P(x) = 2x^4 - 6x^3 + 5x - 2$

$2x+1)\ 2x^4 - 6x^3 + 5x - 2\ \left(x^3 - \frac{7}{2}x^2 + \frac{7}{4}x + \frac{13}{8}\right.$

$2x^4 + x^3$

$-7x^3 + 5x$

$-7x^3 - \frac{7}{2}x^2$

$(+)\quad(+)$

$\frac{7}{2}x^2 + 5x$

$\frac{7}{2}x^2 + \frac{7}{4}x$

[বিয়োগ করে] $\frac{13}{4}x - 2$

$\frac{13}{4}x + \frac{13}{8}$

[বিয়োগ করে] $-\frac{29}{8}$

$\therefore$ নির্ণেয় ভাগশেষ $= -\frac{29}{8}$ **[Ans.]**

২ (i) এর সমাধান:

এখানে, ভাজ্য: $4x^3 - 7x + 10$ এবং ভাজক: $x - 2$

ধরি, $P(x) = 4x^3 - 7x + 10$

$P(x)$ কে $x-2$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ উপপাদ্য অনুসারে ভাগশেষ হবে $P(2)$

$\therefore P(2) = 4(2)^3 - 7(2) + 10 = 32 - 14 + 10 = 28$

$\therefore$ নির্ণেয় ভাগশেষ $= 28$ **[Ans.]**

২ (ii) এর সমাধান:

এখানে, ভাজ্য: $5x^3 - 11x^2 - 3x + 4$ ভাজক: $x + 1$

ধরি $P(x) = 5x^3 - 11x^2 - 3x + 4$

$P(x)$ কে $x+1$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ উপপাদ্য অনুসারে ভাগশেষ হবে $P(-1)$

$\therefore P(-1) = 5(-1)^3 - 11(-1)^2 - 3(-1) + 4 = -5 - 11 + 3 + 4 = -9$ **[Ans.]**

২ (iii) এর সমাধান:

এখানে, ভাজ্য: $2y^3 - y^2 - y - 4$ ভাজক: $y + 3$

ধরি $P(y) = 2y^3 - y^2 - y - 4$

$P(y)$ কে $y + 3$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ উপপাদ্য অনুসারে ভাগশেষ হবে $P(-3)$

$\therefore P(-3) = 2(-3)^3 - (-3)^2 - (-3) - 4$

$= -54 - 9 + 3 - 4 = -64$

$\therefore$ নির্ণেয় ভাগশেষ $= -64$ **[Ans.]**

২ (iv) এর সমাধান:

এখানে, ভাজ্য: $2x^3+x^2-18x+10$ ভাজক: $2x+1$

ধরি $P(x)=2x^3+x^2-18x+10$

$P(x)$ কে $2x+1$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ উপপাদ্য অনুসারে ভাগশেষ হবে $P(-\frac{1}{2})$

$$\therefore P\left(-\frac{1}{2}\right)=2\left(-\frac{1}{2}\right)^3+\left(-\frac{1}{2}\right)^2-18\left(-\frac{1}{2}\right)+10$$

$$=-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+9+10=19$$

$\therefore$ নির্ণেয় ভাগশেষ $=19$ **[Ans.]**

৩ নং এর সমাধান:

ধরি $P(x)=3x^3-4x^2+4x-3$

উৎপাদক উপপাদ্যের বিপরীত উপপাদ্য অনুযায়ী যদি $(x-1)$, $P(x)$ এর একটি উৎপাদক হয় তবে, $P(1)=0$ হবে।

এখন, $P(1)=3(1)^3-4(1)^2+4(1)-3$

$=3-4+4-3=0$

$\therefore 3x^3-4x^2+4x-3$ এর একটি উৎপাদক $(x-1)$ **[দেখানো হলো]**

৪ নং এর সমাধান:

ধরি $P(x)=2x^3+x^2+ax-9$

উৎপাদক উপপাদ্যের বিপরীত উপপাদ্য অনুযায়ী যদি $(x+3)$, $P(x)$ এর একটি উৎপাদক হয় তবে, $P(-3)=0$ হবে।

এখন, $P(-3)=0$

বা, $2(-3)^3+(-3)^2+a(-3)-9=0$

বা, $-54+9-3a-9=0$

বা, $3a=-54$

বা, $a=-18$ **[Ans.]**

৫ নং এর সমাধান:

ধরি $P(x)=x^3-4x^2+4x-3$

যদি $(x-3)$, $P(x)$ এর একটি উৎপাদক হয় তবে উৎপাদক উপপাদ্যের বিপরীত উপপাদ্য অনুযায়ী, $P(3)=0$ হবে।

এখন, $P(3)=(3)^3-4(3)^2+4(3)-3$

$=27-4.9+4.3-3$

$=27-36+12-3=39-39=0$

সুতরাং x^3-4x^2+4x-3 বহুপদীর একটি উৎপাদক $(x-3)$ **[দেখানো হলো]**

৬ নং এর সমাধান:

এখানে, $P(x)=2x^3-5x^2+7x-8$

ভাগশেষ উপপাদ্যের সাহায্যে আমরা পাই,

$P(x)$ কে $x-2$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে $P(2)$

$\therefore P(2)=2(2)^3-5(2)^2+7(2)-8=16-20+14-8=2$

$\therefore$ নির্ণেয় ভাগশেষ $=2$ **[Ans.]**

৭ নং এর সমাধান:

ধরি, $p(x)=4x^4-5x^3+5x-2$

উৎপাদক উপপাদ্যের বিপরীত উপপাদ্য অনুসারে $(x+1)$ প্রদত্ত রাশিটির একটি উৎপাদক হবে যদি $p(-1)=0$ হয়।

এখন, $p(-1)=4(-1)^4-5(-1)^3+5(-1)-2$

$=4+5-5-2=2\neq 0$

অনুরূপভাবে, $p(1)=4(1)^4-5(1)^3+5(1)-2$

$=4-5+5-2=2\neq 0$

এখানে $(x+1)$ ও $(x-1)$ কোনোটিই $p(x)$ এর উৎপাদক নয়। তাছাড়া প্রশ্নটি অসম্পূর্ণ কারণ, বহুপদীদ্বয়ের সাধারণ উৎপাদক হতে হলে একাধিক বহুপদী থাকতে হতো। এখানে বহুপদী মাত্র একটি।

৮ (i) এর সমাধান:

নির্ণয় পদ্ধতি: প্রাথমিক আলোচনা দ্রষ্টব্য।

x^3+2x^2-5x-6

ধরি, $P(x)=x^3+2x^2-5x-6$

এখানে, বহুপদীটির ধ্রুব সংখ্যা $=-6$

অতএব, -6 এর উৎপাদক সমূহের সেট হতে পাই $=\pm1, \pm2, \pm3, \pm6,$

$P(1)=1^3+2.1^2-5.1-6=-8\neq 0$

$\therefore (x-1)$, $p(x)$ এর উৎপাদক নয়।

$P(-1)=(-1)^3+2.(-1)^2-5(-1)-6=7-7=0$

$\therefore$ উৎপাদক উপপাদ্য অনুসারে $(x+1)$, $p(x)$ এর একটি উৎপাদক।

$P(x)=x^3+2x^2-5x-6$

$=x^3+x^2+x^2+x-6x-6$

$=x^2(x+1)+x(x+1)-6(x+1)$

$=(x+1)(x^2+x-6)$

আবার, $x^2+x-6=x^2+3x-2x-6$

$=x(x+3)-2(x+3)$

$=(x+3)(x-2)$

যেহেতু, $P(x)=(x+3)(x+1)(x-2)$

সুতরাং, নির্ণেয় উৎপাদক $=(x+1)(x+3)(x-2)$ **[Ans.]**

৮ (ii) এর সমাধান:

ধরি, $P(x)=x^3+4x^2+x-6$

এখানে, বহুপদীটির ধ্রুব সংখ্যা $=-6$

অতএব, উৎপাদকসমূহের সেট হতে পারে $=\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$

এখন, $P(1)=1^3+4.1^2+1-6=6-6=0$

$\therefore$ উৎপাদক উপপাদ্য অনুসারে $(x-1)$, $P(x)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $P(x)=x^3+4x^2+x-6$

$=x^3-x^2+5x^2-5x+6x-6$

$=x^2(x-1)+5x(x-1)+6(x-1)$

$=(x-1)(x^2+5x+6)$

$=(x-1)(x^2+3x+2x+6)$

$=(x-1)\{x(x+3)+2(x+3)\}$

$=(x-1)(x+3)(x+2)$

$\therefore$ নির্ণেয় উৎপাদক $=(x-1)(x+3)(x+2)$ **[Ans.]**

৮ (iii) এর সমাধান:

ধরি, $P(a)=a^3-a^2-10a-8$

এখানে, বহুপদীটির ধ্রুব সংখ্যা $=-8$

$\therefore -8$ এর উৎপাদক সমূহের সেট $=\pm1, \pm2, \pm4, \pm8$

এখানে, $P(-1)=(-1)^3-(-1)^2-10(-1)-8=10-10=0$

$\therefore$ উৎপাদক উপপাদ্য অনুসারে $(a+1)$, $P(a)$ এর উৎপাদক।

এখন, $P(a)=a^3-a^2-10a-8$

$=a^3+a^2-2a^2-2a-8a-8$

$=a^2(a+1)-2a(a+1)-8(a+1)$

$=(a+1)(a^2-2a-8)$

$=(a+1)(a^2-4a+2a-8)$

$=(a+1)\{(a(a-4)+2(a-4)\}$

$=(a+1)(a-4)(a+2)$

$\therefore$ নির্ণেয় উৎপাদক $=(a+1)(a+2)(a-4)$ **[Ans.]**

৮ (iv) এর সমাধান:

ধরি, $P(x)=x^4+3x^3+5x^2+8x+5$

এখানে, বহুপদীটির ধ্রুব সংখ্যা $=5$

$\therefore 5$ এর উৎপাদক সমূহের সেট হতে পাই $=\pm1, \pm5$

এখন, $P(-1)=(-1)^4+3(-1)^3+5(-1)^2+8(-1)+5$

$=1-3+5-8+5=11-11=0$

$\therefore$ উৎপাদক উপপাদ্য অনুসারে $(x+1)$, $P(x)$ এর একটি উৎপাদক।

$\therefore (x+1)$, $P(x)$ এর একটি সাধারণ উৎপাদক।

$P(x)=x^4+x^3+2x^3+2x^2+3x^2+3x+5x+5$

$=x^3(x+1)+2x^2(x+1)+3x(x+1)+5(x+1)$

$=(x+1)(x^3+2x^2+3x+5)$

$\therefore$ নির্ণেয় সাধারণ উৎপাদক $=(x+1)(x^3+2x^2+3x+5)$

কাজ: [Ref: পাঠ্যবই পৃষ্ঠা: ৫২]

১। উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর:

(ক) $a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)$ (খ) $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

(গ) $a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3$ (ঘ) $bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)+ab(a^2-b^2)$

(ঙ) $a^4(b-c)+b^4(c-a)+c^4(a-b)$ (চ) $a^2(b-c)^3+b^2(c-a)^3+c^2(a-b)^3$

(ছ) $x^4(y^2-z^2)+y^4(z^2-x^2)+z^4(x^2-y^2)$ (জ) $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$

২। যদি $\dfrac{x^2-yz}{a}=\dfrac{y^2-zx}{b}=\dfrac{z^2-xy}{c}\neq 0$ হয়, তবে দেখাও যে, $(a+b+c)(x+y+z)=ax+by+cz$.

৩। যদি $(a+b+c)(ab+bc+ca)=abc$ হয়, তবে দেখাও যে, $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3$.

১ (ক) এর সমাধান:

$a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)$
$=a(b^2-c^2)+bc^2-a^2b+a^2c-b^2c$
$=a(b+c)(b-c)-a^2(b-c)-bc(b-c)$
$=(b-c)(ab+ca-a^2-bc)$
$=(b-c)(-a^2+ab+ca-bc)$
$=(b-c)\{-a(a-b)+c(a-b)\}$
$=(b-c)(a-b)(c-a)$
$=(a-b)(b-c)(c-a)$

$\therefore$ নির্ণেয় উৎপাদক $=(a-b)(b-c)(c-a)$ **[Ans.]**

বিকল্প উপায়:

$a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)$

প্রদত্ত রাশিতে a এর বহুপদী $P(a)$ ধরে তাতে b বসিয়ে দেখি যে,

$P(b)=b(b^2-c^2)+b(c^2-b^2)+c(b^2-b^2)$
$=b(b^2-c^2)-b(b^2-c^2)+0=0$

সুতরাং উৎপাদক উপপাদ্য অনুযায়ী $(a-b)$ প্রদত্ত রাশির একটি উৎপাদক। এখন, যেহেতু রাশিটি চক্র ক্রমিক রাশি সেহেতু $(b-c)$ এবং $(c-a)$ উভয়ে প্রদত্ত রাশিটির উৎপাদক। প্রদত্ত রাশিটি তিন মাত্রার সমমাত্রিক এবং এর তিনটি এক মাত্রার উৎপাদক পাওয়া গেছে। সুতরাং অন্য উৎপাদক যদি থাকে তা ধ্রুবক হবে। অর্থাৎ

$a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)=k(a-b)(b-c)(c-a)$ ... ... (i)

অর্থাৎ k একটি ধ্রুবক এর মান সকল a, b, c মানের জন্য (i) সত্য।

(1) নং এ $a=0$, $b=1$, $c=2$, বসিয়ে পাই,

$0+1(4-0)+2(0-1)=k(-1)(-1)(2)$
বা, $4-2=2k$
বা, $k=1$

$\therefore a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)=(a-b)(b-c)(c-a)$ **[Ans.]**

১ (খ) এর সমাধান:

$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$
$=a^2(b-c)+b^2c-ab^2+c^2a-bc^2$
$=a^2(b-c)-ab^2+c^2a+b^2c-bc^2$
$=a^2(b-c)-a(b^2-c^2)+bc(b-c)$
$=a^2(b-c)-a(b+c)(b-c)+bc(b-c)$
$=(b-c)(a^2-ab-ac+bc)$
$=(b-c)\{a(a-b)-c(a-b)\}$
$=(b-c)(a-b)(a-c)$
$=-(a-b)(b-c)(c-a)$

$\therefore$ নির্ণেয় উৎপাদক $=-(a-b)(b-e)(c-a)$ **[Ans.]**

১ (গ) এর সমাধান:

$a(b-c)^3+b(c-a)^3+e(a-b)^3$

প্রদত্ত রাশিতে $P(a)$ এর বহুপদী ধরে a এর পরিবর্তে b বসিয়ে পাই,

$P(b)=b(b-c)^3+b(c-b)^3+c(b-b)^3$
$=b(b-c)^3-b(b-c)^3+0=0$

সুতরাং উৎপাদক উপপাদ্য অনুযায়ী $(a-b)$ প্রদত্ত রাশির একটি উৎপাদক। এখন যেহেতু রাশিটি চক্র ক্রমিক রাশি সেহেতু $(b-c)$. এবং $(c-a)$ উভয়ে প্রদত্ত রাশির উৎপাদক। প্রদত্ত রাশিটি চার মাত্রার সমমাত্রিক এবং এর তিনটি এক মাত্রার উৎপাদক পাওয়া গেছে। সুতরাং অন্য উৎপাদক যদি থাকে তা অবশ্যই চক্র ক্রমিক এবং এক মাত্রার সমমাত্রিক রাশি হবে। অর্থাৎ $k(a+b+c)$ হবে।

অর্থাৎ $a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3$
$=k(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$ ... ... (i)

অর্থাৎ k একটি ধ্রুবক। a,b,c এর সকল মানের জন্য (i) সত্য।

(1) নং এ $a=0$, $b=1$, $c=2$, বসিয়ে পাই,

$0+1(2-0)^3+2(0-1)^3=k(-1)(1-2)(2-0)(0+1+2)$
বা, $8-2=6k$
বা, $k=1$

$\therefore a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3=(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

$\therefore$ নির্ণেয় উৎপাদক $=(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$ **[Ans.]**

১ (ঘ) এর সমাধান:

$bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)+ab(a^2-b^2)$
$=bc(b^2-c^2)+c^3a-ca^3+a^3b-ab^3$
$=bc(b+c)(b-c)+a^3(b-c)-a(b^3-c^3)$
$=bc(b+c)(b-c)+a^3(b-c)-a(b-c)(b^2+bc+c^2)$
$=(b-c)(b^2c+bc^2+a^3-ab^2-abc-c^2a)$
$=(b-c)\{-bc(a-b)+a(a^2-b^2)-c^2(a-b)\}$
$=(b-c)\{-bc(a-b)+(a+b)(a-b)-c^2(a-b)\}$
$=(b-c)(a-b)(a^2+ab-c^2-bc)$
$=(b-c)(a-b)\{-b(c-a)-(c^2-a^2)\}$
$=(b-c)(a-b)(c-a)(-b-c-a)$
$=(a-b)(b-c)(c-a)\{-(a+b+c)\}$
$=-(a-b)(b-c)(c-a)\{-(a+b+c)\}$

$\therefore$ নির্ণেয় উৎপাদক $=-(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$ **[Ans.]**

১ (ঙ) এর সমাধান:

$a^4(b-c)+b^4(c-a)+c^4(a-b)$
$=a^4(b-c)+b^4c-b^4a+c^4a-c^4b$
$=a^4(b-c)+bc(b^3-c^3)-a(b^4-c^4)$
$=(b-c)\{a^4+bc(b^2+bc+c^2)-a(b+c)(b^2+c^2)\}$
$=(b-c)\{a^4+bc(b^2+bc+c^2)-a(b^3+bc^2+b^2c+c^3)$
$=(b-c)\{a^4+b^3c+b^2c^2+bc^3-ab^3-abc^2-ab^2c-ac^3)$
$=(b-c)\{a(a^3-b^3)-c^3(a-b)-b^2c(a-b)-bc^2(a-b)\}$
$=(b-c)(a-b)\{a(a^2+ab+b^2)-c^3-b^2c-bc^2\}$
$=(b-c)(a-b)\{b^2(c-a)-b(c^2-a^2)-(c^3-a^3)\}$
$=(b-c)(a-b)(c-a)\{-b^2-b(c+a)-(c^2+ca+a^2)\}$
$=(b-c)(a-b)(c-a)(-b^2-bc-ab-c^2-ca-a^2)$
$=-(a-b)(b-c)(c-a)(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)$

$\therefore$ নির্ণেয় উৎপাদক $-(a-b)(b-c)(c-a)(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)$ **[Ans.]**

১ (চ) এর সমাধান:

$a^2(b-c)^3+b^2(c-a)^3+c^2(a-b)^3$
$=a^2(b-c)^3+b^2(c^3-3c^2a+3ca^2-a^3)+c^2(a^3-3a^2b+3ab^2-b^3)$
$=a^2(b-c)^3+b^2c^3-3ab^2c^2+3a^2b^2c-a^3b^2+a^3c^2-3a^2bc+3ab^2c^2-b^3c^2$
$=a^2(b-c)(b^2-2bc+c^2)-b^2c^2(b-c)-a^3(b^2-c^2)+3a^2bc(b-c)$
$=(b-c)\{a^2(b^2-2bc+c^2)-b^2c^2-a^3(b+c)+3a^2bc\}$
$=(b-c)(a^2b^2-2a^2bc+a^2c^2-b^2c^2-a^3b-a^3c+3a^2bc)$
$=(b-c)(a^2b^2+a^2c^2-b^2c^2-a^3b-a^3c+a^2bc)$
$=(b-c)\{-a^2b(a-b)+c^2(a^2-b^2)-a^2c(a-b)\}$
$=(b-c)\{(a-b)(-a^2b+c^2a+bc^2-a^2c)\}$
$=(b-c)(a-b)\{b(c^2-a^2)+ac(c-a)\}$
$=(b-c)(a-b)\{b(c+a)(c-a)+ac(c-a)\}$
$=(a-b)(b-c)(c-a)(bc+ab+ac)$
$=(a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca)$

$\therefore$ নির্ণেয় উৎপাদক $(a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca)$ **[Ans.]**

১ (ছ) এর সমাধান:

$$
\begin{aligned}
& x^4(y^2-z^2)+y^4(z^2-x^2)+z^4(x^2-y^2)\\
&=x^4(y^2-z^2)+y^4z^2-y^4x^2+z^4x^2-z^4y^2\\
&=x^4(y^2-z^2)+y^4z^2-z^4y^2-y^4x^2+z^4x^2\\
&=x^4(y^2-z^2)+y^2z^2(y^2-z^2)-x^2(y^4-z^4)\\
&=x^4(y^2-z^2)+y^2z^2(y^2-z^2)-x^2(y^2+z^2)(y^2-z^2)\\
&=(y^2-z^2)\{(x^4+y^2z^2-x^2(y^2+z^2)\}\\
&=(y^2-z^2)(x^4+y^2z^2-x^2y^2-x^2z^2)\\
&=(y^2-z^2)\{y^2(z^2-x^2)-x^2(z^2-x^2)\}\\
&=(y^2-z^2)(z^2-x^2)(y^2-x^2)\\
&=-(x^2-y^2)(y^2-z^2)(z^2-x^2)\\
&=-(x+y)(x-y)(y+z)(y-z)(z+x)(z-x)\\
&=-(x-y)(y-z)(z-x)(x+y)(y+z)(z+x)
\end{aligned}
$$

$\therefore$ নির্ণেয় উৎপাদক: $-(x-y)(y-z)(z-x)(x+y)(y+z)(z+x)$ **[Ans.]**

১ (জ) এর সমাধান:

$$
\begin{aligned}
& a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)\\
&=a^3(b-c)+b^3c-ab^3+ac^3-bc^3\\
&=a^3(b-c)+bc(b^2-c^2)-a(b^3-c^3)\\
&=a^3(b-c)+bc(b+c)(b-c)-a(b-c)(b^2+bc+c^2)\\
&=(b-c)\{a^3+bc(b+c)-a(b^2+bc+c^2)\}\\
&=(b-c)\{a^3+b^2c+bc^2-ab^2-abc-ac^2\}\\
&=(b-c)\{a(a^2-b^2)-c^2(a-b)-bc(a-b)\}\\
&=(b-c)(a-b)\{a(a+b)-c^2-bc\}\\
&=(b-c)(a-b)\{a^2+ab-c^2-bc\}\\
&=(b-c)(a-b)\{-b(c-a)-(c^2-a^2)\}\\
&=(b-c)(a-b)(c-a)(-b-c-a)\\
&=-(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)
\end{aligned}
$$

$\therefore$ নির্ণেয় উৎপাদক: $-(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$ **[Ans.]**

২ নং এর সমাধান:

দেওয়া আছে, $\dfrac{x^2-yz}{a}=\dfrac{y^2-zx}{b}=\dfrac{z^2-xy}{c}\neq 0$

ধরি, $\dfrac{x^2-yz}{a}=\dfrac{y^2-zx}{b}=\dfrac{z^2-xy}{c}=k$

$\therefore \dfrac{x^2-yz}{a}=k$

বা, $x^2-yz=ak$

বা, $x^3-xyz=axk$ ……… (i)

আবার, $\dfrac{y^2-zx}{b}=k$

বা, $y^2-zx=bk$

বা, $y^3-xyz=byk$ ……… (ii)

এবং, $\dfrac{z^2-xy}{c}=k$

বা, $z^2-xy=ck$

বা, $z^3-xyz=czk$ ……… (iii)

(i), (ii) ও (iii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

$x^3-xyz+y^3-xyz+z^3-xyz=axk+byk+czk$

বা, $x^3+y^3+z^3-3xyz=k(ax+by+cz)$

বা, $(x+y+z)\{(x^2-yz)+(y^2-zx)+(z^2-xy)\}=k(ax+by+cz)$

বা, $(x+y+z)(ak+bk+ck)=k(ax+by+cz)$

[যেহেতু, $x^2-yz=ak$, $y^2-zx=bk$, $z^2-xy=ck$]

বা, $(x+y+z)k(a+b+c)=k(ax+by+cz)$

বা, $(x+y+z)(a+b+c)=(ax+by+cz)$ [উভয়পক্ষকে k দ্বারা ভাগ করে]

$\therefore (x+y+z)(a+b+c)=(ax+by+cz)$ [দেখানো হলো]

৩ নং এর সমাধান:

দেওয়া আছে, $(a+b+c)(ab+bc+ca)=abc$

$$
\begin{aligned}
\text{ডানপক্ষ} &= a^3+b^3+c^3\\
&=a^3+b^3+c^3-3abc+3abc\\
&=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3(a+b+c)(ab+bc+ca)\quad [\text{যেহেতু, } (a+b+c)(ab+bc+ca)=abc]\\
&=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca+3ab+3bc+3ca)\\
&=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca)\\
&=(a+b+c)(a+b+c)^2\\
&=(a+b+c)^3=\text{বামপক্ষ}
\end{aligned}
$$

$\therefore (a+b+c)^3=(a^3+b^3+c^3)$ [দেখানো হলো]

বিকল্প সমাধান:

দেওয়া আছে, $(a+b+c)(ab+bc+ca)=abc$

বা, $a^2b+abc+a^2c+ab^2+b^2c+abc+abc+bc^2+c^2a=abc$

বা, $ab(a+b)+bc(a+b)+ca(a+b)+c^2(a+b)=0$

বা, $(a+b)(ab+bc+ca+c^2)=0$

বা, $(a+b)\{b(c+a)+c(c+a)\}=0$

$\therefore (a+b)(b+c)(c+a)=0$

$$
\begin{aligned}
\text{বামপক্ষ} &= (a+b+c)^3\\
&=\{a+(b+c)\}^3\\
&=a^3+3a^2(b+c)+3a(b+c)^2+(b+c)^3\\
&=a^3+3a^2(b+c)+3a(b+c)^2+b^3+3b^2c+3bc^2+c^3\\
&=a^3+b^3+c^3+3a^2(b+c)+3a(b+c)^2+3bc(b+c)\\
&=a^3+b^3+c^3+3(b+c)\{a^2+a(b+c)+bc\}\\
&=a^3+b^3+c^3+3(b+c)(a^2+ab+ca+bc)\\
&=a^3+b^3+c^3+3(b+c)\{a(a+b)+c(a+b)\}\\
&=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)\\
&=a^3+b^3+c^3+3\times 0\quad [\text{যেহেতু } (a+b)(b+c)(c+a)=0]\\
&=a^3+b^3+c^3=\text{ডানপক্ষ}
\end{aligned}
$$

সুতরাং, $(a+b+c)^3=(a^3+b^3+c^3)$ [দেখানো হলো]

৯ কাজ: সরল কর: [Ref: পাঠ্যবই পৃষ্ঠা ৫৩]

১। $\dfrac{b+c}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{c+a}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{a+b}{(c-a)(c-b)}$

২। $\dfrac{a^3-1}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^3-1}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^3-1}{(c-a)(c-b)}$

৩। $\dfrac{bc(a+d)}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{ca(b+d)}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{ab(c+d)}{(c-a)(c-b)}$

৪। $\dfrac{a^3+a^2+1}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^3+b^2+1}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^3+c^2+1}{(c-a)(c-b)}$ (VVI)

৫। $\dfrac{a^2+bc}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2+ca}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^2+ab}{(c-a)(c-b)}$

১ নং এর সমাধান:

$$
\begin{aligned}
&\frac{b+c}{(a-b)(a-c)}+\frac{c+a}{(b-c)(b-a)}+\frac{a+b}{(c-a)(c-b)}\\
&=\frac{b+c}{-(a-b)(c-a)}+\frac{c+a}{-(b-c)(a-b)}+\frac{a+b}{-(c-a)(b-c)}\\
&=\frac{(b+c)(b-c)+(c-a)(c+a)+(a+b)(a-b)}{-(a-b)(b-c)(c-a)}\\
&=\frac{b^2-c^2+c^2-a^2+a^2-b^2}{-(a-b)(b-c)(c-a)}\\
&=\frac{0}{-(a-b)(b-c)(c-a)}=0
\end{aligned}
$$

$\therefore$ নির্ণেয় সরলফল $=0$ **[Ans.]**

২ নং এর সমাধান:

$$
\begin{aligned}
&\frac{a^3-1}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3-1}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^3-1}{(c-a)(c-b)}\\
&=\frac{a^3-1}{-(a-b)(c-a)}+\frac{b^3-1}{-(b-c)(a-b)}+\frac{c^3-1}{-(c-a)(b-c)}\\
&=\frac{(a^3-1)(b-c)+(b^3-1)(c-a)+(c^3-1)(a-b)}{-(a-b)(b-c)(c-a)}\\
&=\frac{a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)-(b-c)-(c-a)-(a-b)}{-(a-b)(b-c)(c-a)}\\
&=\frac{a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)-\{(b-c)+(c-a)+(a-b)\}}{-(a-b)(b-c)(c-a)}
\end{aligned}
$$

চক্রক্রমিক সূত্র অনুযায়ী আমরা জানি,
$a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b) = -(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$
এবং $(b-c)+(c-a)+(a-b)=0$

এখন প্রদত্ত রাশি $= \dfrac{-(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)-0}{-(a-b)(b-c)(c-a)} = a+b+c$

$\therefore$ নির্ণেয় সরলফল $= a+b+c$ **[Ans.]**

৩ নং এর সমাধান:

$$\frac{bc(a+d)}{(a-b)(a-c)}+\frac{ca(b+d)}{(b-a)(b-c)}+\frac{ab(c+d)}{(c-a)(c-b)}$$
$$=\frac{abc+bcd}{-(a-b)(c-a)}+\frac{abc+acd}{-(a-b)(b-c)}+\frac{abc+abd}{-(c-a)(b-c)}$$
$$=\frac{abc+bcd}{-(a-b)(c-a)}+\frac{abc+acd}{-(a-b)(b-c)}+\frac{abc+abd}{-(c-a)(b-c)}$$
$$=\frac{abc(b-c)+bcd(b-c)+abc(c-a)+acd(c-a)+abc(a-b)+abd(a-b)}{-(a-b)(b-c)(c-a)}$$
$$=\frac{abc(b-c+c-a+a-b)+d\{bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)\}}{-(a-b)(b-c)(c-a)}$$
$$=\frac{abc\times 0+d\{-(a-b)(b-c)(c-a)\}}{-(a-b)(b-c)(c-a)}$$

[চক্রক্রমিক সূত্র অনুযায়ী, $bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b) = -(a-b)(b-c)(c-a)$]

$$=\frac{-d(a-b)(b-c)(c-a)}{-(a-b)(b-c)(c-a)}=d$$

$\therefore$ নির্ণেয় সরলফল $= d$ **[Ans.]**

৪ নং এর সমাধান:

$$\frac{a^3+a^2+1}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3+b^2+1}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^3+c^2+1}{(c-a)(c-b)}$$
$$=\frac{a^3+a^2+1}{-(a-b)(c-a)}+\frac{b^3+b^2+1}{-(b-c)(a-b)}+\frac{c^3+c^2+1}{-(c-a)(b-c)}$$
$$=\frac{(a^3+a^2+1)(b-c)+(b^3+b^2+1)(c-a)+(c^3+c^2+1)(a-b)}{-(a-b)(b-c)(c-a)}$$

এখানে প্রদত্ত রাশির লব,
$= (a^3+a^2+1)(b-c)+(b^3+b^2+1)(c-a)+(c^3+c^2+1)(a-b)$
$= a^3(b-c)+a^2(b-c)+1(b-c)+b^3(c-a)+b^2(c-a)+1(c-a)+c^3(a-b)+c^2(a-b)+1(a-b)$
$= \{a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)\}+\{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)\}+(b-c+c-a+a-b)$
$= -(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)-(a-b)(b-c)(c-a)+0$
$= -(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c+1)$

অতএব, এখন প্রদত্ত রাশি
$$=\frac{-(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c+1)}{-(a-b)(b-c)(c-a)}$$
$= a+b+c+1$ **[Ans.]**

৫ নং এর সমাধান::

$$\frac{a^2+bc}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2+ca}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2+ab}{(c-a)(c-b)}$$
$$=\frac{a^2+bc}{-(a-b)(c-a)}+\frac{b^2+ca}{-(b-c)(a-b)}+\frac{c^2+ab}{-(c-a)(b-c)}$$
$$=\frac{(a^2+bc)(b-c)+(b^2+ca)(c-a)+(c^2+ab)(a-b)}{-(a-b)(b-c)(c-a)}$$
$$=\frac{a^2(b-c)+bc(b-c)+b^2(c-a)+ca(c-a)+c^2(a-b)+ab(a-b)}{-(a-b)(b-c)(c-a)}$$
$$=\frac{\{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)+\{bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)\}}{-(a-b)(b-c)(c-a)}$$

চক্রক্রমিক সূত্র অনুযায়ী আমরা জানি,
$[a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b) = -(a-b)(b-c)(c-a) + bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b) = -(a-b)(b-c)(c-a)]$

এখন প্রদত্ত রাশি,
$$=\frac{-(a-b)(b-c)(c-a)-(a-b)(b-c)(c-a)}{-(a-b)(b-c)(c-a)}$$
$$=\frac{-2(a-b)(b-c)(c-a)}{-(a-b)(b-c)(c-a)}=2$$

$\therefore$ নির্ণেয় সরলফল $= 2$ **[Ans.]**

খ কাজ: [*Ref:* পাঠ্যবই পৃষ্ঠা: ৫৮]

আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর:

১। $\dfrac{x^2+x-1}{x^3+x^2-6x}$ ২। $\dfrac{x^2}{x^4+x^2-2}$ ৩। $\dfrac{x^3}{x^4+3x^2+2}$

৪। $\dfrac{x^2}{(x-1)^3(x-2)}$ ৫। $\dfrac{1}{1-x^3}$ ৬। $\dfrac{2x}{(x+1)(x^2+1)^2}$ (VVI)

১ নং এর সমাধান:

$$\frac{x^2+x-1}{x^3+x^2-6x}$$
$$=\frac{x^2+x-1}{x(x^2+x-6)}$$
$$=\frac{x^2+x-1}{x(x^2-2x+3x-6)}$$
$$=\frac{x^2+x-1}{x\{x(x-2)+3(x-2)\}}$$
$$=\frac{x^2+x-1}{x(x-2)(x+3)}$$

ধরি, $\dfrac{x^2+x-1}{x(x-2)(x+3)} \equiv \dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-2}+\dfrac{C}{x+3}$ ...... (i)

(i) নং এর উভয় পক্ষকে $x(x-2)(x+3)$ দ্বারা গুণ করে পাই,
$x^2+x-1 = A(x-2)(x+3)+Bx(x+3)+Cx(x-2)$ ..... (ii)
যা x এর সকল মানের জন্য সত্য।

এখন, (ii) নং এর উভয়পক্ষে $x = 0$ বসিয়ে পাই,
$0^2+0-1 = A(0-2)(0+3)+B.0(0+3)+C.0(0-2)$
বা, $-1 = A(-2).3+0+0$
বা, $-1 = -6A$
বা, $6A = 1$
বা, $A = \dfrac{1}{6}$

আবার, (ii) নং এর উভয়পক্ষে $x = 2$ বসিয়ে পাই,
$2^2+2-1 = A(2-2)(2+3)+B.2.(2+3)+C.2.(2-2)$
বা, $4+2-1 = A.0.5+B.2.5+C.2.0$
বা, $6-1 = 0+10B+0$
বা, $5 = 10B$
বা, $B = \dfrac{5}{10}$
$\therefore B = \dfrac{1}{2}$

আবার,
(ii) নং এর উভয়পক্ষে $x = -3$ বসিয়ে পাই,

$$(-3)^2+(-3)-1 = A(-3-2)(-3+3) + B.(-3).(-3+3) + C.(-3)(-3-2)$$

বা, $9-3-1 = A.(-5).0 + B.(-3).0 + C(-3).(-5)$

বা, $9-4 = 0+0+15C$

বা, $5 = 15C$

বা, $C = \frac{5}{15}$

$\therefore C = \frac{1}{3}$

এখন, A, B ও C এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{x^2+x-1}{x(x-2)(x+3)} = \frac{\frac{1}{6}}{x} + \frac{\frac{1}{2}}{x-2} + \frac{\frac{1}{3}}{x+3}$$

বা, $\frac{x^2+x-1}{x^3+x^2-6x} = \frac{1}{6x} + \frac{1}{2(x-2)} + \frac{1}{3(x+3)}$ **[Ans.]**

যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ।

<u>২নং এর সমাধান:</u>

$$\frac{x^2}{x^4+x^2-2}$$

$$= \frac{x^2}{x^4-x^3+x^3-x^2+2x^2-2x+2x-2}$$

$$= \frac{x^2}{x^3(x-1)+x^2(x-1)+2x(x-1)+x(x-1)}$$

$$= \frac{x^2}{(x-1)(x^3+x^2+2x+2)}$$

$$= \frac{x^2}{(x-1)\{x^2(x+1)+2(x+1)\}}$$

$$= \frac{x^2}{(x-1)(x+1)(x^2+2)}$$

ধরি, $\frac{x^2}{(x-1)(x+1)(x^2+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+2}$ ……… (i)

(i) নং এর উভয়পক্ষকে $(x-1)(x+1)(x^2+2)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$x^2 = A(x+1)(x^2+2) + B(x-1)(x^2+2) + (Cx+D)(x-1)(x+1) \;……… (ii)$$

যা x এর সকল মানের জন্য সত্য।

(ii) নং এ $x = 1$ বসিয়ে পাই,

$$1^2 = A(1+1)(1^2+2) + B(1-1)(1^2+2) + (C.1+D)(1-1)(1+1)$$

বা, $1 = A.2.(1+2)+0+0$

বা, $1 = A.2.3$

বা, $1 = 6A$

$\therefore A = \frac{1}{6}$

(ii) নং এ $x = -1$ বসিয়ে পাই,

$$(-1)^2 = A(-1+1)\{(-1)^2+2\} + B(-1-1)\{(-1)^2+2\} + \{C(-1)+D\}(-1-1)(-1+1)$$

বা, $1 = 0 + B.(-2)(1+2)+0$

বা, $1 = B.(-2).3$

বা, $1 = -6B$

$\therefore B = \frac{-1}{6}$

(ii) নং হতে x^3 ও x^2 এর সহগ সমীকৃত করিয়া পাই,

$A + B + C = 0$ ……… (iii)

এবং $A - B + D = 1$ ……… (iv)

(iii) নং এ A ও B এর মান বসিয়ে পাই,

$\frac{1}{6} - \frac{1}{6} + C = 0$

বা, $0 + C = 0$

$\therefore C = 0$

আবার, (iv) নং এ A ও B এর মান বসিয়ে পাই,

$\frac{1}{6} - \left(-\frac{1}{6}\right) + D = 1$

বা, $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + D = 1$

বা, $D = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{6}$

বা, $D = \frac{6-1-1}{6}$

বা, $D = \frac{4}{6}$

$\therefore D = \frac{2}{3}$

এখন, A, B, C ও D এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{x^2}{(x-1)(x+1)(x^2+2)} = \frac{\frac{1}{6}}{x-1} + \frac{\frac{-1}{6}}{x+1} + \frac{0.x+\frac{2}{3}}{x^2+2}$$

বা, $\frac{x^2}{x^4+x^2-2} = \frac{1}{6(x-1)} - \frac{1}{6(x+1)} + \frac{2}{3(x^2+2)}$ **[Ans.]**

যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ।

<u>৩ নং এর সমাধান:</u>

$$\frac{x^3}{x^4+3x^2+2} = \frac{x^3}{x^4+x^2+2x^2+2}$$

$$= \frac{x^3}{x^2(x^2+1)+2(x^2+1)}$$

$$= \frac{x^3}{(x^2+1)(x^2+2)}$$

ধরি, $\frac{x^3}{(x^2+1)(x^2+2)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+2}$ ……… (i)

(i) নং এর উভয়পক্ষকে $(x^2+1)(x^2+2)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$x^3 = (Ax+B)(x^2+2) + (Cx+D)(x^2+1)$

বা, $x^3 = (A+C)x^3 + (B+D)x^2 + (2A+C)x + 2B + D$ ……… (ii)

(ii) নং এর উভয়পক্ষ হতে সহগ সমীকৃত করে পাই,

$A + C = 1$ ……… (iii) [x^3 এর সহগ সমীকৃত করে]

$B + D = 0$ ……… (iv) [x^2 এর সহগ সমীকৃত করে]

$2A + C = 0$ ……… (v) [x এর সহগ সমীকৃত করে]

$2B + D = 0$ ……… (vi) [ধ্রুবক পদ সমীকৃত করে]

(v) নং হতে (iii) নং বিয়োগ করে পাই,

$2A + C - A - C = 0 - 1$

বা, $A = -1$

(iii) নং এ $A = -1$ বসিয়ে পাই,

$-1 + C = 1$

বা, $C = 1 + 1$

বা, $C = 2$

(vi) নং হতে (iv) নং বিয়োগ করে পাই,

$2B + D - B - D = 0 - 0$

বা, $B = 0$

(iv) নং এ $B = 0$ বসিয়ে পাই,

$0 + D = 0$

বা, $D = 0$

(i) নং এ A, B, C ও D এর মান বসিয়ে পাই,

$$\frac{x^3}{(x^2+1)(x^2+2)} = \frac{-1.x+0}{x^2+1} + \frac{2.x+0}{x^2+2}$$

$$\therefore \frac{x^3}{x^4+3x^2+2} = \frac{-x}{x^2+1} + \frac{2x}{x^2+2}$$

যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ। **[Ans.]**

৪ নং এর সমাধান:

$$\frac{x^2}{(x-1)^3(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} + \frac{D}{x-2} \;\ldots\ldots (i)$$

(i) নং এর উভয়পক্ষকে $(x-1)^3(x-2)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$x^2 = A(x-1)^2(x-2) + B(x-1)(x-2) + C(x-2) + D(x-1)^3 \;\ldots\ldots (ii)$$

যা x এর সকল মানের জন্য সত্য।

(ii) নং এর উভয়পক্ষে $x = 1$ বসিয়ে পাই,

$$1^2 = A(1-1)^2(1-2) + B(1-1)(1-2) + C(1-2) + D(1-1)^3$$

বা, $1 = 0 + 0 + C(-1) + 0$

বা, $1 = -C$

$\therefore C = -1$

(ii) নং এ $x = 2$ বসিয়ে পাই,

$$2^2 = A(2-1)^2(2-2) + B(2-1)(2-2) + C(2-2) + D(2-1)^3$$

বা, $4 = 0 + 0 + 0 + D.1^3$

বা, $4 = D.1$

বা, $4 = D$

$\therefore D = 4$

(ii) নং হতে x^3 ও x^2 এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$A + D = 0 \;\ldots\ldots (iii)$

এবং $-4A + B - 3D = 1 \;\ldots\ldots (iv)$

(iii) নং এ D এর মান বসিয়ে পাই,

$A + 4 = 0$

বা, $A = -4$

আবার, (iv) নং এ A ও D এর মান বসিয়ে পাই,

$-4.(-4) + B - 3.4 = 1$

বা, $16 + B - 12 = 1$

বা, $B + 4 = 1$

বা, $B = 1 - 4$

$\therefore B = -3$

এখন, A, B, C ও D এর মান (i) নং বসিয়ে পাই,

$$\frac{x^2}{(x-1)^3(x-2)} = \frac{-4}{x-1} + \frac{-3}{(x-1)^2} + \frac{-1}{(x-1)^3} + \frac{4}{x-2}$$

বা, $$\frac{x^2}{(x-1)^3(x-2)} = \frac{-4}{x-1} - \frac{3}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x-1)^3} + \frac{4}{x-2}$$

যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ। **[Ans.]**

৫ নং এর সমাধান:

$$\frac{1}{1-x^3} = \frac{1}{1^3-x^3}$$

$$= \frac{1}{(1-x)(1^2+1.x+x^2)}$$

$$= \frac{1}{(1-x)(1+x+x^2)}$$

ধরি, $$\frac{1}{(1-x)(1+x+x^2)} = \frac{A}{1-x} + \frac{Bx+C}{1+x+x^2} \;\ldots\ldots (i)$$

(i) নং এর উভয়পক্ষকে $(1-x)(1+x+x^2)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$1 = A(1+x+x^2) + (Bx+C)(1-x) \;\ldots\ldots (ii)$

বা, $1 = (A-B)x^2 + (A+B-C)x + (A+C) \;\ldots\ldots (iii)$

(ii) নং এ $x = 1$ বসিয়ে পাই,

$1 = A(1+1+1^2) + (B.1+C)(1-1)$

বা, $1 = A(1+1+1) + 0$

বা, $1 = 3A$

$\therefore A = \frac{1}{3}$

(iii) নং হতে x^2 ও x এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$A - B = 0 \;\ldots\ldots (iv)$

এবং $A + B - C = 0 \;\ldots\ldots (v)$

(iv) নং এ A এর মান বসিয়ে পাই,

$\frac{1}{3} - B = 0$

$\therefore B = \frac{1}{3}$

(v) নং এ A ও B এর মান বসিয়ে পাই,

$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} - C = 0$

বা, $\frac{1+1}{3} - C = 0$

বা, $\frac{2}{3} - C = 0$

$\therefore C = \frac{2}{3}$

এখন, A, B ও C এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{1}{(1-x)(1+x+x^2)} = \frac{\frac{1}{3}}{1-x} + \frac{\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}}{1+x+x^2}$$

বা, $$\frac{1}{1-x^3} = \frac{1}{3(1-x)} + \frac{\frac{x+2}{3}}{1+x+x^2}$$

বা, $$\frac{1}{1-x^3} = \frac{1}{3(1-x)} + \frac{x+2}{3(1+x+x^2)}$$

যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ। **[Ans.]**

৬ নং এর সমাধান:

ধরি, $$\frac{2x}{(x+1)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2} \;\ldots\ldots (i)$$

যা x এর সকল মানের জন্য সত্য।

(i) নং এর উভয়পক্ষকে $(x+1)(x^2+1)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$$2x = A(x^2+1)^2 + (Bx+C)(x+1)(x^2+1)(Dx+E)(x+1)$$

বা, $$2x = A(x^4+2x^2+1) + (Bx+C)(x^3+x^2+x+1) + \{Dx^2+(D+E)x+E\}$$

বা, $$2x = A(x^4+2x^2+1) + \{Bx^4+(B+C)x^3+(B+C)x^2 + (B+C)x+C\} + \{Dx^2+(D+E)x+E\}$$

বা, $$2x = (A+B)x^2 + (B+C)x^3 + (2A+B+C+D)x^2 + (B+C+D+E)x + (A+C+E) \;\ldots\ldots (ii)$$

(ii) নং হতে, x^4, x^3, x^2, x ও ধ্রুবক পদের সহগ সমীকৃত করে পাই,

$A + B = 0 \;\ldots\ldots (iii)$

$B + C = 0 \;\ldots\ldots (iv)$

$2A + B + C + D = 0 \;\ldots\ldots (v)$

$B + C + D + E = 2 \;\ldots\ldots (vi)$

$A + C + E = 0 \;\ldots\ldots (vii)$

(iv) ও (vi) নং হতে, $D + E = 2 \;\ldots\ldots (viii)$

(iii) ও (v) নং হতে, $A + C + D = 0 \;\ldots\ldots (ix)$

(vii) ও (ix) নং হতে, $D - E = 0 \;\ldots\ldots (x)$

$(viii)$ ও (x) নং হতে, $2D = 2$

বা, $D = 1$

$\therefore E = 1$ [$(viii)$ নং হতে]

(iv) ও (v) থেকে,

$2A + D = 0$

বা, $2A = -1$

বা, $A = -\frac{1}{2}$

$\therefore B = \frac{1}{2}$ [(iii) থেকে]

$\therefore (ix)$ থেকে

$-\frac{1}{2} + C + 1 = 0$

বা, $C = -\frac{1}{2}$

$\therefore A = -\frac{1}{2}, B = \frac{1}{2}, C = -\frac{1}{2}, D = 1$

এবং $E = 1$ এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{2x}{(x+1)(x^2+1)^2} = -\frac{1}{2(x+1)} + \frac{\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}}{x^2+1} + \frac{x+1}{(x^2+1)^2}$$

$$= -\frac{1}{2(x+1)} + \frac{x-1}{2(x^2+1)} + \frac{x+1}{(x^2+1)^2}$$

যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ। [Ans.]

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-২

১। নিচের কোন রাশিটি প্রতিসম?

(ক) $a + b + c$ (খ) $xy + yz + zx$

(গ) $x^2 - y^2 + z^2$ (ঘ) $2a^2 - 5bc - c^2$

২। $P(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ হলে

i. $P(x, y, z)$ চক্রক্রমিক রাশি

ii. $P(x, y, z)$ প্রতিসম রাশি

iii. $P(1, -2, 1) = 0$

উপরের উক্তিগুলোর কোনগুলো সত্য?

(ক) i ও ii (খ) i ও iii

(গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

৩। P এর মান কত?

(ক) -7 (খ) 7

(গ) $\frac{54}{7}$ (ঘ) 477

৪। বহুপদীটির অপর উৎপাদকগুলোর গুণফল কত?

(ক) $(x-1)(x-1)$ (খ) $(x+1)(x-2)$

(গ) $(x-1)(x+3)$ (ঘ) $(x+1)(x-1)$

৫। $x^4 - 5x^3 + 7x^2 - a$ বহুপদীর একটি উৎপাদক $x - 2$ হলে, দেখাও যে, $a = 4$

৬। মনে কর, $P(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + bx + a$ যেখানে a, b, c ধ্রুবক এবং $a \neq 0$। দেখাও যে, $(x - r)$ যদি $P(x)$ এর একটি উৎপাদক হয়, তবে $P(x)$ এর আরেকটি উৎপাদক $(rx - 1)$।

৭। উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর:

(i) $x^4 + 7x^3 + 17x^2 + 17x + 6$.

(ii) $4a^4 + 12a^3 + 7a^2 - 3a - 2$.

(iii) $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$

(iv) $x(y^2 + z^2) + y(z^2 + x^2) + z(x^2 + y^2) + 3xyz$.

(v) $(x+1)^2(y-z) + (y+1)^2(z-x) + (z+1)^2(x-y)$.

(vi) $b^2c^2(b^2 - c^2) + c^2a^2(c^2 - a^2) + a^2b^2(a^2 - b^2)$.

৮। যদি $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} = \frac{3}{abc}$ হয়, তবে দেখাও যে, $bc + ca + ab = 0$ অথবা, $a = b = c$.

৯। যদি $x = b + c - a, y = c + a - b$ এবং $z = a + b - c$ হয়, তবে দেখাও যে, $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 4(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)$.

১০। সরল কর:

(a) $\frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$

(b) $\frac{a}{(a-b)(a-c)(x-a)} + \frac{b}{(b-a)(b-c)(x-b)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)(x-c)}$

(c) $\frac{(a+b)^2 - ab}{(b-c)(a-c)} + \frac{(b+c)^2 - bc}{(c-a)(b-a)} + \frac{(c+a)^2 - ca}{(a-b)(c-b)}$

(d) $\frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} + \frac{16}{x^{16}-1}$

১১। আংশিক ভগ্নাংশ প্রকাশ কর:

(a) $\frac{5x+4}{x(x+2)}$ (b) $\frac{x+2}{(x^2-7x+12)}$ (c) $\frac{x^2-9x-6}{x(x-2)(x+3)}$

(d) $\frac{x^2-4x-7}{(x+1)(x^2+4)}$ (e) $\frac{x^2}{(2x+1)(x+3)^2}$

১২। x, y, z এর একটি বহুপদী $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.

ক. দেখাও যে, $F(x, y, z)$ হলো একটি চক্র-ক্রমিক রাশি।

খ. $F(x, y, z)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর এবং যদি $F(x, y, z) = 0$, $x + y + z \neq 0$ হয়, তবে দেখাও যে, $(x^2 + y^2 + z^2) = (xy + yz + zx)$

গ. যদি $x = b + c - a, y = c + a - b$ এবং $z = a + b - c$ হয় তবে দেখাও যে, $F(a, b, c) : F(x, y, z) = 1 : 4$.

১৩। $P(a,b,c) = (a+b+c)(ab+bc+ca)$ এবং $Q = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

(ক) $P(a,b,c)$ চক্রক্রমিক ও প্রতিসম রাশি কিনা তা কারণসহ উল্লেখ কর।

(খ) $Q = 0$ হলে, প্রমাণ কর যে, $a = b = c$ অথবা $ab + bc + ca = 0$

(গ) $P(a,b,c) = abc$ হলে দেখাও যে, $\frac{1}{(a+b+c)^3} = \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3}$

১৪। $P(x) = 18x^3 + bx^2 - x - 2$; $Q(x) = 4x^4 - 12x^3 + 7x^2 - 3x - 2$

(ক) $\frac{Q(x)}{P(x)}$ এর মাত্রা নির্ণয় কর।

(খ) $3x + 2$, $P(x)$ এর একটি উৎপাদক হলে b এর মান নির্ণয় কর।

(গ) $\frac{8x^2 - 2}{Q(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

১৫। চলক x এর দুইটি বহুপদী $P(x) = 7x^2 - 3x + 4x^4 - a + 12x^3$ এবং $Q(x) = 6x^3 + x^2 - 9x + 26$

ক. $P(x)$ কে আদর্শরূপে লিখে এর মুখ্যসহগ নির্ণয় কর।

খ. $P(x)$ এর একটি উৎপাদক $(x + 2)$ হলে a এর মান নির্ণয় কর।

গ. দেখাও যে, $P(x)$ এবং $Q(x)$ এর একটি সাধারণ উৎপাদক বিদ্যমান।

অনুশীলনী-২ এর সমাধান

১। নিচের কোন রাশিটি প্রতিসম?

(ক) $a+b+c$　　(খ) $xy+yz+zx$

(গ) $x^2-y^2+z^2$　　(ঘ) $2a^2-5bc-c^2$

উত্তর : (ক), (খ) ও (গ) সঠিক

ব্যাখ্যা:

একাধিক চলকধারী কোন বীজগাণিতিক রাশির যেকোনো দুইটি চলকের স্থান বিনিময় করলে যদি রাশিটি অপরিবর্তিত থাকে তবে তাকে প্রতিসম রাশি বলে।

এক্ষেত্রে,

(ক) $a+b+c$ তিনটি চলকের সাপেক্ষেই প্রতিসম।

(খ) $xy+yz+zx$ তিনটি চলকের সাপেক্ষেই প্রতিসম।

(গ) $x^2-y^2+z^2$ রাশিটি x ও z এর সাপেক্ষে প্রতিসম

(ঘ) $2a^2-5bc-c^2$ রাশিটি প্রতিসম নয় কারণ a, b, c এর মধ্যে যেকোনো দুইটি চলকের স্থান পরিবর্তন করলে রাশিটির মান পরিবর্তন হয়ে যায়।

সুতরাং ক, খ ও গ নং অপশনে প্রদত্ত রাশিত্রয় প্রতিসম।

২। $P(x, y,z) = x^3+y^3+z^3-3xyz$ হলে

i. $P(x,y,z)$ চক্রক্রমিক রাশি

ii. $P(x,y,z)$ প্রতিসম রাশি

iii. $P(1,-2,1)=0$

উপরের উক্তিগুলোর কোনগুলো সত্য?

(ক) i ও ii　　(খ) i ও iii

(গ) ii ও iii　　(ঘ) i, ii ও iii

উত্তর: (ঘ) i, ii ও iii

ব্যাখ্যা:

(i) $P(x, y, z) = x^3+y^3+z^3-3xyz$ রাশিটি x, y, z চলকের একটি চক্রক্রমিক রাশি, কারণ এতে চক্রাকারে x এর পরিবর্তে y, y এর পরিবর্তে z এবং z এর পরিবর্তে x বসালে রাশিটি একই থাকে।

(ii) $P(x, y, z) = x^3+y^3+z^3-3xyz$ রাশিটি x, y, z চলকের প্রতিসম রাশি। কারণ, x, y, z চলক তিনটির যেকোনো দুইটির স্থান বিনিময়ে রাশিটি অপরিবর্তিত থাকে।

(iii) দেওয়া আছে, $P(x, y, z) = x^3+y^3+z^3-3xyz$

$\therefore P(1,-2,1) = (1)^3+(-2)^3+(1)^3-3.1.(-2)-1$

$= 1-8+1+6$

$= 0$

∴ সঠিক উত্তর i, ii ও iii

নিচের তথ্যের আলোকে নিচের ৩ ও ৪ নং প্রশ্নের উত্তর দাও।

বহুপদী x^3+px^2-x-7 এর একটি উৎপাদক $x+7$।

৩। P এর মান কত?

(ক) -7　　(খ) 7

(গ) $\frac{54}{7}$　　(ঘ) 477

উত্তর : (খ) 7

ব্যাখ্যা:

ধরি, $Q(x) = x^3+px^2-x-7$

যেহেতু, $(x+7)$, $Q(x)$ এর একটি উৎপাদক

$\therefore Q(-7)=0$

বা, $(-7)^3+p(-7)^2-(-7)-7=0$

বা, $-343+49p+7-7=0$

বা, $49P=343$

$\therefore P=7$　　[Ans.]

৪। বহুপদীটির অপর উৎপাদকগুলোর গুণফল কত?

(ক) $(x-1)(x-1)$　　(খ) $(x+1)(x-2)$

(গ) $(x-1)(x+3)$　　(ঘ) $(x+1)(x-1)$

উত্তর : (ঘ) $(x+1)(x-1)$

ব্যাখ্যা:

ধরি, $Q(x) = x^3+px^2-x-7$

যেহেতু, $(x+7)$, $Q(x)$ এর একটি উৎপাদকসেহেতু,

$x^3+px^2-x-7 = x^3+7x^2-x-7$　　$[\because p=7]$

$= x^2(x+7)-1(x+7)$

$= (x+7)(x^2-1)$

$= (x+7)(x+1)(x-1)$

∴ অপর উৎপাদকগুলোর গুণফল $= (x+1)(x-1)$

৫। $x^4-5x^3+7x^2-a$ বহুপদীর একটি উৎপাদক $x-2$ হলে, দেখাও যে, $a=4$

সমাধান:

ধরি, $P(x) = x^4-5x^3+7x^2-a$

$(x-2)$ যদি, $P(x)$ এর একটি উৎপাদক হয় তবে $P(2)=0$ হয়।

$\therefore P(2)=0$

বা, $(2)^4-5(2)^3+7(2)^2-a=0$

বা, $16-5.8+7.4-a=0$

বা, $16-40+28-a=0$

বা, $44-40-a=0$

$\therefore a=4$　　[দেখানো হলো]

৬। মনে কর, $P(x) = ax^5+bx^4+cx^3+bx+a$ যেখানে a, b, c ধ্রুবক এবং $a \neq 0$। দেখাও যে, $(x-r)$ যদি $P(x)$ এর একটি উৎপাদক হয়, তবে $P(x)$ এর আরেকটি উৎপাদক $(rx-1)$। (VVI)

সমাধান:

দেওয়া আছে,

$P(x) = ax^5+bx^4+cx^3+cx^2+bx+a$ ...... (i)

[যেখানে, a, b, c ধ্রুবক এবং $a \neq 0$]

যেহেতু $(x-r)$, $P(x)$-এর একটি উৎপাদক, সেহেতু $P(r)=0$.

এখন $P(r) = ar^5+br^4+cr^3+cr^2+br+a$

$\therefore ar^5+br^4+cr^3+cr^2+br+a=0$ .... (ii)

ধরি, $rx-1=0$

বা, $rx=1$

$\therefore x=\frac{1}{r}$

এখন, (i) নং বহুপদীটিতে $x=\frac{1}{r}$ বসালে যদি উক্ত বহুপদীর মান শূন্য হয়, তবে $(rx-1)$ উক্ত বহুপদীর একটি উৎপাদক হবে।

$$\therefore P\left(\frac{1}{r}\right) = a\left(\frac{1}{r}\right)^5+b\left(\frac{1}{r}\right)^4+c\left(\frac{1}{r}\right)^3+c\left(\frac{1}{r}\right)^2+b\left(\frac{1}{r}\right)+a$$

$$= \frac{a}{r^5}+\frac{b}{r^4}+\frac{c}{r^3}+\frac{c}{r^2}+\frac{b}{r}+a$$

$$= \frac{a+br+cr^2+cr^3+br^4+ar^5}{r^5}$$

$$= \frac{ar^5+br^4+cr^3+cr^2+br+a}{r^5}$$

$$= \frac{0}{r^5}$$　[(ii) নং থেকে মান বসিয়ে]

$= 0$

যেহেতু (i) নং বহুপদীতে $x=\frac{1}{r}$ বসালে প্রদত্ত বহুপদীর মান শূন্য হয়, সেহেতু $(rx-1)$ উক্ত বহুপদীর একটি উৎপাদক।

$\therefore (rx-1)$, $P(x)$ এর একটি উৎপাদক।　　[দেখানো হলো]

৭। উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর:
(i) $x^4 + 7x^3 + 17x^2 + 17x + 6$.
(ii) $4a^4 + 12a^3 + 7a^2 - 3a - 2$. (VVI)
(iii) $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$
(iv) $x(y^2 + z^2) + y(z^2 + x^2) + z(x^2 + y^2) + 3xyz$.
(v) $(x+1)^2(y-z) + (y+1)^2(z-x) + (z+1)^2(x-y)$.
(vi) $b^2c^2(b^2 - c^2) + c^2a^2(c^2 - a^2) + a^2b^2(a^2 - b^2)$. (VI)

৭ (i) এর সমাধান:
মনে করি, $P(x) = x^4 + 7x^3 + 17x^2 + 17x + 6$
$P(x)$ এর ধ্রুবপদ 6 এর উৎপাদকসমূহের সেট,
$F_1 = \{1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6\}$
$P(x)$ এর মুখ্যপদ 1 এর উৎপাদকসমূহের সেট,
$F_2 = \{1, -1\}$

এখন, $P(a)$ বিবেচনা করি, যেখানে, $a = \frac{r}{s}$ এবং $r \in F_1,\ s \in F_2$
$a = 1$ হলে, $P(1) = 1 + 7 + 17 + 17 + 6 \neq 0$
$a = -1$ হলে, $P(-1) = -1 - 7 + 17 - 17 + 6 = 0$
সুতরাং, $x = -1$ অর্থাৎ $(x + 1)$, $P(x)$ এর একটি উৎপাদক।
এখন, $x^4 + 7x^3 + 17x^2 + 17x + 6$
$= x^4 + x^3 + 6x^3 + 6x^2 + 11x^2 + 6x + 6$
$= x^3(x+1) + 6x^2(x+1) + 11x(x+1) + 6(x+1)$
$= (x+1)(x^3 + 6x^2 + 11x + 6)$
আবার, মনে করি, $Q(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$
এখন, $x = 1$ হলে $Q(1) = 1 + 6 + 11 + 6 \neq 0$
$x = -1$ হলে $Q(-1) = -1 + 6 - 11 + 6 = 0$
সুতরাং, $x = -1$ অর্থাৎ $(x + 1)$, $Q(x)$ এর একটি উৎপাদক।
এখন, $x^3 + 6x^2 + 5x^2 + 5x + 6x + 6$
$= x^3 + x^2 + 5x^2 + 5x + 6x + 6$
$= x^2(x+1) + 5x(x+1) + 6(x+1)$
$= (x+1)(x^2 + 5x + 6)$
$= (x+1)(x^2 + 3x + 2x + 6)$
$= (x+1)\{x(x+3) + 2(x+3)\}$
$= (x+1)(x+2)(x+3)$
$\therefore Q(x) = (x+1)(x+2)(x+3)$
সুতরাং, $P(x) = (x+1)\,Q(x)$
$= (x+1)(x+1)(x+2)(x+3)$
$= (x+1)^2(x+2)(x+3)$ **[Ans.]**

৭ (ii) এর সমাধান:
ধরি, $P(a) = 4a^4 + 12a^3 + 7a^2 - 3a - 2$
মনে করি, $P(a) = 4a^4 + 12a^3 + 7a^2 - 3a - 2$
$P(a)$ এর ধ্রুবপদ -2 এর উৎপাদকসমূহের সেট,
$F_1 = \{1, -1, 2, -2\}$
$P(a)$ এর মুখ্যপদ 4 এর উৎপাদকসমূহের সেট,
$F_2 = \{1, -1, 2, -2, 4, -4\}$

এখন, $P(a)$ বিবেচনা করি, যেখানে, $a = \frac{r}{s}$ এবং $r \in F_1,\ s \in F_2$.
$a = 1$ হলে, $P(1) = 4 + 12 + 7 - 3 - 2 \neq 0$
$a = -1$ হলে, $P(-1) = 4 - 12 + 7 + 3 - 2 = 0$
সুতরাং, $a = -1$ অর্থাৎ $(a + 1)$, $P(a)$ এর একটি উৎপাদক।
এখন, $4a^4 + 12a^3 + 7a^2 - 3a - 2$
$= 4a^4 + 4a^3 + 8a^3 + 8a^2 - a^2 - a - 2a - 2$
$= 4a^3(a+1) + 8a^2(a+1) - a(a+1) - 2(a+1)$
$= (a+1)(4a^3 + 8a^2 - a - 2)$
আবার, ধরি, $Q(a) = 4a^3 + 8a^2 - a - 2$
$a = 1$ হলে $Q(1) = 4 + 8 - 1 - 2 \neq 0$
$a = -1$ হলে $Q(-1) = 4 + 8 + 1 - 2 \neq 0$
$a = 2$ হলে $Q(2) = 32 + 32 - 2 - 2 \neq 0$
$a = -2$ হলে $Q(-2) = -32 + 32 + 2 - 2 = 0$
সুতরাং, $a = -2$ অর্থাৎ $(a + 2)$, $Q(a)$ এর একটি উৎপাদক।
এখন, $4a^3 + 8a^2 - a - 2$
$= 4a^2(a+2) - 1(a+2)$
$= (a+2)(4a^2 - 1)$
$= (a+2)\{(2a)^2 - (1)^2\}$
$= (a+2)(2a+1)(2a-1)$
$\therefore Q(a) = (a+2)(2a+1)(2a-1)$
সুতরাং, $P(a) = (a+1)\,Q(a)$
$= (a+1)(a+2)(2a+1)(2a-1)$ **[Ans.]**

৭ (iii) এর সমাধান:
মনে করি, $P(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$
$P(x)$ এর ধ্রুবপদ 1 এর উৎপাদকসমূহের সেট, $F_1 = \{1, -1\}$
$P(x)$ এর মুখ্যপদ 1 এর উৎপাদকসমূহের সেট, $F_2 = \{1, -1\}$

এখন, $P(a)$ বিবেচনা করি, যেখানে, $a = \frac{r}{s}$ এবং $r \in F_1,\ s \in F_2$
$a = 1$ হলে, $P(1) = 1 + 2 + 2 + 1 \neq 0$
$a = -1$ হলে, $P(-1) = -1 + 2 - 2 + 1 = 0$
সুতরাং, $x = -1$ অর্থাৎ $(x + 1)$, $P(x)$ এর একটি উৎপাদক।
এখন, $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$
$= x^3 + x^2 + x^2 + x + x + 1$
$= x^2(x+1) + x(x+1) + 1(x+1)$
$= (x+1)(x^2 + x + 1)$
$\therefore P(x) = (x+1)(x^2 + x + 1)$ **[Ans.]**

৯ (iv) এর সমাধান:
$x(y^2 + z^2) + y(z^2 + x^2) + z(x^2 + y^2) + 3xyz$
$= xy^2 + z^2x + yz^2 + x^2y + zx^2 + y^2z + 3xyz$
$= x^2y + xy^2 + xyz + xyz + y^2z + yz^2 + zx^2 + xyz + z^2x$
$= xy(x+y+z) + yz(x+y+z) + zx(x+y+z)$
$= (x+y+z)(xy + yz + zx)$
$\therefore$ নির্ণেয় উৎপাদক $= (x+y+z)(xy + yz + zx)$ **[Ans.]**

৭ (v) এর সমাধান:
প্রদত্ত রাশি,
$(x+1)^2(y-z) + (y+1)^2(z-x) + (z+1)^2(x-y)$
$= (x^2 + 2x + 1)(y-z) + (y^2 + 2y + 1)(z-x) + (z^2 + 2z + 1)(x-y)$
$= x^2(y-z) + 2x(y-z) + y - z + y^2(z-x) + 2y(z-x) + z - x +$
$(x-y) + 2z(x-y) + x - y$
$= x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y) + 2x(y-z) + 2y(z-x) + 2z(x-y)$
$= x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y) + 2(xy - zx + yz - xy + zx - yz)$
$= x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y) + 2 \times 0$
$= x^2(y-z) + y^2z - xy^2 + z^2x - yz^2$
$= x^2(y-z) + y^2z - yz^2 - xy^2 + z^2x$
$= x^2(y-z) + yz(y-z) - x(y^2 - z^2)$
$= x^2(y-z) + yz(y-z) - x(y+z)(y-z)$
$= (y-z)\{x^2 + yz - x(y+z)\}$
$= (y-z)(x^2 + yz - xy - zx)$
$= (y-z)(x^2 - xy - zx + yz)$
$= (y-z)\{x(x-y) - z(x-y)\}$
$= (y-z)(x-y)(x-z)$
$= (y-z)(x-y)\{-(z-x)\}$
$= -(x-y)(y-z)(z-x)$ **[Ans.]**

৭ (vi) এর সমাধান:
প্রদত্ত রাশি $= b^2c^2(b^2 - c^2) + c^2a^2(c^2 - a^2) + a^2b^2(a^2 - b^2)$
$= b^2c^2(b^2 - c^2) + c^4a^2 - c^2a^4 + a^4b^2 - a^2b^4$
$= b^2c^2(b^2 - c^2) + a^4b^2 - c^2a^4 - a^2b^4 + c^4a^2$
$= b^2c^2(b^2 - c^2) + a^4(b^2 - c^2) - a^2(b^4 - c^4)$
$= b^2c^2(b^2 - c^2) + a^4(b^2 - c^2) - a^2(b^2 + c^2)(b^2 - c^2)$
$= (b^2 - c^2)\{b^2c^2 + a^4 - a^2(b^2 + c^2)\}$
$= (b^2 - c^2)(b^2c^2 + a^4 - c^2a^2 - a^2b^2)$
$= (b^2 - c^2)(a^4 - a^2b^2 - c^2a^2 + b^2c^2)$
$= (b^2 - c^2)\{a^2(a^2 - b^2) - c^2(a^2 - b^2)\}$
$= (b^2 - c^2)(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)$
$= (b^2 - c^2)(a^2 - b^2)\{-(c^2 - a^2)\}$
$= -(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)$
$= -(a+b)(a-b)(b+c)(b-c)(c+a)(c-a)$
$= -(a-b)(b-c)(c-a)(a+b)(b+c)(c+a)$ **[Ans.]**

৮। যদি $\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}=\frac{3}{abc}$ হয়, তবে দেখাও যে, $bc+ca+ab=0$ অথবা, $a=b=c$. (VVI)

সমাধান:

দেওয়া আছে, $\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}=\frac{3}{abc}$

বা, $\left(\frac{1}{a}\right)^3+\left(\frac{1}{b}\right)^3+\left(\frac{1}{c}\right)^3-3.\frac{1}{a}.\frac{1}{b}.\frac{1}{c}=0$

বা, $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left\{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2+\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)^2+\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)^2\right\}=0$

$[\because a^3+b^3+c^3-3abc=\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}]$

বা, $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left\{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2+\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)^2+\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)^2\right\}=0$

অতএব, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$

বা, $\frac{bc+ca+ab}{abc}=0$

বা, $bc+ca+ab=0$

অথবা, $\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2+\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)^2+\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)^2=0$

যেহেতু তিনটি বর্গের সমষ্টির মান শূন্য। সুতরাং এদের প্রত্যেকের মান শূন্য।

অর্থাৎ $\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2=0$

বা, $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=0$ [বর্গমূল করে]

বা, $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}$

$\therefore a=b$

আবার, $\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)^2=0$

বা, $\frac{1}{b}-\frac{1}{c}=0$ [বর্গমূল করে]

বা, $\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$

$\therefore b=c$

আবার, $\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)^2=0$

বা, $\frac{1}{c}-\frac{1}{a}=0$ [বর্গমূল করে]

$\therefore c=a$

অতএব, $a=b=c$

সুতরাং $bc+ca+ab=0$ অথবা $a=b=c$ [দেখানো হলো]

৯। যদি $x=b+c-a$, $y=c+a-b$ এবং $z=a+b-c$ হয়, তবে দেখাও যে, $x^3+y^3+z^3-3xyz=4(a^3+b^3+c^3-3abc)$. (VVI)

সমাধান:

এখানে, $x^3+y^3+z^3-3xyz$

$=\frac{1}{2}(x+y+z)\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}$

$=\frac{1}{2}(b+c-a+c+a-b+a+b-c)\{(b+c-a-c-a+b)^2+(c+a-b-a-b+c)^2+(a+b-c-b-c+a)^2\}$ [x, y, z এর মান বসিয়ে]

$=\frac{1}{2}(a+b+c)\{(2b-2a)^2+(2c-2b)^2+(2a-2c)^2\}$

$=\frac{1}{2}(a+b+c)[\{-2(a-b)\}^2+\{-2(b-c)^2\}+\{-2(c-a)\}^2]$

$=\frac{1}{2}(a+b+c)\{4(a-b)^2+4(b-c)^2+4(c-a)^2\}$

$=4.\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

$=4(a^3+b^3+c^3-3abc)$

$[\because \frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=a^3+b^3+c^3-3abc]$

$\therefore x^3+y^3+z^3-3xyz=4(a^3+b^3+c^3-3abc)$ [দেখানো হলো]

১০। সরল কর:

(a) $\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$

(b) $\frac{a}{(a-b)(a-c)(x-a)}+\frac{b}{(b-a)(b-c)(x-b)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)(x-c)}$

(c) $\frac{(a+b)^2-ab}{(b-c)(a-c)}+\frac{(b+c)^2-bc}{(c-a)(b-a)}+\frac{(c+a)^2-ca}{(a-b)(c-b)}$

(d) $\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\frac{8}{1+x^8}+\frac{16}{x^{16}-1}$.

১০ (a) এর সমাধান:

$=\frac{a^2}{-(a-b)(c-a)}+\frac{b^2}{-(b-c)(a-b)}+\frac{c^2}{-(c-a)(b-c)}$

$=\frac{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}{-(a-b)(b-c)(c-a)}$

চক্রক্রমিক রাশির সূত্রানুযায়ী, $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=-(a-b)(b-c)(c-a)$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $=\frac{-(a-b)(b-c)(c-a)}{-(a-b)(b-c)(c-a)}=1$ **[Ans.]**

১০ (b) এর সমাধান:

ধরি, $x-a=l$, $x-b=m$, $x-c=n$

$\therefore l-m=-(a-b)$, $m-n=-(b-c)$, $n-l=-(c-a)$

এবং $a=x-l$, $b=x-m$, $c=m-n$

প্রদত্ত রাশি

$=\frac{x-l}{-l(l-m)(n-l)}+\frac{x-m}{-m(m-n)(l-m)}+\frac{x-n}{-n(n-l)(m-n)}$

$$= \frac{x}{-l(l-m)(n-l)} + \frac{x}{-m(m-n)(l-m)} + \frac{x}{-n(n-l)(m-n)} + \frac{x}{(l-m)(x-l)} + \frac{x}{(m-n)(l-m)} + \frac{x}{(n-l)(m-n)}$$

$$= \frac{x\{mn(m-n) + nl(n-l) + lm(l-m)\}}{-lmn(l-m)(m-n)(n-l)} + \frac{m-n+n-l+l-m}{(l-m)(m-n)(n-l)}$$

$$= \frac{-x(m-n)(n-l)(l-m)}{-lmn(m-n)(n-l)(l-m)}$$ [চক্রক্রমিক সূত্রানুযায়ী, $mn(m-n) + nl(n-l) + lm(l-m) = -(m-n)(n-l)(l-m)$]

$$= \frac{x}{lmn}$$

$$= \frac{x}{(x-a)(x-b)(x-c)}$$ **[Ans.]**

বিকল্প সমাধান:
প্রদত্ত রাশি,

$$\frac{a}{(a-b)(a-c)(x-a)} + \frac{b}{(b-a)(b-c)(x-b)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)(x-c)}$$

$$= \frac{a}{-(a-b)(c-a)(x-a)} + \frac{b}{-(a-b)(bc-)(x-b)} + \frac{c}{-(c-a)(b-c)(x-c)}$$

$$= \frac{a(x-b)(x-c)(b-c) + b(x-c)(x-a)(c-a) + c(x-a)(x-b)(a-b)}{-(a-b)(b-c)(c-a)(x-a)(x-b)(x-c)}$$

এখানে, লব

$= a(x-b)(x-c)(b-c) + b(x-c)(x-c)(c-a) + c(x-a)(x-b)(a-b)$

$= a(x^2 + cx - bx + bc)(b-c) + b(x^2 + ax - cx + ac)(c-a) + c(x^2 - bx - ax + ab)(a-b)$

$= a\{x^2 - x(b+c) + bc\}(b-c) + b\{x^2 - x(c+a) + ca\}(c-a) + c\{x^2 - x(a+b) + ab\}(a-b)$

$= \{ax^2 - ax(b+c) + abc\}(b-c) + \{bx^2 - bx(c+a) + abc\}(c-a) + \{cx^2 - cx(a+b) + abc\}(a-b)$

$= ax^2(b-c) - ax(b+c)(b-c) + abc(b-c) + bx^2(c-a) - bx(c+a)(c-a) + abc(c-a) + cx^2(a-b) - cx(a+b)(a-b) + abc(a-b)$

$= ax^2(b-c) + bx^2(c-a) + cx^2(a-b) - ax(b^2-c^2) - bx(c^2-a^2) - cx(a^2-b^2) + abc(b-c) + abc(c-a) + abc(a-b)$

$= x^2\{a(b-c) + (c-a) + c(a-b)\} - x\{a(b^2-c^2) + (c^2-a^2) + c(a^2-b^2)\} + abc(b-c+c-a+a-b)$

$= x^2(ab-ca+bc-ab+ca-bc) - x(a-b)(b-c)(c-a) + abc \times 0$

[চক্রক্রমিকের সূত্রানুসারে, $a(b^2-c^2) + b(c^2-a^2) + (a^2-b^2) = (a-b)(b-c)(c-a)$]

$= x^2 \times 0 - x(a-b)(b-c)(c-a) + 0$

$= 0 - x(a-b)(b-c)(c-a)$

$= -x(a-b)(b-c)(c-a)$

অতএব, প্রদত্ত রাশি

$$= \frac{-x(a-b)(b-c)(c-a)}{-(a-b)(b-c)(c-a)(x-a)(x-b)(x-c)}$$

$$= \frac{x}{(x-a)(x-b)(x-c)}$$ **[Ans.]**

১০ (c) এর সমাধান:
প্রদত্ত রাশি,

$$\frac{(a+b)^2 - ab}{(b-c)(a-c)} + \frac{(b+c)^2 - bc}{(c-a)(b-a)} + \frac{(c+a)^2 - ca}{(a-b)(c-b)}$$

$$= \frac{(a+b)^2 - ab}{-(b-c)(c-a)} + \frac{(b+c)^2 - bc}{-(c-a)(a-b)} + \frac{(c+a)^2 - ca}{-(a-b)(b-c)}$$

$$= \frac{a^2 + 2ab + b^2 - ab}{-(b-c)(c-a)} + \frac{b^2 + 2bc + c^2 - bc}{-(c-a)(a-b)} + \frac{c^2 + 2ca + a^2 - ca}{-(a-b)(b-c)}$$

$$= \frac{a^2 + ab + b^2}{-(b-c)(c-a)} + \frac{b^2 + bc + c^2}{-(c-a)(a-b)} + \frac{c^2 + ca + a^2}{-(a-b)(b-c)}$$

$$= \frac{(a-b)(a^2 + ab + b^2) + (b-c)(b^2 + bc + c^2) + (c-a)(c^2 + ca + a^2)}{-(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$= \frac{a^3 - b^3 + b^3 - c^3 + c^3 - a^3}{-(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$= \frac{0}{-(a-b)(b-c)(c-a)} = 0$$ **[Ans.]**

১০ (d) এর সমাধান:
প্রদত্ত রাশি,

$$\frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} + \frac{16}{x^{16}-1}$$

$$= \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x^2+1} + \frac{4}{x^4+1} + \frac{8}{x^8+1} + \frac{16}{(x^8)^2 - (1)^2}$$

$$= \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x^2+1} + \frac{4}{x^4+1} + \frac{8}{x^8+1} + \frac{16}{(x^8+1)(x^8-1)}$$

$$= \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x^2+1} + \frac{4}{x^4+1} + \frac{8x^8 - 8 + 16}{(x^8+1)(x^8-1)}$$

$$= \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x^2+1} + \frac{4}{x^4+1} + \frac{8x^8 + 8}{(x^8+1)(x^8-1)}$$

$$= \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x^2+1} + \frac{4}{x^4+1} + \frac{8(x^8+1)}{(x^8+1)(x^8-1)}$$

$$= \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x^2+1} + \frac{4}{x^4+1} + \frac{8}{(x^4)^2 - (1)^2}$$

$$= \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x^2+1} + \frac{4}{x^4+1} + \frac{8}{(x^4+1)(x^4-1)}$$

$$= \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x^2+1} + \frac{4x^4 - 4 + 8}{(x^4+1)(x^4-1)}$$

$$= \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x^2+1} + \frac{4x^4 + 4}{(x^4+1)(x^4-1)}$$

$$= \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x^2+1} + \frac{4(x^4+1)}{(x^4+1)(x^4-1)}$$

$$= \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x^2+1} + \frac{4}{(x^2) - (1)^2}$$

$$= \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x^2+1} + \frac{4}{(x^2+1)(x^2-1)}$$

$$= \frac{1}{x+1} + \frac{2x^2 - 2 + 4}{(x^2+1)(x^2-1)}$$

$$= \frac{1}{x+1} + \frac{2x^2 + 2}{(x^2+1)(x^2-1)}$$

$$= \frac{1}{x+1} + \frac{2(x^2+1)}{(x^2+1)(x^2-1)}$$

$$= \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x^2-1}$$

$= \frac{1}{x+1} + \frac{2}{(x+1)(x-1)}$

$= \frac{x-1+2}{(x+1)(x-1)}$

$= \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{x-1}$ **[Ans.]**

[টীকা: একটু লক্ষ করলেই দেখা যাবে যে শেষের দুই রাশির মধ্যে মিল রয়েছে। এদেরকে প্রথমে যোগ করলে পূর্বের রাশির সাথে মিলযুক্ত একটি রাশি পাওয়া যায়।]

বিকল্প সমাধান:

$\frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} + \frac{16}{x^{16}-1}$

$= \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}\right) + \frac{2}{x^2+1} + \frac{4}{x^4+1} + \frac{8}{x^8+1} + \frac{16}{x^{16}-1} + \frac{1}{x-1}$

$= \frac{x-1-x-1}{(x+1)(x-1)} + \frac{2}{x^2+1} + \frac{4}{x^4+1} + \frac{8}{x^8+1} + \frac{16}{x^{16}-1} + \frac{1}{x-1}$

$= \frac{-2}{x^2-1} + \frac{2}{x^2+1} + \frac{4}{x^4+1} + \frac{8}{x^8+1} + \frac{16}{x^{16}-1} + \frac{1}{x-1}$

$= \frac{-2x^2-2+2x^2-2}{(x^2+1)(x^2-1)} + \frac{4}{x^4+1} + \frac{8}{x^8+1} + \frac{16}{x^{16}-1} + \frac{1}{x-1}$

$= \frac{-4}{x^4-1} + \frac{4}{x^4+1} + \frac{8}{x^8+1} + \frac{16}{x^{16}-1} + \frac{1}{x-1}$

$= \frac{-4x^4-4+4x^4-4}{(x^4+1)(x^4-1)} + \frac{8}{x^8+1} + \frac{16}{x^{16}-1} + \frac{1}{x-1}$

$= \frac{-8}{x^8-1} + \frac{8}{x^8+1} + \frac{16}{x^{16}-1} + \frac{1}{x-1}$

$= \frac{-8x^8-8+8x^8-8}{(x^8+1)(x^8-1)} + \frac{16}{x^{16}-1} + \frac{1}{x-1}$

$= \frac{-16}{x^{16}-1} + \frac{16}{x^{16}-1} + \frac{1}{x-1}$

$= \frac{1}{x-1}$ **[Ans.]**

১১। আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর:

(a) $\frac{5x+4}{x(x+2)}$ (b) $\frac{x+2}{(x^2-7x+12)}$ (c) $\frac{x^2-9x-6}{x(x-2)(x+3)}$

(d) $\frac{x^2-4x-7}{(x+1)(x^2+4)}$ (e) $\frac{x^2}{(2x+1)(x+3)^2}$

১১ (a) এর সমাধান:

ধরি, $\frac{5x+4}{x(x+2)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2}$ ... ... (i)

(i) এর উভয়পক্ষকে $x(x+2)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$5x+4 \equiv A(x+2) + Bx$ ... ... (ii)

যা x এর সকল মানের জন্য সত্য। (ii) এর উভয়পক্ষে $x = 0$ বসিয়ে পাই,

$0 + 4 = 2A + 0$

$\therefore A = 2$

আবার (ii) এর উভয়পক্ষে $x = -2$ বসিয়ে পাই,

$-10 + 4 = 0 - 2B$

বা, $-6 = -2B$

$\therefore B = 3$

A ও B এর মান (i) এ বসিয়ে পাই, $\frac{5x+4}{x(x+2)} = \frac{2}{x} + \frac{3}{x+2}$

$\therefore$ প্রদত্ত ভগ্নাংশটি আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশিত হলো।

$\frac{5x+4}{x(x+2)} = \frac{2}{x} + \frac{3}{x+2}$ **[Ans.]**

১১ (b) এর সমাধান:

এখানে, $x^2 - 7x + 12$

$= x^2 - 3x - 4x + 12$ [এখানে হরকে উৎপাদক আকারে বিভক্ত করি]

$= x(x-3) - 4(x-3)$

$= (x-3)(x-4)$

সুতরাং, $\frac{x+2}{x^2-7x+12} = \frac{x+2}{(x-3)(x-4)}$

ধরি, $\frac{x+2}{(x-3)(x-4)} \equiv \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-4}$ ... ... (i)

(i) এর উভয়পক্ষকে $(x-3)(x-4)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$x + 2 \equiv A(x-4) + B(x-3)$ ... ... (ii)

যা x এর সকল মানের জন্য সত্য।

এখন, (ii) এর উভয়পক্ষে $x = 3$ বসিয়ে পাই,

$3 + 2 = A(3-4) + B(3-3)$

বা, $5 = -A$

$\therefore A = -5$

আবার (ii) এর উভয়পক্ষে $x = 4$ বসিয়ে পাই,

$4 + 2 = A(4-4) + B(4-3)$

বা, $6 = 0 + B$ $\therefore B = 6$

A ও B এর মান (i) এ বসিয়ে পাই,

$\frac{x+2}{(x-3)(x-4)} = \frac{-5}{x-3} + \frac{6}{x-4} = \frac{6}{x-4} - \frac{5}{x-3}$

প্রদত্ত ভগ্নাংশটি আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশিত হলো।

$\frac{x+2}{(x-3)(x-4)} = \frac{6}{x-4} - \frac{5}{x-3}$ **[Ans.]**

১১ (c) এর সমাধান:

ধরি, $\frac{x^2-9x-6}{x(x-2)(x+3)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3}$ ....(i)

(i) এর উভয়পক্ষকে $x(x-2)(x+3)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$x^2 - 9x - 6 = A(x-2)(x+3) + Bx(x+3) + Cx(x-2)$ .... (ii)

যা x এর সকল মানের জন্য (ii) সত্য।

এখন (ii) এর উভয়পক্ষে $x = 0$ বসিয়ে পাই,

$-6 = A(-2)(3) + 0 + 0$ $\therefore A = 1$

আবার (ii) এর উভয়পক্ষে $x = 2$ বসিয়ে পাই,

$-4 - 18 - 6 = 0 + B.2(5) + 0$

বা, $-20 = 10B$ $\therefore B = -2$

(ii) এর উভয়পক্ষে $x = -3$ বসিয়ে পাই,

$9 + 27 - 6 = 0 + 0 + C(-3)(-5)$

বা, $30 = 15C$

$\therefore C = 2$

A, B ও C এর মান (i) এ বসিয়ে পাই,

$\frac{x^2-9x-6}{x(x-2)(x+3)} = \frac{1}{x} - \frac{2}{x-2} + \frac{2}{x+3}$

প্রদত্ত ভগ্নাংশটি আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশিত হলো।

$\frac{x^2-9x-6}{x(x-2)(x+3)} = \frac{1}{x} - \frac{2}{x-2} + \frac{2}{x+3}$ **[Ans.]**

১১ (d) এর সমাধান:

ধরি, $\frac{x^2-4x-7}{(x+1)(x^2+4)} \equiv \frac{A}{(x+1)} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$ ... ...(i)

(i) এর উভয়পক্ষকে $(x+1)(x^2+4)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$x^2 - 4x - 7 = A(x^2+4) + (Bx+C)(x+1)$ ... ... (ii)

(ii) এ $x=-1$ বসিয়ে পাই,

$(-1)^2-4(-1)-7=A(1+4)$

বা, $1+4-7=5A$

বা, $5A=-2$

$\therefore A=-\frac{2}{5}$

(ii) নং সমীকরণের উভয় পক্ষে x^2 ও x এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$A+B=1$

বা, $-\frac{2}{5}+B=1$

বা, $1+\frac{2}{5}=B$

$\therefore B=\frac{7}{5}$

এবং $B+C=-4$

বা, $\frac{7}{5}+C=-4$

বা, $C=-4-\frac{7}{5}$

বা, $C=-\frac{27}{5}$

A, B ও C এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$$\frac{x^2-4x-7}{(x+1)(x^2+4)}=\frac{-\frac{2}{5}}{x+2}+\frac{\frac{7}{5}x-\frac{27}{5}}{x^2+4}$$

$$=\frac{1}{5}\left(-\frac{2}{x+1}+\frac{7x-27}{x^2+4}\right)$$

$\therefore$ নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ $=\frac{1}{5}\left(\frac{7x-27}{x^2+4}-\frac{2}{x+1}\right)$ **[Ans.]**

১১ (e) এর সমাধান:

ধরি, $\frac{x^2}{(2x+1)(x+3)^2}=\frac{A}{2x+1}+\frac{B}{x+3}+\frac{C}{(x+3)^2}$ ... ... (i)

(i) এর উভয়পক্ষকে $(2x+1)(x+3)^2$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$x^2\equiv A(x+3)^2+B(2x+1)(x+3)+C(2x+1)$ ... ... (ii)

(ii) এ $x=-3$ বসিয়ে পাই,

$(-3)^2=C\{2(-3)+1\}$

বা, $9=C(-6+1)$

বা, $-5C=-9$

$\therefore C=-\frac{9}{5}$

(ii) এ $x=-\frac{1}{2}$ বসিয়ে পাই,

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2=A\left(-\frac{1}{2}+3\right)^2$$

বা, $\frac{1}{4}=A\left(\frac{-1+6}{2}\right)^2$

বা, $\frac{1}{4}=A\left(\frac{5}{2}\right)^2$

বা, $\frac{1}{4}=A.\frac{25}{4}$

বা, $25A=1$

$\therefore A=\frac{1}{25}$

(ii) নং এ x^2 এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$A+2B=1$

বা, $\frac{1}{25}+2B=1$

বা, $2B=1-\frac{1}{25}$

বা, $2B=\frac{25-1}{25}$

বা, $2B=\frac{24}{25}$

বা, $B=\frac{24}{25\times2}$

$\therefore B=\frac{12}{25}$

A, B ও C এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$$\frac{x^2}{(2x+1)(x+3)^2}=\frac{\frac{1}{25}}{2x+1}+\frac{\frac{12}{25}}{x+3}+\frac{\frac{-9}{5}}{(x+3)^2}$$

$\therefore$ প্রদত্ত ভগ্নাংশটি আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করা হলো।

$\frac{1}{25(2x+1)}+\frac{12}{25(x+3)}-\frac{9}{5(x+3)^2}$ **[Ans.]**

১২। x, y, z এর একটি বহুপদী $F(x,y,z)=x^3+y^3+z^3-3xyz$ (VV...)

ক. দেখাও যে, $F(x,y,z)$ হলো একটি চক্র-ক্রমিক রাশি।

খ. $F(x,y,z)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর এবং যদি $F(x,y,z)=0,$ ... $z\neq0$ হয়, তবে দেখাও যে, $(x^2+y^2+z^2)=(xy+yz+zx)$

গ. যদি $x=b+c-a, y=c+a-b$ এবং $z=a+b-c$ হয়, ... $F(a,b,c):F(x,y,z)=1:4$.

(ক) এর সমাধান:

দেওয়া আছে, $F(x,y,z)=x^3+y^3+z^3-3xyz$

প্রদত্ত রাশিটি x, y, z চলকের বহুপদী।

x এর স্থলে y, y এর স্থলে z এবং z এর স্থলে x বসিয়ে পাই,

$F(y,z,x)=y^3+z^3-x^3-3.y.z.x$

$=x^3+y^3+z^3-3xyz$

দেখা যায় যে, চলকগুলো স্থান পরিবর্তন করলেও রাশিটি একই থাকে।

অর্থাৎ $F(x,y,z)=F(y,z,x)$

সুতরাং $F(x,y,z)$ একটি চক্র-ক্রমিক রাশি। [দেখানো হলো]

(খ) এর সমাধান:

দেওয়া আছে, $F(x,y,z)=x^3+y^3+z^3-3xyz$

$=(x+y)^3-3xy(x+y)+z^3-3xyz$

$=(x+y)^3+z^3-3xy(x+y+z)$

$=(x+y+z)\{(x+y)^2-(x+y)z+z^2\}-3xy(x+y+z)$

$=(x+y+z)(x^2+2xy+y^2-zx-yz+z^2)-3xy(x+y$...

$=(x+y+z)(x^2+2xy+y^2-zx-yz+z^2-3xy)$

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

প্রশ্নমতে, $F(x,y,z)=0$

বা, $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=0$

বা, $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=0$ [$\because x+y+z\neq0$]

$\therefore x^2+y^2+z^2=xy+yz+zx$ [দেখানো হলো]

(গ) এর সমাধান:

দেওয়া আছে, $x=b+c-a$

$y=c+a-b$

এবং $z=a+b-c$

$F(x, y, z) = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

$= \frac{1}{2}(x + y + z)(2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2zx)$

$= \frac{1}{2}(x + y + z)\{(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2\}$

$= \frac{1}{2}(b + c - a + c + a - b + a + b - c)\{(b + c - a - c - a + b)^2 + (c + a - b - a - b + c)^2 + (a + b - c - b - c + a)^2\}$

[x, y, z এর মান বসিয়ে]

$= \frac{1}{2}(a + b + c)\{(2b - 2a)^2 + (2c - 2b)^2 + (2a - 2c)^2\}$

$= \frac{1}{2}(a + b + c)\{4(a - b)^2 + 4(b - c)^2 + 4(c - a)^2\}$

$= 4\left[\frac{1}{2}(a + b + c)\{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\}\right]$

$= 4(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc) = 4.F(a, b, c)$

$[\because \frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\} = a^3+b^3+c^3 - 3abc]$

বা, $F(x, y, z) = 4\ F(a, b, c)$

বা, $\frac{F(x,y,z)}{F(a,b,c)} = 4$

বা, $\frac{F(a,b,c)}{F(x,y,z)} = \frac{1}{4}$ [বিপরীতকরণ করে]

$\therefore F(a, b, c) : F(x, y, z) = 1 : 4$ [দেখানো হলো]

১৩। $P(a,b,c) = (a + b + c)(ab + bc + ca)$ এবং
$Q = a^{-3} + b^{-3} + c^{-3} - 3a^{-1}b^{-1}c^{-1}$

(ক) $P(a,b,c)$ চক্রক্রমিক ও প্রতিসম রাশি কিনা তা কারণসহ উল্লেখ কর।

(খ) $Q = 0$ হলে, প্রমাণ কর যে, $a = b = c$ অথবা $ab + bc + ca = 0$

(গ) $P(a,b,c) = abc$ হলে দেখাও যে, $\frac{1}{(a+b+c)^7} = \frac{1}{a^7} + \frac{1}{b^7} + \frac{1}{c^7}$

(ক) এর সমাধান:

$P(a, b, c) = (a + b + c)(ab + bc + ca)$ রাশিটি a, b, c চলকের একটি চক্র-ক্রমিক রাশি, কারণ এতে চক্রাকারে a এর পরিবর্তে b, b এর পরিবর্তে c এবং c এর পরিবর্তে a বসালে রাশিটি একই থাকে।

আবার, $P(a, b, c) = (a + b + c)(ab + bc + ca)$ রাশিটি a, b, c চলকের প্রতিসম রাশি। কারণ a, b, c চলক তিনটির যেকোনো দুইটির স্থান বিনিময়ে রাশিটি অপরিবর্তিত থাকে।

(খ) এর সমাধান:

দেওয়া আছে,

$Q = 0$

বা, $a^{-3} + b^{-3} + c^{-3} - 3a^{-1}b^{-1}c^{-1} = 0$

বা, $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} - \frac{3}{abc} = 0$

$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} = \frac{3}{abc}$

বা, $\left(\frac{1}{a}\right)^3 + \left(\frac{1}{b}\right)^3 + \left(\frac{1}{c}\right)^3 - 3.\frac{1}{a}.\frac{1}{b}.\frac{1}{c} = 0$

বা, $\frac{2}{1}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\left\{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)^2 + \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right)^2\right\} = 0$

$[\because a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a + b + c)\{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\}]$

বা, $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\left\{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)^2 + \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right)^2\right\} = 0$

অতএব, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$

বা, $\frac{bc + ca + ab}{abc} = 0$

বা, $bc + ca + ab = 0$

অথবা, $\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)^2 + \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right)^2 = 0$

যেহেতু তিনটি বর্গের সমষ্টির মান শূন্য। সুতরাং এদের প্রত্যেকের মান শূন্য।

অর্থাৎ $\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2 = 0$

বা, $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = 0$

বা, $\frac{1}{a} = \frac{1}{b}$

$\therefore a = b$

আবার, $\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)^2 = 0$

বা, $\frac{1}{b} - \frac{1}{c} = 0$

বা, $\frac{1}{b} = \frac{1}{c}$

$\therefore b = c$

আবার, $\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right)^2 = 0$

বা, $\frac{1}{c} - \frac{1}{a} = 0$

বা, $\frac{1}{c} = \frac{1}{a}$

$\therefore c = a$

অতএব, $a = b = c$

সুতরাং $bc + ca + ab =$ অথবা $a = b = c$ [প্রমাণিত]

(গ) এর সমাধান:

$P(a,b,c) = abc$

বা, $(a + b + c)(ab + bc + ca) = P(a,b,c) = abc$

বা, $(a + b + c)(ab + bc + ca) - abc = 0$

বা, $(a + b + c)(ab + bc + ca) = abc$

বা, $a^2b + abc + a^2c + ab^2 + b^2c + abc + abc + bc^2 + c^2a = abc$

বা, $ab(a + b) + bc(a + b) + ca(a + b) + c^2(a + b) = 0$

বা, $(a + b)(ab + bc + ca + c^2) = 0$

বা, $(a + b)\{b(c + a) + c(c + a)\} = 0$

$\therefore (a + b)(b + c)(c + a) = 0$

$(a + b) = 0$ বা, $(b + c) = 0$ বা, $(c + a) = 0$

$\therefore a = -b,\quad b = -c,\quad c = -a$

যখন, $a + b = 0$

বামপক্ষ, $\frac{1}{(a+b+c)^7} = \frac{1}{(0+c)^7} = \frac{1}{c^7}$

ডানপক্ষ, $\frac{1}{a^7} + \frac{1}{b^7} + \frac{1}{c^7} = \frac{1}{-b^7} + \frac{1}{b^7} + \frac{1}{c^7} = \frac{1}{c^7}$ ....(i)

একইভাবে দেখানো যায় যে,

যখন, $b + c = 0$

বামপক্ষ, $\frac{1}{(a+b+c)^7} = \frac{1}{(a+0)^7} = \frac{1}{a^7}$

ডানপক্ষ, $\frac{1}{a^7} + \frac{1}{b^7} + \frac{1}{c^7} = \frac{1}{a^7} + \frac{1}{-c^7} + \frac{1}{c^7} = \frac{1}{a^7}$ ....(ii)

আবার,

যখন, $c + a = 0$

বামপক্ষ, $\frac{1}{(a+b+c)^7} = \frac{1}{(0+b)^7} = \frac{1}{b^7}$

ডানপক্ষ, $\frac{1}{a^7} + \frac{1}{b^7} + \frac{1}{c^7} = \frac{1}{a^7} + \frac{1}{b^7} + \frac{1}{-a^7} = \frac{1}{b^7}$ ....(iii)

অতএব, সমীকরণ (i), (ii) ও (iii) নং হতে দেখানো যায় যে,

$$\frac{1}{(a+b+c)^7} = \frac{1}{a^7} + \frac{1}{b^7} + \frac{1}{c^7}$$

১৪। $P(x) = 18x^3 + bx^2 - x - 2$

$Q(x) = 4x^4 = 12x^3 + 7x^2 - 3x - 2$

(ক) $\frac{Q(x)}{P(x)}$ এর মাত্রা নির্ণয় কর।

(খ) $3x + 2$, $P(x)$ এর একটি উৎপাদক হলে b এর মান নির্ণয় কর।

(গ) $\frac{8x^2 - 2}{Q(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

(ক) এর সমাধান:

আমরা জানি,

$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ একটি বহুপদী হলে,

$F(x)$ এর মাত্রা = $P(x)$ এর মাত্রা − $Q(x)$ এর মাত্রা

এখানে, $\frac{P(x)}{Q(x)}$ এর মাত্রা = $Q(x)$ এর মাত্রা − $P(x)$ এর মাত্রা

$= 4 - 3$ [$\because$ $Q(x)$ এর সর্বোচ্চ ঘাত 4 $P(x)$ এর সর্বোচ্চ ঘাত 3] $= 1$

(খ) এর সমাধান:

দেওয়া আছে,

$P(x) = 18x^3 - bx^2 - x - 2$

$(3x + 2)$, $P(x)$ এর একটি উৎপাদক হলে, $P\left(\frac{-2}{3}\right) = 0$ হবে,

এখন, $P\left(\frac{-2}{3}\right) = 0$

বা, $18\left(-\frac{2}{3}\right)^3 - b\left(-\frac{2}{3}\right)^2 - \left(-\frac{2}{3}\right) - 2 = 0$

বা, $18.\left(\frac{-8}{27}\right) - b.\left(\frac{4}{9}\right) + \frac{2}{3} - 2 = 0$

বা, $-\frac{144}{27} - \frac{4b}{9} + \frac{2}{3} - 2 = 0$

বা, $\frac{4b}{9} = \frac{2}{3} - \frac{144}{27} - 2$

বা, $\frac{4b}{9} = \frac{2}{3} - \frac{16}{3} - 2$

বা, $\frac{4b}{9} = \frac{2 - 16 - 6}{3}$

বা, $\frac{4b}{9} = \frac{-20}{3}$

বা, $b = -\frac{20}{3} \times \frac{9}{4}$

$\therefore b = -15$

(গ) এর সমাধান:

দেওয়া আছে,

$$\begin{aligned} Q(x) &= 4x^4 + 12x^3 + 7x^2 - 3x - 2 \\ &= 4x^4 + 4x^3 + 8x^3 + 8x^2 - x^2 - x - 2x - 2 \\ &= 4x^3(x+1) + 8x^2(x+1) - x(x+1) - 2(x+1) \\ &= (x+1)(4x^3 - 8x^2 - x - 2) \\ &= (x+1)(4x^3 + 8x^2 - x - 2) \\ &= (x+1)\{4x^2(x+2) - 1(x+2)\} \\ &= (x+1)(x+2)(4x^2 - 1) \\ &= (x+1)(x+2)(2x+1)(2x-1) \end{aligned}$$

মনে করি,

$$\frac{8x^2 - 2}{(x+1)(x+2)(2x+1)(2x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{2x+1} + \frac{D}{2x-1}$$

(i) এর উভয় পক্ষকে $(x+1)(x+2)(2x+1)(2x-1)$ দ্বারা গুণ ক

$8x^2 - 1 = A(x+2)(2x+1)(2x-1) + B(x+1)(2x+1)(2x-1)$
$+ C(x+1)(x+2)(2x-1) + D(x+1)(x+2)(2x+1)$

(ii) নং এর উভয়পক্ষে $x = 2$ বসিয়ে পাই,

$8.(-2)^2 - 2 = 0 + B.(-1).(-3).(-5) + 0 + 0$

বা, $30 = -15B$

$\therefore B = 2$

(ii) নং এর উভয়পক্ষে $x = -1$ বসিয়ে পাই,

$8.(-1)^2 - 2 = A.(1).(-1).(-2) + 0 + 0 + 0$

বা, $2A = 6$

$\therefore A = 3$

(ii) এর উভয় পক্ষে, $x = \frac{1}{2}$ বসিয়ে পাই,

$8.\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 = 0 + 0 + 0 + D \times \frac{1}{2} \times \frac{5}{2} \times 2$

বা, $0 = \frac{15D}{2}$

$\therefore D = 0$

(ii) এর উভয় পক্ষে $x = \frac{1}{2}$ বসিয়ে পাই,

$8.\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 = 0 + 0 + C.\left(-\frac{1}{2}\right).\left(\frac{3}{2}\right)(-2)$

বা, $0 = \frac{3}{2}C$

$\therefore C = 0$

এখন, A, B, C এবং D এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$\frac{8x^2 - 2}{Q(x)} = \frac{3}{x+1} - \frac{2}{x+2} + \frac{0}{2x+1} + \frac{0}{2x-1}$

$\therefore \frac{8x^2 - 2}{(x+1)(x+2)(2x+1)(2x-1)} = \frac{3}{x+1} + \frac{2}{x+2}$ (A

১৫। চলক x এর দুইটি বহুপদী $P(x) = 7x^2 - 3x + 4x^4 - a + 1$

$Q(x) = 6x^3 + x^2 - 9x + 26$

ক. $P(x)$ কে আদর্শরূপে লিখে এর মুখ্যসহগ নির্ণয় কর।

খ. $P(x)$ এর একটি উৎপাদক $(x + 2)$ হলে a এর মান নির্ণয় কর।

গ. দেখাও যে, $P(x)$ এবং $Q(x)$ এর একটি সাধারণ উৎপাদক বিদ্যমান

(ক) এর সমাধান:

দেওয়া আছে, $P(x) = 7x^2 - 3x + 4x^4 - a + 12x^3$

x চলকের বহুপদীকে সাধারণত x এর ঘাতের অধঃক্রমে অর্থাৎ বৃ
করে ক্রমে ক্রমে ধ্রুব পদ পর্যন্ত সাজালে বহুপদীর আদর্শরূপ পাওয়া য

$\therefore$ বহুপদীটির আদর্শরূপ:

$P(x) = 4x^4 + 12x^3 + 7x^2 - 3x - a$

বহুপদীটিতে গরিষ্ঠ মাত্রাযুক্ত পদ বা মুখ্যপদ হলো $4x^4$ এর মুখ্য

মুখ্যসহগ = 4

বাস্তব জীবনে এ অধ্যায়ের প্রয়োগ

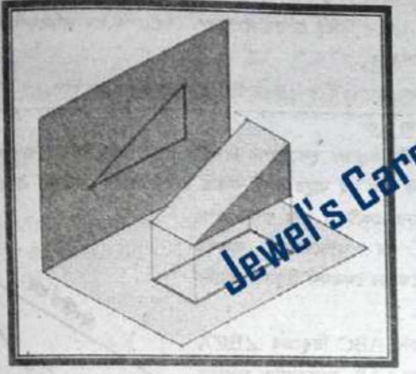
জ্যামিতিক বিষয়াবলি সম্পর্কিত **"বাস্তব জীবনে এ অধ্যায়ের প্রয়োগ"** শীর্ষক অংশটি চতুর্থ অধ্যায়ের শেষে একত্রে উল্লেখ করা হয়েছে বিধায় এ অধ্যায়ে আর আলাদাভাবে উল্লেখ করা হলো না। **[রয়েল গাইড পৃষ্ঠা: ২৯৮-৩০০]**

"If everyone is moving forward together, then success takes care of itself".

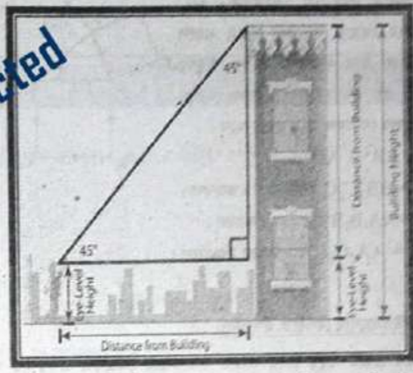
–Henry Ford

৩ জ্যামিতি [Geometry]

অনুশীলনী-৩.১



চিত্র-১: অভিক্ষেপ



চিত্র-২: সমকোণী ত্রিভুজের সাহায্যে উচ্চতা নির্ণয়

ভূমিকা [Introduction]

Euclid

জ্যামিতি বা '*Geometry*' গণিত শাস্ত্রের একটি প্রাচীন শাখা। '*Geometry*' শব্দটি গ্রীক *Geo*-ভূমি (earth) ও *metrein*-পরিমাপ (measure) শব্দের সমন্বয়ে তৈরি। তাই 'জ্যামিতি' শব্দের অর্থ 'ভূমি পরিমাপ'। কৃষিভিত্তিক সভ্যতার যুগে ভূমি পরিমাপের প্রয়োজনেই জ্যামিতির সৃষ্টি হয়েছিল। প্রাচীন মিশরে আনুমানিক চার হাজার বছর আগেই ভূমি জরিপের কাজে জ্যামিতিক ধ্যান-ধারণা ব্যবহার করা হয়। প্রাচীন ব্যাবিলন, ভারত এবং চীনেও বিভিন্ন ব্যবহারিক কাজে জ্যামিতির প্রয়োগের নিদর্শন রয়েছে। সিন্ধু সভ্যতার হরপ্পা ও মহেঞ্জোদারো খননে সুপরিকল্পিত নগরীর অস্তিত্বের প্রমাণ মেলে। এ শহরের রাস্তাগুলো ছিল সমান্তরাল এবং ভূগর্ভস্থ নিষ্কাশন ব্যবস্থা ছিল উন্নত। বৈদিক যুগে বেদি তৈরীতে নির্দিষ্ট জ্যামিতিক আকার ও ক্ষেত্রফল মেনে চলা হতো।

গ্রিক গণিতবিদ থেলিসকে প্রথম জ্যামিতিক প্রমাণের কৃতিত্ব দেওয়া হয়। তিনি যুক্তিমূলক প্রমাণ দেন যে, ব্যাস দ্বারা বৃত্ত সমদ্বিখণ্ডিত হয়। থেলিসের শিষ্য পিথাগোরাস জ্যামিতিক তত্ত্বের বিস্তৃতি ঘটান। আনুমানিক খ্রিস্টপূর্ব ৩০০ অব্দে গ্রীক পণ্ডিত ইউক্লিড জ্যামিতির বিভিন্ন সূত্রকে বিধিবদ্ধভাবে সুবিন্যস্ত করে তাঁর বিখ্যাত গ্রন্থ "Elements" রচনা করেন। তের খণ্ডে প্রকাশিত সম্পূর্ণ কালোত্তীর্ণ এই "ইলিমেন্টস" গ্রন্থটিই আধুনিক জ্যামিতির ভিত্তিস্বরূপ।

বোর্ড প্রশ্নাবলির বিশ্লেষণ [Board Questions Analysis]

এই অধ্যায় থেকে বিভিন্ন বোর্ডে বিগত দু'বছরের এসএসসি পরীক্ষায় মোট ৭টি সৃজনশীল প্রশ্ন ও ১৪টি বহুনির্বাচনি প্রশ্ন এসেছে। নিচের 'Board Analysis' অংশে এই অধ্যায় থেকে কোন সালে কোন বোর্ডে কতটি প্রশ্ন হয়েছে তা দেওয়া আছে।

☑ সৃজনশীল প্রশ্ন:

বোর্ড / সাল	ঢাকা	রাজশাহী	কুমিল্লা	যশোর	চট্টগ্রাম	বরিশাল	সিলেট	দিনাজপুর
২০১৬	১	–	–	–	১	–	–	–
২০১৫	১	–	১	১	১	–	১	–

☑ বহুনির্বাচনি প্রশ্ন:

বোর্ড / সাল	ঢাকা	রাজশাহী	কুমিল্লা	যশোর	চট্টগ্রাম	বরিশাল	সিলেট	দিনাজপুর
২০১৬	–	১	–	–	১	১	–	১
২০১৫	৩	১	১	১	–	১	১	২

মূল শব্দাবলি [Key Words]

লম্ব অভিক্ষেপ (*Orthogonal projection*), স্থূলকোণী ত্রিভুজ (*Obtuse angled triangle*), নববিন্দুবৃত্ত (*Nine point circle*), পূরক কোণ (*Comoplementary angle*), সম্পূরক কোণ (*Supplementary angle*), সদৃশকোণী ত্রিভুজ (*Equiangular triangle*), মধ্যমা (*Median*), সদৃশ ত্রিভুজ (*Similar triangle*), পরিকেন্দ্র (*Pericentre*), ভরকেন্দ্র (*Centre of mass*), লম্ববিন্দু (*Orthocentre*).

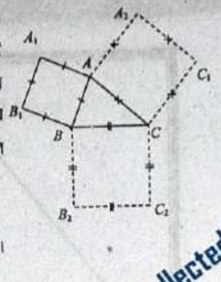
এ অধ্যায়ের আলোচ্যসূচি

- পিথাগোরাসের উপপাদ্য
- ত্রিভুজের সদৃশতা
- এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য
- ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র
- ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র
- নববিন্দুবৃত্ত
- টলেমির উপপাদ্য
- ত্রিভুজের লম্ববিন্দু
- ব্রহ্মগুপ্তের উপপাদ্য

প্রাথমিক আলোচনা

পিথাগোরাসের উপপাদ্য:

একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান।



চিত্রে ABC ত্রিভুজটি একটি সমকোণী ত্রিভুজ। $\angle BAC$ সমকোন এবং BC অতিভুজ। BC অতিভুজের উপর কোনো বর্গক্ষেত্র অঙ্কন করলে তার যে ক্ষেত্রফল হবে সমকোণ সংলগ্ন বাহুদ্বয় AB ও AC এর উপর বর্গক্ষেত্র অঙ্কন করলে তাদের ক্ষেত্রফলের যোগফল তার সমান হবে।

অর্থাৎ $BC^2 = AB^2 + AC^2$

এখানে $BC^2 = BB_2C_2C$ বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।

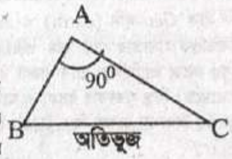
$AB^2 = AA_1B_1B$ বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।

$AC^2 = AA_2C_1C$ বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।

পীথাগোরাসের উপপাদ্যের বিপরীত উপপাদ্য:

কোনো ত্রিভুজের একটি বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান হলে শেষোক্ত বাহুদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোনটি সমকোণ হবে।

ΔABC এর বাহু অতিভুজ এবং অপর দুই বাহুযথাক্রমে AB ও AC.



BC বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অপর দুই বাহু যথাক্রমে AB ও AC বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান।

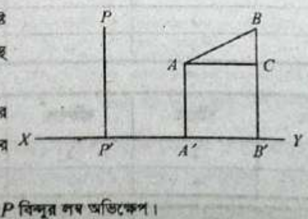
অর্থাৎ, $BC^2 = AB^2 + AC^2$

সুতরাং, $\angle BAC$ একটি সমকোণ।

লম্ব অভিক্ষেপ (*Orthogonal Projection*):

(ক) **বিন্দুর লম্ব অভিক্ষেপ:** কোনো নির্দিষ্ট সরলরেখার ওপর কোনো বিন্দুর লম্ব অভিক্ষেপ বলতে সেই বিন্দু থেকে উক্ত নির্দিষ্ট রেখার ওপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুকে বোঝায়।

মনে করি, XY একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা এবং P এর বহিস্থ যেকোনো বিন্দু।



P বিন্দু থেকে XY রেখার ওপর অঙ্কিত লম্ব PP' এবং লম্ব PP' এর পাদবিন্দু P'।

সুতরাং, P' বিন্দু XY রেখার ওপর P বিন্দুর লম্ব অভিক্ষেপ।

রেখাংশের লম্ব অভিক্ষেপ: ধরি, AB রেখাংশের প্রান্ত বিন্দুদ্বয় A ও B। এখন A ও B বিন্দু থেকে XY রেখার ওপর অঙ্কিত লম্ব যথাক্রমে AA' ও BB'। AA' লম্বের পাদবিন্দু A' এবং BB' লম্বের পাদবিন্দু B'। এই $A'B'$ রেখাংশই হচ্ছে XY রেখার ওপর AB রেখাংশের লম্ব অভিক্ষেপ।

সুতরাং, দেখা যাচ্ছে লম্ব অঙ্কনের মাধ্যমে অভিক্ষেপ নির্ণয় করা হয়। তাই $A'B'$ রেখাংশকে XY রেখার ওপর AB রেখাংশের লম্ব অভিক্ষেপ (*Orthogonal Projection*) বলা হয়।

লক্ষণীয়:

১। কোনো রেখার ওপর এর বহিঃস্থ কোনো বিন্দু থেকে অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুই ঐ বিন্দুর লম্ব অভিক্ষেপ।

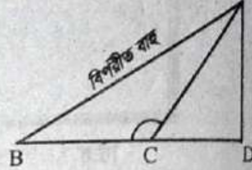
২। কোনো রেখার ওপর লম্ব রেখার অভিক্ষেপ একটি বিন্দু। ফলে লম্ব অভিক্ষেপের দৈর্ঘ্য শূন্য।

৩। কোনো নির্দিষ্ট রেখার সমান্তরাল রেখাংশের লম্ব অভিক্ষেপ ঐ রেখাংশের সমান হবে।

দ্রষ্টব্য: উপরের চিত্রে AB রেখাংশ XY এর সমান্তরাল হলে $AB = A'B'$ হবে।

উপপাদ্য ৩.৩:

স্থূলকোণী ত্রিভুজের স্থূলকোণের বিপরীত বাহুর ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র ঐ কোণের সন্নিহিত অন্য দুই বাহুর ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের ক্ষেত্রফল এবং ঐ দুই বাহুর যেকোনো একটি ও তার ওপর অপর বাহুর লম্ব অভিক্ষেপের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল দ্বিগুণের সমষ্টির সমান।



মনে করি ABC ত্রিভুজের $\angle BCA$ স্থূলকোণ, AB স্থূলকোণের সন্নিহিত বাহুদ্বয় যথাক্রমে BC ও AC.

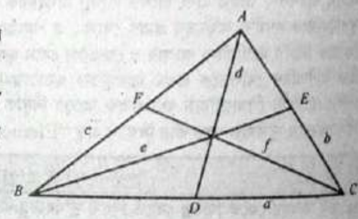
BC বাহুর বর্ধিতাংশের ওপর AC বাহুর লম্ব অভিক্ষেপ CD হলে, প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC.CD$.

এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য অনুসারে ত্রিভুজের বাহু ও মধ্যমার সম্পর্ক নির্ণয়:

ΔABC-এর

(i) BC, CA ও AB বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে a, b ও c

(ii) মধ্যমাত্রয় AD, BE ও CF এর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে d, e ও f



এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য অনুসারে, $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$ হতে পাওয়া যায় $3(a^2 + b^2 + c^2) = 4(d^2 + e^2 + f^2)$

এ থেকে বলা যায়, কোনো ত্রিভুজের তিনটি বাহুর ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রসমূহের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির তিনগুণ উক্ত ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয়ের ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রসমূহের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির চারগুণের সমান।

আবার,

ΔABC-সমকোণী হলে অর্থাৎ $\angle C = 90°$ এবং AB অতিভুজ হলে পাই,

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = c^2 + c^2$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3}(d^2 + e^2 + f^2) = 2c^2$$

$$\therefore 2(d^2 + e^2 + f^2) = 3c^2$$

সুতরাং, বলা যায় সমকোণী ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয়ের ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রসমূহের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির দ্বিগুণ অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের তিনগুণের সমান।

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৩.১

১। ΔABC এর $\angle B = 60°$ হলে প্রমাণ কর যে, $AC^2 = AB^2 + BC^2 - AB.BC$

২। ΔABC এর $\angle B = 120°$ হলে প্রমাণ কর যে, $AC^2 = AB^2 + BC^2 + AB.BC$

৩। ΔABC এর $\angle C = 90°$ এবং BC এর মধ্যবিন্দু D। প্রমাণ কর যে, $AC^2 = AD^2 + 3BD^2$

৪। ΔABC এ AD, BC বাহুর ওপর লম্ব এবং BE, AC এর ওপর লম্ব। দেখাও যে, $BC.CD = AC.CE$

৫। ΔABC এর BC বাহু P ও Q বিন্দুতে তিনটি সমান অংশে বিভক্ত হয়েছে। প্রমাণ কর যে, $AB^2 + AC^2 = AP^2 + AQ^2 + 4PQ^2$

৬। ΔABC এর $AB = AC$। তুমি BC এর ওপর P যেকোনো বিন্দু। প্রমাণ কর যে, $AB^2 - AP^2 = BP.PC$

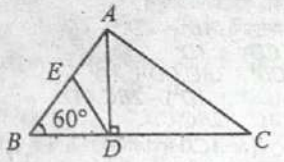
৭। ΔABC এর মধ্যমাত্রয় G বিন্দুতে মিলিত হলে প্রমাণ কর যে, $AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3(GA^2 + GB^2 + GC^2)$

অনুশীলনী-৩.১ এর সমাধান

১। ΔABC এর $\angle B = 60°$ হলে প্রমাণ কর যে, $AC^2 = AB^2 + BC^2 - AB.BC$. (VI)

সমাধান:

বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, ΔABC এর $\angle B = 60°$। প্রমাণ করতে হবে যে, $AC^2 = AB^2 + BC^2 - AB.BC$।



অঙ্কন: A হতে BC-এর উপর AD লম্ব আঁকি। BA হতে BD-এর সমান করে BE অংশ কেটে নিই। E, D যোগ করি।

প্রমাণ: ΔBDE একটি সমবাহু ত্রিভুজ।

[$\because$ দুইবাহু সমান ও উহাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ $60°$]

এবার, ΔABD-এ $\angle ADB = 90°$

$\therefore \angle ADE = \angle ADB - \angle BDE$

$= 90° - 60°$ [$\angle BDE = 60°$;

$= 30°$ $\quad$ ΔBDE সমবাহু ত্রিভুজ বলে।]

এবং $\angle BAD = 180° - 90° - 60° = 180° - 150° = 30°$

[$\because \Delta ABD$-এ $\angle ABD + \angle BDA + \angle BAD = 180°$]

আবার, $\angle ADE = \angle EAD$ বলে, $AE = DE$

$\therefore AE = DE = BE = BD$ $\quad$ [$\because \Delta BDE$ সমবাহু ত্রিভুজ]

অর্থাৎ, $AB = AE + BE = BD + BD = 2BD$

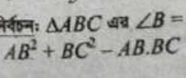
এখন, ΔABC-এ $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BC.BD$

[BD, AC এর লম্ব অভিক্ষেপ]

$= AB^2 + BC^2 - AB.BC$ [$\because 2BD = AB$]

$\therefore AC^2 = AB^2 + BC^2 - AB.BC$ (প্রমাণিত)

বিকল্প সমাধান:



বিশেষ নির্বচন: ΔABC এর $\angle B = 60°$ হলে প্রমাণ করতে হবে যে, $AC^2 = AB^2 + BC^2 - AB.BC$

অঙ্কন: $AD \perp BC$ টানি

প্রমাণ: সমকোণী ΔABD-এ $AB^2 = AD^2 + BD^2$

$\Rightarrow AD^2 = AB^2 - BD^2$ ... ... (i)

আবার, সমকোণী ΔACD-এ, $AC^2 = AD^2 + CD^2$

$\Rightarrow AC^2 = AB^2 - BD^2 + CD^2$ [(i) নং হতে]

$\Rightarrow AC^2 = AB^2 - BD^2 + (BC - BD)^2$

$\Rightarrow AC^2 = AB^2 - BD^2 + BC^2 - 2BC.BD + BD^2$

$\Rightarrow AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BC.BD$ ... ... (ii)

এখন ত্রিভুজ ABD-এ $\cos\angle ABD = \dfrac{BD}{AB}$

$\Rightarrow \cos 60° = \dfrac{BD}{AB}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{BD}{AB}$ $\quad \therefore BD = \dfrac{1}{2}AB$

$\therefore$ (ii) নং সমীকরণ হতে পাই,

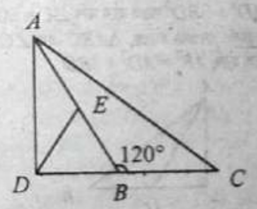
$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2.BC.\dfrac{1}{2}.AB$

$\therefore AC^2 = AB^2 + BC^2 - AB.BC$ (প্রমাণিত)

২। ΔABC এর $\angle B = 120°$ হলে প্রমাণ কর যে, $AC^2 = AB^2 + BC^2 + AB.BC$. (VVI)

সমাধান:

বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, ΔABC এর $\angle B = 120°$। প্রমাণ করতে হবে যে, $AC^2 = AB^2 + BC^2 + AB.BC$।



অঙ্কন: A বিন্দু থেকে BC-এর বর্ধিতাংশের উপর AD লম্ব টানি। AB হতে BD-এর সমান করে BE অংশ কাটি। D, E যোগ করি।

প্রমাণ: ΔBDE হতে পাই। $BD = BE$ এবং এদের অন্তর্ভুক্ত কোণ $\angle DBE = 180° - 120° = 60°$

$\therefore \Delta BDE$ সমবাহু ত্রিভুজ

[$\because$ ত্রিভুজটির দুই বাহু সমান ও তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ $60°$]

এখানে, $\angle ADE = 90° - 60° = 30°$

এবং $\angle DAB = 180° - 90° - 60° = 30°$

$\therefore \angle ADE = \angle DAB$

ΔADE-এ $\angle ADE = \angle DAE$ বলে, $AE = DE$

$\therefore AE = DE = BE = BD$

তাহলে, $AB = AE + BE = BD + BD = 2BD$

এখন ΔABC এ

$AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BC.BD$ [$\because BD, AC$ এর লম্ব অভিক্ষেপ]

সুতরাং $AC^2 = AB^2 + BC^2 + AB.BC$ [$\because 2BD = AB$] (প্রমাণিত)

বিকল্প সমাধান:

বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, ΔABC-এর $\angle B = 120°$। প্রমাণ করতে হবে যে, $AC^2 = AB^2 + BC^2 + AB.BC$

অঙ্কন: CB এর বর্ধিতাংশের ওপর AD লম্ব টানি।

প্রমাণ: ΔABD সমকোণী ত্রিভুজে

$AB^2 = AD^2 + BD^2$ ... ... (i)

আবার, ΔACD সমকোণী ত্রিভুজে $AC^2 = AD^2 + CD^2$

$\Rightarrow AC^2 = AD^2 + (BC + BD)^2$

$\Rightarrow AC^2 = AD^2 + BC^2 + BD^2 + 2BC.BD$

$\Rightarrow AC^2 = (AD^2 + BD^2) + BC^2 + 2BC.BD$

$\Rightarrow AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BC.BD$ ... ... (ii)

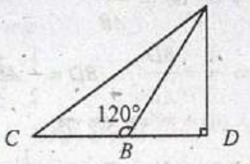
এখন, $\angle ABC$ ও $\angle ABD$ একই সরলরেখার উপর অবস্থিত সন্নিহিত কোণ বিধায়,

$\angle ABC + \angle ABD = 180°$

$\Rightarrow \angle ABD = 180° - \angle ABC = 180° - 120° = 60°$ [$\because \angle ABC = 120°$]

$\therefore$ সমকোণী ত্রিভুজ ABD-এ

$\cos \angle ABD = \dfrac{BD}{AB}$



$\Rightarrow \cos 60° = \dfrac{BD}{AB}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{BD}{AB}$

$\therefore BD = \dfrac{1}{2} AB$

(ii) নং সমীকরণ হতে পাই,

$AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BC.BD$

$= AB^2 + BC^2 + 2BC.\dfrac{1}{2}.AB$

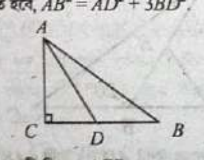
$\therefore AC^2 = AB^2 + BC^2 + AB.BC$ (প্রমাণিত)

৩। ΔABC এর $\angle C = 90°$ এবং BC এর মধ্যবিন্দু D। প্রমাণ কর যে, $AB^2 = AD^2 + 3BD^2$.

সমাধান:

$AB^2 = AD^2 + 3BD^2$ সম্ভব হবে যদি $\angle C = 90°$ হয়। যার প্রমাণ নিম্নরূপ:

বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, ΔABC এর $\angle C = 90°$। D, BC-এর মধ্যবিন্দু। প্রমাণ করতে হবে, $AB^2 = AD^2 + 3BD^2$.



প্রমাণ: সমকোণী ত্রিভুজ ACD-এ,

$AD^2 = AC^2 + CD^2$ [পীথাগোরাসের সূত্রানুযায়ী]

বা, $AC^2 = AD^2 - CD^2 = AD^2 - BD^2$ [$\because CD = BD$]

ΔABC-এ AD মধ্যমা হওয়ায়,

$AB^2 + AC^2 = 2BD^2 + 2AD^2$ [এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য]

বা, $AB^2 = 2BD^2 + 2AD^2 - AC^2$

বা, $AB^2 = 2BD^2 + 2AD^2 - (AD^2 - BD^2)$ [$\because AC^2 = AD^2 - BD^2$]

সুতরাং $AB^2 = AD^2 + 3BD^2$. (প্রমাণিত)

বিকল্প প্রমাণ:

বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, ΔABC এর $\angle C = 90°$ এবং D, BC এর মধ্যবিন্দু। প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 = AD^2 + 3BD^2$

প্রমাণ: ΔABC এর অতিভুজ $= AB$.

$\therefore$ পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে,

$AB^2 = AC^2 + BC^2$

বা, $AB^2 = AC^2 + (BD + CD)^2$ [$\because BC = BD + CD$]

বা, $AB^2 = AC^2 + BD^2 + 2BD.CD + CD^2$

বা, $AB^2 = (AC^2 + CD^2) + BD^2 + 2BD.BD$

[$\because D$, BC – এর মধ্যবিন্দু হওয়ায় $BD = CD$]

বা, $AB^2 = (AC^2 + CD^2) + BD^2 + 2BD^2 = AD^2 + 3BD^2$

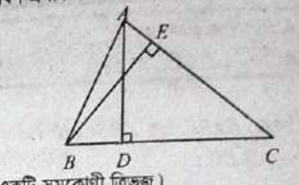
[$\because \Delta ACD$ – এর $\angle C$ সমকোণ হওয়ায় পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে, $AC^2 + CD^2 = AD^2$]

$\therefore AB^2 = AD^2 + 3BD^2$ (প্রমাণিত)

৪। ΔABC এ AD, BC বাহুর ওপর লম্ব এবং BE, AC এর ওপর লম্ব। দেখাও যে, $BC.CD = AC.CE$. (VI)

সমাধান:

বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, ΔABC-এর AD, BC-এর ওপর লম্ব এবং BE, AC-এর ওপর লম্ব। প্রমাণ করতে হবে, $BC.CD = AC.CE$.



প্রমাণ: ΔABD একটি সমকোণী ত্রিভুজ।

পীথাগোরাসের সূত্র অনুযায়ী, $AB^2 = BD^2 + AD^2$

$= (BC - CD)^2 + AD^2$

$= BC^2 + CD^2 - 2BC.CD + AD^2$

$= BC^2 + (CD^2 + AD^2) - 2BC.CD$

$= BC^2 + AC^2 - 2BC.CD$ ... ... (i)

[$\because ACD$ সমকোণী ত্রিভুজ তাই, $AC^2 = CD^2 + AD^2$]

আবার, ΔABE সমকোণী ত্রিভুজ।

$\therefore AB^2 = AE^2 + BE^2$

বা, $AB^2 = (CA - CE)^2 + BE^2$

বা, $AB^2 = CA^2 + CE^2 - 2CA.CE + BE^2$

বা, $AB^2 = AC^2 + (CE^2 + BE^2) - 2AC.CE$ [$\because AC = CA$]

বা, $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC.CE$ ... ... (ii)

[$\because BCE$ সমকোণী ত্রিভুজ তাই, $BC^2 = CE^2 + BE^2$]

(i) ও (ii) নং সমীকরণ হতে পাই,

$BC^2 + AC^2 - 2BC.CD = AC^2 + BC^2 - 2AC.CE$

বা, $-2BC.CD = -2AC.CE$

বা, $BC.CD = AC.CE$ [-2 দ্বারা ভাগ করে]

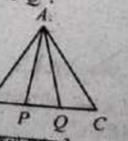
$\therefore BC.CD = AC.CE.$ (দেখানো হলো)

৫। ΔABC এর BC বাহু P ও Q বিন্দুতে তিনটি সমান অংশে বিভক্ত হয়েছে। প্রমাণ কর যে, $AB^2 + AC^2 = AP^2 + AQ^2 + 4PQ^2$.

[সংকেত: $BP = PQ = QC$; ΔABQ এর মধ্যমা AP,
$AB^2 + AQ^2 = 2.(BP^2 + AP^2) = 2PQ^2 + 2AP^2$,
ΔAPC এর মধ্যমা AQ,
$AP^2 + AC^2 = 2PQ^2 + 2AQ^2$] (VI)

সমাধান:

বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, ABC ত্রিভুজের BC বাহু P ও Q বিন্দুতে তিনটি সমান অংশে বিভক্ত হয়েছে। প্রমাণ করতে হবে, $AB^2 + AC^2 = AP^2 + AQ^2 + 4PQ^2$.



প্রমাণ: ΔABQ-এ $BP = PQ$[অঙ্কনানুসারে]

তাহলে, AP, ΔABQ-এর মধ্যমা যা BQ-কে P বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য অনুসারে

$\therefore AB^2 + AQ^2 = 2AP^2 + 2PQ^2$ ... ... (i)

আবার, AQ, ΔAPC-এর মধ্যমা যা PC-কে Q বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য অনুসারে

$\therefore AC^2 + AP^2 = 2AQ^2 + 2PQ^2$ ... ... (ii)

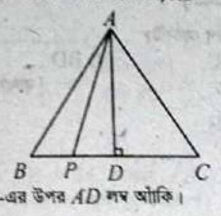
(i) ও (ii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

$AB^2 + AC^2 + AQ^2 + AP^2 = 2AP^2 + 2AQ^2 + 4PQ^2$

সুতরাং $AB^2 + AC^2 = AP^2 + AQ^2 + 4PQ^2$. (প্রমাণিত)

৬। ΔABC এর $AB = AC$। ভূমি BC এর ওপর P যেকোনো বিন্দু। প্রমাণ কর যে, $AB^2 - AP^2 = BP.PC$
[সংকেত: BC এর ওপর AD লম্ব আঁক, তাহলে $AB^2 = BD^2 + AD^2$ এবং $AP^2 = PD^2 + AD^2$] (VVI)

সমাধান:
বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি BC এর উপর P যেকোনো বিন্দু। A, P যোগ করি। দেখাতে হবে যে, $AB^2 - AP^2 = BP.PC$

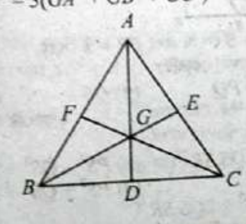


অঙ্কন: A হতে ভূমি BC-এর উপর AD লম্ব আঁকি।

প্রমাণ: ΔAPD সমকোণী ত্রিভুজে,
$AP^2 = AD^2 + PD^2$ ... ... (i) [পীথাগোরাসের সূত্র অনুযায়ী]
আবার, ΔABD সমকোণী ত্রিভুজে,
$AB^2 = AD^2 + BD^2$ ... ... (ii)
(ii) নং সমীকরণ হতে (i) নং সমীকরণ বিয়োগ করে পাই,
$AB^2 - AP^2 = AD^2 + BD^2 - AD^2 - PD^2$
বা, $AB^2 - AP^2 = BD^2 - PD^2$
বা, $AB^2 - AP^2 = (BD + PD)(BD - PD)$
বা, $AB^2 - AP^2 = (CD + PD).BP$
[$\because BD = CD$ এবং $BD = BP + PD \Rightarrow BD - PD = BP$]
বা, $AB^2 - AP^2 = BP.PC$ (দেখানো হলো)

৭। ΔABC এর মধ্যমাত্রয় G বিন্দুতে মিলিত হলে প্রমাণ কর যে,
$AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3(GA^2 + GB^2 + GC^2)$ (VVI)
[সংকেত: এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্যের আলোকে গৃহীত সিদ্ধান্ত সমূহ দেখতে হবে অর্থাৎ, ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য ও মধ্যমার সম্পর্ক দেখতে হবে]

সমাধান:
বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, ABC ত্রিভুজের AD, BE ও CF মধ্যমাত্রয় G বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। প্রমাণ করতে হবে যে,
$AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3(GA^2 + GB^2 + GC^2)$



প্রমাণ: ΔABC-এ
$AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + 2CD^2$ [এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য]

বা, $AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + 2\left(\frac{1}{2}BC\right)^2$

[$\because D$, BC এর মধ্যমা তাই $CD = BD = \frac{1}{2}BC$]

বা, $AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + 2.\frac{1}{4}BC^2$

বা, $AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + \frac{1}{2}BC^2$

বা, $2AD^2 = AB^2 + AC^2 - \frac{1}{2}BC^2$

বা, $AD^2 = \frac{2AB^2 + 2AC^2 - BC^2}{4}$

অনুরূপভাবে, $BE^2 = \frac{2AB^2 + 2BC^2 - AC^2}{4}$

এবং $CF^2 = \frac{2BC^2 + 2AC^2 - AB^2}{4}$

$\therefore AD^2 + BE^2 + CF^2$
$= \frac{2AB^2 + 2AC^2 - BC^2}{4} + \frac{2AB^2 + 2BC^2 - AC^2}{4} + \frac{2BC^2 + 2AC^2 - AB^2}{4}$

বা, $4(AD^2 + BE^2 + CF^2) = 3(AB^2 + BC^2 + AC^2)$ ... ... (1)

এখন, $AG = \frac{2}{3}AD$ [$\because G$ বিন্দুতে মধ্যমাত্রয় $2:1$ অনুপাতে বিভক্ত হয়]

বা, $3AG = 2AD$
$\therefore 9AG^2 = 4AD^2$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করি]
অনুরূপভাবে, $9GB^2 = 4BE^2$ ও $9GC^2 = 4CF^2$
(1) নং সমীকরণে এই মান বসিয়ে পাই,
$3(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 9(GA^2 + GB^2 + GC^2)$
$\therefore AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3(GA^2 + GB^2 + GC^2)$ (প্রমাণিত)

বিকল্প সমাধান:
বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, ΔABC-এর মধ্যমাত্রয় G বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। প্রমাণ করতে হবে যে,
$AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3(GA^2 + GB^2 + GC^2)$

প্রমাণ: ΔABC-এর AD, BE ও CF তিনটি মধ্যমা। এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য অনুযায়ী আমরা জানি,
$AB^2 + CA^2 = 2(AD^2 + BD^2)$ ... ... (i)
$AB^2 + BC^2 = 2(BE^2 + CE^2)$ ... ... (ii)
এবং $BC^2 + CA^2 = 2(CF^2 + BF^2)$ ... ... (iii)
(i), (ii) ও (iii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,
$2AB^2 + 2BC^2 + 2CA^2 = 2AD^2 + 2BD^2 + 2BE^2 + 2CE^2 + 2CF^2 + 2BF^2$
বা, $2(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 2(AD^2 + BE^2 + CF^2) + 2(BD^2 + CE^2 + BF^2)$
বা, $4(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2) + 4(BD^2 + CE^2 + BF^2)$
[উভয়পক্ষকে 2 দ্বারা গুণ করে]
বা, $4(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2) + (2BD)^2 + (2CE)^2 + (2BF)^2$
বা, $4(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2) + BC^2 + CA^2 + AB^2$
[D, E, F যথাক্রমে BC, CA ও AB বাহুর মধ্যবিন্দু,
$\therefore 2BD = BC$, $2CE = CA$, $2BF = AB$]
বা, $3(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2)$ ... ... (iv)
আমরা জানি, ত্রিভুজের মধ্যমাগুলো সমপাত বিন্দুতে $2:1$ অনুপাতে বিভক্ত হয়।

$\therefore \frac{AG}{GD} = \frac{2}{1}$ বা, $\frac{GD}{AG} = \frac{1}{2}$

বা, $\frac{GD + AG}{AG} = \frac{1+2}{2}$ [যোজন করে]

বা, $\frac{AD}{AG} = \frac{3}{2}$ বা, $2AD = 3AG$ বা, $4AD^2 = 9AG^2$

অনুরূপভাবে, $4BE^2 = 9BG^2$ এবং $4CF^2 = 9CG^2$.
সুতরাং, (iv) নং সমীকরণ হতে পাই,
$3(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 9AG^2 + 9BG^2 + 9CG^2$
বা, $3(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 9(GA^2 + GB^2 + GC^2)$
$\therefore AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3(GA^2 + GB^2 + GC^2)$ (প্রমাণিত)

অনুশীলনী-৩.২

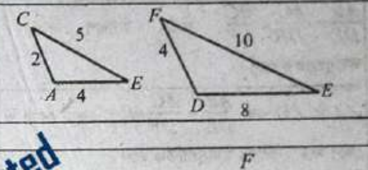
প্রাথমিক আলোচনা

সদৃশতা: সদৃশ চিত্র একই আকৃতির কিন্তু আকারে সমান নাও হতে পারে। সদৃশ চিত্রের আকার সমান হলে তা সর্বসম চিত্রে পরিণত হয়। সুতরাং সর্বসমতা সদৃশতার বিশেষ রূপ। দুইটি ত্রিভুজ বা বহুভুজ সদৃশ হলে,
(i) অনুরূপ কোণগুলো সমান
(ii) অনুরূপ বাহুগুলো সমানুপাতিক
সদৃশ চিত্রের বাহুগুলোর অনুপাত দ্বারা মূল চিত্রের তুলনায় অন্য চিত্রের বর্ধন বা সংকোচন বোঝায়।

ত্রিভুজের সদৃশতার শর্ত

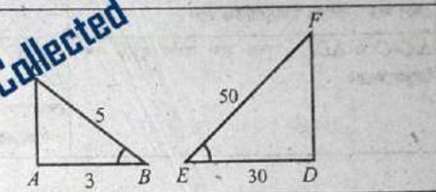
শর্ত- ১। (বাহু-বাহু-বাহু)

যদি একটি ত্রিভুজের তিন বাহু অপর একটি ত্রিভুজের তিন বাহুর সমানুপাতিক হয়, তবে ত্রিভুজ দুইটি সদৃশ।



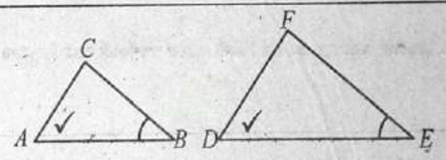
শর্ত- ২। (বাহু-কোণ-বাহু)

যদি দুইটি ত্রিভুজের একটির দুই বাহু যথাক্রমে অপরটির দুই বাহুর সমানুপাতিক হয় এবং বাহু দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ দুইটি পরস্পর সমান হয়, তবে ত্রিভুজ দুইটি সদৃশ।



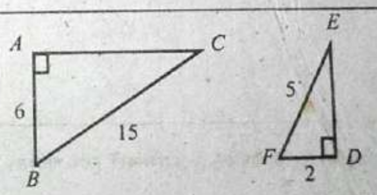
শর্ত- ৩। (কোণ-কোণ)

যদি দুইটি ত্রিভুজের একটির দুইটি কোণ যথাক্রমে অপরটির দুইটি কোণের সমান হয়, তবে ত্রিভুজ দুইটি সদৃশ।



শর্ত- ৪। (অতিভুজ-বাহু)

যদি দুইটি সমকোণী ত্রিভুজের একটির অতিভুজ ও একটি বাহু যথাক্রমে অপরটির অতিভুজ ও অনুরূপ বাহুর সমানুপাতিক হয়, তবে ত্রিভুজ দুইটি সদৃশ।



সদৃশ চতুর্ভুজ: দুইটি সদৃশ চতুর্ভুজের অনুরূপ কোণগুলো সমান এবং অনুরূপ বাহুগুলো সমানুপাতিক।
সুতরাং দুইটি চতুর্ভুজের অনুরূপ বাহুগুলো সমানুপাতিক হলে চতুর্ভুজ দুইটি সদৃশ আবার দুইটি সদৃশ চতুর্ভুজের
(ক) অনুরূপ কোণগুলো সমান এবং (খ) অনুরূপ বাহুগুলো সমানুপাতিক।

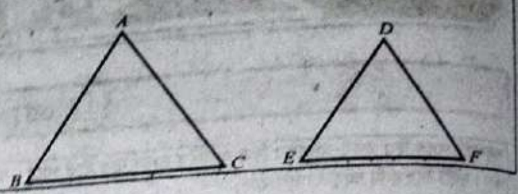
কোণের ক্ষেত্রে সদৃশতা: সমান সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট দুইটি বহুভুজের একটির কোণগুলো যদি ধারাবাহিকভাবে অপরটির কোণগুলোর সমান হয়, তবে বহুভুজ দুইটিকে সদৃশকোণী বহুভুজ বলা হয়।

জেনে রাখা ভালো:

১. দুইটি ত্রিভুজ সদৃশকোণী হলে সমান কোণ দুইটিকে অনুরূপ কোণ এবং অনুরূপ কোণের বিপরীত বাহু দুইটিকে অনুরূপ বাহু ধরা হয়। যেমন: শর্ত ৩ এর চিত্রে $\angle A$ এর অনুরূপ কোণ $\angle D$ এবং $\angle B$ এর অনুরূপ কোণ $\angle E$ আবার $\angle A$ ও $\angle D$ এর বিপরীতে বাহু যথাক্রমে BC ও EF অনুরূপ বাহু এবং $\angle B$ ও $\angle E$ এর বিপরীত বাহু যথাক্রমে AC ও DF অনুরূপ বাহু।

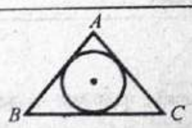
২. দুইটি ত্রিভুজের একটির তিনবাহু অপরটির তিন বাহুর সমানুপাতিক হলে আনুপাতিক বাহু দুইটিকে অনুরূপ বাহু এবং অনুরূপ বাহুর বিপরীত কোণ দুইটিকে অনুরূপ কোণ ধরা হয়। [শর্ত-১ এর চিত্র দ্রষ্টব্য]
ΔABC ও ΔDEF এর মধ্যে
i. অনুরূপ কোণগুলো হচ্ছে $\angle A$ ও $\angle D$, $\angle B$ ও $\angle E$, $\angle C$ ও $\angle F$
ii. অনুরূপ বাহুগুলো হচ্ছে AB ও DE; AC ও DF; BC ও EF

সদৃশকোণী ত্রিভুজের সূত্র:
ΔABC ও ΔDEF ত্রিভুজদ্বয়ের ক্ষেত্রে লক্ষ করি।

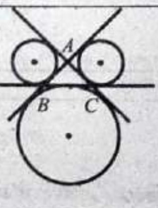


শর্ত	ফলাফল	মন্তব্য
$\angle A = \angle D, \angle B = \angle E$ ও $\angle C = \angle F$ অর্থাৎ অনুরূপ কোণগুলো সমান হলে।	$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$ অর্থাৎ অনুরূপ বাহুগুলো সমানুপাতিক হবে।	দুইটি ত্রিভুজ সদৃশকোণী হলে তাদের অনুরূপ বাহুগুলো সমানুপাতিক হবে। (উপপাদ্য- ৩.৬)
$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$ অর্থাৎ অনুরূপ বাহুগুলো সমানুপাতিক হলে।	$\angle A = \angle D, \angle B = \angle E$ ও $\angle C = \angle F$ অর্থাৎ অনুরূপ কোণগুলো সমান হবে।	দুইটি ত্রিভুজের বাহুগুলো সমানুপাতিক হলে অনুরূপ বাহুর বিপরীত কোণগুলো পরস্পর সমান হয়। (উপপাদ্য- ৩.৭)
$\angle A = \angle D$ এবং $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ অর্থাৎ একটি কোণ ও কোণ সংলগ্ন বাহুদ্বয় সমানুপাতিক হলে।	ΔABC ও ΔDEF সদৃশ অর্থাৎ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ হবে।	দুইটি ত্রিভুজের একটির এক কোণ অপরটির এক কোণের সমান এবং সমান কোণ সংলগ্ন বাহুগুলো সমানুপাতিক হলে ত্রিভুজ দুইটি সদৃশ হবে। (উপপাদ্য- ৩.৮)
ΔABC ও ΔDEF সদৃশ হলে অর্থাৎ দুইটি সদৃশ ত্রিভুজক্ষেত্রের	$\frac{\Delta ABC}{\Delta DEF} = \frac{AB^2}{DE^2} = \frac{AC^2}{DF^2} = \frac{BC^2}{EF^2}$ অর্থাৎ ত্রিভুজদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের অনুপাত ও অনুরূপ বাহুদ্বয়ের ওপর বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের অনুপাত সমান।	দুইটি সদৃশ ত্রিভুজক্ষেত্রে ক্ষেত্রফলদ্বয়ের অনুপাত এদের যেকোনো দুই অনুরূপ বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলদ্বয়ের অনুপাতের সমান। (উপপাদ্য- ৩.৯)

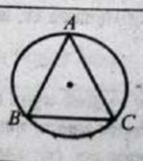
অন্তর্বৃত্ত: ত্রিভুজের অভ্যন্তরে অবস্থিত তিনটি বাহুকে স্পর্শকারী বৃত্তই ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্ত।



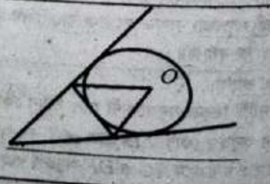
বহির্বৃত্ত: কোনো ত্রিভুজের বহির্বৃত্ত হলো ত্রিভুজের একটি বাহুকে এবং অপর দুই বাহুর বর্ধিতাংশকে স্পর্শকারী বৃত্ত।



পরিবৃত্ত: ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দু দিয়ে গমনকারী বৃত্তই পরিবৃত্ত।



বহির্বৃত্ত:
ত্রিভুজের একটি বাহু ও অপর দুই বাহুর বর্ধিতাংশকে স্পর্শকারী বৃত্ত বহির্বৃত্ত।
বিদ্র: একটি ত্রিভুজের কেবল একটি অন্তর্বৃত্ত ও পরিবৃত্ত অঙ্কন সম্ভব কিন্তু বহির্বৃত্ত তিনটি অঙ্কন সম্ভব।

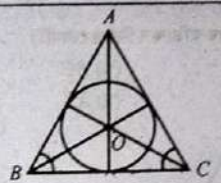


নববিন্দু বৃত্ত (Nine point Circle): কোনো ত্রিভুজের বাহুগুলোর মধ্যবিন্দুত্রয়, শীর্ষবিন্দুগুলো থেকে বিপরীত বাহুত্রয়ের উপর অঙ্কিত লম্বত্রয়ের পাদ বিন্দুত্রয় এবং শীর্ষবিন্দু ও লম্ববিন্দুর সংযোজক রেখাত্রয়ের মধ্যবিন্দুত্রয় সর্বমোট এই নয়টি বিন্দু একই বৃত্তের উপর অবস্থান করে। এই বৃত্তকেই নববিন্দুবৃত্ত বলে।
(ক) ত্রিভুজের লম্ব বিন্দু ও পরিকেন্দ্র সংযোজন করে উৎপন্ন সসীম সরলরেখার মধ্যবিন্দুই নববিন্দুবৃত্তের কেন্দ্র।
(খ) নববিন্দুবৃত্তের ব্যাসার্ধ ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধের অর্ধেকের সমান।

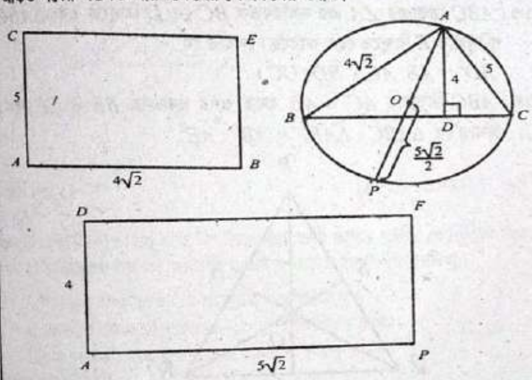
PART-4 [অধ্যায়ভিত্তিক সমাধান]

ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র: ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয়ের ছেদবিন্দুকে ভরকেন্দ্র বলে। ত্রিভুজের যেকোনো শীর্ষ হতে বিপরীত বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাই ত্রিভুজের মধ্যমা। ভরকেন্দ্র ত্রিভুজের মধ্যমাকে সর্বদাই 2:1 অনুপাতে বিভক্ত করে।
চিত্রে D, E, F যথাক্রমে BC, AC ও AB এর মধ্যবিন্দু। তাই AD, BE ও CF প্রত্যেকেই ΔABC- এর মধ্যমা। এদের ছেদবিন্দু G হচ্ছে ভরকেন্দ্র। G বিন্দু দ্বারা AD, BE ও CF প্রত্যেকেই 2 : 1 অনুপাতে বিভক্ত হয়েছে।

অন্তঃকেন্দ্র ও অন্তর্বৃত্ত: ত্রিভুজের অন্তঃস্থ কোণত্রয়ের সমদ্বিখণ্ডকত্রয়ের ছেদবিন্দুকে ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র বলা হয়। এই বিন্দু ত্রিভুজে অন্তর্লিখিত বৃত্তের কেন্দ্র। চিত্রে ΔABC- এর অন্তকেন্দ্র O।



ব্রহ্মগুপ্তের উপপাদ্য: কোনো ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ব্যাস এবং ঐ বাহুদ্বয়ের সাধারণ বিন্দু থেকে ভূমির ওপর অঙ্কিত লম্বের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান।



উদাহরণমূলক ব্যাখ্যা:

ΔABC এর পরিকেন্দ্র O, AP পরিবৃত্তের ব্যাস এবং $AD \perp BC$

$\therefore$ ব্রহ্মগুপ্তের সূত্রানুসারে, $AB.AC = AP.AD$

ΔABC-এর AB বাহুর দৈর্ঘ্য $= 4\sqrt{2}$ একক

AC বাহুর দৈর্ঘ্য $= 5$ একক

ΔABC-এর AB ও AC বাহু দ্বারা গঠিত আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল,

$AB \times AC = 5 \times 4\sqrt{2}$ বর্গ একক

$= 20\sqrt{2}$ বর্গ একক

ΔABC-এর পরিবৃত্তের ব্যাস, $AP = 5\sqrt{2}$

AB ও AC বাহুদ্বয়ের সাধারণ বিন্দু A হতে ভূমি BC এর উপর অঙ্কিত লম্ব

$AD = 4$ একক

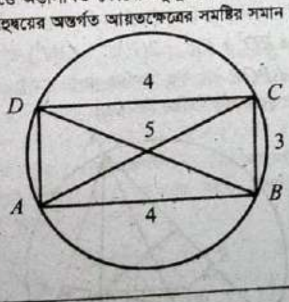
AP ও AD কে সন্নিহিত বাহু ধরে গঠিত আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল,

$AP \times AD = (4 \times 5\sqrt{2})$ বর্গ একক

$= 20\sqrt{2}$ বর্গ একক

আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = সন্নিহিত বাহুদ্বয়ের গুণফল

টলেমির উপপাদ্য: বৃত্তে অন্তর্লিখিত কোনো চর্তুভুজের কর্ণদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র ঐ চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের সমষ্টির সমান।



উদাহরণমূলক ব্যাখ্যা:

$ABCD$ চতুর্ভুজের AC ও BD কর্ণ দ্বারা গঠিত আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল, $AC.BD$

বিপরীত বাহু AD ও BC বাহু দ্বারা গঠিত আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল, $AD.BC$

বিপরীত বাহু AB ও CD বাহু দ্বারা গঠিত আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল, $AB.CD$

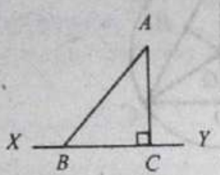
টলেমির উপপাদ্য অনুসারে, $AC.BD = AB.CD + BC.AD$

$AB.CD + AD.BC = AC.BD$

$4 \times 4 + 3 \times 3 = 5 \times 5$

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৩.২

১।

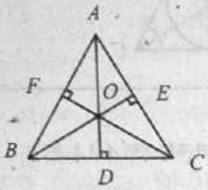


XY রেখাংশে AB এর লম্ব অভিক্ষেপ নিচের কোনটি?

(ক) AB (খ) BC

(গ) AC (ঘ) XY

২।



ওপরের চিত্রে কোনটি লম্ব বিন্দু?

(ক) D (খ) E

(গ) F (ঘ) O

৩। i. ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয়ের ছেদ বিন্দুকে ভরকেন্দ্র বলে।

ii. ভরকেন্দ্র যেকোনো মধ্যমাকে $3:1$ অনুপাতে বিভক্ত করে।

iii. সদৃশ কোণী ত্রিভুজের অনুরূপ বাহুগুলো সমানুপাতিক।

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii (খ) ii ও iii

(গ) i ও iii (ঘ) i, ii ও iii

D, E, F যথাক্রমে BC, AC ও AB এর মধ্যবিন্দু হলে ওপরের চিত্রের আলোকে ৪-৬ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

৪। G বিন্দুর নাম কী?

(ক) লম্ব বিন্দু (খ) অন্তঃকেন্দ্র

(গ) ভরকেন্দ্র (ঘ) পরিকেন্দ্র

৫। ΔABC এর শীর্ষ বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত বৃত্তের নাম কী?

(ক) পরিবৃত্ত (খ) অন্তঃবৃত্ত

(গ) বহিঃবৃত্ত (ঘ) নববিন্দু বৃত্ত

৬। ΔABC এর ক্ষেত্রে নিচের কোনটি এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্যকে সমর্থন করে?

(ক) $AB^2 + AC^2 = BC^2$

(খ) $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$

(গ) $AB^2 + AC^2 = 2(AG^2 + GD^2)$

(ঘ) $AB^2 + AC^2 = 2(BD^2 + CD^2)$

৭। ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্তস্থ যেকোনো P বিন্দু থেকে BC ও CA এর উপর PD ও PE লম্ব অঙ্কন করা হয়েছে। যদি ED রেখাংশ AB কে O বিন্দুতে ছেদ করে, তবে প্রমাণ কর যে, PO রেখা AB এর উপর লম্ব। অর্থাৎ $PO \perp AB$.

৮। ΔABC এর $\angle C$ সমকোণ। C থেকে অতিভুজের উপর অঙ্কিত লম্ব CD হলে, প্রমাণ কর যে, $CD^2 = AD.BD$.

৯। ΔABC এর শীর্ষত্রয় থেকে বিপরীত বাহুগুলোর ওপর লম্ব AD, BE ও CF রেখাত্রয় O বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে,
$AO.OD = BO.OE = CO.OF$.

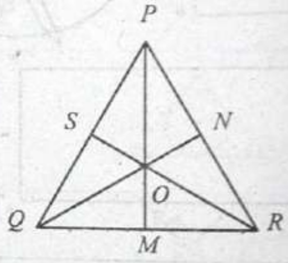
১০। AB ব্যাসের ওপর অঙ্কিত অর্ধবৃত্তের দুইটি জ্যা AC ও BD পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $AB^2 = AC.AP + BD.BP$.

১১। কোনো সমবাহু ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ 3.0 সে. মি. হলে ঐ ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

১২। ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষ বিন্দু A থেকে ভূমি BC এর ওপর লম্ব AD এবং ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধ R হলে প্রমাণ কর যে, $AB^2 = 2R.AD$।

১৩। ABC ত্রিভুজের $\angle A$ এর সমদ্বিখণ্ডক BC কে D বিন্দুতে এবং ΔABC পরিবৃত্তকে E বিন্দুতে ছেদ করেছে। দেখাও যে,
$AD^2 = AB.AC - BD.DC$।

১৪। ABC ত্রিভুজের AC ও AB বাহুর ওপর যথাক্রমে BE ও CF লম্ব। দেখাও যে, $\Delta ABC : \Delta AEF = AB^2 : AE^2$.

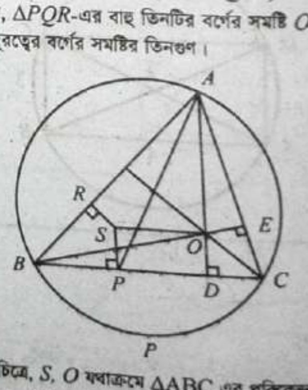


১৫। ΔPQR-এ PM, QN ও RS মধ্যমাত্রয় O বিন্দুতে ছেদ করেছে।

(ক) O বিন্দুটির নাম কি? O বিন্দু PM কে কি অনুপাতে বিভক্ত করে?

(খ) ΔPQR হতে $PQ^2 + PR^2 = 2(PM^2 + QM^2)$ সম্পর্কটি প্রতিষ্ঠিত কর।

(গ) দেখাও যে, ΔPQR-এর বাহু তিনটির বর্গের সমষ্টি O বিন্দু হতে শীর্ষবিন্দু তিনটির দূরত্বের বর্গের সমষ্টির তিনগুণ।



১৬। ওপরের চিত্রে, S, O যথাক্রমে ΔABC এর পরিকেন্দ্র ও লম্ববিন্দু। AP মধ্যমা, $BC = a$, $AC = b$ এবং $AB = c$

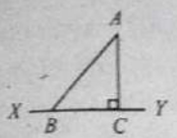
(ক) OA এবং SP এর মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় কর।

(খ) দেখাও যে, S, G, O একই সরলরেখায় অবস্থিত।

(গ) $\angle C$ সূক্ষ্মকোণ হলে $a.CD = b.CE$ সমীকরণটি প্রতিষ্ঠিত কর।

অনুশীলনী-৩.২ এর সমাধান

১।



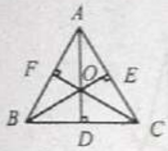
XY রেখাংশে AB এর লম্ব অভিক্ষেপ নিচের কোনটি?

(ক) AB　　(খ) BC
(গ) AC　　(ঘ) XY

উত্তর: (খ) BC　　[*Ref:* পাঠ্যবই পৃষ্ঠা: ৬৪]

ব্যাখ্যা:
লম্ব অঙ্কনের মাধ্যমে অভিক্ষেপ নির্ণয় করা হয়। B ও A বিন্দু থেকে XY এর ওপর অঙ্কিত লম্বদ্বয়ের পাদবিন্দু যথাক্রমে B ও C.
সুতরাং, লম্ব অভিক্ষেপ $= BC$.

২।



ওপরের চিত্রে কোনটি লম্ব বিন্দু?

(ক) D　　(খ) E
(গ) F　　(ঘ) O

উত্তর: (ঘ) O　　[*Ref:* পাঠ্যবই পৃষ্ঠা: ৬৮]

ব্যাখ্যা:
ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষ বিন্দু হতে বিপরীত বাহুর ওপর অঙ্কিত লম্বত্রয় যে বিন্দুতে ছেদ করে তাই ত্রিভুজের লম্ববিন্দু অর্থাৎ ত্রিভুজের লম্বত্রয়ের ছেদবিন্দুই **লম্ববিন্দু**।

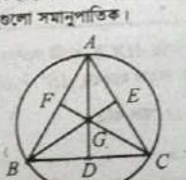
৩। i. ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয়ের ছেদবিন্দুকে ভরকেন্দ্র বলে।
ii. ভরকেন্দ্র যেকোনো মধ্যমাকে $3:1$ অনুপাতে বিভক্ত করে।
iii. সদৃশকোণী ত্রিভুজের অনুরূপ বাহুগুলো সমানুপাতিক।

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii　　(খ) ii ও iii
(গ) i ও iii　　(ঘ) i, ii ও iii

উত্তর: (গ) i ও iii　　[*Ref:* পাঠ্যবই পৃষ্ঠা: ৭২]

ব্যাখ্যা:
ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র: ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয়ের ছেদবিন্দুকে ভরকেন্দ্র বলে। ত্রিভুজের যেকোনো শীর্ষ হতে বিপরীত বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাই ত্রিভুজের মধ্যমা। ভরকেন্দ্র ত্রিভুজের মধ্যমাকে সর্বদাই 2ঃ1 অনুপাতে বিভক্ত করে।
চিত্রে D, E, F যথাক্রমে BC, AC ও AB এর মধ্যবিন্দু। তাই AD, BE ও CF প্রত্যেকেই ΔABC- এর মধ্যমা। এদের ছেদবিন্দু G হচ্ছে ভরকেন্দ্র। G বিন্দু দ্বারা AD, BE ও CF প্রত্যেকেই 2 ঃ 1 অনুপাতে বিভক্ত হয়েছে। দুইটি ত্রিভুজ সদৃশকোণী হলে অনুরূপ বাহুগুলো সমানুপাতিক।



৪। G বিন্দুর নাম কী?

(ক) লম্ব বিন্দু　　(খ) অন্তঃকেন্দ্র
(গ) ভরকেন্দ্র　　(ঘ) পরিকেন্দ্র

উত্তর: (গ) ভরকেন্দ্র

ব্যাখ্যা:
ΔABC- এর মধ্যমাত্রয় AD, BE ও CF; G বিন্দুতে ছেদ করে। ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয়ের ছেদবিন্দুই ভরকেন্দ্র। সুতরাং G বিন্দু ত্রিভুজ ABC এর ভরকেন্দ্র।

৫। ΔABC এর শীর্ষ বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত বৃত্তের নাম কী?

(ক) পরিবৃত্ত　　(খ) অন্তঃবৃত্ত
(গ) বহিঃবৃত্ত　　(ঘ) নববিন্দু বৃত্ত

উত্তর: (ক) পরিবৃত্ত

ব্যাখ্যা:
চিত্রে বৃত্তটি ΔABC এর তিনটি শীর্ষ A, B ও C বিন্দু দিয়ে গমন করে আবার ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুত্রয়গামী বৃত্তকে পরিবৃত্ত বলে।

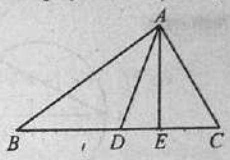
৬। ΔABC এর ক্ষেত্রে নিচের কোনটি এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্যকে সমর্থন করে?

(ক) $AB^2 + AC^2 = BC^2$
(খ) $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$
(গ) $AB^2 + AC^2 = 2(AG^2 + GD^2)$
(ঘ) $AB^2 + AC^2 = 2(BD^2 + CD^2)$

উত্তর: (খ) $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$

ব্যাখ্যা:　　[*Ref:* পাঠ্যবই: পৃষ্ঠা- ৬৮]

এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য:
ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমষ্টি, তৃতীয় বাহুর অর্ধেকের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল এবং ঐ বাহুর সমদ্বিখণ্ডক মধ্যমার উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির দ্বিগুণ।

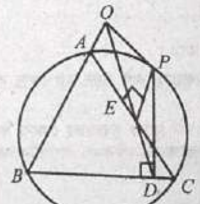


$\because BD = \frac{1}{2}BC$ (AD মধ্যমা)।

$\therefore AB^2 + AC^2 = 2\,(AD^2 + BD^2)$

৭। ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্তস্থ যেকোনো P বিন্দু থেকে BC ও CA এর উপর PD ও PE লম্ব অঙ্কন করা হয়েছে। যদি ED রেখাংশ AB কে O বিন্দুতে ছেদ করে, তবে প্রমাণ কর যে, PO রেখা AB এর ওপর লম্ব। অর্থাৎ $PO \perp AB$. (VI)

সমাধান:

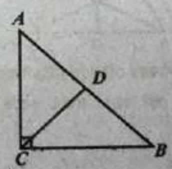


বিশেষ নির্বচন: P, ΔABC এর পরিবৃত্তস্থ যেকোনো একটি বিন্দু। $PD \perp BC$ ও $PE \perp CA$। ED রেখাংশ AB কে O বিন্দতে ছেদ করে। প্রমাণ করতে হবে যে, $PO \perp AB$।

প্রমাণ: আমরা জানি, পরিবৃত্তস্থ কোনো বিন্দু হতে কোনো ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের উপর অঙ্কিত লম্বত্রয়ের পাদবিন্দুগুলো সমরেখ।
এখানে, $PD \perp BC$, $PE \perp AC$ হওয়ায় এবং ED রেখাংশ AB কে O বিন্দুতে ছেদ করায় O বিন্দু অবশ্যই P হতে AB এর উপর লম্বের পাদবিন্দু হবে।
$\therefore PO \perp AB$ [প্রমাণিত]

৮। ΔABC এর $\angle C$ সমকোণ। C থেকে অতিভুজের ওপর অঙ্কিত লম্ব CD হলে, প্রমাণ কর যে, $CD^2 = AD.\,BD$.

সমাধান:



বিশেষ নির্বচন: ΔABC-এর $\angle C = 90°$। CD, AB এর উপর লম্ব। প্রমাণ করতে হবে যে, $CD^2 = AD.\,BD$।

প্রমাণ: $\angle C = 90°$

$\therefore \angle ACD + \angle BCD = 90°$ ... ... (1)

আবার, ΔADC-এ $\angle ADC = 90$[$\because CD \perp AB$]

$\therefore \angle CAD + \angle ACD = 90°$ ... ... (2)

[$\because$ ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি $180°$]

সমীকরণ (1) ও (2) হতে পাই,

$\angle ACD + \angle BCD = \angle CAD + \angle ACD$

$\therefore \angle BCD = \angle CAD$

এখন ΔADC ও ΔBDC-এ

$\angle ADC = \angle BDC = 90°$

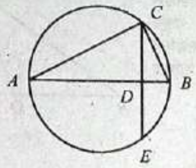
এবং $\angle CAD = \angle BCD$

সুতরাং, ত্রিভুজ দুটি সদৃশকোণী অর্থাৎ সদৃশ।

$\therefore \dfrac{AD}{CD} = \dfrac{CD}{BD}$

অর্থাৎ, $CD^2 = AD.\ BD$ [প্রমাণিত]

বিকল্প পদ্ধতি:



বিশেষ নির্বচন:
দেওয়া আছে, ΔABC এর $\angle C$ সমকোণ। C থেকে অতিভুজ BA এর উপর অঙ্কিত লম্ব CD।
প্রমাণ করতে হবে যে, $CD^2 = AD.\ BD$.

অঙ্কন: AB কে ব্যাস ধরে বৃত্ত আঁকলে তা C বিন্দু দিয়ে যাবে। CD- কে E পর্যন্ত বর্ধিত করি যা বৃত্তকে E বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ:

$CD = DE$

AB ও CE জ্যাদ্বয় পরস্পরকে ছেদ করে।

[$\because$ ব্যাসের উপর লম্বভাবে জ্যাটি রয়েছে তাই বলা যায় কেন্দ্র হতে অঙ্কিত লম্ব জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে]

আমরা জানি, কোনো বৃত্তের দুইটি জ্যা যদি বৃত্তের অভ্যন্তরস্থ কোনো বিন্দুতে ছেদ করে, তবে একটির অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অপরটির অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান।

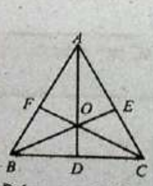
$\therefore AD.\ DB = DC.\ DE$

$= CD.\ CD$ [$\because CD = DE$]

সুতরাং, $CD^2 = AD.\ DB$. [প্রমাণিত]

৯। ΔABC এর শীর্ষত্রয় থেকে বিপরীত বাহুগুলোর ওপর লম্ব AD, BE ও CF রেখাত্রয় O বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে,
$AO.\ OD = BO.\ OE = CO.\ OF$.
[সংকেত: ΔBOF এবং ΔCOE সদৃশ $\therefore BO : CO = OF : OE$]

সমাধান:



বিশেষ নির্বচন: ΔABC-এর শীর্ষত্রয় থেকে বিপরীত বাহুত্রয়ের ওপর লম্ব AD, BE ও CF পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করতে হবে যে, $AO.\ OD = BO.OE = CO.\ OF$.

প্রমাণ: ΔBOF ও ΔCOE-এ

$\angle OFB = \angle OEC = 90°$ [$\because CF \perp AB, BE \perp AC$]

এবং $\angle BOF = \angle COE$[বিপ্রতীপ কোণ বলে]

ত্রিভুজ দুইটি সদৃশকোণী অর্থাৎ সদৃশ।

$\therefore \dfrac{BO}{CO} = \dfrac{OF}{OE}$

বা, $BO.OE = CO.\ OF$... ... ... (i)

আবার, ΔBOD ও ΔAOE-এ

$\angle ODB = \angle OEA = 90°$ [$\because AD \perp BC, BE \perp AC$]

এবং $\angle BOD = \angle AOE$.[বিপ্রতীপ কোণ]

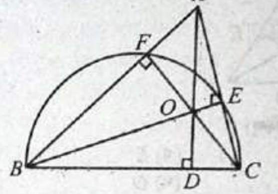
$\therefore$ ত্রিভুজ দুটি সদৃশকোণী অর্থাৎ সদৃশ।

$\therefore \dfrac{BO}{AO} = \dfrac{OD}{OE}$ বা, $AO.OD = BO.OE$ ... ... (ii)

সমীকরণ (i) ও (ii) হতে পাই,

$\therefore AO.OD = BO.OE = CO.OF$ [প্রমাণিত]

বিকল্প পদ্ধতি:



বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, ΔABC-এ A, B ও C হতে বিপরীত বাহুর ওপর লম্ব AD, BE ও CF, O বিন্দুতে ছেদ করে।
প্রমাণ করতে হবে যে, $AO.OD = BO.OE = CO.OF$.

প্রমাণ: $\angle BEC = \angle BFC$ [প্রত্যেকেই এক সমকোণ]

$\therefore B, F, E, C$ বিন্দুগুলো সমবৃত্ত।

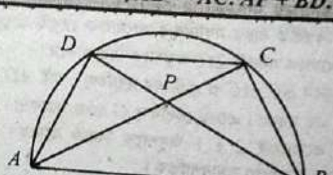
$\therefore \dfrac{BO}{CO} = \dfrac{OF}{OE}$ বা, $BO.OE = CO.OF$

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায়, $AO.OD = BO.OE$

সুতরাং, $AO.OD = BO\ .\ OE = CO\ .\ OF$. [প্রমাণিত]

১০। AB ব্যাসের ওপর অঙ্কিত অর্ধবৃত্তের দুইটি জ্যা AC ও BD পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $AB^2 = AC.\ AP + BD.\ BP$. (VI)

সমাধান:



বিশেষ নির্বচন: AB ব্যাসের ওপর $ADCB$ একটি অর্ধবৃত্ত। AC, BD জ্যাদ্বয় পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 = AC.AP + BD.\ BP$।

অঙ্কন: $A, D; B, C$ ও C, D যোগ করি।

প্রমাণ: ΔCPD ও ΔAPB-এ

$\angle PDC = \angle PAB$ [একই চাপ BC-এর উপর অবস্থিত]

এবং $\angle DPC = \angle APB$[বিপ্রতীপ কোণ বলে]

ত্রিভুজ দুটি সদৃশকোণী অর্থাৎ সদৃশ।

$\therefore \dfrac{AP}{DP} = \dfrac{BP}{CP}$

বা, $AP.CP = BP.DP$.

বা, $AP.CP + AP^2 = BP.DP + AP^2$ [উভয়পক্ষে AP^2 যোগ করে]

বা, $AP(AP + CP) = BP.DP + AD^2 + DP^2$

[AB ব্যাস বলে $\angle ADP = \angle ADB = 90°$;
$\therefore AP^2 = AD^2 + DP^2$]

বা, $AP.AC = DP(BP + DP) + AD^2$ [$\because AP + CP = AC$]

বা, $AP.AC = DP.BD + AB^2 - BD^2$ [$\because BP + PD = BD$]

[$\angle ADB = 90°$ বলে ΔABD-এ $AB^2 = AD^2 + BD^2$ বা $AD^2 = AB^2 - BD^2$]

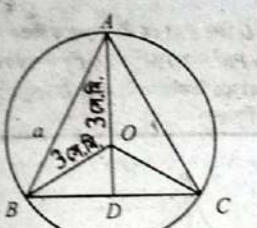
বা, $AP.AC = AB^2 - BD(BD - DP)$

বা, $AP.AC = AB^2 - BD.BP$

$\therefore AB^2 = AP.AC + BD.BP$ [প্রমাণিত]

১১। কোনো সমবাহু ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ 3.0 সে. মি. হলে ঐ ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। (VVI)

সমাধান:



বিশেষ নির্বচন: মনে করি, O, ABC সমবাহু ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র। তাহলে এর ব্যাসার্ধ, $OA = OB = OC = 3$ সে. মি. (দেওয়া আছে)। বাহুর দৈর্ঘ্য $AB = BC = CA = a$ (ধরি) নির্ণয় করতে হবে।

বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয়: $AD \perp BC$ আঁকি যা BC কে D বিন্দুতে ছেদ করে।

$AD \perp BC$ হওয়ায় ABD ও ACD উভয়ে সমকোণী ত্রিভুজ।

ABD ও ACD সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের অতিভুজ AB = অতিভুজ AC

[$\because ABC$ সমবাহু ত্রিভুজ]

এবং AD সাধারণ বাহু

$\therefore \Delta ABD \cong \Delta ACD$

$\therefore BD = CD$ অর্থাৎ AD একটি মধ্যমা।

এখন, যেহেতু D, BC এর মধ্যবিন্দু এবং $AD \perp BC$

সেহেতু AD অবশ্যই কেন্দ্র O দিয়ে যাবে।

[$\because$ কেন্দ্র থেকে জ্যা এর উপর অঙ্কিত লম্ব জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।]

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে B ও C শীর্ষ হতে অঙ্কিত মধ্যমা দুটির O বিন্দু দিয়ে যায়। সুতরাং O, ΔABC এর ভরকেন্দ্র।

$\therefore AO : OD = 2 : 1$

$\frac{AO}{OD} = \frac{2}{1}$

বা, $OD = \frac{1}{2}AO$

$= \frac{1}{2} \times 3$ সে.মি. [$\because OA = 3$ সে.মি.]

$= \frac{3}{2}$ সে.মি.

এবং $BD = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}a$ সে.মি.

OBD সমকোণী ত্রিভুজে

$OB^2 = OD^2 + BD^2$

বা, $3^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$

বা, $9 = \frac{9}{4} + \frac{a^2}{4}$

বা, $\frac{a^2 + 9}{4} = 9$

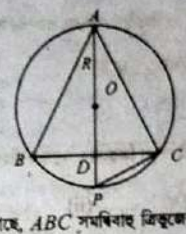
বা, $a^2 + 9 = 36$ বা, $a^2 = 27$ বা, $a = \sqrt{27}$

$\therefore a = 3\sqrt{3}$ সে.মি.

$\therefore AB = BC = CA = 3\sqrt{3}$ সে.মি.

অর্থাৎ, ঐ ত্রিভুজের প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য $3\sqrt{3}$ সে.মি.।

বিকল্প পদ্ধতি:



বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের A থেকে BC এর উপর লম্ব AD এবং ত্রিভুজের পরিব্যাসার্ধ R।

প্রমাণ করতে হবে যে, $2R.AD = AB^2$.

অঙ্কন: O, ΔABC এর পরিকেন্দ্র। A, O যোগ করে P পর্যন্ত বর্ধিত করি যা পরিধিকে P বিন্দুতে ছেদ করে।

তাহলে, $AO + OP = 2R$ বা $AP = 2R$। C, P যোগ করি।

প্রমাণ: ΔABD এবং ΔACP-এ

$\angle ADB = \angle ACP$ [উভয়ে এক সমকোণ]

$\angle ABD = \angle APC$ [একই জ্যা AC এর উপর অবস্থিত]

অবশিষ্ট $\angle BAD$ = অবশিষ্ট $\angle CAP$

$\therefore \Delta ABD$ ও ΔACP সদৃশকোণী ও সদৃশ,

তাহলে, $\frac{AB}{AP} = \frac{AD}{AC}$ [$\because$ অনুরূপ বাহুগুলোর অনুপাত সমান]

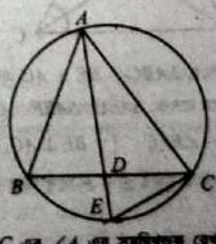
বা, $AB.AC = AD.AP$

বা, $AB.AB = 2R.AD$ [$\because AB = AC$ ও $AP = 2R$]

সুতরাং $AB^2 = 2R.AD$. [প্রমাণিত]

১২। ABC ত্রিভুজের $\angle A$ এর সমদ্বিখণ্ডক BC কে D বিন্দুতে এবং ΔABC পরিবৃত্তকে E বিন্দুতে ছেদ করেছে। দেখাও যে, $AD^2 = AB.AC - BD.DC$। (VI)

সমাধান:



বিশেষ নির্বচন: ΔABC এর $\angle A$ এর সমদ্বিখণ্ডক রেখাংশ BC কে D বিন্দুতে এবং ABC বৃত্তকে E বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ করতে হবে যে, $AD^2 = AB.AC - BD.DC$।

অঙ্কন: C, E যোগ করি।

প্রমাণ: ΔABD ও ΔACE-এ

$\angle BAD = \angle CAE$ [$\because AD$, $\angle A$ এর সমদ্বিখণ্ডক]

এবং $\angle ABD = \angle AEC$ [$\because$ একই বৃত্তাংশস্থিত কোণ]

$\therefore$ অবশিষ্ট $\angle ADB$ = অবশিষ্ট $\angle ACE$

[$\therefore$ ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ]

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী

$\therefore$ এরা সদৃশ

$\therefore \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{AB}{AE}$ [$\because$ দুইটি সদৃশ ত্রিভুজের অনুরূপ বাহুগুলোর অনুপাত সমান]

অর্থাৎ, $AB.\,AC = AD.\,AE$ ... ... (i)

আবার, ΔABD ও ΔCDE-এ

$\angle ABD = \angle CED$ [$\because$ বৃত্তের একই চাপ AC এর উপর অবস্থিত বৃত্তস্থ কোণ]

এবং $\angle ADB = \angle CDE$ [$\because$ বিপ্রতীপ কোণদ্বয় পরস্পর সমান]

$\therefore$ অবশিষ্ট $\angle BAD =$ অবশিষ্ট $\angle DCE$

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী ও সদৃশ।

$\therefore \dfrac{BD}{DC} = \dfrac{AD}{DE}$ [$\because$ দুইটি সদৃশ ত্রিভুজের অনুরূপ বাহুগুলোর অনুপাত সমান]

অর্থাৎ, $AD.\,DE = BD.\,DC$ ... ... (ii)

সমীকরণ (i) হতে পাই,

$AB.\,AC = AD.\,AE$

$= AD\,(AD + DE)$ [$\because AE = AD + DE$]

$= AD.\,AD + DE.\,AD$

$= AD^2 + AD.\,DE$

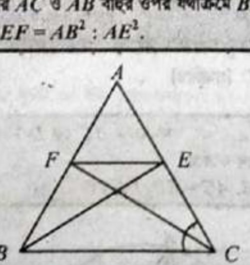
বা, $AD^2 = AB.\,CA - AD.\,DE$

$\therefore AD^2 = AB.\,AC - BD.\,DC$ [সমীকরণ (ii) হতে মান বসিয়ে পাই]

অর্থাৎ, $AD^2 = AB.\,AC - BD.\,DC$ [দেখানো হলো]

১৩। ABC ত্রিভুজের AC ও AB বাহুর ওপর যথাক্রমে BE ও CF লম্ব। দেখাও যে, $\Delta ABC : \Delta AEF = AB^2 : AE^2$.

সমাধান:



বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, ΔABC-এ $BE \perp AC$ এবং $CF \perp AB$. E, F যোগ করা হলো। প্রমাণ করতে হবে যে, $\Delta ABC : \Delta AEF = AB^2 : AE^2$.

প্রমাণ: $\angle BEC = 90° = \angle BFC$ [$\because BE \perp AC, CF \perp AB$]

$\therefore BC$ কে ব্যাস ধরে অঙ্কিত বৃত্তটি E ও F বিন্দু দিয়ে যাবে। কারণ, অর্ধবৃত্তস্থ কোণ এক সমকোণ।

$\therefore BCEF$ একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।

CE বাহুকে বর্ধিত করায় উৎপন্ন বহিঃস্থ কোণ $\angle AEF$.

এখন $\angle AEF + \angle FEC = 180°$ [$\because$ একই সরলরেখার উপর অবস্থিত দুইটি কোণ সমান] (1) $\angle FEC + \angle FBC = 180°$ [$\because$ বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের বিপরীত কোণ ......(2)

এখন, (1) ও (2) তুলনা করে পাই,

অনুরূপে, $\angle AFE = \angle ACB$

ΔABC ও ΔAEF এর মধ্যে

$\angle ABC = \angle AEF$, $\angle ACB = \angle AFE$.

এবং $\angle A$ সাধারণ।

$\therefore$ ত্রিভুজ দুটি সদৃশকোণী তথা এরা সদৃশ।

অধিকন্তু AB ও AE তাদের অনুরূপ বাহু।

$\therefore \dfrac{\Delta ABC}{\Delta AEF} = \dfrac{AB^2}{AE^2}$ [উপপাদ্য ৩.৯]

$\therefore \Delta ABC : \Delta AEF = AB^2 : AE^2$. [দেখানো হলো]

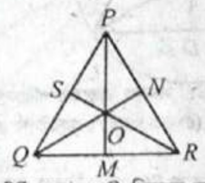
১৪। ΔPQR-এ PM, QN ও RS মধ্যমাত্রয় O বিন্দুতে ছেদ করেছে। (VVI)

(ক) O বিন্দুটির নাম কি? O বিন্দু PM কে কী অনুপাতে বিভক্ত করে?

(খ) ΔPQR হতে $PQ^2 + PR^2 = 2(PM^2 + QM^2)$ সম্পর্কটি প্রতিষ্ঠিত কর।

(গ) দেখাও যে, ΔPQR-এর বাহু তিনটির বর্গের সমষ্টি O বিন্দু হতে শীর্ষবিন্দু তিনটির দূরত্বের বর্গের সমষ্টির তিনগুণ।

(ক) এর সমাধান:

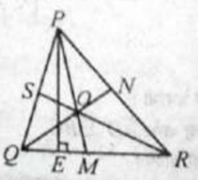


এখানে, PM, QN ও RS মধ্যমাত্রয় O বিন্দুতে ছেদ করেছে।

O বিন্দুটির নাম ভরকেন্দ্র।

O বিন্দুটি PM কে 2 : 1 অনুপাতে বিভক্ত করে।

(খ) এর সমাধান:



ΔPQR-এ PM, QN ও RS মধ্যমাত্রয় O বিন্দুতে ছেদ করেছে। QR এর উপর PE লম্ব টানি।

এখন, ΔPQR-এ, $PQ^2 = PM^2 + QM^2 + 2QM.\,ME$ ... ... (i)

[স্থূলকোণের ক্ষেত্রে পীথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি অনুসারে]

আবার, ΔPMR-এ $\angle PMR$ সূক্ষ্মকোণ এবং MR রেখার উপর PM রেখার লম্ব অভিক্ষেপ ME।

$\therefore PR^2 = PM^2 + MR^2 - 2MR.ME$ ... ... (ii)

[সূক্ষ্মকোণের ক্ষেত্রে পীথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি অনুসারে]

সমীকরণ (i) ও (ii) যোগ করে পাই,

$$PQ^2 + PR^2 = PM^2 + QM^2 + 2QM.ME + PM^2 + MR^2 - 2MR.ME$$
$$= 2PM^2 + QM^2 + 2QM.ME + QM^2 - 2QM.ME$$

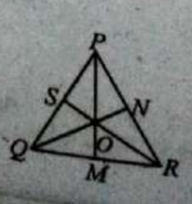
[PM মধ্যমা হওয়া, $QM = MR$]

$$= 2PM^2 + 2QM^2$$

$\therefore PQ^2 + PR^2 = 2(PM^2 + QM^2)$

সুতরাং সম্পর্কটি প্রতিষ্ঠিত হলো।

(গ) এর সমাধান:



(খ) হতে পাই, $PQ^2 + PR^2 = 2(PM^2 + QM^2)$

বা, $PQ^2 + PR^2 = 2\left[PM^2 + \left(\frac{1}{2} \times QR\right)^2\right]$ $\quad [\because QM = \frac{1}{2} QR]$

বা, $PQ^2 + PR^2 = 2PM^2 + 2.\frac{1}{4}QR^2$

বা, $PQ^2 + PR^2 = 2PM^2 + \frac{1}{2}QR^2$

বা, $2(PQ^2 + PR^2) = 4PM^2 + QR^2$

$\therefore PM^2 = \frac{2(PQ^2 + PR^2) - QR^2}{4}$ ……… (i)

(i) নং এর অনুরূপে অন্য দুটি মধ্যমার ক্ষেত্রে পাই,

$QN^2 = \frac{2(QR^2 + PQ^2) - PR^2}{4}$ ……… (ii)

ও $RS^2 = \frac{2(QR^2 + PR^2) - PQ^2}{4}$ ……… (iii)

(i), (ii) ও (iii) নং যোগ করে পাই, $PM^2 + QN^2 + RS^2$

$= \frac{2(PQ^2 + PR^2) - QR^2 + 2(PQ^2 + QR^2) - PR^2 + 2(QR^2 + PR^2) - PQ^2}{4}$

$= \frac{4PQ^2 + 3PR^2 + 4QR^2 - QR^2 - PR^2 - PQ^2}{4}$

$= \frac{3PQ^2 + 3PR^2 + 3QR^2}{4}$

বা, $4(PM^2 + QN^2 + RS^2) = 3(PQ^2 + PR^2 + QR^2)$

$\therefore PQ^2 + PR^2 + QR^2 = \frac{4}{3}(PM^2 + QN^2 + RS^2)$ ……… (iv)

এখন, O ভরকেন্দ্র হওয়ায়, O বিন্দুটি মধ্যমাত্রয়কে $2:1$ অনুপাতে বিভক্ত করে।

$\therefore \frac{OP}{OM} = \frac{2}{1}$

বা, $\frac{OP}{OM + OP} = \frac{2}{1+2}$

বা, $\frac{OP}{PM} = \frac{2}{3}$

বা, $OP = \frac{2}{3}PM$,

$\therefore PM = \frac{2}{3}OP$

অনুরূপে, $RS = \frac{3}{2}OR$ এবং $QN = \frac{3}{2}OQ$

(iv) নং এ PM, RS ও QN এর মান বসিয়ে পাই,

$$PQ^2 + PR^2 + QR^2 = \frac{4}{3}\left[\left(\frac{3}{2}OP\right)^2 + \left(\frac{3}{2}OQ\right)^2 + \left(\frac{3}{2}OR\right)^2\right]$$

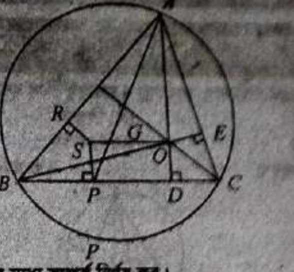
$$= \frac{4}{3}\left(\frac{9}{4}OP^2 + \frac{9}{4}OQ^2 + \frac{9}{4}OR^2\right)$$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{9}{4}\left(OP^2 + OQ^2 + OR^2\right)$$

$\therefore PQ^2 + PR^2 + QR^2 = 3(OP^2 + OQ^2 + OR^2)$

অর্থাৎ, ΔPQR-এর বাহু তিনটির বর্গের সমষ্টি O বিন্দু হতে শীর্ষবিন্দু তিনটির দূরত্বের বর্গের সমষ্টির তিনগুণ। [দেখানো হলো]

১৫। ওপরের চিত্রে, S, O যথাক্রমে ΔABC এর পরিকেন্দ্র ও লম্ববিন্দু। AP মধ্যমা, $BC = a$, $AC = b$ এবং $AB = c$. (VI)



(ক) OA এবং SP এর মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় কর।
(খ) দেখাও যে, S, G, O একই সরল রেখায় অবস্থিত।
(গ) $\angle C$ সূক্ষ্মকোণ হলে $a.CD = b.CE$ সমীকরণটি প্রতিষ্ঠিত কর।

(ক) এর সমাধান:

আমরা জানি, কোন ত্রিভুজের লম্ব বিন্দু থেকে শীর্ষের দূরত্ব ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র থেকে ঐ শীর্ষের বিপরীত বাহুর দ্বিগুণ।

এখানে, লম্ব বিন্দু O থেকে শীর্ষ A এর দূরত্ব OA এবং পরিকেন্দ্র S থেকে A শীর্ষের বিপরীত বাহু BC এর দূরত্ব SP।

$\therefore OA = 2SP$

এটিই নির্ণেয় সম্পর্ক। **(Ans.)**

(খ) এর সমাধান:

দেখাতে হবে যে, S, G, O একই সরলরেখায় অবস্থিত। চিত্রে SO রেখাটি AP রেখাকে G বিন্দুতে ছেদ করে। এখানে S পরিকেন্দ্র ও O লম্ববিন্দু। সুতরাং G বিন্দুটি ভরকেন্দ্র প্রমাণ করলেই যথেষ্ট হবে।

(ক) থেকে পাই, $OA = 2SP$ ……… (i)

এখন যেহেতু AD ও SP উভয়ই BC এর ওপর লম্ব সেহেতু $AD \parallel SP$.

এখন, $AD \parallel SP$ এবং AP এদের ছেদক।

$\therefore \angle PAD = \angle APS$ [একান্তর কোণ]

অর্থাৎ, $\angle OAG = \angle SPG$

এখন, ΔAGO এবং ΔPGS এর মধ্যে

$\angle AGO = \angle PGS$ [বিপ্রতীপ কোণ]

$\angle OAG = \angle SPG$ [একান্তর কোণ]

$\therefore$ অবশিষ্ট $\angle AOG =$ অবশিষ্ট $\angle PSG$

$\therefore \Delta AGO$ এবং ΔPGS সদৃশকোণী।

সুতরাং $\frac{AG}{GP} = \frac{OA}{SP}$

বা, $\frac{AB}{GP} = \frac{2SP}{SP}$

বা, $\frac{AG}{GP} = \frac{2}{1}$

$\therefore AG : GP = 2 : 1$

অর্থাৎ, G বিন্দু AP মধ্যমাকে $2:1$ অনুপাতে বিভক্ত করে।

সুতরাং G বিন্দু, ΔABC এর ভরকেন্দ্র।

অর্থাৎ, S, G, O একই সরলরেখায় অবস্থিত। [দেখানো হলো]

(গ) এর সমাধান:

এখানে, $\angle C$ সূক্ষ্মকোণ অর্থাৎ $\angle ACB$ সূক্ষ্মকোণ এবং BC এর উপর AC এর লম্ব অভিক্ষেপ CD. $[\because AD \perp BC]$

সুতরাং সূক্ষ্মকোণের ক্ষেত্রে পীথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি অনুসারে ΔABC থেকে পাই,

$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC.CD$ ……… (i)

আবার, AC এর উপর BC এর লম্ব অভিক্ষেপ CE. $[\because BE \perp AC]$

সুতরাং, (i) নং এর অনুরূপে পাই,

$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2AC.CE$ ……… (ii)

এখন, (i) নং থেকে (ii) নং সমীকরণ বিয়োগ করে পাই,

$AB^2 - AB^2 = (AC^2 + BC^2 - 2BC.CD) - (BC^2 + AC^2 - 2AC.CE)$

বা, $O = -2BC.CD + 2AC.CE$

বা, $2BC.CD = 2AC.CE$

বা, $2a.CD = 2b.CE$ $\quad [\because BC = a$ ও $Ac = b]$

$\therefore a.CD = b.CE.$

সুতরাং সমীকরণটি প্রতিষ্ঠিত হলো।