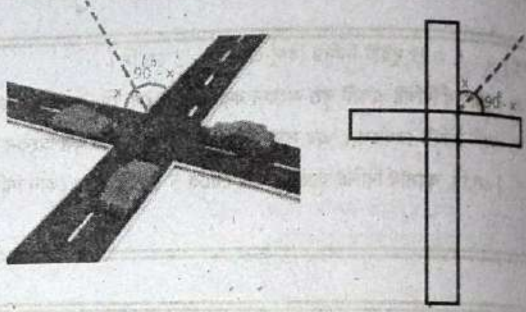
বাস্তব জীবনে এ অধ্যায়ের প্রয়োগ

জ্যামিতি বা (Geometry) গণিত শাস্ত্রের একটি প্রাচীন শাখা। আর এই জ্যামিতি যে পাঠ্যবইয়ের গুটিকয়েক সম্পাদ্য কিংবা উপপাদ্যের মাঝেই সীমাবদ্ধ তা নয় বরং আমাদের দৈনন্দিন জীবনে জ্যামিতির ব্যবহার নেই এমন উদাহরণ পাওয়া দুষ্কর। সেই আদিম কৃষি ভিত্তিক সভ্যতায়ও মানুষ ভূমি পরিমাপের প্রয়োজনে জ্যামিতিকেই হাতিয়ার হিসেবে ব্যবহার করেছিল। তবে আজকাল আর শুধুমাত্র ভূমি পরিমাপের মাঝেই জ্যামিতি সীমাবদ্ধ নেই বরং বহু জটিল সমস্যা সমাধানেও জ্যামিতিক বিষয়াবলী যেমন: রেখা, কোণ, ত্রিভুজ, চতুর্ভুজ অথবা বৃত্তের ব্যবহার করা হচ্ছে। উদাহরণস্বরূপ বলা যায়, আমরা সকলেই সবসময় চলার পথে খুব শর্টকাট কিংবা ছোট পথ অবলম্বন করতে চেষ্টা করে থাকি। কিন্তু মজার ব্যাপার হলো দুটি স্থানের মধ্যে সবচেয়ে ক্ষুদ্রতম পথ যে সরলরৈখিক হবে তা একমাত্র জ্যামিতির রেখার Concept হতে জানা যায়। আর তাই আজকের যুগে আমরা সড়কপথের হাজার কিলোমিটারের পথকে কমিয়ে শতকের ঘরে নিয়ে আসতে সক্ষম হয়েছি আকাশ পথে বিমান ব্যবহারের মাধ্যমে।

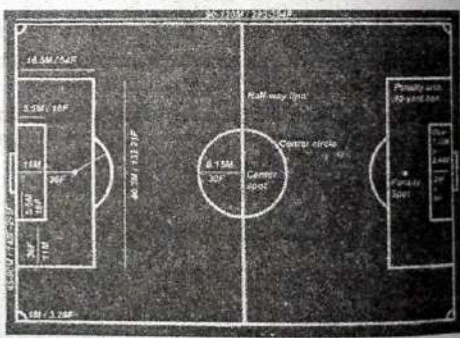
চিত্র- ১: যোগাযোগ মাধ্যমে সরলরেখা ও বক্ররেখা



চিত্র- ২: যোগাযোগ মাধ্যমে সরলরেখা সমূহের সংযোগস্থল

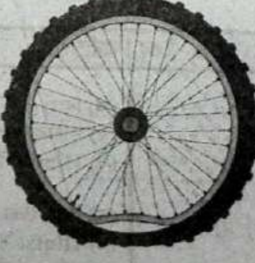
জ্যামিতির সবচেয়ে চমকপ্রদ প্রয়োগ হচ্ছে জনপ্রিয় খেলা ফুটবলকে ঘিরে। এখানে বল এবং মাঠ উভয়ক্ষেত্রেই জ্যামিতিকে খুব সুন্দরভাবে তুলে ধরা হয়েছে। সেন্টার ফিল্ড, ডি বক্স, কর্ণার পয়েন্ট, গোল পোস্ট সব জায়গাতেই হয় অর্ধবৃত্ত অথবা কোণ অথবা চতুর্ভুজের ব্যবহার করা হয়েছে।

চিত্র- ৩: ফুটবল মাঠে কর্ণার পয়েন্টে কোণ



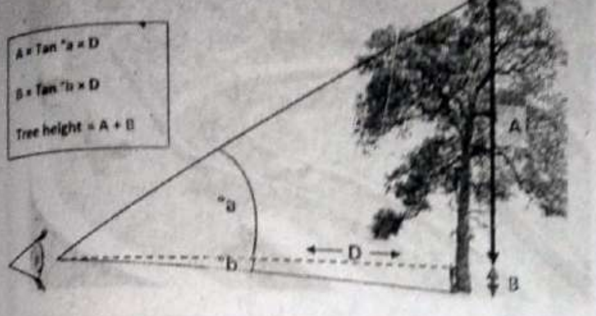
চিত্র- ৪: ফুটবল মাঠের জ্যামিতিক গঠন আকৃতি

আবার, আমরা অনেকেই সাইকেল চালাতে অভ্যস্ত। কিন্তু কখনও কি ভেবেছি সাইকেলের চাকার আকৃতি বৃত্তাকার কেন? কিংবা রাস্তার বাঁকে সাইকেল সর্বোচ্চ কত ডিগ্রী পর্যন্ত বাঁকিয়ে চালানো সম্ভব? অথচ জ্যামিতির কোণের ধারণা থেকে খুব সহজেই হিসেব করা যায় যে, একটি রাস্তার বাঁকে সর্বোচ্চ কত গতিতে, কত ডিগ্রী বাঁকিয়ে সাইকেল চালানো সম্ভব।

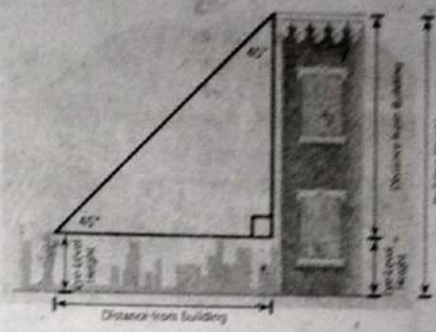


চিত্র- ৫: বৃত্তাকৃতির সাইকেলের চাকা

আবার সমকোণী ত্রিভুজের ধারণাকে কাজে লাগিয়ে পিথাগোরাসের উপপাদ্য ও কোণের ব্যবহার দ্বারা অনায়াসেই বিভিন্ন স্থাপনার উচ্চতা নির্ণয় করা যায়।

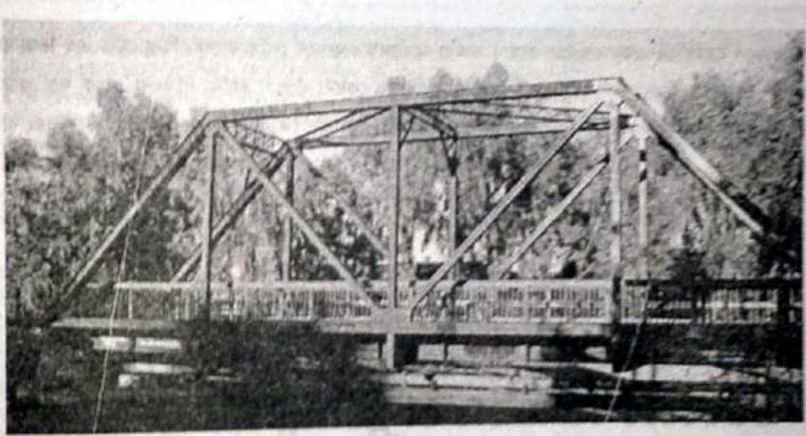


চিত্র- ৬: ত্রিভুজ ও কোণের সাহায্যে গাছের উচ্চতা নির্ণয়



চিত্র-৭: ত্রিভুজ ও কোণের সাহায্যে বিল্ডিংয়ের উচ্চতা নির্ণয়

আমরা অনেকেই গ্রাম এলাকা অথবা মফস্বল এলাকায় Truss এর আকৃতির স্টিলের ব্রিজ দেখেছি। সেই ব্রিজের ক্ষেত্রেও উল্লম্ব ও অনুভূমিক বরাবর কি পরিমাণ লোড কাজ করবে তা কিন্তু এই জ্যামিতিক ত্রিভুজ ও কোণের ব্যবহার করেই নির্ণয় করা হয়। অর্থাৎ উচ্চতর শিক্ষায় (Structure of Mechanics) জ্যামিতির ব্যবহার ব্যাপক।



চিত্র- ৮: ব্রিজের গঠনে ত্রিভুজাকৃতির ট্রাসের ব্যবহার

কমবেশি আমরা সকলেই ক্যামেরার সাথে পরিচিত, হোক তা ডিএসএলআর (DSLR) কিংবা স্মার্টফোনের। একটু লক্ষ্য করলেই দেখা যায় সবগুলো ক্যামেরাতেই বৃত্ত এবং কোণের ধারণাকে কাজে লাগিয়ে লেন্সটিকে 360° পর্যন্ত ভাগ করা হয়েছে। বর্তমানে স্মার্টফোনের ক্যামেরায় আবার Wide Angle Lens ও ব্যবহার করা হচ্ছে যার ফলে পূর্বের থেকে আরও বেশি এলাকা নিয়ে ছবি Capture করা সম্ভব হচ্ছে।

চিত্র- ৯: স্মার্টফোনে ব্যবহৃত বৃত্তাকৃতির Wide Angle Lens

যোগাযোগের ক্ষেত্রে সরলরেখা ও বক্ররেখার ধারণাকে কাজে লাগিয়ে আজ উন্নত বিশ্বে চালু হয়েছে অসংখ্য প্রযুক্তি, যেমন ফ্লাইওভার, ইউলুপ, টানেল ইত্যাদি।

চিত্র- ১০: ভিন্ন জ্যামিতিক আকৃতির ফ্লাইওভার

চিত্র- ১১: ইউলুপ আকৃতির যোগাযোগ ব্যবস্থা

বিনোদনের জন্য একটি জনপ্রিয় রাইড হচ্ছে ফেরিস হুইল, যা আমাদের দেশের নাগরদোলার মতো। ফেরিস হুইলের চেয়ারে বসা একজন ব্যক্তি কতটুকু দূরত্ব বক্রপথে অতিক্রম করে তা বৃত্তাকৃতির ফেরিস হুইলের পরিধির মাধ্যমেই জানা যায়।

মোট কথা, এভাবে বলতে থাকলে জ্যামিতির এমন হাজারো প্রয়োগ আমরা আমাদের চারপাশে পেয়ে যাবো। কিন্তু ছোট এই চিন্তা ভাবনার কাজটুকুর দায়িত্ব পাঠকের হাতে ছেড়ে দিলাম। বিজ্ঞানের এমন কোন শাখা নেই যেখানে জ্যামিতির কোনো প্রয়োগ হয়নি, গবেষণা থেকে শুরু করে, চিকিৎসা, ইঞ্জিনিয়ারিং এমনকি কৃষিতেও জ্যামিতির প্রয়োগ অপরিহার্য। তাই অবুঝের মতো শুধু জ্যামিতিক সূত্রাবলি কিংবা উপপাদ্য মুখস্ত না করে বরং বাস্তবে আমরা জ্যামিতিকে কিভাবে কোথায় ব্যবহার করছি তাও একটু ভেবে রাখা দরকার। আর একটি কথা, চিন্তা-ভাবনা কখনই মেধা বিকাশের অন্তরায় নয় বরং চিন্তা-ভাবনার মাধ্যমেই আমাদের মেধাগুলো বিকশিত হয়।

"Success consists of going from failure to failure without loss of enthusiasm".

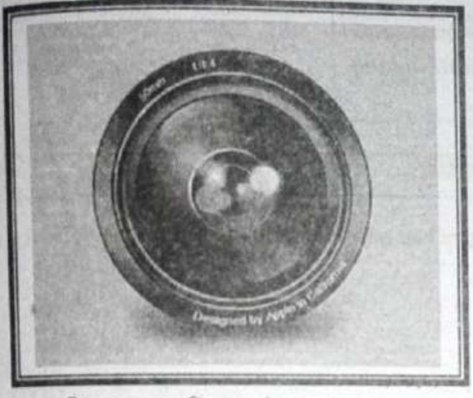
–Winston Churchill

৪

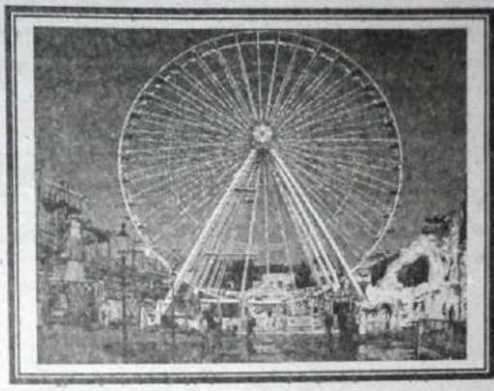
জ্যামিতিক অঙ্কন

[Geometrical Drawing]

অনুশীলনী-৪



চিত্র-১: বৃত্তাকৃতির ওয়াইড অ্যাঙ্গেল লেন্স



চিত্র-২: বৃত্তাকৃতির ফেরিস হুইল

ভূমিকা [Introduction]

Thales

প্রাচীন সভ্যতায় ভূমির পরিমাপ থেকেই জ্যামিতির সৃষ্টি হয়েছিল। প্রাচীন মিশর, ব্যাবিলন, ভারত, চীন, ইনকা, সিন্ধু সভ্যতার স্থাপত্যগুলো অতিসূক্ষ্ম জ্যামিতিক আকারে গঠিত। যে কোনো সভ্যতায় তার অবকাঠামোগুলো অতিসূক্ষ্ম পরিমাপের মাধ্যমে স্থাপন করা হয়। কারণ এর মাধ্যমে ঐ অবকাঠামোর স্থায়িত্ব ও সৌন্দর্য বৃদ্ধি পায়।

যখন একজন স্থপতি কোনো বাড়ি বা অবকাঠামোর নকশা করেন কিংবা প্রকৌশলী যখন যন্ত্রের বিভিন্ন অংশের চিত্র আঁকেন তখন তিনি শুধু স্কেল ও পেন্সিল কম্পাসের সাহায্যে অতিসূক্ষ্মভাবে অঙ্কন করেন।

থেলিস বিজ্ঞান ও দর্শনের ক্ষেত্রে এক নবযুগের সূচনা করেন। তাকে বিজ্ঞানের জনক বলা হয়। তিনিই প্রথম পিরামিডের উচ্চতা ও সমুদ্র তীর থেকে জাহাজের দূরত্ব নির্ণয়ের জন্য জ্যামিতি ব্যবহার করেন। তিনি বলেন "মহশূন্যই বৃহৎ স্থান যা সকল জিনিস ধারণ করে"।

বৃত্ত (Circle) শব্দটি গ্রীক 'Kirkos' থেকে নেয়া যার অর্থ আংটা। বৃত্ত সম্পর্কে মানুষের ধারণা প্রাকৃতিক। তবে প্রাচীনকালে মানব সভ্যতার চাকার ব্যবহারের প্রচলন থেকে প্রথম বৃত্ত সম্পর্কিত ধারণা প্রবর্তিত হয়। প্রকৃতিতে এর আরও অনেক উদাহরণ রয়েছে। যেমনঃ চন্দ্র, সূর্য, গাছের প্রস্থচ্ছেদ ইত্যাদি। বৃত্ত সম্পর্কে নির্দিষ্ট কোনো ইতিহাস বিশদভাবে লিপিবদ্ধ করা হয়নি। তবে গ্রীক বিজ্ঞান ইউক্লিড, প্লেটো, আর্কিমিডিস বৃত্তের অনেক উন্নতি সাধন করেন। যদি সমতলে কোনো বিন্দু এমনভাবে চলে যেন ঐ সমতলস্থ কোনো নির্দিষ্ট বিন্দু হতে প্রথমোক্ত বিন্দু সর্বদা একই দূরত্বে অবস্থিত হয়, তাহলে উক্ত চলমান বিন্দুর সঞ্চারপথকে বৃত্ত বলে। ঐ নির্দিষ্ট দূরত্বকে ঐ বৃত্তের ব্যাসার্ধ (radius) বলে। আর নির্দিষ্ট বিন্দুকে কেন্দ্র (centre) বলে।

বোর্ড প্রশ্নাবলির বিশ্লেষণ [Board Questions Analysis]

এই অধ্যায় থেকে বিভিন্ন বোর্ডে বিগত দু'বছরের এসএসসি পরীক্ষায় মোট ২টি সৃজনশীল প্রশ্ন ও ৫টি বহুনির্বাচনি প্রশ্ন এসেছে। নিচের 'Board Analysis' অংশে এই অধ্যায় থেকে কোন সালে কোন বোর্ডে কতটি প্রশ্ন হয়েছে তা দেওয়া আছে।

সৃজনশীল প্রশ্ন:

সাল \ বোর্ড	ঢাকা	রাজশাহী	কুমিল্লা	যশোর	চট্টগ্রাম	বরিশাল	সিলেট	দিনাজপুর
২০১৬	–	–	১	[illegible]	১	–	–	–
২০১৫	–	–	–	–	–	–	–	–

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন:

সাল \ বোর্ড	ঢাকা	রাজশাহী	কুমিল্লা	যশোর	চট্টগ্রাম	বরিশাল	সিলেট	দিনাজপুর
২০১৬	১	[illegible]	–	–	–	১	–	২
২০১৫	–	[illegible]	–	–	–	–	–	–

মূল শব্দাবলি [Key Words]

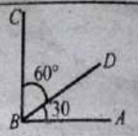
অতিভুজ (*Hypotenuse*), সম্পাদ্য (*Problem*), ভূমি (*Base*), পরিসীমা (*Perimeter*), চতুর্ভুজ (*Quadrilateral*), কর্ণ (*Diagonal*), সামান্তরিক (*Parallelogram*), ট্রাপিজিয়াম (*Trapezium*), রম্বস (*Rhombus*), বর্গ (*Square*), শিরঃকোণ (*Vertical angle*) মধ্যমা (*Median*), সমান্তরাল (*Parallel*), সংলগ্ন কোণ (*Adjacent angle*).

এ অধ্যায়ের আলোচ্যসূচি

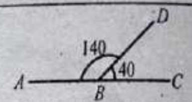
- ত্রিভুজ অঙ্কন
- বৃত্ত অঙ্কন

প্রাথমিক আলোচনা

পূরক কোণ: দুইটি সন্নিহিত কোণের সমষ্টি এক সমকোণের সমান অর্থাৎ $90°$ হলে ঐ দুইটি কোণের একটিকে অপরটির পূরক কোণ বলা হয়। চিত্রে সন্নিহিত $\angle ABD$ + সন্নিহিত $\angle CBD = 90°$
অতএব, $\angle ABD$ ও $\angle CBD$ পরস্পর পূরক কোণ।



সম্পূরক কোণ: দুইটি সন্নিহিত কোণের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান অর্থাৎ $180°$ হলে একটি কোণকে অপরটির সম্পূরক কোণ বলা হয়। চিত্রে সন্নিহিত $\angle ABD$ + সন্নিহিত $\angle DBC = 180°$ অতএব $\angle ABD$ ও $\angle DBC$ পরস্পর সম্পূরক কোণ।



পূরক কোণদ্বয়ের যোগফল $90°$ কিন্তু সম্পূরক কোণদ্বয়ের যোগফল $180°$

ত্রিভুজ সংক্রান্ত তথ্যবলি

ত্রিভুজ অঙ্কন:

১। প্রত্যেক ত্রিভুজের তিনটি বাহু ও তিনটি কোণ রয়েছে ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর দৈর্ঘ্যের সমষ্টি এর তৃতীয় বাহুর দৈর্ঘ্য অপেক্ষা বৃহত্তর। এ সম্পর্কটি সিদ্ধ না হলে ত্রিভুজ অঙ্কন সম্ভব নয়। ত্রিভুজ অঙ্কনে তিনটি অনন্য উপাত্তের প্রয়োজন।

(১) তিনটি বাহু
(২) দুইটি বাহু ও তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ।
(৩) দুইটি কোণ ও তাদের সংলগ্ন বাহু।
(৪) দুইটি কোণ ও একটির বিপরীত বাহু।
(৫) দুইটি বাহু ও তাদের একটির বিপরীত কোণ।
(৬) সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও অপর একটি বাহু।

২। ত্রিভুজের দুইটি বাহু সমান হলে তাদের বিপরীত কোণদ্বয় সমান এবং দুইটি কোণ সমান হলে তাদের বিপরীত বাহুদ্বয় সমান।

৩। ত্রিভুজের দুইটি বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর এবং দুইটি বাহুর অন্তর তৃতীয় বাহু অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

৪। ত্রিভুজের যেকোনো বাহুকে বর্ধিত করলে উৎপন্ন বহিঃস্থ কোণ অন্তঃস্থ বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান।

৫। ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ।

৬। ত্রিভুজের কোণত্রয়ের সমদ্বিখণ্ডকগুলো সমবিন্দু। এই বিন্দু ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র (*incentre*) যা ত্রিভুজের অন্তর্লিখিত বৃত্তের কেন্দ্র।

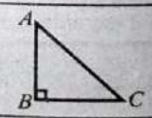
৭। ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের লম্বসমদ্বিখণ্ডকত্রয় সমবিন্দু, এই বিন্দু ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র (*circumcentre*) যা ত্রিভুজের পরিলিখিত বৃত্তের কেন্দ্র।

৮। ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় থেকে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বত্রয় সমবিন্দু; এই বিন্দু ত্রিভুজের লম্ববিন্দু (*Orthocentre*)। ঐ লম্বত্রয়ের পাদবিন্দুত্রয় দিয়ে উৎপন্ন ত্রিভুজই মূল ত্রিভুজের পাদত্রিভুজ (*Pedal triangle*)।

৯। ত্রিভুজের দুই বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাংশ তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল ও দৈর্ঘ্যে তার অর্ধেক।

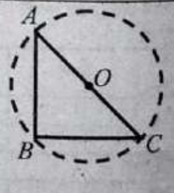
সমকোণী ত্রিভুজ:

- যে ত্রিভুজের একটি কোণ সমকোণ ($90°$) তাকে সমকোণী ত্রিভুজ বলে। চিত্রে ΔABC সমকোণী ত্রিভুজ। সমকোণী ত্রিভুজে সমকোণ সংলগ্ন বাহুদ্বয় যথাক্রমে লম্ব ও ভূমি। লম্বকে উন্নতি বলা হয়।



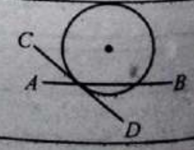
সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রে:

- সমকোণের বিপরীত বাহুই অতিভুজ এবং অতিভুজ সর্বদা বৃহত্তম বাহু।
- সমকোণী ত্রিভুজ সর্বদাই পিথাগোরাসের উপপাদ্য মেনে চলে। অর্থাৎ $(\text{অতিভুজ})^2 = (\text{লম্ব})^2 + (\text{ভূমি})^2$, চিত্রানুসারে- $AC^2 = AB^2 + BC^2$
- কোনো বৃত্ত একটি সমকোণী ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু দিয়ে গমন করলে বৃত্তটির কেন্দ্র হবে অতিভুজের মধ্যবিন্দু।
  ΔABC- সমকোণী ত্রিভুজের শীর্ষ A, B ও C বিন্দু দিয়ে গমনকারী বৃত্তের কেন্দ্র O এবং ব্যাসার্ধ $OA = OC = \frac{AC}{2}$।
- সমকোণী ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ অতিভুজের অর্ধেক।

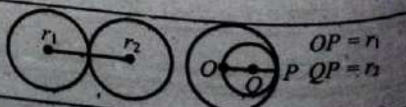


বৃত্ত সংক্রান্ত তথ্য

- **বৃত্তের স্পর্শক ও ছেদক:** কোনো সরলরেখা বৃত্তকে সর্বাধিক দুইটি বিন্দুতে ছেদ করে কিন্তু কেবলমাত্র একটি বিন্দুতে স্পর্শ করে। সুতরাং কোনো সরলরেখা ও বৃত্তের যদি দুইটি ছেদবিন্দু থাকে তবে বিন্দু থাকে তবে রেখাটিকে বৃত্তের স্পর্শক বলা হয়।
  চিত্রে অঙ্কিত বৃত্তের AB হলো ছেদক এবং CD হলো স্পর্শক।



- বৃত্তের কোনো বিন্দুতে একটিমাত্র স্পর্শক অঙ্কন করা যায়।
- দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে বহিঃস্পর্শ করলে কেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব বৃত্তদ্বয়ের ব্যাসার্ধের সমষ্টির সমান।
- দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে অন্তঃস্পর্শ করলে, কেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব বৃত্তদ্বয়ের ব্যাসার্ধের অন্তরের সমান।
- একটি বৃত্ত ও একটি সরলরেখার স্পর্শবিন্দু কেবলমাত্র একটি কিন্তু ছেদবিন্দু সর্বাধিক দুইটি।

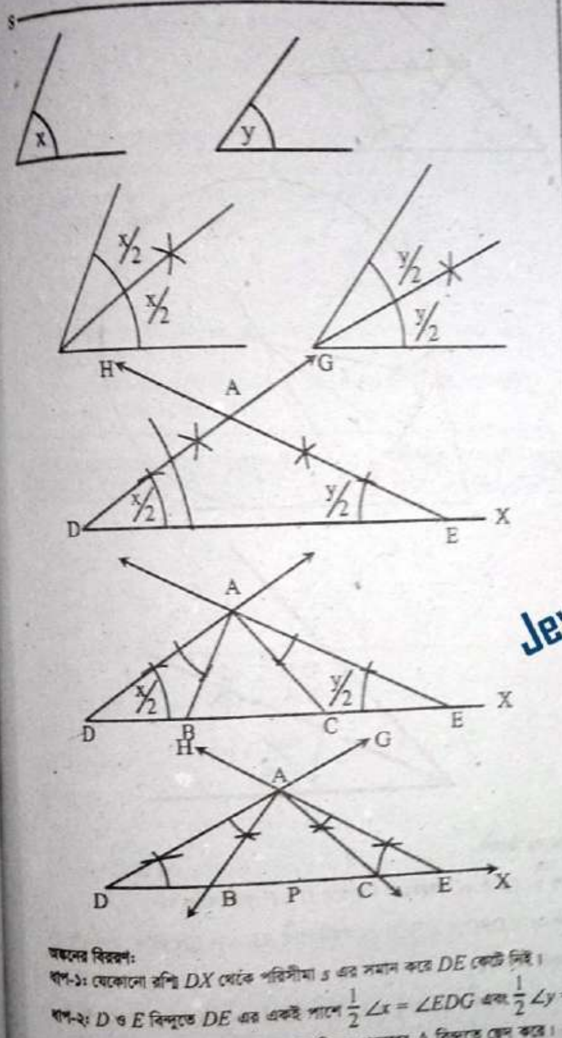


পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনমূলক কাজের সমাধান

১-এর সমাধান:

কাজ ১। একটি ত্রিভুজের পরিসীমা এবং ভূমি সংলগ্ন কোণদ্বয় দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কন করতে হবে।

বিশেষ নির্বচন: মনে করি একটি ত্রিভুজের পরিসীমা s এবং ভূমি সংলগ্ন $\angle x$ ও $\angle y$ দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।



অঙ্কনের বিবরণ:

ধাপ-১: যেকোনো রশ্মি DX থেকে পরিসীমা s এর সমান করে DE কেটে নিই।

ধাপ-২: D ও E বিন্দুতে DE এর একই পাশে $\frac{1}{2}\angle x = \angle EDG$ এবং $\frac{1}{2}\angle y = \angle DEH$ আঁকি। মনে করি, DG ও EH রশ্মিদ্বয় পরস্পর A বিন্দুতে ছেদ করে।

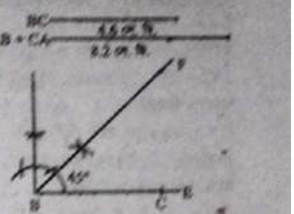
ধাপ-৩: A বিন্দুতে $\angle ADE$ এর সমান $\angle DAB$ এবং $\angle AED$ এর সমান $\angle EAC$ আঁকি। AB এবং AC রশ্মিদ্বয় DE রেখাংশকে যথাক্রমে B ও C বিন্দুতে ছেদ করে।

তাহলে ΔABC-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

২-এর সমাধান:

কাজ ২। ত্রিভুজের ভূমি $BC = 4.6$ সে.মি.। $\angle B = 45°$ এবং $AB + CA = 8.2$ সে.মি. দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

মনে করি, ABC ত্রিভুজের ভূমি $BC = 4.6$ সে.মি. $\angle B = 45°$ এবং $AB + CA = 8.2$ সে.মি.। ABC ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।



অঙ্কনের বিবরণ:

ধাপ-১: যেকোনো রশ্মি BE থেকে $BC = 4.6$ সে.মি. অংশ কেটে নিই।

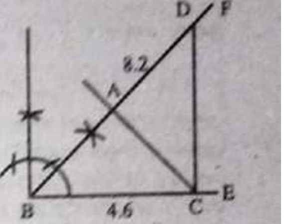
ধাপ-২: BC রেখাংশের B বিন্দুতে $\angle 45° = \angle CBF$ আঁকি।

ধাপ-৩: BF রশ্মি থেকে 8.2 সে.মি. এর সমান করে BD অংশ কেটে নিই।

ধাপ-৪: C, D যোগ করি।

ধাপ-৫: C বিন্দুতে DC রেখাংশের যে পাশে B বিন্দু আছে সেই পাশে DC এর সাথে $\angle BDC$ এর সমান $\angle DCA$ আঁকি। মনে করি, CA রশ্মি BD রেখাংশকে A বিন্দুতে ছেদ করে।

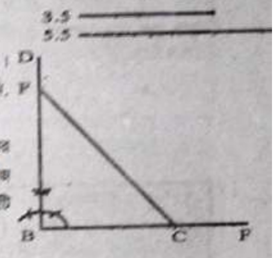
তাহলে ΔABC-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।



৩-এর সমাধান:

কাজ ৩। সমকোণী ত্রিভুজের এক বাহুর দৈর্ঘ্য 3.5 সে.মি.। অপর বাহু এবং অতিভুজের দৈর্ঘ্য 5.5 সে.মি. দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

সমাধান: বিশেষ নির্বচন: ABC সমকোণী ত্রিভুজের $BC = 3.5$ সে.মি.। অপর বাহু AB ও অতিভুজ AC এর দৈর্ঘ্য 5.5 সে.মি. দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।



অঙ্কনের বিবরণ:

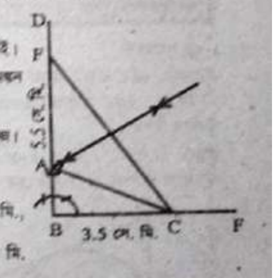
ধাপ-১: যেকোনো রশ্মি BF থেকে $BD = 3.5$ সে.মি. অংশ কেটে নিই।

ধাপ-২: B বিন্দুতে $BD \perp BC$ আঁকি।

ধাপ-৩: BD থেকে $BF = 5.5$ সে.মি. অংশ কেটে নিই।

ধাপ-৪: F, C যোগ করি এবং FC এর সমদ্বিখণ্ডক অঙ্কন করি। মনে করি তা DB কে A বিন্দুতে ছেদ করে।

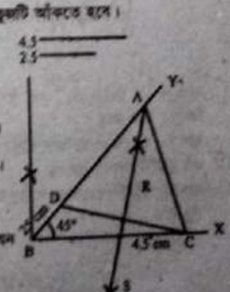
ধাপ-৫: A, C যোগ করি, তাহলে ΔABC-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।



৪-এর সমাধান:

কাজ ৪। ΔABC- এর $BC = 4.5$ সে.মি., $\angle B = 45°$ এবং $AB - AC = 2.5$ সে. মি. দেওয়া আছে। ΔABC টি অঙ্কন করতে হবে।

সমাধান: বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, ΔABC-এর ভূমি, $BC = 4.5$ সে.মি. $\angle B = 45°$ এবং $AB - AC = 2.5$ সে.মি.। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।



অঙ্কনের বিবরণ:

ধাপ-১: যেকোনো রশ্মি BX থেকে $BC = 4.5$ কেটে নিই।

ধাপ-২: B বিন্দুতে $\angle YBC = \angle 45°$ অঙ্কন করি।

ধাপ-৩: BY রশ্মি থেকে $BD = 2.5$ সে.মি. কেটে নিই।

ধাপ-৪: CD যোগ করি।

ধাপ-৫: CD এর উপর RS সমদ্বিখণ্ডক আঁকি যেন BY কে A বিন্দুতে ছেদ করে।

ধাপ-৬: A, C যোগ করি। তাহলে ΔABC-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

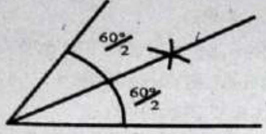
৫-এর সমাধান:

ΔABC-এর পরিসীমা 12 সে.মি., $\angle B = 60°$ এবং $\angle C = 45°$ দেওয়া আছে। ΔABC ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

সমাধান: বিশেষ নির্বচন: ΔABC এর পরিসীমা 12 সে.মি., $\angle B = 60°$ এবং $\angle C = 45°$ দেওয়া আছে। ABC ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

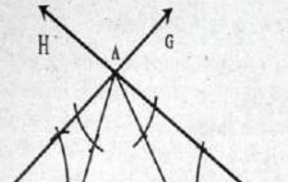
অঙ্কনের বিবরণ:

ধাপ-১: যেকোনো রশ্মি DF থেকে পরিসীমা 12 সে.মি. এর সমান করে DE অংশ কেটে নিই।



ধাপ-২: D ও E বিন্দুতে DE রেখাংশের একইপাশে $\frac{1}{2}\angle 45° = \angle EDG$। $\frac{1}{2}\angle 60° = \angle DEH$ কোণ আঁকি। মনে করি, DG ও EH রেখাংশ পরস্পরকে A বিন্দুতে ছেদ করে।

ধাপ-৩: A বিন্দুতে $\angle ADE$ এর সমান $\angle DAB$ এবং $\angle AED$ এর সমান $\angle EAC$ আঁকি। AB এবং AC রশ্মিদ্বয় DE রেখাংশকে B ও C বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে ΔABC-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।



অনুশীলনী কাজ:

১। 5 সে.মি., 12 সে.মি. ও 13 সে.মি. বাহুবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজের অন্তঃবৃত্ত অঙ্কন করে এর ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

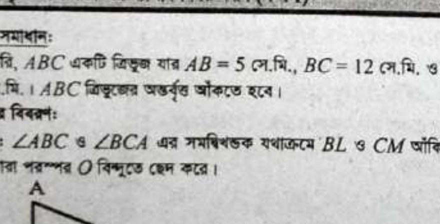
২। 6.5 সে.মি., 7 সে.মি. এবং 7.5 সে.মি. বাহুবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজের বহিঃবৃত্ত অঙ্কন করে এর ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর। (VVI)

১-এর সমাধান:

মনে করি, ABC একটি ত্রিভুজ যার $AB = 5$ সে.মি., $BC = 12$ সে.মি. ও $AC = 13$ সে.মি.। ABC ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্ত আঁকতে হবে।

অঙ্কনের বিবরণ:

ধাপ-১: $\angle ABC$ ও $\angle BCA$ এর সমদ্বিখণ্ডক যথাক্রমে BL ও CM আঁকি। মনে করি তারা পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করে।



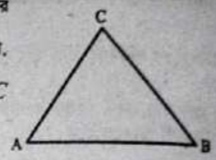
ধাপ-২: O থেকে BC এর উপর OD লম্ব আঁকি। মনে করি, তা BC কে D বিন্দুতে ছেদ করে।

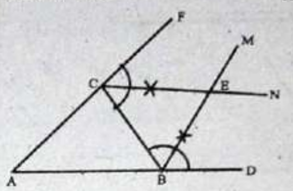
ধাপ-৩: O কে কেন্দ্র করে OD এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকি। তাহলে এই বৃত্তটিই নির্ণেয় বৃত্ত।

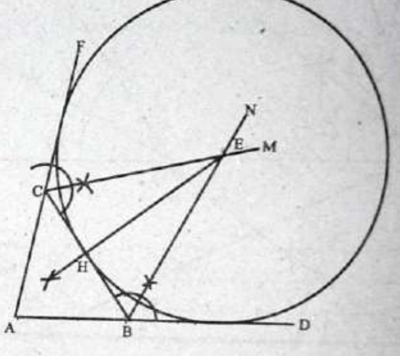
ব্যাসার্ধ: OD হচ্ছে প্রাপ্ত বৃত্তের ব্যাসার্ধ। OD কে পরিমাপ করে পাই, $OD = 2$ সে.মি.।

২-এর সমাধান:

মনে করি, ABC একটি ত্রিভুজ যার $AC = 6.5$ সে.মি., $AB = 7$ সে.মি. এবং $BC = 7.5$ সে.মি.। ABC ত্রিভুজের বহির্বৃত্ত আঁকতে হবে।







অঙ্কনের বিবরণ:

ধাপ-১: AB ও AC বাহুদ্বয়কে যথাক্রমে D ও F পর্যন্ত বর্ধিত করি।

ধাপ-২: $\angle DBC$ ও $\angle FCB$ এর সমদ্বিখণ্ডক BM এবং CN আঁকি। মনে করি, E তাদের ছেদবিন্দু।

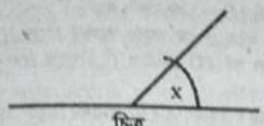
ধাপ-৩: E থেকে BC এর উপর EH লম্ব আঁকি। মনে করি, তা BC কে H বিন্দুতে ছেদ করে।

ধাপ-৪: E কে কেন্দ্র করে EH এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকি। অঙ্কিত বৃত্তই নির্ণেয় বহিঃবৃত্ত।

ব্যাসার্ধ: HE হচ্ছে প্রাপ্ত বৃত্তের ব্যাসার্ধ। HE কে পরিমাপ করে পাই, $HE = 6$ সে.মি.।

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৪

১।



চিত্র

$x = 60°$ হলে $\angle x$ এর সম্পূরক কোণের অর্ধেকের মান কত?

(ক) $30°$ (খ) $60°$
(গ) $120°$ (ঘ) $180°$

২। i. যেকোনো দৈর্ঘ্যের তিনটি বাহু দ্বারা ত্রিভুজ অঙ্কন করা যায় না।
ii. শুধুমাত্র ব্যাসার্ধ জানা থাকলে বৃত্ত অঙ্কন করা যায়।
iii. বৃত্তের কোন বিন্দুতে একটি মাত্র স্পর্শক আঁকা যায়।

উপরের বাক্যগুলোর কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii (খ) ii ও iii
(গ) i ও iii (ঘ) i, ii ও iii

৩। কোনো ত্রিভুজের দুইটি কোণ ও তাদের বিপরীত বাহুদ্বয়ের অন্তর দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি আঁক।

৪। কোনো ত্রিভুজের ভূমি, ভূমি সংলগ্ন কোণদ্বয়ের অন্তর ও অপর বাহুদ্বয়ের সমষ্টি দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি আঁক।

৫। ভূমি, শিরঃকোণ ও অপর কোণদ্বয়ের সমষ্টি দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি আঁক।

৬। ভূমি, শিরঃকোণ ও অপর কোণদ্বয়ের অন্তর দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি আঁক।

৭। সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও অপর দুই বাহুর সমষ্টি দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি আঁক।

৮। ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ, উচ্চতা ও অপর দুই বাহুর সমষ্টি দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি আঁক।

৯। সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও অপর দুইটি বাহুর অন্তর দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি আঁক।

১০। এমন একটি বৃত্ত অঙ্কন কর যা একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে এর কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুতে এবং অপর একটি বৃত্তকে স্পর্শ করে।

১১। এমন একটি বৃত্ত অঙ্কন কর যা একটি নির্দিষ্ট বৃত্তকে এর কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুতে এবং অপর একটি বৃত্তকে কোনো বিন্দুতে স্পর্শ করে।

১২। এমন একটি বৃত্ত অঙ্কন কর যা একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে কোনো বিন্দুতে এবং একটি নির্দিষ্ট বৃত্তকে এর কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শ করে।

১৩। ভিন্ন ভিন্ন ব্যাসার্ধবিশিষ্ট এরূপ তিনটি বৃত্ত আঁক যেন তারা পরস্পরকে বহিঃস্পর্শ করে।

১৪। O কেন্দ্রবিশিষ্ট কোনো বৃত্তের AB জ্যা এর P যেকোনো বিন্দু। P বিন্দু দিয়ে একটি জ্যা CD অঙ্কন করতে হবে। যেন $CP^2 = AP.PB$ হয়।

১৫। সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি 5 সে.মি. এবং সমান বাহুর দৈর্ঘ্য 6 সে.মি.।

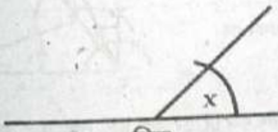
(ক) ত্রিভুজটি অঙ্কন কর।

(খ) ত্রিভুজটির পরিবৃত্ত অঙ্কন করে ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

(গ) এমন একটি বৃত্ত অঙ্কন কর যা পূর্বে অঙ্কিত পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান একটি বৃত্তকে P বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু Q দিয়ে যায়।

অনুশীলনী-৪ এর সমাধান

১।



চিত্র

$\angle x = 60°$ হলে $\angle x$ এর সম্পূরক কোণের অর্ধেকের মান কত?

(ক) $30°$ (খ) $60°$ (গ) $120°$ (ঘ) $180°$

উত্তর: (খ) $60°$

ব্যাখ্যা:

$\angle x = 60°$ এর সম্পূরক কোণ $= 180° - 60° = 120°$

$\therefore \angle x$ এর সম্পূরক কোণের অর্ধেক $= \frac{120°}{2} = 60°$

২।

i. যেকোনো দৈর্ঘ্যের তিনটি বাহু দ্বারা ত্রিভুজ অঙ্কন করা যায় না।
ii. শুধুমাত্র ব্যাসার্ধ জানা থাকলে বৃত্ত অঙ্কন করা যায়।
iii. বৃত্তের কোনো বিন্দুতে একটি মাত্র স্পর্শক আঁকা যায়।

উপরের বাক্যগুলোর কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii (খ) ii ও iii
(গ) i ও iii (ঘ) i, ii ও iii

উত্তর: (ঘ) i, ii ও iii

ব্যাখ্যা:

(i) নং সত্য কারণ, ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর দৈর্ঘ্যের সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বড় না হলে ত্রিভুজ অঙ্কন সম্ভব নয়। যেমন (a) 1, 3 ও 4 (b) 2, 8 ও 4 (c) 5, 7, ও 13 ইত্যাদি বাহুগুলো দ্বারা ত্রিভুজ অঙ্কন সম্ভব নয়।

(ii) নং সত্য নয় কারণ, বৃত্ত অঙ্কন করতে হলে কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ অবশ্যই জানতে হবে। কেন্দ্র ছাড়া শুধু ব্যাসার্ধ দিয়ে বৃত্ত অঙ্কন সম্ভব নয়।

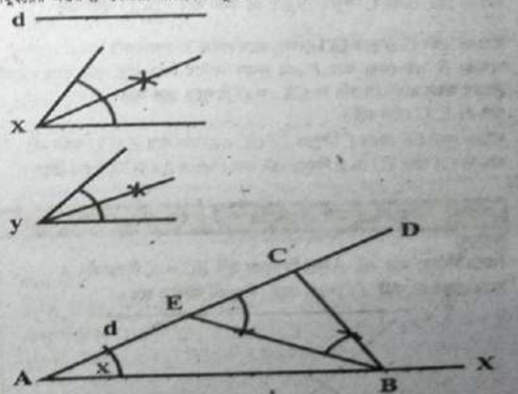
(iii) নং সত্য কারণ, বৃত্তের কোনো বিন্দুতে একটিমাত্র স্পর্শক অঙ্কন করা যায়

[*Ref:* মাধ্যমিক গণিত-অনুশিক্ষাক-১, পৃষ্ঠা-১৪২]

৩। কোনো ত্রিভুজের দুইটি কোণ ও তাদের বিপরীত বাহুদ্বয়ের অন্তর দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি আঁক।

সমাধান:

বিশেষ নির্বচন: মনে করি, ABC ত্রিভুজের দুইটি কোণ $\angle x$ ও $\angle y$ এবং বিপরীত বাহুদ্বয়ের অন্তর d দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কন করতে হবে।



অঙ্কনের বিবরণ:

ধাপ-১: যেকোনো রশ্মি AX এর A বিন্দুতে $\angle x$ এর সমান করে $\angle DAX$ কোণ অঙ্কন করি।

ধাপ-২: AD থেকে d এর সমান করে AE অংশ কেটে নিই।

ধাপ-৩: AE রেখার E বিন্দুতে $\frac{1}{2}(\angle x + \angle y)$ এর সমান করে $\angle DEB$ কোণ অঙ্কন করি। মনে করি, EB রেখা AX কে B বিন্দুতে ছেদ করে।

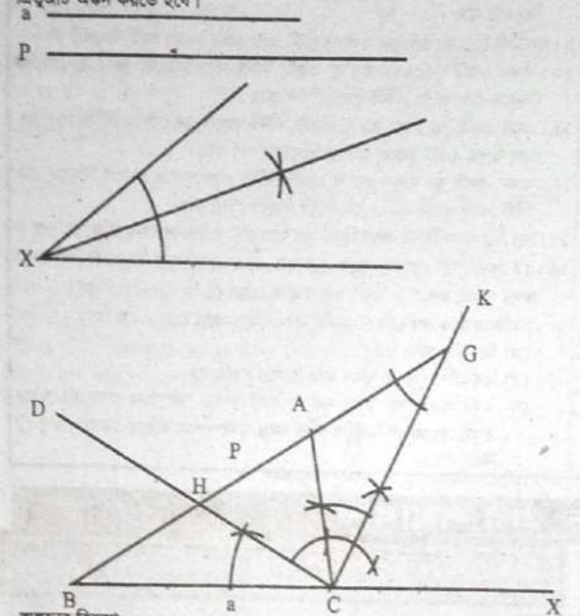
ধাপ-৪: B বিন্দুতে $\angle DEB$ এর সমান করে $\angle CBE$ অঙ্কন করি। মনে করি, BC রেখা AD রেখাংশকে C বিন্দুতে ছেদ করে।

ধাপ-৫: B, C যোগ করি। তাহলে, ABC-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

৪। কোনো ত্রিভুজের ভূমি, ভূমি সংলগ্ন কোণদ্বয়ের অন্তর ও অপর বাহুদ্বয়ের সমষ্টি দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি আঁক।

সমাধান:

বিশেষ নির্বচন: মনে করি, ABC ত্রিভুজের ভূমি $BC = a$, ভূমি সংলগ্ন কোণ $\angle B$ ও $\angle C$ এর অন্তর $\angle x$ এবং অপর বাহুদ্বয়ের সমষ্টি P দেওয়া আছে ABC ত্রিভুজটি অঙ্কন করতে হবে।



অঙ্কনের বিবরণ:

ধাপ-১: যেকোনো রশ্মি BX থেকে a এর সমান করে BC কেটে নিই।

ধাপ-২: BC রেখার C বিন্দুতে $\frac{1}{2}\angle x$ এর সমান করে $\angle BCD$ অঙ্কন করি।

ধাপ-৩: এখন C বিন্দুতে CD রেখার সাথে লম্ব CK অঙ্কন করি।

ধাপ-৪: B কে কেন্দ্র করে P এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে CK এর উপর একটি বৃত্তচাপ অঙ্কন করি মনে করি তা CK কে G বিন্দুতে ছেদ করে।

ধাপ-৫: B, G যোগ করি।

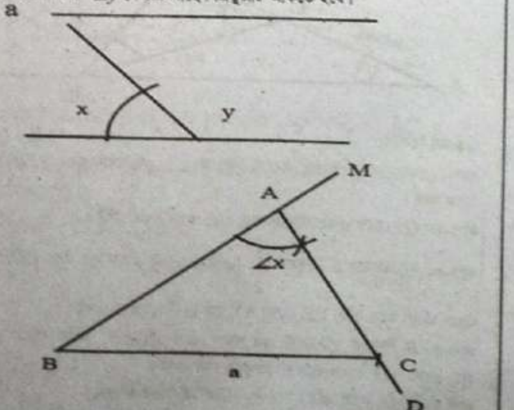
ধাপ-৬: এখন CK রেখার C বিন্দুতে $\angle BGC$ এর সমান করে $\angle ACG$ অঙ্কন করি।

ধাপ-৭: CA রেখা BG কে A বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে ΔABC-ই নির্ণেয় ত্রিভুজ।

৫। ভূমি, শিরঃকোণ ও অপর কোণদ্বয়ের সমষ্টি দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি আঁক।

সমাধান:

বিশেষ নির্বচন: মনে করি, ABC ত্রিভুজের ভূমি BC = a, শিরঃকোণ $A = \angle x$ ও অপর কোণদ্বয়ের সমষ্টি $\angle y$ দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।



অঙ্কনের বিবরণ:

ধাপ-১: BM যেকোনো রশ্মি নিই।

ধাপ-২: BM এর উপর যেকোনো একটি বিন্দু A নিই।

ধাপ-৩: A বিন্দুতে $\angle BAD = \angle x$ অঙ্কন করি।

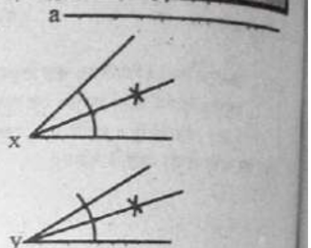
ধাপ-৪: B কে কেন্দ্র করে a এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে AD রেখার উপর একটি বৃত্তচাপ অঙ্কন করি এবং তা AD রেখাকে C বিন্দুতে ছেদ করে তাহলে ABC-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

ধাপ-৫: B, C যোগ করি। অতএব ΔABC নির্ণেয় ত্রিভুজ অঙ্কিত হলো।

৬। ভূমি, শিরঃকোণ ও অপর কোণদ্বয়ের অন্তর দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি আঁক।

সমাধান:

বিশেষ নির্বচন: মনে করি ABC ত্রিভুজের ভূমি $BC = a$, শিরঃকোণ $\angle A = \angle x$ অপর কোণদ্বয়ের অন্তর $\angle y$ দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কন করতে হবে।



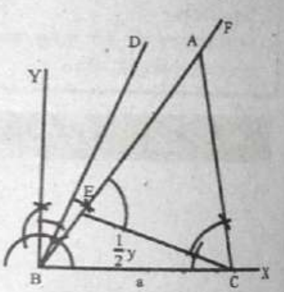
অঙ্কনের বিবরণ:

ধাপ-১: যেকোনো রশ্মি BX হতে ভূমি a এর সমান করে BC অংশ কেটে নিই।

ধাপ-২: BC বিন্দুতে BC এর উপর BY লম্ব অঙ্কন লম্ব অঙ্কন করি।

ধাপ-৩: B বিন্দুতে $\frac{1}{2}\angle x$ এর সমান করে $\angle YBD$ অঙ্কন করি এবং $\frac{1}{2}\angle y$ এর সমান করে $\angle DBF$ অঙ্কন করি।

ধাপ-৪: C বিন্দুতে $\frac{1}{2}\angle y$ এর সমান করে $\angle BCE$ অঙ্কন করি। CE রেখা BF রেখাকে E বিন্দুতে ছেদ করে।

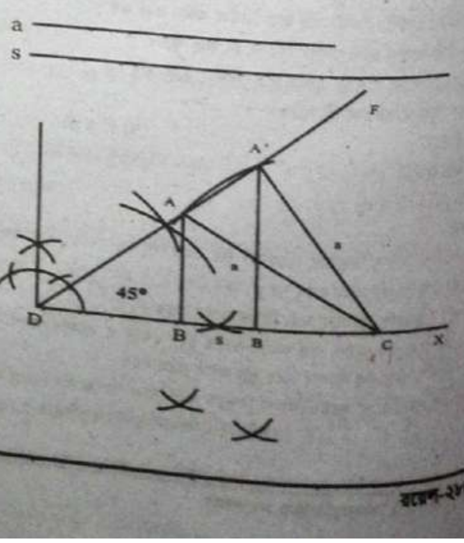


ধাপ-৫: আবার C বিন্দুতে $\angle FEC$ এর সমান করে $\angle ECA$ কোণ অঙ্কন করি। CA রেখা BF রেখাকে A বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে ABC-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

৭। সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও অপর দুই বাহুর সমষ্টি দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি আঁক। (VI)

সমাধান:

বিশেষ নির্বচন: মনে করি, সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ a এবং অপর দুই বাহুর সমষ্টি s দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কন করতে হবে।



অঙ্কনের বিবরণ:

ধাপ-১: যেকোনো রশ্মি DX থেকে s এর সমান করে DC অংশ কেটে নিই।

ধাপ-২: D বিন্দুতে $\angle CDF = 45°$ কোণ অঙ্কন করি।

ধাপ-৩: C কে কেন্দ্র করে a এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ অঙ্কন করি। মনে করি, বৃত্তচাপটি DF রেখাকে A ও A′ বিন্দুতে ছেদ করে।

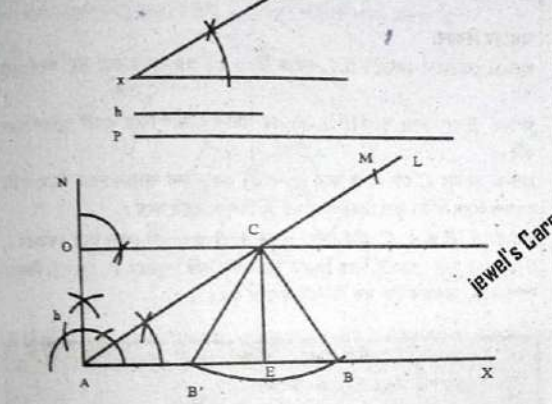
ধাপ-৪: C, A ও C, A′ যোগ করি।

ধাপ-৫: এখন CD রেখার উপর A ও A′ হতে যথাক্রমে $AB \perp CD$ এবং $A'B' \perp CD$ আঁকি। তাহলে ΔABC ও $\Delta A'BC$-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

৮। ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ, উচ্চতা ও অপর দুই বাহুর সমষ্টি দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি আঁক।

সমাধান:

বিশেষ নির্বচন: মনে করি, ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ $\angle x$, উচ্চতা h ও অপর দুই বাহুর সমষ্টি p দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কন করতে হবে।



অঙ্কনের বিবরণ:

ধাপ-১: যেকোনো রশ্মি AX-এর A বিন্দুতে $\angle x$ এর সমান করে $\angle LAX$ অঙ্কন করি।

ধাপ-২: AL থেকে P এর সমান করে AM অংশ কেটে নিই।

ধাপ-৩: $AN \perp AX$ অঙ্কন করি।

ধাপ-৪: AN থেকে h এর সমান করে AO অংশ কেটে নিই।

ধাপ-৫: O বিন্দুতে $OC \parallel AX$ অঙ্কন করি। OC রেখা AL কে C বিন্দুতে ছেদ করে।

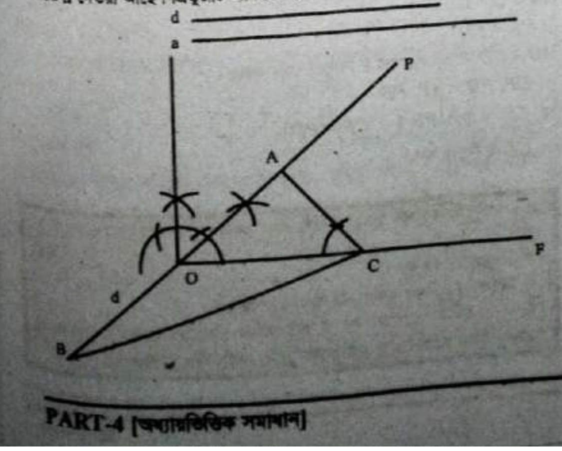
ধাপ-৬: C কে কেন্দ্র করে CM এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ অঙ্কন করি যা AX কে B ও B' বিন্দুতে ছেদ করে।

ধাপ-৭: C, B ও C, B' যোগ করি। তাহলে, ABC ও AB′C উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

৯। সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও অপর দুইটি বাহুর অন্তর দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি আঁক।

সমাধান:

বিশেষ নির্বচন: মনে করি, একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ a ও অপর দুই বাহুর অন্তর d দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।



অঙ্কনের বিবরণ:

ধাপ-১: যেকোনো রশ্মি OE এর O বিন্দুতে $\angle POF = 45°$ আঁকি।

ধাপ-২: PO কে B পর্যন্ত বর্ধিত করি যেন $OB = d$ হয়।

ধাপ-৩: B বিন্দুকে কেন্দ্র করে a-এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ আঁকি যেন তা OF-কে C বিন্দুতে ছেদ করে।

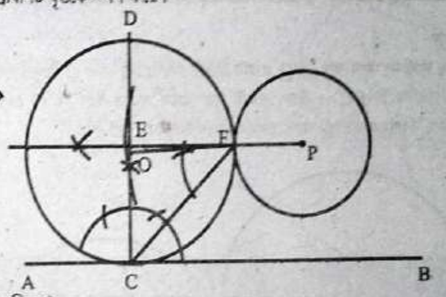
ধাপ-৪: B, C যোগ করি।

ধাপ-৫:- C বিন্দুতে $\angle OCA = \angle COP$ অঙ্কন করি যেন CA রেখা OP কে A বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে, ABC-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ হবে।

১০। এমন একটি বৃত্ত অঙ্কন কর যা একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে এর কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুতে এবং অপর একটি বৃত্তকে স্পর্শ করে। (VI)

সমাধান:

বিশেষ নির্বচন: মনে করি, AB রেখার C একটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং P কেন্দ্রবিশিষ্ট অপর একটি বৃত্ত। এমন একটি বৃত্ত অঙ্কন করতে হবে যা AB কে C বিন্দুতে এবং P কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তকে স্পর্শ করে।



অঙ্কনের বিবরণ:

ধাপ-১: C বিন্দুতে AB এর সাথে লম্ব রেখা DC অঙ্কন করি।

ধাপ-২: P বিন্দু হতে DC এর উপর PE লম্ব আঁকি। PE রেখাটি DC কে E বিন্দুতে এবং P কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তকে F বিন্দুতে ছেদ করে।

ধাপ-৩: C, F যোগ করি।

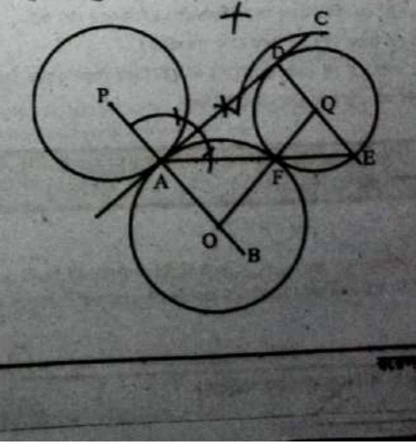
ধাপ-৪: এখন F বিন্দুতে $\angle ECF = \angle CFO$ আঁকি। FO রেখা EC রেখাকে O বিন্দুতে ছেদ করে।

ধাপ-৫: O কে কেন্দ্র করে OC বা OF এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকি। তাহলে O- কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তটি নির্ণেয় বৃত্ত।

১১। এমন একটি বৃত্ত অঙ্কন কর যা একটি নির্দিষ্ট বৃত্তকে এর কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুতে এবং অপর একটি বৃত্তকে কোনো বিন্দুতে স্পর্শ করে।

সমাধান:

বিশেষ নির্বচন: মনে করি, P কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে A একটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং Q কেন্দ্রবিশিষ্ট অপর একটি বৃত্ত। এমন একটি বৃত্ত অঙ্কন করতে হবে যা P কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তকে A বিন্দুতে এবং Q কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তকে কোনো বিন্দুতে স্পর্শ করে।



অঙ্কনের বিবরণ:

ধাপ-১: P, A যোগ করি এবং B পর্যন্ত বর্ধিত করি এবং বৃত্তের A বিন্দুতে একটি স্পর্শক AC অঙ্কন করি।

ধাপ-২: এখন Q হতে AC এর উপর লম্ব QD অঙ্কন করি এবং DQ কে E পর্যন্ত বর্ধিত করি যেন উহা Q কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তকে E বিন্দুতে ছেদ করে।

ধাপ-৩: A, E যোগ করি। AE রেখা Q কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তকে F বিন্দুতে ছেদ করে।

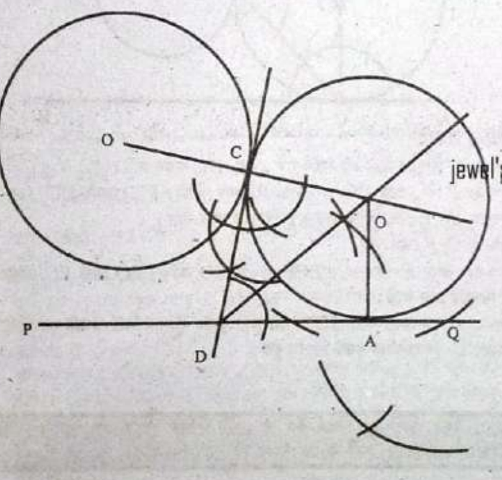
ধাপ-৪: Q, F যোগ করি। এবং QF রেখাকে O পর্যন্ত বর্ধিত করি। QO রেখাটি AB রেখাকে O' বিন্দুতে ছেদ করে।

ধাপ-৫: O কে কেন্দ্র করে OA বা OF এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকি। তাহলে O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তটিই নির্ণেয় বৃত্ত।

১২। এমন একটি বৃত্ত অঙ্কন কর যা একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে কোনো বিন্দুতে এবং একটি নির্দিষ্ট বৃত্তকে এর কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শ করে। (VVI)

সমাধান:

বিশেষ নির্বচন: মনে করি, PQ একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা এবং O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে একটি নির্দিষ্ট বিন্দু C। এমন একটি বৃত্ত অঙ্কন করতে হবে যা O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তকে C বিন্দুতে ও PQ সরলরেখাকে কোণ বিন্দুতে স্পর্শ করে।



অঙ্কনের বিবরণ:

ধাপ-১: O, C যোগ করি।

ধাপ-২: C বিন্দুতে CD স্পর্শক অঙ্কন করি। যেন তা PQ কে D বিন্দুতে ছেদ করে।

ধাপ-৩: $\angle CDQ$ এর সমদ্বিখণ্ডক অঙ্কন করি।

ধাপ-৪: OC কে বর্ধিত করায় তা সমদ্বিখণ্ডককে O' বিন্দুতে ছেদ করে।

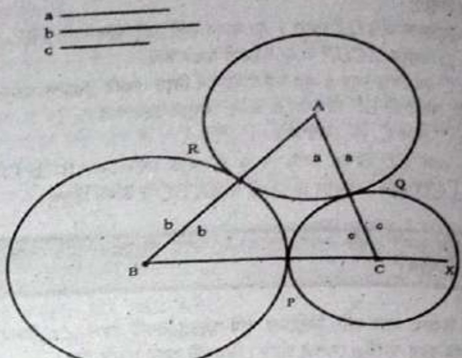
ধাপ-৫: O' থেকে PQ এর উপর $O'A$ লম্ব আঁকি।

ধাপ-৬: এখন O' কে কেন্দ্র করে $O'A$ বা $O'C$ এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে ABC বৃত্ত অঙ্কন করি। তাহলে ABC-ই উদ্দিষ্ট বৃত্ত।

১৩। ভিন্ন ভিন্ন ব্যাসার্ধবিশিষ্ট এরূপ তিনটি বৃত্ত আঁক যেন তারা পরস্পরকে বহিঃস্পর্শ করে।

সমাধান:

বিশেষ নির্বচন: মনে করি, a, b, c তিনটি নির্দিষ্ট রেখাংশ। এই তিনটি রেখাংশ কে ব্যাসার্ধ হিসেবে নিয়ে এমন তিনটি বৃত্ত অঙ্কন করতে হবে যারা পরস্পরকে বহিঃস্পর্শ করে।



অঙ্কনের বিবরণ:

ধাপ-১: যেকোনো রেখাংশ BX থেকে $(b + c)$ এর সমান করে BC অংশ কেটে নিই।

ধাপ-২: B কে কেন্দ্র করে $(b + a)$ এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ অঙ্কন করি।

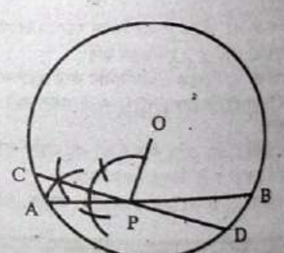
ধাপ-৩: আবার C কে কেন্দ্র করে $(c + a)$ এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে আরো একটি বৃত্তচাপ অঙ্কন করি। বৃত্তচাপদ্বয় পরস্পর A বিন্দুতে ছেদ করে।

ধাপ-৪: A, B ও A, C যোগ করি। এখন A, B ও C কে কেন্দ্র করে যথাক্রমে a, b ও c এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে তিনটি বৃত্ত অঙ্কন করি। বৃত্তত্রয় P, Q ও R বিন্দুতে স্পর্শ করে। অতএব উক্ত বৃত্ত তিনটিই নির্ণেয় বৃত্ত।

১৪। O কেন্দ্রবিশিষ্ট কোনো বৃত্তের AB জ্যা এর P যেকোনো বিন্দু। P বিন্দু দিয়ে অপর একটি জ্যা CD অঙ্কন করতে হবে। যেন $CP^2 = AP.PB$ হয়।

সমাধান:

বিশেষ নির্বচন: মনে করি O কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্তে AB জ্যা এর উপর P যেকোনো একটি বিন্দু। P বিন্দু দিয়ে অপর একটি জ্যা CD অঙ্কন করতে হবে যেন, $CP^2 = AP.PB$ হয়।



অঙ্কনের বিবরণ:

ধাপ-১: O, P যোগ করি।

ধাপ-২: P বিন্দুতে OP এর উপর CP লম্ব লম্বন করি। লম্বটি বৃত্তকে C বিন্দুতে এবং CP রেখার বর্ধিতাংশ বৃত্তকে D বিন্দুতে ছেদ করে। সুতরাং CD-ই নির্ণেয় জ্যা।

প্রমাণ: $OP \perp CD$

$\therefore CP = PD.$

AB ও CD জ্যাদ্বয় পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করছে।

$\therefore CP.\ PD = AP.\ PB$

বা, $CP^2 = AP.\ PB$ $[\because CP = PD]$

$\therefore$ CD-ই নির্ণেয় জ্যা।

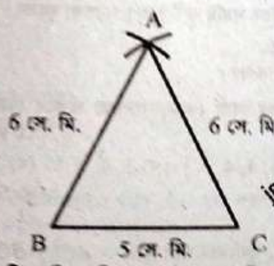
১৫। সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি 5 সে.মি. এবং সমান সমান বাহুর দৈর্ঘ্য 6 সে.মি.। (VI)

(ক) ত্রিভুজটি অঙ্কন কর।

(খ) ত্রিভুজটির পরিবৃত্ত অঙ্কন করে ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

(গ) এমন একটি বৃত্ত অঙ্কন কর যা পূর্বে অঙ্কিত পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান এবং বৃত্তকে P বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু Q দিয়ে যায়।

(ক)-এর সমাধান:



মনে করি, ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের AB ও AC বাহুর দৈর্ঘ্য 6 সে.মি. ও ভূমি $BC = 5$ সে.মি.।

(খ)-এর সমাধান:

বিশেষ নির্বচন: মনে করি, ক হতে প্রাপ্ত ত্রিভুজটির পরিবৃত্ত অঙ্কন করতে হবে।

অঙ্কনের বিবরণ:

ধাপ-১: AB ও AC রেখাংশের লম্বসমদ্বিখণ্ডক যথাক্রমে EM ও FN রেখাংশ আঁকি। মনে করি, তারা পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে।

ধাপ-২: A, O যোগ করি।

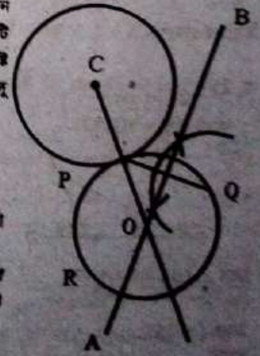
ধাপ-৩: O কে কেন্দ্র করে OA এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকি।

তাহলে, বৃত্তটি A, B ও C বিন্দুগামী হবে এবং এই বৃত্তটিই ΔABC এর নির্ণেয় পরিবৃত্ত।

পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ নির্ণয়: ΔABC এর পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ AO. AO কে পরিমাপ করে পাই, AO = 3.২ সে. মি. (প্রায়)

(গ)-এর সমাধান:

মনে করি, 'খ' থেকে প্রাপ্ত পরিবৃত্তের সমান ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র C। এমন একটি বৃত্ত অঙ্কন করতে হবে যা C কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তকে P বিন্দুতে ও বৃত্তের বহিঃস্থ Q বিন্দু দিয়ে যায়।



অঙ্কনের বিবরণ:

ধাপ-১: P, Q যোগ করি।

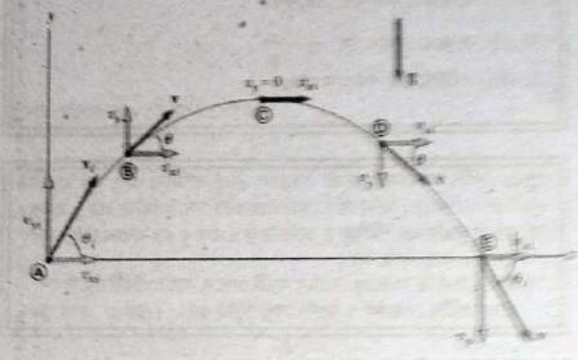
ধাপ-২: PQ এর লম্বদ্বিখণ্ডক AB আঁকি।

ধাপ-৩: C, P যোগ করে বর্ধিত করি যেন তা AB রেখাংশকে O বিন্দুতে ছেদ করে।

ধাপ-৪: O কে কেন্দ্র করে OP বা OQ এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত PQR বৃত্তই নির্ণেয় বৃত্ত।

৯ বাস্তব জীবনে এ অধ্যায়ের প্রয়োগ

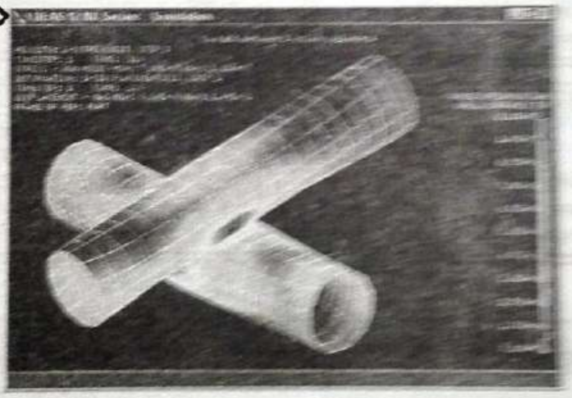
একচলক বিশিষ্ট সরল কিংবা দ্বিঘাত সমীকরণ যে শুধুমাত্র পাঠ্যবইয়ের কিছু গাণিতিক [illegible] সমীকরণ, বিজ্ঞান-ব্যবসা ও প্রকৌশলে ব্যাপকভাবে ব্যবহৃত হয়। [illegible] করা হয়। U (ইউ) আকৃতির প্যারাবোলা একটি ঝর্ণাধারার গতিপথ, একটি [illegible] হেডলাইট সহ এরূপ কাঠামো গঠন করতে ব্যবহৃত হয়। আবার [illegible] যানের গতিপথ নির্ণয়ের এই দ্বিঘাত সমীকরণ ব্যবহার হয়।



চিত্র- ১: পরাবৃত্তে দ্বিঘাত সমীকরণের ব্যবহার

চিত্র- ২: [illegible]

দ্বিঘাত সমীকরণ ব্যবসার লাভ-ক্ষতির পূর্বাভাস, চলমান বস্তুর সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন [illegible] বিবেচনা করা হয় যেমন: গ্রহ নক্ষত্রের গতিপথ, স্যাটেলাইটের কক্ষপথ, বিমানের গতিপথ [illegible]



চিত্র- ৩: Finite Element এ [illegible]

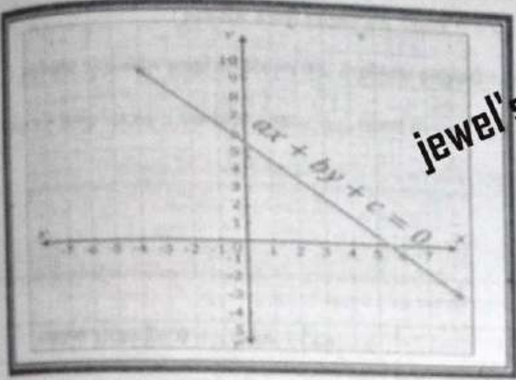
আবার, একটি বস্তুকণাকে উপরের দিকে 10m/s বেগে নিক্ষেপ করলে [illegible] আমরা সহজেই কণাটির সর্বোচ্চ উচ্চতা, সর্বোচ্চ উচ্চতায় পৌঁছার সময়, [illegible]
তাছাড়া উচ্চতর শিক্ষায় যেমন Finite Element Method (FEM) সহ [illegible]

"The best preparation for tomorrow
is doing your best today".

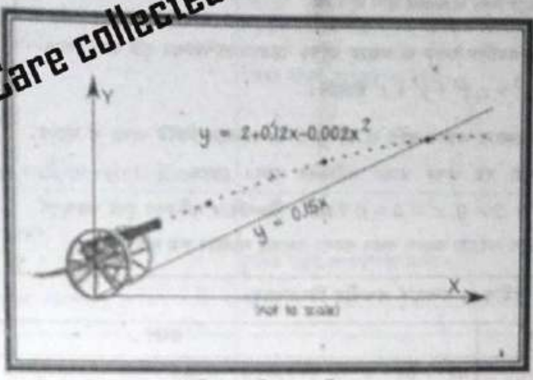
-H. Jackson Brown, Jr.

৫ সমীকরণ [Equation]

অনুশীলনী-৫.১



চিত্র-১: সরল সমীকরণ



চিত্র-২: দ্বিঘাত সমীকরণ

ভূমিকা [Introduction]

Brahmagupta

সমীকরণের অজ্ঞাত রাশিকেই চলক বলে। সাধারণত ইংরেজি বর্ণমালার ছোট হাতের শেষের দিকের অক্ষর x, y, z কে চলক হিসেবে এবং প্রথম দিকের অক্ষর a, b, c কে ধ্রুবক হিসেবে ব্যবহার করা হয়।

যে সমীকরণে একটি মাত্র অজ্ঞাত রাশি থাকে, তাকে এক চলকবিশিষ্ট সমীকরণ বা সরল সমীকরণ বলা হয়।

এক চলক বিশিষ্ট সমীকরণ, বিজ্ঞান-বাণিজ্য ও প্রকৌশলে ব্যাপকভাবে ব্যবহৃত হয়। দ্বিঘাত সমীকরণ ব্যবসার লাভ-ক্ষতির পূর্বাভাস, চলমান বস্তুর সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন অবস্থানসহ গতিপথ ইত্যাদি নির্ণয়ে ব্যবহৃত হয়।

সপ্তম শতকের বিখ্যাত গণিতবিদ ও জ্যোতির্বিদ ব্রহ্মগুপ্ত (Brahmagupta খ্রিষ্টপূর্ব 598 রাজস্থান, ভারত- খ্রিষ্টপূর্ব 660/70) ভারতের রাজস্থানে জন্মগ্রহণ করেন। গণিতে তাঁর সবচেয়ে বড় অবদান হলো শূন্যের ধারণা।

এছাড়া তিনি দেখান যে, দ্বিঘাত সমীকরণ (যেমন: $x^2 = 9$) এর দুইটি সম্ভাব্য সমাধান আছে যার একটি ঋণাত্মক হতে পারে কারণ $3^2 = 9$ এবং $(-3)^2 = 9$। আরও বলতে গেলে তিনি দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান নির্ণয়ের কৌশল আবিষ্কার করেন যা গণিতবিদরা তার মৃত্যুর পরবর্তী ১০০০ বছরের মধ্যে (১৬৫৭ সালের পূর্ব পর্যন্ত) পারে নাই।

বোর্ড প্রশ্নাবলির বিশ্লেষণ [Board Questions Analysis]

এই অধ্যায় থেকে বিভিন্ন বোর্ডে বিগত দু'বছরের এসএসসি পরীক্ষায় মোট ১টি সৃজনশীল প্রশ্ন ও ৪৬টি বহুনির্বাচনি প্রশ্ন এসেছে। নিচের 'Board Analysis' অংশে এই অধ্যায় থেকে কোন সালে কোন বোর্ডে কতটি প্রশ্ন হয়েছে তা দেওয়া আছে।

সৃজনশীল প্রশ্ন

সাল \ বোর্ড	ঢাকা	রাজশাহী	কুমিল্লা	যশোর	চট্টগ্রাম	বরিশাল	সিলেট	দিনাজপুর
২০১৬	–	–	–	–	–	–	–	১
২০১৫	–	–	–	–	–	–	–	–

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

সাল \ বোর্ড	ঢাকা	রাজশাহী	কুমিল্লা	যশোর	চট্টগ্রাম	বরিশাল	সিলেট	দিনাজপুর
২০১৬	৬	৫	৪	২	৩	৩	৩	৩
২০১৫	২	৩	১	১	৪	২	১	৩

মূল শব্দাবলি [Key Words]

সমীকরণ (*Equation*), অভেদ (*Identity*), একঘাত সমীকরণ (*Linear Equation*), দ্বিঘাত সমীকরণ (*Quadratic Equation*), আড়গুণন/বজ্রগুণন (*Cross Multiplication*), যোজন বিয়োজন (*Componendo-dividendo*)।

এ অধ্যায়ের আলোচ্যসূচি

- চলকের ধারণা
- এক চলক সম্বলিত দ্বিঘাত সমীকরণ ও তার সমাধান
- দ্বিঘাত সমীকরণ এর মূলদ্বয়ের ধরণ ও প্রকৃতি
- মূল চিহ্ন সংবলিত সমীকরণ
- দুই চলক বিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ জোট
- সূচক সমীকরণ
- দ্বিঘাত সহসমীকরণের ব্যবহার
- দুই চলক বিশিষ্ট সূচক সমীকরণ জোট
- লেখচিত্রের সাহায্যে দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান

প্রাথমিক আলোচনা

চলক (Variable): বাস্তব জীবনে অনির্দিষ্ট কোনো বস্তু, সংখ্যা বা বস্তুসমূহকে বুঝানোর জন্য আমরা x, y, z ইত্যাদি প্রতীক ব্যবহার করি। এই রকম প্রতীক বা প্রতীকসমূহকে চলক বা অজ্ঞাত রাশি বলে।

রাশিমালা: একাধিক চলক বা অজ্ঞাত রাশির সমন্বয়ে রাশিমালার সৃষ্টি হয়। যেমন- $2x + y, x^2 + z, x^2 + y^2 + z^2$ ইত্যাদি।

সমীকরণ: কোনো অজ্ঞাত রাশি বা রাশিমালা যখন কোনো নির্দিষ্ট সংখ্যা বা মানের সমান লেখা হয় তখন তাকে সমীকরণ বলে। যেমন, $x + y = 2$, $x^2 + x^3 + 2 = 0, x^2 - 4 = 0$ ইত্যাদি। বীজগণিতে সমীকরণ খুবই গুরুত্বপূর্ণ বিষয়। ইহার সাহায্যে অনেক বাস্তব সমস্যা সহজেই সমাধান করা যায়।

এক চলকের দ্বিঘাত সমীকরণ: যে বীজগাণিতিক সমীকরণে একটি মাত্র চলক থাকে এবং এর ঘাত বা পাওয়ারের সর্বোচ্চ মান 2 হয় তখন তাকে এক চলকের দ্বিঘাত সমীকরণ বলা হয়। যেমন- $x^2 + 2x = 0, x^2 - 3x + 6 = 0, x^2 - 1 = 0$, $y^2 - 9 = 0$ ইত্যাদি এক চলকের দ্বিঘাত সমীকরণ।

দ্বিঘাত সমীকরণের আদর্শরূপ: এক চলকবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণের আদর্শরূপ, $ax^2 + bx + c = 0$ যেখানে a, b, c বাস্তব সংখ্যা এবং a এর মান কখনই শূন্য হবে না।

দ্বিঘাত সমীকরণ সম্পর্কে লক্ষণীয় বিষয়সমূহ:

শর্ত	প্রমাণ	$ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের ফলাফল
$a = 0$	$ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণে $a = 0$ হলে আমরা পাই, $0.x^2 + bx + c = 0 \Rightarrow bx + c = 0$ যা এক ঘাতবিশিষ্ট সমীকরণ।	দ্বিঘাত সমীকরণ অস্তিত্বহীন হয়ে যায়
$c = 0$	$c = 0$ হলে পাই, $ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x(ax + b) = 0$ $\therefore x = 0$ অথবা, $ax + b = 0 \therefore x = -\dfrac{b}{a}$ $\therefore c = 0$ হলে দ্বিঘাত সমীকরণের একটি মূল অবশ্যই শূন্য (0) হবে।	দ্বিঘাত সমীকরণের একটি মূল অবশ্যই শূন্য হবে
$b = 0$	আবার, $b = 0$ হলে পাই, $ax^2 + c = 0$ যা একচলকের দ্বিঘাত সমীকরণ। $ax^2 = -c \Rightarrow x = \pm\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$ (ক) c ও a একই চিহ্নযুক্ত $x = \pm\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$ যা কাল্পনিক বা জটিল $\left[\because -\dfrac{c}{a} < 0\right]$ (খ) c ও a বিপরীত চিহ্নযুক্ত হলে, $x = \pm\sqrt{\left(-\dfrac{c}{a}\right)}$ যা বাস্তব $\left[\because -\dfrac{c}{a} < 0\right]$ সুতরাং বলা যায়, $b = 0$ অথবা $c = 0$ হলেও দ্বিঘাত সমীকরণে a এর মান কখনও শূন্য (0) হবে না।	মূলদ্বয় কাল্পনিক বা জটিল হবে যখন a ও c পরস্পর একই চিহ্নযুক্ত
$b = c = 0$	$b = 0$ এবং $c = 0$ হলে $a.x^2 + 0.x + 0 = 0 \Rightarrow ax^2 = 0 \therefore x = 0, 0$ সুতরাং দ্বিঘাত সমীকরণে $b = 0$ এবং $c = 0$ হলে মূলদ্বয় অবশ্যই শূন্য হবে।	সমীকরণের মূলদ্বয় অবশ্যই শূন্য হবে

দ্বিঘাত সমীকরণে সর্বদাই $a \neq 0$ শর্ত প্রযোজ্য

দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান:

$ax^2 + bx + c = 0$

$\Rightarrow a^2x^2 + a.bx + a.c = 0$ [উভয়পক্ষে a দ্বারা গুণ করে]

$\Rightarrow (ax)^2 + 2.ax.\dfrac{b}{2} + \left(\dfrac{b}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{b}{2}\right)^2 + ac = 0$

$\Rightarrow \left(ax + \dfrac{b}{2}\right)^2 = \dfrac{b^2}{4} - ac$

$\Rightarrow ax + \dfrac{b}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{b^2 - 4ac}{4}}$

বা, $ax = -\dfrac{b}{2} \pm \dfrac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$

$\therefore x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ .... (i)

$\therefore x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ এবং $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

[বি.দ্র.: উপরোক্ত দ্বিঘাত সমীকরণের সর্বপ্রথম সমাধান নির্ণয় করেন ভারতীয় গণিতবিদ শ্রী-ধর আচার্য।]

(i) নং সমীকরণে $b^2 - 4ac$ কে দ্বিঘাত সমীকরণটির নিশ্চায়ক বলে, কারণ ইহা সমীকরণটির মূলদ্বয়ের ধরন ও প্রকৃতি নির্ণয় করে।

দ্বিঘাত সমীকরণের মূলদ্বয়ের ধরণ ও প্রকৃতি

নিশ্চায়কের শর্ত	প্রমাণ	$ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের মূলের প্রকৃতি
$b^2-4ac>0$	(ধরি, $b^2-4ac=3$) হলে পাই, $x_1=\frac{-b+\sqrt{3}}{2a}$ এবং $x_2=\frac{-b-\sqrt{3}}{2a}$ $\sqrt{3}$ এর মান অমূলদ হওয়ায় এক্ষেত্রে মূলদ্বয়ের মান অমূলদ আবার, $b^2-4ac=4$ হলে, $x_1=\frac{-b+\sqrt{4}}{2a}$ এবং $x_2=\frac{-b-\sqrt{4}}{2a}$ $\therefore x_1=\frac{-b+2}{2a}$ এবং $x_2=\frac{-b-2}{2a}$ এক্ষেত্রে b^2-4ac এর মান $(4=2^2)$ পূর্ণবর্গ হওয়ায় মূলদ্বয়ের মান মূলদ সংখ্যা কিন্তু অসমান।	(ক) $b^2-4ac>0$ এবং পূর্ণবর্গ না হলে সমীকরণটির মূলদ্বয় বাস্তব, অসমান ও অমূলদ। (খ) $b^2-4ac>0$ এবং পূর্ণবর্গ হলে সমীকরণটির মূলদ্বয় বাস্তব, অসমান ও মূলদ।
$b^2-4ac=0$	$x_1=\frac{-b+0}{2a}$ এবং $x_2=\frac{-b-0}{2a}$ $\therefore x_1=\frac{-b}{2a}$ এবং $x_2=\frac{-b}{2a}$ সুতরাং $b^2-4ac=0$ হলে সমীকরণের মূলদ্বয় বাস্তব ও পরস্পর সমান হবে। এক্ষেত্রে, $x=\frac{-b}{2a},\frac{-b}{2a}$	মূলদ্বয় বাস্তব ও পরস্পর সমান।
$b^2-4ac<0$	(ধরি, $b^2-4ac=-5$) হলে পাই, যেহেতু $\sqrt{-5}$ এর মান কোনো বাস্তব সংখ্যা নয়। তাই মূলদ্বয় অবাস্তব বা জটিল সংখ্যা। আবার জটিল সংখ্যার ধর্মানুসারে $a+ib$ এর অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা $a-ib$। তাই, $-b+\sqrt{-5}$ এবং $-b-\sqrt{-5}$ পরস্পরের অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা। সুতরাং $b^2-4a<0$ অর্থাৎ ঋণাত্মক হলে মূলদ্বয় অবাস্তব হবে। এক্ষেত্রে মূলদ্বয় সবসময় দুইটি অনুবন্ধী জটিল বা কাল্পনিক সংখ্যা হয়।	মূলদ্বয় অবাস্তব অর্থাৎ দুইটি অনুবন্ধী জটিল বা কাল্পনিক সংখ্যা হয়।

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনমূলক কাজের সমাধান

কাজ: [পাঠ্যবই পৃষ্ঠা নং-৯১]

উপরের (ii) ও (iii) নং সূত্রের সাহায্যে $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণ হতে মূল x_1 এবং x_2 এর মান নির্ণয় কর যখন

(i) $b=0$, (ii) $c=0$, (iii) $b=c=0$,
(iv) $a=1$ এবং (v) $a=1, b=c=2p$

সমাধান:

আমরা জানি, $ax^2+bx+c=0$ হলে,

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ এবং } x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

(i) $b=0$ হলে,

$$x_1=\frac{-0+\sqrt{0^2-4ac}}{2a}=\frac{\sqrt{-4ac}}{2a} \text{ এবং } x_2=\frac{-0+\sqrt{0^2-4ac}}{2a}=\frac{\sqrt{-4ac}}{2a}$$

মন্তব্য: $ax^2+bx+c=0$ দ্বিঘাত সমীকরণে $b=0$ হলে সমীকরণের মূলদ্বয় কাল্পনিক বা জটিল সংখ্যা হবে যখন a ও c উভয়ই একই চিহ্ন বিশিষ্ট এবং বাস্তব হবে যদি a ও c বিপরীত চিহ্ন বিশিষ্ট হয়।

(ii) $c=0$ হলে,

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4.a.0}}{2a}=\frac{-b+\sqrt{b^2}}{2a}=\frac{-b+b}{2a}=\frac{0}{2a}=0$$

এবং

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4.a.0}}{2a}=\frac{-b-\sqrt{b^2}}{2a}=\frac{-b-b}{2a}=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}$$

অর্থাৎ $c=0$ হলে $x_1=0$ এবং $x_2=-\frac{b}{a}$

সুতরাং $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণে $c=0$ হলে একটি মূল অবশ্যই শূন্য (0) হবে।

(iii) $b=c=0$ হলে,

$$x_1=\frac{-0+\sqrt{0^2-4.a.0}}{2a}=\frac{0}{2a}=0 \text{ এবং } x_2=\frac{-0-\sqrt{0^2-4.a.0}}{2a}=\frac{0}{2a}=0$$

$\therefore b=c=0$ হলে $x_1=0$ এবং $x_2=0$

সুতরাং $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণে $b=c=0$ হলে উভয় মূলই শূন্য (0) হবে।

(iv) $a=1$ হলে,

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4.1.c}}{2.1}=\frac{-b+\sqrt{b^2-4c}}{2}$$

এবং, $x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4.1.c}}{2.1}=\frac{-b-\sqrt{b^2-4c}}{2}$

(v) $a=1$, $b=c=2p$ হলে,

$$x_1=\frac{-2p+\sqrt{(2p)^2-4.1.2p}}{2.1}=\frac{-2p+\sqrt{4p^2-8p}}{2}=\frac{-2p+\sqrt{4(p^2-2p)}}{2}=\frac{-2p+2\sqrt{p^2-2p}}{2}$$

$= \dfrac{2\left(-p+\sqrt{p^2-2p}\right)}{2}$

$= -p+\sqrt{p^2-2p}$

এবং, $x_2 = \dfrac{-2p-\sqrt{(2p)^2-4.1.2p}}{2.1}$

$= \dfrac{-2p-\sqrt{4p^2-8p}}{2}$

$= \dfrac{-2p-\sqrt{4(p^2-2p)}}{2}$

$= \dfrac{-2p-2\sqrt{p^2-2p}}{2}$

$= \dfrac{2\left(-p-\sqrt{p^2-2p}\right)}{2}$

$= -p-\sqrt{p^2-2p}$

অর্থাৎ, $a = 1, b = c = 2p$ হলে,

$x_1 = -p+\sqrt{p^2-2p}$

এবং $x_2 = -p-\sqrt{p^2-2p}$

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৫.১

সূত্রের সাহায্যে নিচের সমীকরণগুলোর সমাধান করো:

১। $2x^2+9x+9=0$	২। $3-4x-2x^2=0$	৩। $4x-1-x^2=0$
৪। $2x^2-5x-1=0$	৫। $3x^2+7x+1=0$	৬। $2-3x^2+9x=0$
৭। $x^2-8x+16=0$	৮। $2x^2+7x-1=0$	৯। $7x-2-3x^2=0$

অনুশীলনী-৫.১ এর সমাধান

সূত্রের সাহায্যে নিচের সমীকরণগুলোর সমাধান কর:

১। $2x^2+9x+9=0$

সমাধান:

$2x^2+9x+9=0$ কে দ্বিঘাত সমীকরণের আদর্শরূপ:

$ax^2+bx+c=0$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

$a=2, b=9$ এবং $c=9$

আমরা জানি, $ax^2+bx+c=0$ এর ক্ষেত্রে,

$x = \dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$\therefore x = \dfrac{-9\pm\sqrt{9^2-4.2.9}}{2.2}$

$= \dfrac{-9\pm\sqrt{81-72}}{4} = \dfrac{-9\pm\sqrt{9}}{4} = \dfrac{-9\pm 3}{4}$

তাহলে, $x_1 = \dfrac{-9+3}{4} = -\dfrac{6}{4} = -\dfrac{3}{2}$ এবং, $x_2 = \dfrac{-9-3}{4} = \dfrac{-12}{4} = -3$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x_1 = -\dfrac{3}{2}, x_2 = -3$

২। $3-4x-2x^2=0$

সমাধান:

$3-4x-2x^2=0$

বা, $-2x^2-4x+3=0$ ……… (i)

দ্বিঘাত সমীকরণের আদর্শরূপ $ax^2+bx+c=0$ এর সাথে (i) নং এর তুলনা করে পাই,

$a=-2\,;b=-4\,;c=3$

আমরা জানি,

$ax^2+bx+c=0$ এর ক্ষেত্রে,

$x = \dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$\therefore -2x^2-4x+3=0$ সমীকরণে,

$x = \dfrac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4.(-2).3}}{2(-2)}$

$= \dfrac{4\pm\sqrt{16+24}}{-4}$

$= \dfrac{4\pm\sqrt{40}}{-4}$

$= \dfrac{4\pm\sqrt{4\times10}}{-4}$

$= \dfrac{4\pm2\sqrt{10}}{-4} = \dfrac{2(2\pm\sqrt{10})}{-4} = \dfrac{2\pm\sqrt{10}}{-2}$

তাহলে, $x_1 = \dfrac{2+\sqrt{10}}{-2}$

$= \dfrac{2}{-2}+\dfrac{\sqrt{10}}{-2} = -1-\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

এবং $x_2 = \dfrac{2-\sqrt{10}}{-2}$

$= \dfrac{2}{-2}-\dfrac{\sqrt{10}}{-2} = -1+\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান,

$x_1 = -1-\dfrac{\sqrt{10}}{2}, x_2 = -1+\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

$4x - 1 - x^2 = 0$ (VI)

সমাধান:

$4x - 1 - x^2 = 0$

বা, $-x^2 + 4x - 1 = 0$ ……… (i)

দ্বিঘাত সমীকরণের আদর্শরূপ $ax^2 + bx + c = 0$ এর সাথে (i) নং এর তুলনা করে পাই,

$a = -1 ; b = 4 ; c = -1$

আমরা জানি, $ax^2 + bx + c = 0$ এর ক্ষেত্রে,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$\therefore -x^2 + 4x - 1 = 0$ সমীকরণে,

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4.(-1).(-1)}}{2(-1)}$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4}}{-2}$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{12}}{-2}$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{4 \times 3}}{-2}$$

$$= \frac{-4 \pm 2\sqrt{3}}{-2} = \frac{2(-2 \pm \sqrt{3})}{-2} = -(-2 \pm \sqrt{3})$$

তাহলে, $x_1 = -(-2 + \sqrt{3})$ এবং $x_2 = -(-2 - \sqrt{3})$

$\quad = 2 - \sqrt{3} \qquad\qquad = 2 + \sqrt{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = (2 - \sqrt{3}), (2 + \sqrt{3})$

৪। $2x^2 - 5x - 1 = 0$

সমাধান:

$2x^2 - 5x - 1 = 0$ কে দ্বিঘাত সমীকরণের আদর্শরূপ সমীকরণ $ax^2 + bx + c = 0$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

$a = 2 ; b = -5 ; c = -1$

আমরা জানি,

$ax^2 + bx + c = 0$ এর ক্ষেত্রে,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$\therefore 2x^2 - 5x - 1 = 0$ সমীকরণে,

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4.2(-1)}}{2.2}$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{25 + 8}}{4}$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{33}}{4}$$

তাহলে, $x_1 = \frac{1}{4}\left(5 + \sqrt{33}\right)$ এবং $x_2 = \frac{1}{4}\left(5 - \sqrt{33}\right)$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x_1 = \frac{1}{4}(5 + \sqrt{33}), x_2 = \frac{1}{4}(5 - \sqrt{33})$

৫। $3x^2 + 7x + 1 = 0$

সমাধান:

$3x^2 + 7x + 1 = 0$ কে দ্বিঘাত সমীকরণের আদর্শরূপ $ax^2 + bx + c = 0$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

$a = 3 ; b = 7 ; c = 1$

আমরা জানি,

$ax^2 + bx + c = 0$ এর ক্ষেত্রে, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

তাহলে, $3x^2 + 7x + 1 = 0$ এর ক্ষেত্রে,

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4.3.1}}{2.3}$$

$$= \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 12}}{6}$$

$$= \frac{-7 \pm \sqrt{37}}{6}$$

তাহলে, $x_1 = \frac{1}{6}(-7 + \sqrt{37})$ এবং $x_2 = \frac{1}{6}(-7 - \sqrt{37})$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান,

$x_1 = \frac{1}{6}(-7 + \sqrt{37}), x_2 = \frac{1}{6}(-7 - \sqrt{37})$

৬। $2 - 3x^2 + 9x = 0$

সমাধান:

$2 - 3x^2 + 9x = 0$

বা $-3x^2 + 9x + 2 = 0$

বা $3x^2 - 9x - 2 = 0$ ……… (i) [উভয় পক্ষকে (−1) দ্বারা গুণ করে]

দ্বিঘাত সমীকরণের আদর্শরূপ $ax^2 + bx + c = 0$ এর সাথে (i) নং এর তুলনা করে পাই,

$a = 3 ; b = -9 ; c = -2$

আমরা জানি,

$ax^2 + bx + c = 0$ এর ক্ষেত্রে,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

এখন, $3x^2 - 9x - 2 = 0$ সমীকরণের জন্য,

$$x = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4.3.(-2)}}{2.3}$$

$$= \frac{9 \pm \sqrt{81 + 24}}{6}$$

$$= \frac{9 \pm \sqrt{105}}{6}$$

অর্থাৎ, $x_1 = \frac{9 + \sqrt{105}}{6}$ এবং $x_2 = \frac{9 - \sqrt{105}}{6}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান,

$x_1 = \frac{1}{6}(9 + \sqrt{105}), x_2 = \frac{1}{6}(9 - \sqrt{105})$

৭। $x^2 - 8x + 16 = 0$

সমাধান:

$x^2 - 8x + 16 = 0$ কে দ্বিঘাত সমীকরণের আদর্শরূপ $ax^2 + bx + c = 0$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

$a = 1 ; b = -8 ; c = 16$

আমরা জানি,

$ax^2 + bx + c = 0$ এর ক্ষেত্রে,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

তাহলে, $x^2 - 8x + 16 = 0$ এর ক্ষেত্রে,

$$\therefore x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4.1.16}}{2.1}$$

$$= \frac{8 \pm \sqrt{64 - 64}}{2}$$

$$= \frac{8 \pm 0}{2}$$

$$= \frac{8+0}{2}, \frac{8-0}{2}$$

$$= \frac{8}{2}, \frac{8}{2}$$

$$= 4, 4$$

$x^2 - 8x + 16$ সমীকরণটি একটি দ্বিঘাত সমীকরণ যার নিশ্চায়ক

$b^2 - 4ac$

$= (-8)^2 - 4.1.16$

$= 64 - 64 = 0$

$\therefore$ সমীকরণটির দুইটি মূলই সমান।

অর্থাৎ, $x_1 = 4$ এবং $x_2 = 4$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x_1 = 4, x_2 = 4$

৮। $2x^2 + 7x - 1 = 0$

সমাধান:

$2x^2 + 7x - 1 = 0$ কে দ্বিঘাত সমীকরণের আদর্শরূপ:

$ax^2 + bx + c = 0$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

$a = 2 ; b = 7 ; c = -1$

আমরা জানি,

$ax^2 + bx + c = 0$ এর ক্ষেত্রে,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

অতএব, $2x^2 + 7x - 1 = 0$ হলে,

$$\therefore x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4.2.(-1)}}{2.2}$$

$$= \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 8}}{4}$$

$$= \frac{-7 \pm \sqrt{57}}{4}$$

তাহলে, $x_1 = \frac{-7 + \sqrt{57}}{4}$ এবং $x_2 = \frac{-7 - \sqrt{57}}{4}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান,

$$x_1 = \frac{1}{4}(-7 + \sqrt{57}), x_2 = \frac{1}{4}(-7 - \sqrt{57})$$

৯। $7x - 2 - 3x^2 = 0$ (VI)

সমাধান:

$7x - 2 - 3x^2 = 0$

বা $-3x^2 + 7x - 2 = 0$ কে দ্বিঘাত সমীকরণের আদর্শরূপ

$ax^2 + bx + c = 0$ এর সাথে তুলনা করে পাই,

$a = -3 ; b = 7 ; c = -2$

আমরা জানি,

$ax^2 + bx + c = 0$ এর ক্ষেত্রে,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$\therefore -3x^2 + 7x - 2 = 0$ সমীকরণে,

$$\therefore x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4.(-3).(-2)}}{2.(-3)}$$

$$= \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 24}}{-6}$$

$$= \frac{-7 \pm \sqrt{25}}{-6}$$

$$= \frac{-7 \pm 5}{-6}$$

তাহলে, $x_1 = \frac{-7+5}{-6}$ এবং $x_2 = \frac{-7-5}{-6}$

$= \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3} = \frac{-12}{-6}$ $\therefore x_1 = \frac{1}{3}$ এবং $x_2 = 2$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = 2$

[বি.দ্র. এ অনুশীলনীর অন্যান্য সমাধান Scientific Calculator দিয়ে যাচাই করে দেখ। Appendix দ্রষ্টব্য।]

অনুশীলনী-৫.২

প্রাথমিক আলোচনা

সমীকরণ (Equation): এক বা একাধিক চলকের সমন্বয়ে গঠিত কোনো অজ্ঞাত রাশি বা রাশিমালা যখন কোনো নির্দিষ্ট সংখ্যার বা মানের সমান লিখা হয় তখন তাকে সমীকরণ বলে। যেমন- $x^2+y^2=z^2, x^2-4=0, x-y+z=0$ ইত্যাদি সমীকরণ।

সমীকরণের মূল বা বীজ (Root of equation): চলকের যে মান বা মানগুলোর জন্য সমীকরণের উভয়পক্ষ সমান হয়। ঐ মান বা মানগুলোই সমীকরণের বীজ বা মূল (Root) এবং ঐ মান বা মানগুলোর দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয়।

সমীকরণের মূল সংখ্যা: যে সমীকরণের ঘাত সংখ্যা যত তার মূল সংখ্যা তত অর্থাৎ সমীকরণের ঘাত ও মূল সংখ্যা সমান।

অবান্তর বীজ বা মূল (Extraneous root): যে মূল বা বীজ সমীকরণকে সিদ্ধ করে না তাই সমীকরণের অবান্তর মূল।

সমীকরণে চলকের বর্গমূল সম্বলিত রাশি থাকলে তাকে বর্গ করে বর্গমূল চিহ্নমুক্ত নতুন সমীকরণ পাওয়া যায়। এ ধরনের সমীকরণ সমাধান করে যে বীজ বা মূলগুলো পাওয়া যায় অনেক সময় সবগুলো বীজ প্রদত্ত সমীকরণকে সিদ্ধ করে না।

বিঃদ্রঃ অবান্তর মূল বা বীজ নির্ণয়ের জন্য সমাধানের শুদ্ধি পরীক্ষা করা আবশ্যক।

উদাহরণস্বরূপ একটি সমীকরণ নেওয়া হলো: $\sqrt{x+3}=-5$

বা, $(\sqrt{x+3})^2=(-5)^2$

বা, $x+3=25$

$\therefore x=22$

এ সমীকরণের সমাধান অবান্তর কারণ $\sqrt{22+3}=-5$ হতে পারে না।

$\sqrt{2x^2-1}=x$ সমীকরণ

বা, $2x^2-1=x^2$ [বর্গ করে]

বা, $2x^2-x^2=1$ বা, $x^2=1$ $\therefore x=\pm 1$

কিন্তু $x=-1$ এর জন্য $\sqrt{2x^2-1}=x$ সমীকরণটি সত্য নয়।

তাছাড়া সমীকরণ থেকেই বোঝা যায়, কোনো সংখ্যার বর্গমূল ঋণাত্মক হতে পারে না। এ ধরনের সমীকরণ থেকেই অবান্তর মূলের উদ্ভব হয়।

জেনে রাখা ভালো: ঋণাত্মক সংখ্যার বর্গমূল অনির্ণেয় যেমন- $\sqrt{-9}$, $\sqrt{-2}$, $\sqrt{-4}$ ইত্যাদি অনির্ণেয়। আবার অনেকেই স্বাভাবিকভাবে $\sqrt{16}=\pm 4$, $\sqrt{9}=\pm 3$ লিখলেও $\sqrt{2}=\pm 1.4142$, $\sqrt{3}=\pm 1.732$ কিংবা $\sqrt{5}=\pm 2.236$ লিখেন না তাই উল্লেখিত সবগুলোই ভুল। $(\pm 4)^2=16$ সঠিক কিন্তু $\sqrt{16}=\pm 4$ সত্য নয়। কারণ ধনাত্মক সংখ্যার বর্গমূল সর্বদাই ধনাত্মক।

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনমূলক কাজের সমাধান

কাজ: *(পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-৯২)*

$p=\sqrt{\frac{x}{x+16}}$ ধরে $\sqrt{\frac{x}{x+16}}+\sqrt{\frac{x+16}{x}}=\frac{25}{12}$ সমীকরণটির সমাধান করে শুদ্ধি পরীক্ষা কর।

সমাধান:

দেওয়া আছে, $\sqrt{\frac{x}{x+16}}=p$

এখানে, $\sqrt{\frac{x}{x+16}}+\sqrt{\frac{x+16}{x}}=\frac{25}{12}$

$\therefore p+\frac{1}{p}=\frac{25}{12}$ $\left[\because p=\sqrt{\frac{x}{x+16}}, \frac{1}{p}=\sqrt{\frac{x+16}{x}}\right]$

বা, $p^2+1=\frac{25}{12}p$

বা, $12p^2+12=25p$

বা, $12p^2-25p+12=0$

বা, $12p^2-16p-9p+12=0$

বা, $4p(3p-4)-3(3p-4)=0$

বা, $(3p-4)(4p-3)=0$

$\therefore 3p-4=0$ অথবা, $4p-3=0$

বা, $3p=4$ বা, $4p=3$

বা, $p=\frac{4}{3}$ বা, $p=\frac{3}{4}$

বা, $\sqrt{\frac{x}{x+16}}=\frac{4}{3}$ বা, $\sqrt{\frac{x}{x+16}}=\frac{3}{4}$

বা, $\frac{x}{x+16}=\frac{16}{9}$ বা, $\frac{x}{x+16}=\frac{9}{16}$

বা, $9x=16x+256$ বা, $16x=9x+144$

বা, $9x-16x=256$ বা, $16x-9x=144$

বা, $-7x=256$ বা, $7x=144$

$\therefore x=-\frac{256}{7}$, $\therefore x=\frac{144}{7}$

শুদ্ধি পরীক্ষা:

$x=-\frac{256}{7}$ হলে,

বামপক্ষ $=\sqrt{\frac{\frac{-256}{7}}{\frac{-256}{7}+16}}+\sqrt{\frac{\frac{-256}{7}+16}{\frac{-256}{7}}}$

$=\sqrt{\frac{\frac{-256}{7}}{\frac{-256+112}{7}}}+\sqrt{\frac{\frac{-256+112}{7}}{\frac{-256}{7}}}$

$=\sqrt{\frac{\frac{-256}{7}}{\frac{-144}{7}}}+\sqrt{\frac{\frac{-144}{7}}{-\frac{256}{7}}}$

$$= \sqrt{\frac{256}{144}} + \sqrt{\frac{144}{256}}$$

$$= \frac{16}{12} + \frac{12}{16}$$

$$= \frac{64+36}{48} = \frac{100}{48} = \frac{25}{12} = \text{ডানপক্ষ।}$$

$x = \frac{144}{7}$ হলে,

$$\text{বামপক্ষ} = \sqrt{\frac{\frac{144}{7}}{\frac{144}{7}+16}} + \sqrt{\frac{\frac{144}{7}+16}{\frac{144}{7}}}$$

$$= \sqrt{\frac{\frac{144}{7}}{\frac{144+112}{7}}} + \sqrt{\frac{\frac{144+112}{7}}{\frac{144}{7}}}$$

$$= \sqrt{\frac{144}{256}} + \sqrt{\frac{256}{144}}$$

$$= \frac{12}{16} + \frac{16}{12} = \frac{36+64}{48} = \frac{100}{48} = \frac{25}{12} = \text{ডানপক্ষ।}$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = -\frac{256}{7}, \frac{144}{7}$.

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৫.২

সমাধান কর:

১। $\sqrt{x-4}+2=\sqrt{x+12}$

২। $\sqrt{11x-6}=\sqrt{4x+5}-\sqrt{x-1}$

৩। $\sqrt{2x+7}+\sqrt{3x-18}=\sqrt{7x+1}$

৪। $\sqrt{x+4}+\sqrt{x+11}=\sqrt{8x+9}$

৫। $\sqrt{11x-6}=\sqrt{4x+5}+\sqrt{x-1}$

৬। $\sqrt{x^2+4x-4}+\sqrt{x^2+4x-10}=6$

৭। $\sqrt{x^2-6x+9}-\sqrt{x^2-6x+6}=1$

৮। $\sqrt{2x^2+5x-2}-\sqrt{2x^2+5x-9}=1$

৯। $6\sqrt{\left(\frac{2x}{x-1}\right)}+5\sqrt{\left(\frac{x-1}{2x}\right)}=13$

১০। $\sqrt{\left(\frac{x-1}{3x+2}\right)}+2\sqrt{\left(\frac{3x+2}{x-1}\right)}=3$

অনুশীলনী-৫.২ এর সমাধান

সমাধান কর:

১। $\sqrt{x-4}+2=\sqrt{x+12}$

সমাধান:

$\sqrt{x-4}+2=\sqrt{x+12}$

বা, $\left(\sqrt{x-4}+2\right)^2=\left(\sqrt{x+12}\right)^2$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $\left(\sqrt{x-4}\right)^2+(2)^2+2\sqrt{x-4}.2=x+12$

বা, $x-4+4+4\sqrt{x-4}=x+12$

বা, $4\sqrt{x-4}=x+12-x$

বা, $4\sqrt{x-4}=12$

বা, $\sqrt{x-4}=3$ [উভয় পক্ষকে 4 দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\left(\sqrt{x-4}\right)^2=3^2$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $x-4=9$

বা, $x=9+4$ $\therefore x=13$

শুদ্ধি পরীক্ষা:

$x=13$ হলে,

বামপক্ষ $=\sqrt{13-4}+2=\sqrt{9}+2=3+2=5$

এবং ডানপক্ষ $=\sqrt{13+12}=\sqrt{25}=5$

সুতরাং $x=13$ প্রদত্ত সমীকরণের একটি মূল।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x=13$.

২। $\sqrt{11x-6}=\sqrt{4x+5}-\sqrt{x-1}$

সমাধান:

$\sqrt{11x-6}=\sqrt{4x+5}-\sqrt{x-1}$

বা, $\left(\sqrt{11x-6}\right)^2=\left(\sqrt{4x+5}-\sqrt{x-1}\right)^2$ [বর্গ করে]

বা, $11x-6=\left(\sqrt{4x+5}\right)^2+\left(\sqrt{x-1}\right)^2-2\sqrt{4x+5}.\sqrt{x-1}$

বা, $11x-6=4x+5+x-1-2\sqrt{(4x+5)(x-1)}$

বা, $11x-6=5x+4-2\sqrt{4x^2-4x+5x-5}$

বা, $11x-6-5x-4=-2\sqrt{4x^2+x-5}$

বা, $6x-10=-2\sqrt{4x^2+x-5}$

বা, $3x-5=-\sqrt{4x^2+x-5}$

বা, $(3x-5)^2=\left(-\sqrt{4x^2+x-5}\right)^2$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $9x^2-30x+25=4x^2+x-5$

বা, $9x^2-30x+25-4x^2-x+5=0$

বা, $5x^2-31x+30=0$

বা, $5x^2-6x-25x+30=0$

বা, $x(5x-6)-5(5x-6)=0$

বা, $(5x-6)(x-5)=0$

হয় $5x-6=0$ অথবা, $x-5=0$

$\therefore x=\frac{6}{5}$ অথবা, $x=5$

শুদ্ধি পরীক্ষা:

$x = \frac{6}{5}$ হলে প্রদত্ত সমীকরণের,

বামপক্ষ $= \sqrt{11 \times \frac{6}{5} - 6} = \sqrt{\frac{66-30}{5}} = \sqrt{\frac{36}{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}}$

ডানপক্ষ $= \sqrt{4.\frac{6}{5} + 5} - \sqrt{\frac{6}{5} - 1}$

$= \sqrt{\frac{24+25}{5}} - \sqrt{\frac{6-5}{5}}$

$= \sqrt{\frac{49}{5}} - \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{7}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}}$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ

অতএব, $x = \frac{6}{5}$ প্রদত্ত সমীকরণের একটি বীজ।

আবার, $x = 5$ হলে প্রদত্ত সমীকরণের

বামপক্ষ $= \sqrt{11.5 - 6} = \sqrt{55-6} = \sqrt{49} = 7$

ডানপক্ষ $= \sqrt{4.5+5} - \sqrt{5-1} = \sqrt{25} - \sqrt{4} = 5 - 2 = 3$

$\therefore$ বামপক্ষ $\neq$ ডানপক্ষ

অতএব, $x = 5$ প্রদত্ত সমীকরণের বীজ নয়

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x = \frac{6}{5}$.

৩। $\sqrt{2x+7} + \sqrt{3x-18} = \sqrt{7x+1}$

সমাধান:

$\sqrt{2x+7} + \sqrt{3x-18} = \sqrt{7x+1}$

বা, $\left(\sqrt{2x+7} + \sqrt{3x-18}\right)^2 = \left(\sqrt{7x+1}\right)^2$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $\left(\sqrt{2x+7}\right)^2 + \left(\sqrt{3x-18}\right)^2 + 2\sqrt{2x+7}.\sqrt{3x-18} = 7x+1$

বা, $2x + 7 + 3x - 18 + 2\sqrt{(2x+7)(3x-18)} = 7x + 1$

বা, $2\sqrt{6x^2 - 36x + 21x - 126} = 7x + 1 - 5x + 11$

বা, $2\sqrt{6x^2 - 15x - 126} = 2x + 12$

বা, $\sqrt{6x^2 - 15x - 126} = x + 6$ [উভয় পক্ষকে 2 দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\left(\sqrt{6x^2 - 15x - 126}\right)^2 = (x+6)^2$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $6x^2 - 15x - 126 = x^2 + 12x + 36$

বা, $5x^2 - 27x - 162 = 0$

বা, $5x^2 - 45x + 18x - 162 = 0$

বা, $5x(x-9) + 18(x-9) = 0$

বা, $(x-9)(5x+18) = 0$

হয় $x - 9 = 0$ অথবা, $5x + 18 = 0$

$\therefore x = 9$ বা, $x = -\frac{18}{5}$

শুদ্ধি পরীক্ষা:

$x = 9$ হলে প্রদত্ত সমীকরণের,

বামপক্ষ $= \sqrt{2.9+7} + \sqrt{3.9-18}$

$= \sqrt{25} + \sqrt{9} = 5 + 3 = 8$

ডানপক্ষ $= \sqrt{7.9+1} = \sqrt{64} = 8$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ

অতএব, $x = 9$ প্রদত্ত সমীকরণের একটি বীজ।

$x = -\frac{18}{5}$ হলে প্রদত্ত সমীকরণের

বামপক্ষ $= \sqrt{2\left(-\frac{18}{5}\right) + 7} + \sqrt{3\left(-\frac{18}{5}\right) - 18}$

$= \sqrt{7 - \frac{36}{5}} + \sqrt{-\frac{54}{5} - 18}$

$= \sqrt{\frac{35-36}{5}} + \sqrt{\frac{-54-90}{5}} = \sqrt{-\frac{1}{5}} + \sqrt{-\frac{144}{5}}$

$x = -\frac{18}{5}$ গ্রহণযোগ্য নয়, কেননা, ঋণাত্মক সংখ্যার বর্গমূল সংজ্ঞায়িত নয়।

$\therefore x = \frac{-18}{5}$, প্রদত্ত সমীকরণের বীজ নয়।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x = 9$.

৪। $\sqrt{x+4} + \sqrt{x+11} = \sqrt{8x+9}$

সমাধান:

$\sqrt{x+4} + \sqrt{x+11} = \sqrt{8x+9}$

বা, $\left(\sqrt{x+4} + \sqrt{x+11}\right)^2 = \left(\sqrt{8x+9}\right)^2$ [বর্গ করে]

বা, $x + 4 + 2\sqrt{(x+4)(x+11)} + x + 11 = 8x + 9$

বা, $x + 4 + x + 11 - 8x - 9 = -2\sqrt{(x+4)(x+11)}$

বা, $-6x + 6 = -2\sqrt{x^2 + 15x + 44}$

বা, $-2(3x-3) = -2\sqrt{x^2 + 15x + 44}$

বা, $3x - 3 = \sqrt{x^2 + 15x + 44}$

বা, $(3x-3)^2 = \left(\sqrt{x^2 + 15x + 44}\right)^2$ [পুনরায় বর্গ করে]

বা, $9x^2 - 18x + 9 = x^2 + 15x + 44$

বা, $9x^2 - x^2 - 18x - 15x + 9 - 44 = 0$

বা, $8x^2 - 33x - 35 = 0$

বা, $8x^2 - 40x + 7x - 35 = 0$

বা, $8x(x-5) + 7(x-5) = 0$

বা, $(x-5)(8x+7) = 0$

হয়, $x - 5 = 0$ অথবা, $8x + 7 = 0$

$\therefore x = 5$ $\therefore x = \frac{-7}{8}$

শুদ্ধি পরীক্ষা:

এখন $x = 5$ হলে,

প্রদত্ত সমীকরণের বামপক্ষ $= \sqrt{5+4} + \sqrt{5+11}$
$= 3 + 4 = 7$

এবং ডানপক্ষ $= \sqrt{8 \times 5 + 9} = \sqrt{49} = 7$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ

$\therefore x = 5$ প্রদত্ত সমীকরণের একটি বীজ।

আবার, $x = \frac{-7}{8}$ হলে, প্রদত্ত সমীকরণের,

$$\text{বামপক্ষ} = \sqrt{\frac{-7}{8} + 4} + \sqrt{\frac{-7}{8} + 11}$$
$$= \sqrt{\frac{-7+32}{8}} + \sqrt{\frac{-7+88}{8}}$$
$$= \sqrt{\frac{25}{8}} + \sqrt{\frac{81}{8}} = \frac{5}{\sqrt{8}} + \frac{9}{\sqrt{8}} = \frac{14}{\sqrt{8}}$$

$$\text{এবং ডানপক্ষ} = \sqrt{8\left(\frac{-7}{8}\right) + 9} = \sqrt{-7+9} = \sqrt{2}$$

$\therefore$ বামপক্ষ $\neq$ ডানপক্ষ

$\therefore x = \frac{-7}{8}$, প্রদত্ত সমীকরণের বীজ নয়

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x = 5$

৫। $\sqrt{11x-6} = \sqrt{4x+5} + \sqrt{x-1}$

সমাধান:

$\sqrt{11x-6} = \sqrt{4x+5} + \sqrt{x-1}$

বা, $\left(\sqrt{11x-6}\right)^2 = \left(\sqrt{4x+5} + \sqrt{x-1}\right)^2$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $11x - 6 = \left(\sqrt{4x+5}\right)^2 + \left(\sqrt{x-1}\right)^2 + 2\sqrt{4x+5}\sqrt{x-1}$

বা, $11x - 6 = 4x + 5 + x - 1 + 2\sqrt{(4x+5)(x-1)}$

বা, $11x - 6 = 5x + 4 + 2\sqrt{4x^2 - 4x + 5x - 5}$

বা, $11x - 6 - 5x - 4 = 2\sqrt{4x^2 + x - 5}$

বা, $6x - 10 = 2\sqrt{4x^2 + x - 5}$

বা, $3x - 5 = \sqrt{4x^2 + x - 5}$

বা, $(3x-5)^2 = \left(\sqrt{4x^2 + x - 5}\right)^2$ [পুনরায় উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $9x^2 - 30x + 25 = 4x^2 + x - 5$

বা, $9x^2 - 30x + 25 - 4x^2 - x + 5 = 0$

বা, $5x^2 - 31x + 30 = 0$

বা, $5x^2 - 6x - 25x + 30 = 0$

বা, $x(5x-6) - 5(5x-6) = 0$ বা, $(5x-6)(x-5) = 0$

হয় $5x - 6 = 0$ অথবা, $x - 5 = 0$

$\therefore x = \frac{6}{5}$ বা, $x = 5$

শুদ্ধি পরীক্ষা:

$x = \frac{6}{5}$ হলে প্রদত্ত সমীকরণের,

$$\text{বামপক্ষ} = \sqrt{11 \times \frac{6}{5} - 6} = \sqrt{\frac{66}{5} - 6}$$
$$= \sqrt{\frac{66-30}{5}} = \sqrt{\frac{36}{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}}$$

$$\text{ডানপক্ষ} = \sqrt{4 \times \frac{6}{5} + 5} + \sqrt{\frac{6}{5} - 1}$$
$$= \sqrt{\frac{24}{5} + 5} + \sqrt{\frac{6-5}{5}}$$
$$= \sqrt{\frac{24+25}{5}} + \sqrt{\frac{1}{5}}$$
$$= \sqrt{\frac{49}{5}} + \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{7}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{8}{\sqrt{5}}$$

$\therefore$ বামপক্ষ $\neq$ ডানপক্ষ

অতএব, $x = \frac{6}{5}$ প্রদত্ত সমীকরণের বীজ নয়।

$x = 5$ হলে প্রদত্ত সমীকরণের

বামপক্ষ $= \sqrt{11 \times 5 - 6} = \sqrt{55 - 6} = \sqrt{49} = 7$

ডানপক্ষ $= \sqrt{4 \times 5 + 5} + \sqrt{5 - 1} = \sqrt{25} + \sqrt{4} = 5 + 2 = 7$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ

অতএব, $x = 5$ প্রদত্ত সমীকরণে একটি বীজ।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x = 5$.

৬। $\sqrt{x^2 + 4x - 4} + \sqrt{x^2 + 4x - 10} = 6$

সমাধান:

$\sqrt{x^2 + 4x - 4} + \sqrt{x^2 + 4x - 10} = 6$

ধরি, $x^2 + 4x = y$

অতএব, প্রদত্ত সমীকরণ,

$\sqrt{y-4} + \sqrt{y-10} = 6$

বা, $\sqrt{y-4} = 6 - \sqrt{y-10}$

বা, $\left(\sqrt{y-4}\right)^2 = \left(6 - \sqrt{y-10}\right)^2$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $y - 4 = 36 - 2.6\sqrt{y-10} + \left(\sqrt{y-10}\right)^2$

বা, $y - 4 = 36 - 12\sqrt{y-10} + y - 10$

বা, $12\sqrt{y-10} = 30$

বা, $2\sqrt{y-10} = 5$ [উভয় পক্ষকে 6 দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\left(2\sqrt{y-10}\right)^2 = (5)^2$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $4(y-10) = 25$

বা, $4y - 40 = 25$

বা, $4y = 65$

বা, $4(x^2 + 4x) = 65$ [y এর মান বসিয়ে]

বা, $4x^2 + 16x - 65 = 0$

বা, $4x^2 + 26x - 10x - 65 = 0$

বা, $2x(2x+13) - 5(2x+13) = 0$

বা, $(2x+13)(2x-5) = 0$

হয় $(2x+13) = 0$ অথবা, $2x - 5 = 0$

$\therefore x = -\frac{13}{2}$ অথবা, $x = \frac{x}{2}$

শুদ্ধি পরীক্ষা:

$x = -\frac{13}{2}$ হলে প্রদত্ত সমীকরণের

বামপক্ষ $= \sqrt{\left(-\frac{13}{2}\right)^2 + 4\left(-\frac{13}{2}\right) - 4} + \sqrt{\left(-\frac{13}{2}\right)^2 + 4\left(-\frac{13}{2}\right) - 10}$

$= \sqrt{\frac{169}{4} - 26 - 4} + \sqrt{\frac{169}{4} - 26 - 10}$

$= \sqrt{\frac{169}{4} - 30} + \sqrt{\frac{169}{4} - 36}$

$= \sqrt{\frac{169-120}{4}} + \sqrt{\frac{169-144}{4}}$

$= \sqrt{\frac{49}{4}} + \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{7}{2} + \frac{5}{2} = 6 =$ ডানপক্ষ

অতএব, $x = -\frac{13}{2}$ প্রদত্ত সমীকরণের একটি বীজ।

আবার, $x = \frac{5}{2}$ হলে প্রদত্ত সমীকরণের

বামপক্ষ $= \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{5}{2}\right) - 4} + \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{5}{2}\right) - 10}$

$= \sqrt{\frac{25}{4} + 10 - 4} + \sqrt{\frac{25}{4} + 10 - 10}$

$= \sqrt{\frac{25}{4} + 6} + \sqrt{\frac{25}{4}}$

$= \sqrt{\frac{49}{4}} + \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{7}{2} + \frac{5}{2} = 6 =$ ডানপক্ষ

অতএব, $x = \frac{5}{2}$ প্রদত্ত সমীকরণের একটি বীজ।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x = -\frac{13}{2}, \frac{5}{2}$.

৭। $\sqrt{x^2 - 6x + 9} - \sqrt{x^2 - 6x + 6} = 1$

সমাধান:

$\sqrt{x^2 - 6x + 9} - \sqrt{x^2 - 6x + 6} = 1$

ধরি, $x^2 - 6x = y$

অতএব, প্রদত্ত সমীকরণ

$\sqrt{y+9} - \sqrt{y+6} = 1$

বা, $\sqrt{y+9} = 1 + \sqrt{y+6}$

বা, $\left(\sqrt{y+9}\right)^2 = \left(1 + \sqrt{y+6}\right)^2$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $y + 9 = 1 + 2.1.\sqrt{y+6} + \left(\sqrt{y+6}\right)^2$

বা, $-2\sqrt{y+6} = 1 + y + 6 - y - 9$

বা, $-2\sqrt{y+6} = -2$

বা, $\sqrt{y+6} = 1$ [উভয় পক্ষকে -2 দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\left(\sqrt{y+6}\right)^2 = (1)^2$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $y + 6 = 1$

বা, $y + 5 = 0$

বা, $x^2 - 6x + 5 = 0$ [y এর মান বসিয়ে]

বা, $x^2 - 5x - x + 5 = 0$

বা, $x(x-5) - 1(x-5) = 0$

বা, $(x-1)(x-5) = 0$

হয়, $x - 1 = 0$ অথবা, $x - 5 = 0$

$\therefore x = 1$ বা, $x = 5$

শুদ্ধি পরীক্ষা:

$x = 5$ হলে প্রদত্ত সমীকরণের

বামপক্ষ $= \sqrt{5^2 - 6.5 + 9} - \sqrt{5^2 - 6.5 + 6}$

$= \sqrt{25 - 30 + 9} - \sqrt{25 - 30 + 6}$

$= \sqrt{4} - \sqrt{1} = 2 - 1 = 1 =$ ডানপক্ষ

অতএব, $x = 5$ প্রদত্ত সমীকরণের একটি বীজ।

$x = 1$ হলে প্রদত্ত সমীকরণের

বামপক্ষ $= \sqrt{1^2 - 6.1 + 9} - \sqrt{1^2 - 6.1 + 6}$

$= \sqrt{1 - 6 + 9} - \sqrt{1 - 6 + 6}$

$= \sqrt{4} - \sqrt{1} = 2 - 1 = 1 =$ ডানপক্ষ

অতএব, $x = 1$ প্রদত্ত সমীকরণের একটি বীজ।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x = 5, 1$.

৮। সমাধান কর: $\sqrt{2x^2 + 5x - 2} - \sqrt{2x^2 + 5x - 9} = 1$

সমাধান:

$\sqrt{2x^2 + 5x - 2} - \sqrt{2x^2 + 5x - 9} = 1$

ধরি, $2x^2 + 5x = y$

অতএব, প্রদত্ত সমীকরণ,

$\sqrt{y-2} - \sqrt{y-9} = 1$

বা, $\sqrt{y-2} = 1 + \sqrt{y-9}$

বা, $\left(\sqrt{y-2}\right)^2 = \left(1 + \sqrt{y-9}\right)^2$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $y - 2 = 1 + \left(\sqrt{y-9}\right)^2 + 2\sqrt{y-9}$

বা, $y - 2 = 1 + y - 9 + 2\sqrt{y-9}$

বা, $6 = 2\sqrt{y-9}$

বা, $3 = \sqrt{y-9}$ [উভয় পক্ষকে 2 দ্বারা ভাগ করে]

বা, $(3)^2 = \left(\sqrt{y-9}\right)^2$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $9 = y - 9$

বা, $y = 18$

বা, $2x^2 + 5x = 18$ [y এর মান বসিয়ে]

বা, $2x^2 + 5x - 18 = 0$

বা, $2x^2 + 9x - 4x - 18 = 0$

বা, $x(2x+9) - 2(2x+9) = 0$

বা, $(x-2)(2x+9) = 0$

হয়, $x - 2 = 0$ অথবা $2x + 9 = 0$

$\therefore x = 2$ বা, $x = -\frac{9}{2}$

শুদ্ধি পরীক্ষা:

$x = 2$ হলে প্রদত্ত সমীকরণের

বামপক্ষ $= \sqrt{2.2^2 + 5.2 - 2} - \sqrt{2.2^2 + 5.2 - 9}$

$= \sqrt{8 + 10 - 2} - \sqrt{8 + 10 - 9}$

$= \sqrt{16} - \sqrt{9} = 4 - 3 = 1 =$ ডানপক্ষ

অতএব, $x = 2$ প্রদত্ত সমীকরণের একটি মূল।

$x = -\frac{9}{2}$ হলে প্রদত্ত সমীকরণের

বামপক্ষ $= \sqrt{2\left(-\frac{9}{2}\right)^2 + 5\left(-\frac{9}{2}\right) - 2} - \sqrt{2\left(-\frac{9}{2}\right)^2 + 5\left(-\frac{9}{2}\right) - 9}$

$= \sqrt{\frac{81}{2} - \frac{45}{2} - 2} - \sqrt{\frac{81}{2} - \frac{45}{2} - 9}$

$= \sqrt{\frac{81 - 45 - 4}{2}} - \sqrt{\frac{81 - 45 - 18}{2}}$

$= \sqrt{\frac{32}{2}} - \sqrt{\frac{18}{2}} = \sqrt{16} - \sqrt{9} = 4 - 3 = 1$

অতএব, $x = -\frac{9}{2}$ প্রদত্ত সমীকরণের একটি মূল।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x = 2, -\frac{9}{2}$.

৯। $6\sqrt{\left(\frac{2x}{x-1}\right)} + 5\sqrt{\left(\frac{x-1}{2x}\right)} = 13$ (VI)

সমাধান:

$6\sqrt{\left(\frac{2x}{x-1}\right)} + 5\sqrt{\left(\frac{x-1}{2x}\right)} = 13$

বা, $6\sqrt{\left(\frac{2x}{x-1}\right)} + 5\sqrt{\frac{1}{\left(\frac{2x}{x-1}\right)}} = 13$

ধরি, $\frac{2x}{x-1} = y^2$

অতএব, প্রদত্ত সমীকরণ,

$6\sqrt{y^2} + 5\sqrt{\frac{1}{y^2}} = 13$

বা, $6y + \frac{5}{y} = 13$

বা, $6y^2 + 5 = 13y$

বা, $6y^2 - 13y + 5 = 0$

বা, $6y^2 - 10y - 3y + 5 = 0$

বা, $2y(3y - 5) - 1(3y - 5) = 0$

বা, $(3y - 5)(2y - 1) = 0$

হয় $3y - 5 = 0$ অথবা, $2y - 1 = 0$

$\therefore y = \frac{5}{3}$ বা, $y = \frac{1}{2}$

যখন, $y = \frac{5}{3}$

বা, $y^2 = \frac{25}{9}$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $\frac{2x}{x-1} = \frac{25}{9}$

বা, $25x - 25 = 18x$ বা, $7x = 25$ $\therefore x = \frac{25}{7}$

আবার, যখন $y = \frac{1}{2}$

বা, $y^2 = \frac{1}{4}$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $\frac{2x}{x-1} = \frac{1}{4}$ বা, $8x = x - 1$ $\therefore x = -\frac{1}{7}$

শুদ্ধি পরীক্ষা:

$x = \frac{25}{7}$ হলে প্রদত্ত সমীকরণের

বামপক্ষ $= 6\sqrt{\frac{2.\frac{25}{7}}{\frac{25}{7} - 1}} + 5\sqrt{\frac{\frac{25}{7} - 1}{2.\frac{25}{7}}}$

$= 6\sqrt{\frac{\frac{50}{7}}{\frac{25-7}{7}}} + 5\sqrt{\frac{\frac{25-7}{7}}{\frac{50}{7}}}$

$= 6\sqrt{\frac{50}{18}} + 5\sqrt{\frac{18}{50}}$

$= 6\sqrt{\frac{25}{9}} + 5\sqrt{\frac{9}{25}}$

$= \frac{6.5}{3} + \frac{5.3}{5} = \frac{30}{3} + \frac{15}{5} = 10 + 3 = 13$

অতএব, $x = \frac{25}{7}$ প্রদত্ত সমীকরণের একটি মূল।

$x = -\frac{1}{7}$ হলে প্রদত্ত সমীকরণের

বামপক্ষ $= 6\sqrt{\frac{2\left(-\frac{1}{7}\right)}{-\frac{1}{7} - 1}} + 5\sqrt{\frac{-\frac{1}{7} - 1}{2\left(-\frac{1}{7}\right)}}$

$= 6\sqrt{\frac{-\frac{2}{7}}{-\frac{8}{7}}} + 5\sqrt{\frac{-\frac{8}{7}}{-\frac{2}{7}}} = 6\sqrt{\frac{1}{4}} + 5\sqrt{4}$

$= \frac{6}{2} + 5.2 = 3 + 10 = 13 =$ ডানপক্ষ

অতএব, $x = -\frac{1}{7}$ প্রদত্ত সমীকরণের একটি মূল।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x = \frac{25}{7}, -\frac{1}{7}$.

$\sqrt{\left(\frac{x-1}{3x+2}\right)} + 2\sqrt{\left(\frac{3x+2}{x-1}\right)} = 3$ (VVI)

সমাধান:

$$\sqrt{\left(\frac{x-1}{3x+2}\right)} + 2\sqrt{\left(\frac{3x+2}{x-1}\right)} = 3$$

বা, $\sqrt{\left(\frac{x-1}{3x+2}\right)} + 2\sqrt{\frac{1}{\left(\frac{x-1}{3x+2}\right)}} = 3$

ধরি, $\frac{x-1}{3x+2} = y^2$

অতএব, প্রদত্ত সমীকরণ,

$\sqrt{y^2} + 2\sqrt{\frac{1}{y^2}} = 3$

বা, $y + \frac{2}{y} = 3$

বা, $y^2 + 2 = 3y$

বা, $y^2 - 3y + 2 = 0$

বা, $y^2 - 2y - y + 2 = 0$

বা, $y(y-2) - 1(y-2) = 0$

বা, $(y-1)(y-2) = 0$

হয়, $y - 1 = 0$ অথবা, $y - 2 = 0$

$\therefore y = 1$ বা, $y = 2$

যখন, $y = 2$

বা, $y^2 = 4$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $\frac{x-1}{3x+2} = 4$ [y^2 এর মান বসিয়ে]

বা, $x - 1 = 12x + 8$

বা, $11x = -9$

$\therefore x = -\frac{9}{11}$

আবার, যখন $y = 1$

বা, $y^2 = 1$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $\frac{x-1}{3x+2} = 1$ [y^2 এর মান বসিয়ে]

বা, $x - 1 = 3x + 2$

বা, $2x = -3$

$\therefore x = -\frac{3}{2}$

শুদ্ধি পরীক্ষা:

$x = -\frac{9}{11}$ হলে প্রদত্ত সমীকরণের

বামপক্ষ $= \sqrt{\frac{-\frac{9}{11}-1}{3\left(-\frac{9}{11}\right)+2}} + 2\sqrt{\frac{3\left(-\frac{9}{11}\right)+2}{-\frac{9}{11}-1}}$

$= \sqrt{\frac{\frac{-9-11}{11}}{\frac{-27+22}{11}}} + 2\sqrt{\frac{\frac{-27+22}{11}}{\frac{-9-11}{11}}}$

$= \sqrt{\frac{-\frac{20}{11}}{-\frac{5}{11}}} + 2\sqrt{\frac{-\frac{5}{11}}{-\frac{20}{11}}}$

$= \sqrt{-\frac{20}{11} \times -\frac{11}{5}} + 2\sqrt{-\frac{5}{11} \times -\frac{11}{20}}$

$= \sqrt{4} + 2\sqrt{\frac{1}{4}} = 2 + 2.\frac{1}{2} = 2 + 1 = 3$

অতএব, $x = -\frac{9}{11}$ প্রদত্ত সমীকরণের একটি মূল।

$x = -\frac{3}{2}$ হলে প্রদত্ত সমীকরণের

বামপক্ষ $= \sqrt{\frac{-\frac{3}{2}-1}{3\left(-\frac{3}{2}\right)+2}} + 2\sqrt{\frac{3\left(-\frac{3}{2}\right)+2}{-\frac{3}{2}-1}}$

$= \sqrt{\frac{\frac{-3-2}{2}}{\frac{-9+4}{2}}} + 2\sqrt{\frac{\frac{-9+4}{2}}{\frac{-3-2}{2}}}$

$= \sqrt{\frac{-\frac{5}{2}}{-\frac{5}{2}}} + 2\sqrt{\frac{-\frac{5}{2}}{-\frac{5}{2}}}$

$= \sqrt{-\frac{5}{2} \times -\frac{2}{5}} + 2\sqrt{-\frac{5}{2} \times -\frac{2}{5}}$

$= 1 + 2.1$

$= 3 =$ ডানপক্ষ

অতএব, $x = -\frac{3}{2}$ প্রদত্ত সমীকরণের একটি মূল।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x = -\frac{9}{11}, -\frac{3}{2}$.

অনুশীলনী-৫.৩

প্রাথমিক আলোচনা

সূচক সমীকরণ (*Indicial equation*): যে সমীকরণে অজ্ঞাত চলক সূচকরূপে থাকে, একে সূচক সমীকরণ বলে।
উদাহরণ: $2^x = 8,\ 16^x = 4^{x+2}$ ইত্যাদি সূচক সমীকরণ যেখানে x অজ্ঞাত চলক।

সূচকের ধর্ম:

(i) $a \neq 1$ হলে $a^x = a^m$ হবে যদি এবং কেবল যদি $x = m$ হয়। এজন্য সমীকরণের উভয় পক্ষকে একই সংখ্যার ঘাত বা শক্তিরূপে প্রকাশ করা হয়।

(ii) যেকোনো সংখ্যা বা রাশির সূচক শূন্য (0) হলে তার মান 1। যেমন– $a^0 = 1, \left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1, (2a)^0 = 1, (x^2 + 2x)^0 = 1$

(iii) সূচকের নিয়মে ভিত্তি কখনও শূন্য হতে পারবে না।

(vi) $\frac{a}{b}$ এর ক্ষেত্রে $b \neq 0$ হবে।

(v) $0^0, \frac{1}{0}, \frac{x}{0}$ ইত্যাদি অসংজ্ঞায়িত রূপ।

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনমূলক কাজের সমাধান

কাজ: [পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-৯৫]

১। 4096 কে $\frac{1}{2}, 2, 4, 8, 16, 2\sqrt{2}, \sqrt[3]{4}$ এর সূচকে প্রকাশ কর।

২। 729 কে $3, 9, 27, 16, \sqrt[5]{9}$ এর সূচকে লিখ।

৩। $\frac{64}{729}$ কে $\frac{3}{2}, \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ এর সূচকে প্রকাশ কর।

১-এর সমাধান:

এখানে,

$$\begin{array}{r|l} 2 & 4096 \\ 2 & 2048 \\ 2 & 1024 \\ 2 & 512 \\ 2 & 256 \\ 2 & 128 \\ 2 & 64 \\ 2 & 32 \\ 2 & 16 \\ 2 & 8 \\ 2 & 4 \\ & 2 \end{array}$$

$\therefore 4096 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^{12}$

4096 $= \left(\frac{1}{2}\right)^{-12}$ যা $\frac{1}{2}$ এর সূচক

4096 $= 2^{12}$ যা 2 এর সূচক

4096 $= (4)^6$ যা 4 এর সূচক
$= (2^3)^4$
$= (8)^4$ যা 8 এর সূচক

আবার,
4096 $= (4)^6$
$= (4^2)^3$
$= (16)^3$ যা 16 এর সূচক

আবার,
4096 $= 2^{12}$
$= (2^3)^4$
$= (8)^4$
$= \{(2\sqrt{2})^2\}^4$
$= (2\sqrt{2})^8$ যা $2\sqrt{2}$ এর সূচক

আবার,
4096 $= 2^{12}$
$= (4)^6$
$= \left\{\left(\sqrt[3]{4}\right)^3\right\}^6 \quad \left[\left(\sqrt[3]{4}\right)^3 = 4\right]$
$= \left(\sqrt[3]{4}\right)^{18}$ যা $\left(\sqrt[3]{4}\right)$ এর সূচক

২-এর সমাধান:

$$\begin{array}{r|l} 3 & 729 \\ 3 & 243 \\ 3 & 81 \\ 3 & 27 \\ 3 & 9 \\ & 3 \end{array}$$

$729 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$
$= 3^6$ যা 3 এর সূচক

$729 = (3^2)^3$
$= 9^3$ যা 9 এর সূচক

$729 = 27^2$ যা 27 এর সূচক

729 কে 16 এর সূচকে প্রকাশ করা সম্ভব না।

$\sqrt[5]{9}$ এর সূচক রূপে প্রকাশিত হলো

729 $= 9^3$
$= \left\{\left(\sqrt[5]{9}\right)^5\right\}^3 = \left(\sqrt[5]{9}\right)^{15}$ যা $\sqrt[5]{9}$ এর সূচক

৩-এর সমাধান:

$\frac{64}{729} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}$

$= \left(\frac{2}{3}\right)^6 = \left\{\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}\right\}^6 = \left(\frac{3}{2}\right)^{-6}$ যা $\frac{3}{2}$ এর সূচক

আবার, $\frac{64}{729} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-6} = \left\{\left(\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\right)^3\right\}^{-6}$

$= \left(\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\right)^{-18}$ যা $\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ এর সূচক

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৫.৩

সমাধান কর:

১। $3^{x+2} = 81$

২। $5^{3x-7} = 3^{3x-7}$

৩। $2^{x-4} = 4a^{x-6}, (a > 0, a \neq 2)$

৪। $\left(\sqrt{3}\right)^{x+5} = \left(\sqrt[3]{3}\right)^{2x+5}$

৫। $\left(\sqrt[5]{4}\right)^{4x+7} = \left(\sqrt[11]{64}\right)^{2x+7}$

৬। $\dfrac{3^{3x-4}.a^{2x-5}}{3^{x+1}} = a^{2x-5}, (a > 0)$

৭। $\dfrac{5^{3x-5}.b^{2x-6}}{5^{x+1}} = a^{2x-6}, (a > 0, b > 0, 5b \neq a)$

৮। $4^{x+2} = 2^{2x+1} + 14$

৯। $5^x + 5^{2-x} = 26$

১০। $3(9^x - 4.3^{x-1}) + 1 = 0$

১১। $4^{1+x} + 4^{1-x} = 10$

১২। $2^{2x} - 3.2^{x+2} = -32$

অনুশীলনী-৫.৩ এর সমাধান

সমাধান কর:

১। $3^{x+2} = 81$

সমাধান:

$3^{x+2} = 81$

বা, $3^{x+2} = 3^4$ $\quad [\because 3^4 = 81]$

বা, $x + 2 = 4$ $\quad [\because a^m = a^n$ হলে $m = n]$

$\therefore x = 2$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x = 2$

২। $5^{3x-7} = 3^{3x-7}$

সমাধান:

$5^{3x-7} = 3^{3x-7}$

বা, $\dfrac{5^{3x}}{5^7} = \dfrac{3^{3x}}{3^7}$ $\quad \left[\because a^{m-1} = \dfrac{a^m}{a^n}\right]$

বা, $\dfrac{5^{3x}}{3^{3x}} = \dfrac{5^7}{3^7}$

বা, $\left(\dfrac{5}{3}\right)^{3x} = \left(\dfrac{5}{3}\right)^7$ $\quad \left[\because \dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n\right]$

বা, $3x = 7$ $\quad [\because a^m = a^n$ হলে $m = n]$

$\therefore x = \dfrac{7}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x = \dfrac{7}{3}$.

বিকল্প সমাধান:

$5^{3x-7} = 3^{3x-7}$

বা, $\dfrac{5^{3x-7}}{3^{3x-7}} = 1$ [উভয়পক্ষকে 3^{3x-7} দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\left(\dfrac{5}{3}\right)^{3x-7} = \left(\dfrac{5}{3}\right)^0$ $\quad \left[\because \left(\dfrac{5}{3}\right)^0 = 1\right]$

বা, $3x - 7 = 0$ বা, $3x = 7$ বা, $x = \dfrac{7}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x = \dfrac{7}{3}$.

৩। $2^{x-4} = 4a^{x-6}, (a > 0, a \neq 2)$

সমাধান:

$2^{x-4} = 4a^{x-6}, (a > 0, a \neq 2)$

বা, $\dfrac{2^{x-4}}{4} = a^{x-6}$

বা, $\dfrac{2^{x-4}}{2^2} = a^{x-6}$

বা, $2^{x-4-2} = a^{x-6}$ $\quad \left[\because \dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}\right]$

বা, $2^{x-6} = a^{x-6}$

বা, $\dfrac{2^{x-6}}{a^{x-6}} = 1$

বা, $\left(\dfrac{2}{a}\right)^{x-6} = 1$ $\quad \left[\because \dfrac{a^m}{b^m} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^m\right]$

বা, $\left(\dfrac{2}{a}\right)^{x-6} = \left(\dfrac{2}{a}\right)^0$ $\quad [\because x^0 = 1]$

বা, $x - 6 = 0$

$\therefore x = 6$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x = 6$.

৪। $\left(\sqrt{3}\right)^{x+5} = \left(\sqrt[3]{3}\right)^{2x+5}$

সমাধান:

$\left(\sqrt{3}\right)^{x+5} = \left(\sqrt[3]{3}\right)^{2x+5}$

বা, $\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{x+5} = \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^{2x+5}$

বা, $3^{\frac{1}{2}(x+5)} = 3^{\frac{1}{3}(2x+5)}$ $\quad [\because (a^m)^n = a^{mn}]$

বা, $\dfrac{1}{2}(x+5) = \dfrac{1}{3}(2x+5)$ $\quad [\because a^x = a^m$ হলে, $x = m]$

বা, $3(x+5) = 2(2x+5)$

বা, $3x + 15 = 4x + 10$ বা, $4x - 3x = 15 - 10$

$\therefore x = 5$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x = 5$.

৫। $\left(\sqrt[5]{4}\right)^{4x+7} = \left(\sqrt[11]{64}\right)^{2x+7}$ (VI)

সমাধান:

$\left(\sqrt[5]{4}\right)^{4x+7} = \left(\sqrt[11]{64}\right)^{2x+7}$

বা, $\left(\sqrt[5]{4}\right)^{4x+7} = \left(\sqrt[11]{4^3}\right)^{2x+7}$ $[\because 4^3 = 64]$

বা, $\left(4^{\frac{1}{5}}\right)^{4x+7} = \left(4^{\frac{3}{11}}\right)^{2x+7}$ $[\because \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}]$

বা, $4^{\frac{1}{5}(4x+7)} = 4^{\frac{3}{11}(2x+7)}$ $[\because (a^m)^n = a^{mn}]$

বা, $\frac{1}{5}(4x+7) = \frac{3}{11}(2x+7)$ $[\because a^x = a^m$ হলে, $x = m]$

বা, $11(4x+7) = 5 \times 3\,(2x+7)$

বা, $44x + 77 = 30x + 105$ বা, $14x = 28$

$\therefore x = 2$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x = 2$

৬। $\frac{3^{3x-4}.a^{2x-5}}{3^{x+1}} = a^{2x-5}, (a > 0)$

সমাধান:

$\frac{3^{3x-4}.a^{2x-5}}{3^{x+1}} = a^{2x-5}, (a > 0)$

বা, $\frac{3^{3x-4}}{3^{x+1}} = \frac{a^{2x-5}}{a^{2x-5}}$

বা, $3^{3x-4-x-1} = 1$ $\left[\because \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}\right]$

বা, $3^{2x-5} = 1$

বা, $3^{2x-5} = 3^0$ $[\because x^0 = 1]$

বা, $2x - 5 = 0$ $[\because a^x = a^m$ হলে, $x = m]$

বা, $x = \frac{5}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x = \frac{5}{2}$.

৭। $\frac{5^{3x-5}.b^{2x-6}}{5^{x+1}} = a^{2x-6}, (a > 0, b > 0, 5b \neq a)$

সমাধান:

$\frac{5^{3x-5}.b^{2x-6}}{5^{x+1}} = a^{2x-6}, (a > 0, b > 0, 5b \neq a)$

বা, $5^{3x-5-x-1}.b^{2x-6} = a^{2x-6}$ $\left[\because \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}\right]$

বা, $\frac{5^{2x-6}.b^{2x-6}}{a^{2x-6}} = 1$

বা, $\left(\frac{5b}{a}\right)^{2x-6} = 1$ $\left[\because \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m\right]$

বা, $\left(\frac{5b}{a}\right)^{2x-6} = \left(\frac{5b}{a}\right)^0$ $[\because x^0 = 1]$

বা, $2x - 6 = 0$

বা, $x = 3$ $\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x = 3$

৮। $4^{x+2} = 2^{2x+1} + 14$

সমাধান:

$4^{x+2} = 2^{2x+1} + 14$

বা, $4^2.4^x = 2^{2x}.2 + 14$ $[\because a^{m+n} = a^m.a^n]$

বা, $16.4^x = (2^2)^x.2 + 14$

বা, $16.4^x = 4^x.2 + 14$

বা, $16.4^x - 4^x.2 = 14$

বা, $4^x(16 - 2) = 14$

বা, $4^x.14 = 14$

বা, $4^x = 1$

বা, $4^x = 4^0$ $[\because a^0 = 1]$

$\therefore x = 0$ $\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x = 0$.

৯। $5^x + 5^{2-x} = 26$

সমাধান:

$5^x + 5^{2-x} = 26$

বা, $5^x + \frac{5^2}{5^x} = 26$ $\left[\because a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}\right]$

বা, $5^x.5^x + 5^2 = 26.5^x$ [উভয় পক্ষকে 5^x দ্বারা গুণ করে]

বা, $(5^x)^2 + 25 = 26.5^x$

বা, $(5^x)^2 - 26.5^x + 25 = 0$

বা, $a^2 - 26a + 25 = 0$ $[5^x = a$ ধরে$]$

বা, $a^2 - 25a - a + 25 = 0$

বা, $a(a - 25) - 1(a - 25) = 0$

বা, $(a - 25)(a - 1) = 0$

বা, $(5^x - 1)(5^x - 25) = 0$ $[\because 5^x = a]$

হয়, $5^x - 1 = 0$
বা, $5^x = 1$
বা, $5^x = 5^0$
বা, $x = 0$

অথবা, $5^x - 25 = 0$
বা, $5^x = 25$
বা, $5^x = 5^2$
বা, $x = 2$ $[\because a^x = a^m$ হলে $x = m]$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x = 0, 2$.

১০। $3(9^x - 4.3^{x-1}) + 1 = 0$ (V.V.I)

সমাধান:

$3(9^x - 4.3^{x-1}) + 1 = 0$

বা, $3.9^x - 4.3.3^{x-1} + 1 = 0$

বা, $3.(3^2)^x - 4.3^{x-1+1} + 1 = 0$ $[\because a^m.a^n = a^{m+n}]$

বা, $3(3^x)^2 - 4.3^x + 1 = 0$ $[\because (a^m)^n = a^{mn} = a^{nm} = (a^n)^m]$

বা, $3a^2 - 4a + 1 = 0$ $[3^x = a$ ধরে$]$

বা, $3a^2 - 3a - a + 1 = 0$

বা, $3a(a - 1) - 1(a - 1) = 0$

বা, $(3a - 1)(a - 1) = 0$

বা, $(3.3^x - 1)(3^x - 1) = 0$

হয়, $3.3^x - 1 = 0$
বা, $3.3^x = 1$
বা, $3^{x+1} = 3^0$
বা, $x + 1 = 0$
$\therefore x = -1$

অথবা, $3^x - 1 = 0$
বা, $3^x = 1$
বা, $3^x = 3^0$ $[\because a^0 = 1]$
$\therefore x = 0$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x = 0, -1$.

১১। $4^{1+x} + 4^{1-x} = 10$

সমাধান:

$4^{1+x} + 4^{1-x} = 10$

বা, $4.4^x + \frac{4}{4^x} = 10$ $\left[\because a^{m+n} = a^m.a^n \text{ এবং } a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}\right]$

বা, $4.4^x.4^x + 4 = 10.4^x$ [উভয় পক্ষকে 4^x দ্বারা গুণ করে]

বা, $4a^2 - 10a + 4$ [$4^x = a$ ধরে]

বা, $4a^2 - 8a - 2a + 4 = 0$

বা, $4a(a-2) - 2(a-2) = 0$

বা, $(a-2)(4a-2) = 0$

বা, $(4^x - 2)(4.4^x - 2) = 0$

হয়, $4^x - 2 = 0$

বা, $2^{2x} = 2^1$

বা, $2x = 1$

$\therefore x = \frac{1}{2}$

অথবা, $4.4^x - 2 = 0$

বা, $2^2.2^{2x} = 2$

বা, $2^{2x+2} = 2^1$

বা, $2x + 2 = 1$

বা, $2x = -1$ $\therefore x = -\frac{1}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$.

১২। $2^{2x} - 3.2^{x+2} = -32$

সমাধান:

$2^{2x} - 3.2^{x+2} = -32$

বা, $(2^x)^2 - 3.2^2.2^x = -32$ [$\because a^{mn} = (a^m)^n$ এবং $a^{m+n} = a^m.a^n$]

বা, $(2^x)^2 - 12.2^x + 32 = 0$

বা, $a^2 - 12a + 32 = 0$ [$2^x = a$ ধরে]

বা, $a^2 - 8a - 4a + 32 = 0$

বা, $a(a-8) - 4(a-8) = 0$

বা, $(a-4)(a-8) = 0$

বা, $(2^x - 4)(2^x - 8) = 0$

হয়, $2^x - 4 = 0$

বা, $2^x = 4$

বা, $2^x = 2^2$

$\therefore x = 2$

অথবা, $2^x - 8 = 0$

বা, $2^x = 8$

বা, $2^x = 2^3$

$\therefore x = 3$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x = 2, 3$.

অনুশীলনী-৫.৪

প্রাথমিক আলোচনা

দুই চলকবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ জোট: যে সমীকরণ জোটের উভয় সমীকরণই দ্বিঘাত এদেরকে দুই চলকবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ জোট বলে। যেমন–

$x^2 + y^2 = 25$ [দ্বিঘাত সমীকরণ]

$xy = 12$ [দ্বিঘাত সমীকরণ]

সমীকরণের ঘাত: সমীকরণের প্রতিটি পদের চলকগুলোর ঘাত যোগ করে যে পদে সর্বোচ্চ মান পাওয়া যায় তাকে সমীকরণের ঘাত বলে। তাই $xy = 1$ সমীকরণের ঘাত 2 [কারণ x এর ঘাত 1, y এর ঘাত 1 অতএব, xy এর মোট ঘাত $= 1 + 1 = 2$]

উল্লেখ্য যে: চলক দুইটি x ও y হলে $(x, y) = (a, b)$ এরূপ আকারে জোটের একটি সমাধান যদি সমীকরণ দুইটিতে x এর স্থলে a এবং y স্থলে b বসালে তাদের উভয় পক্ষ সমান হয়।

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনমূলক কাজের সমাধান

কাজ: [পাঠ্যবই পৃষ্ঠা নং-১০০]

উদাহরণ ২ এবং ৩ এর সমাধান বিকল্প পদ্ধতিতে নির্ণয় কর।

উদাহরণ-২. $x^2 = 3x + 6y,\ xy = 5x + 4y$

উদাহরণ-৩. $x^2 + y^2 = 61,\ xy = -30$

উদাহরণ-২ এর বিকল্প সমাধান:

$x^2 = 3x + 6y \ldots\ldots\ldots$ (i)

এবং $xy = 5x + 4y \ldots\ldots\ldots$ (ii)

(ii) নং হতে পাই, $xy - 4y = 5x$

বা, $y(x - 4) = 5x$

$\therefore y = \dfrac{5x}{x-4} \ldots\ldots\ldots$ (iii)

(i) নং এ $y = \dfrac{5x}{x-4}$ বসিয়ে পাই,

$x^2 = 3x + 6\left(\dfrac{5x}{x-4}\right)$

বা, $x^2 = \dfrac{3x(x-4) + 30x}{x-4}$

বা, $x^3 - 4x^2 = 3x^2 - 12x + 30x$

বা, $x^3 - 4x^2 - 3x^2 - 18x = 0$

বা, $x^3 - 7x^2 - 18x = 0$

বা, $x(x^2 - 7x - 18) = 0$

বা, $x(x^2 - 9x + 2x - 18) = 0$

বা, $x\{x(x-9) + 2(x-9)\} = 0$

বা, $x(x-9)(x+2) = 0$

$\therefore x = 0, -2, 9$

(iii) নং হতে পাই,

$x = 0$ হলে, $y = 0$

$x = -2$ হলে, $y = \dfrac{5(-2)}{-2-4} = \dfrac{-10}{-6} = \dfrac{5}{3}$

এবং $x = 9$ হলে, $y = \dfrac{5.9}{9-4} = \dfrac{45}{5} = 9$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $(x, y) = (0, 0)\left(-2, \dfrac{5}{3}\right)(9, 9)$

উদাহরণ-৩. $x^2 + y^2 = 61,\ xy = -30$

উদাহরণ-৩ এর বিকল্প সমাধান:

$x^2 + y^2 = 61 \ldots\ldots\ldots$ (i)

$xy = -30 \ldots\ldots\ldots$ (ii)

(ii) নং হতে পাই,

$xy = -30$

বা, $y = -\dfrac{30}{x} \ldots\ldots\ldots$ (iii)

y এর মান (i) নং এ বসাইয়া পাই,

$x^2 + \left(-\dfrac{30}{x}\right)^2 = 61$

বা, $\dfrac{x^4 + 900}{x^2} = 61$

বা, $x^4 - 61x^2 + 900 = 0$

বা, $x^4 - 36x^2 - 25x^2 + 900 = 0$

বা, $x^2(x^2 - 36) - 25(x^2 - 36) = 0$

বা, $(x^2 - 25)(x^2 - 36) = 0$

$\therefore x^2 - 25 = 0$ অথবা, $x^2 - 36 = 0$

বা, $x^2 = 25$ | বা, $x^2 = 36$

$\therefore x = \pm 5$ | $\therefore x = \pm 6$

(iii) নং হতে পাই, $x = 5$ হলে, $y = -\dfrac{30}{5} = -6$

$x = -5$ হলে, $y = \dfrac{-30}{-5} = 6$

$x = 6$ হলে, $y = -\dfrac{30}{6} = -5$

$x = -6$ হলে, $y = \dfrac{-30}{-6} = 5$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $(x, y) = (5, -6), (-5, 6), (6, -5), (-6, 5)$

উদাহরণ-৩ এর বিকল্প সমাধান:

দেওয়া আছে,

$x^2 + y^2 = 61 \ldots\ldots\ldots$ (i)

এবং $xy = -30 \ldots\ldots\ldots$ (ii)

(i) নং হতে পাই,

$x^2 + y^2 = 61$

বা, $(x - y)^2 + 2xy = 61$ $[\because a^2 + b^2 = (a - b)^2 + 2ab]$

বা, $(x - y)^2 + 2.(-30) = 61$ $[\because xy = 30]$

বা, $(x - y)^2 = 121$

বা, $x - y = \pm\sqrt{121} = \pm 11$

$\therefore x - y = \pm 11 \ldots\ldots\ldots$ (iii)

(i) নং হতে পাই,

$x^2 + y^2 = 61$

বা, $(x + y)^2 - 2xy = 61$ $[\because a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab]$

বা, $(x + y)^2 - 2.(-30) = 61$ $[\because xy = -30]$

বা, $(x + y)^2 = 1$

বা, $x + y = \pm\sqrt{1}$ $\therefore x + y = \pm 1 \ldots\ldots\ldots$ (iv)

(iii) ও (iv) নং থেকে পাই,

$\left.\begin{array}{l} x + y = 1 \\ x - y = 11 \end{array}\right\} \ldots\ldots$ (v) $\quad \left.\begin{array}{l} x + y = 1 \\ x - y = -11 \end{array}\right\} \ldots\ldots$ (vi)

$\left.\begin{array}{l} x + y = -1 \\ x - y = 11 \end{array}\right\} \ldots\ldots$ (vii) $\quad \left.\begin{array}{l} x + y = -1 \\ x - y = -11 \end{array}\right\} \ldots\ldots$ (viii)

(v) এর সমাধান করে পাই, $x = 6$ এবং $y = -5$

(vi) এর সমাধান করে পাই, $x = -5, y = 6$

(vii) এর সমাধান করে পাই, $x = 5, y = -6.$

(viii) এর সমাধান করে পাই, $x = -6, y = 5$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $(x, y) = (6, -5), (-5, 6), (5, -6), (-6, 5)$

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৫.৪

সমাধান কর:

১। $(2x+3)(y-1)=14, (x-3)(y-2)=-1.$

২। $(x-2)(y-1)=3, (x+2)(2y-5)=15$

৩। $x^2=7x+6y, y^2=7y+6x.$

৪। $x^2=3x+2y, y^2=3y+2x.$

৫। $x+\frac{4}{y}=1, y+\frac{4}{x}=25$

৬। $y+3=\frac{4}{x}, x-4=\frac{5}{3y}.$

৭। $xy-x^2=1, y^2-xy=2.$

৮। $x^2-xy=14,\ y^2+xy=60.$

৯। $x^2+y^2=25, xy=12.$

১০। $\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}=\frac{10}{3}, x^2-y^2=3.$

১১। $x^2+xy+y^2=3, x^2-xy+y^2=7$

১২। $2x^2+3xy+y^2=20, 5x^2+4y^2=41.$

অনুশীলনী-৫.৪ এর সমাধান

সমাধান কর:

১। $(2x+3)(y-1)=14, (x-3)(y-2)=-1.$

সমাধান:

$(2x+3)(y-1)=14$ ……… (i)
$(x-3)(y-2)=-1$ ……… (ii)

(i) থেকে পাই,

$$y-1=\frac{14}{2x+3}$$

বা, $y=\frac{14}{2x+3}+1$ ……… (iii)

(ii) নং এ (iii) থেকে প্রাপ্ত y এর মান বসিয়ে পাই,

$$(x-3)\left(\frac{14}{2x+3}+1-2\right)=-1$$

বা, $(x-3)\left(\frac{14}{2x+3}-1\right)=-1$

বা, $(x-3)\left(\frac{14-2x-3}{2x+3}\right)=-1$

বা, $\frac{(x-3)(11-2x)}{2x+3}=-1$

বা, $\frac{(x-3)(11-2x)}{2x+3}=-1$

বা, $(x-3)(11-2x)=-(2x+3)$
বা, $11x-2x^2-33+6x=-2x-3$
বা, $-2x^2+17x-33+2x+3=0$
বা, $-2x^2+19x-30=0$
বা, $2x^2-19x+30=0$
বা, $2x^2-15x-4x+30=0$
বা, $x(2x-15)-2(2x-15)=0$
বা, $(2x-15)(x-2)=0$
হয় $2x-15=0$ অথবা $x-2=0$

$\therefore x=\frac{15}{2}$ অথবা, $x=2$

যখন $x=\frac{15}{2}$ তখন (iii) নং হতে,

$$y=\frac{14}{2\times\frac{15}{2}+3}+1=\frac{14}{18}+1$$

$$=\frac{14+18}{18}=\frac{32}{18}=\frac{16}{9}$$

যখন $x=2$ তখন (iii) নং হতে,

$$y=\frac{14}{2\times2+3}+1=\frac{14}{7}+1=2+1=3$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $(x, y)=\left(\frac{15}{2}, \frac{16}{9}\right), (2, 3)$

২। $(x-2)(y-1)=3, (x+2)(2y-5)=15$

সমাধান:

$(x-2)(y-1)=3$ ……… (i)
$(x+2)(2y-5)=15$ ……… (ii)

(i) নং সমীকরণ থেকে পাই,

$$x-2=\frac{3}{y-1}$$

বা, $x=\frac{3}{y-1}+2$ ……… (iii)

(iii) নং থেকে x এর মান (ii) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$$\left(\frac{3}{y-1}+2+2\right)(2y-5)=15$$

বা, $\left(\frac{3}{y-1}+4\right)(2y-5)=15$

বা, $\left(\frac{3+4y-4}{y-1}\right)(2y-5)=15$

বা, $(4y-1)(2y-5)=15(y-1)$
বা, $8y^2-20y-2y+5=15y-15$
বা, $8y^2-20y-2y+5-15y+15=0$
বা, $8y^2-37y+20=0$
বা, $8y^2-5y-32y+20=0$
বা, $y(8y-5)-4(8y-5)=0$
বা, $(8y-5)(y-4)=0$
হয়, $8y-5=0$ অথবা, $y-4=0$

$\therefore y=\frac{5}{8}$ বা, $y=4$

যখন, $y=\frac{5}{8}$ তখন (iii) নং হতে,

$x = \dfrac{3}{\frac{5}{8} - 1} + 2$

$= \dfrac{3}{-\frac{3}{8}} + 2 = -8 + 2 = -6$

যখন $y = 4$ তখন (iii) নং হতে,

$x = \dfrac{3}{4-1} + 2$

$= \dfrac{3}{3} + 2 = 1 + 2 = 3$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $(x, y) = (3, 4), \left(-6, \dfrac{5}{8}\right)$.

৩। $x^2 = 7x + 6y, y^2 = 7y + 6x$.

সমাধান:

$x^2 = 7x + 6y$ ... ... (i)
$y^2 = 7y + 6x$ ... ... (ii)

(i) নং থেকে (ii) নং বিয়োগ করে পাই,
$x^2 - y^2 = x - y$
বা, $(x - y)(x + y) - (x - y) = 0$
বা, $(x - y)(x + y - 1) = 0$
হয়, $x - y = 0$ অথবা, $x + y - 1 = 0$
$\therefore x = y$ ... ... (iii)
অথবা, $x = 1 - y$ ... ... (iv)

(iii) থেকে x এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,
$y^2 = 7y + 6y$
বা, $y^2 = 13y$
বা, $y^2 - 13y = 0$
বা, $y(y - 13) = 0$
হয়, $y = 0$ অথবা, $y - 13 = 0$
$\therefore y = 0$ বা, $y = 13$

(iii) নং সমীকরণ থেকে
যখন $y = 0$ তখন $x = 0$
যখন $y = 13$ তখন $x = 13$

আবার (iv) নং সমীকরণ থেকে x এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই-
$(1 - y)^2 = 7(1 - y) + 6y$
বা, $1 - 2y + y^2 = 7 - 7y + 6y$
বা, $1 - 2y + y^2 - 7 + 7y - 6y = 0$
বা, $y^2 - y - 6 = 0$
বা, $y^2 - 3y + 2y - 6 = 0$
বা, $y(y - 3) + 2(y - 3) = 0$
বা, $(y - 3)(y + 2) = 0$
হয়, $y - 3 = 0$ অথবা, $y + 2 = 0$
$\therefore y = 3$ বা, $y = -2$

(iii) নং সমীকরণ থেকে
$y = 3$ হলে, $x = 1 - 3 = -2$
$y = -2$ হলে, $x = 1 + 2 = 3$
$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $(x, y) = (0, 0), (13, 13), (3, -2), (-2, 3)$.

$x^2 = 3x + 2y, y^2 = 3y + 2x$

সমাধান:

$x^2 = 3x + 2y$ ... ... (i)
$y^2 = 3y + 2x$ ... ... (ii)

(i) নং থেকে (ii) নং বিয়োগ করে পাই,
$x^2 - y^2 = x - y$
বা, $(x - y)(x + y) - (x - y) = 0$
বা, $(x - y)(x + y - 1) = 0$
হয়, $x - y = 0$ অথবা, $x + y - 1 = 0$
$\therefore x = y$ ... ... (iii)
এবং $x = 1 - y$ ... ... (iv)

(iii) নং থেকে x এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,
$y^2 = 3y + 2y$
বা, $y^2 - 5y = 0$
বা, $y(y - 5) = 0$
বা, $y = 0$ অথবা, $y - 5 = 0$
$\therefore y = 0$ বা, $y = 5$

(iii) নং থেকে পাই,
$y = 0$ হলে, $x = 0$
$y = 5$ হলে, $x = 5$
আবার (iv) নং থেকে x এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,
$(1 - y)^2 = 3(1 - y) + 2y$
বা, $1 - 2y + y^2 = 3 - 3y + 2y$
বা, $1 - 2y + y^2 - 3 + 3y - 2y = 0$
বা, $y^2 - y - 2 = 0$
বা, $y^2 - 2y + y - 2 = 0$
বা, $y(y - 2) + 1(y - 2) = 0$
বা, $(y - 2)(y + 1) = 0$
হয়, $y - 2 = 0$ অথবা, $y + 1 = 0$
$\therefore y = 2$ $\therefore y = -1$
(iv) নং থেকে পাই, $y = 2$ হলে, $x = 1 - 2 = -1$
$y = -1$ হলে, $x = 1 + 1 = 2$.
$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $(x, y) = (0, 0), (5, 5), (-1, 2), (2, -1)$

৫। $x + \dfrac{4}{y} = 1, y + \dfrac{4}{x} = 25$

সমাধান:

$x + \dfrac{4}{y} = 1$ ... ... (i)

$y + \dfrac{4}{x} = 25$ ... ... (ii)

(i) নং থেকে পাই $x = 1 - \dfrac{4}{y}$ ... ... (iii)

(iii) নং হতে x এর মান (ii) নং এ বসিয়ে পাই,

$y + \dfrac{4}{1 - \frac{4}{y}} = 25$

বা, $y + \dfrac{4y}{y - 4} = 25$

বা, $\dfrac{y(y - 4) + 4y}{y - 4} = 25$

বা, $y(y - 4) + 4y = 25(y - 4)$
বা, $y^2 - 4y + 4y - 25y + 100 = 0$
বা, $y^2 - 25y + 100 = 0$
বা, $y^2 - 20y - 5y + 100 = 0$
বা, $y(y - 20) - 5(y - 20) = 0$
বা, $(y - 20)(y - 5) = 0$
হয়, $y - 20 = 0$ অথবা, $y - 5 = 0$
$\therefore y = 20$ বা, $y = 5$

y এর মান (iii) নং এ বসিয়ে পাই,

যখন $y = 20$ তখন $x = 1 - \frac{4}{20} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$

যখন $y = 5$ তখন $x = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $(x, y) = \left(\frac{4}{5}, 20\right), \left(\frac{1}{5}, 5\right)$

বিকল্প সমাধান:

দেওয়া আছে,

$x + \frac{4}{y} = 1$ ……… (i)

এবং $y + \frac{4}{x} = 25$ ……… (ii)

(i) নং হতে পাই,

$xy + 4 = y$ ……… (iii)

(ii) নং হতে পাই,

$xy + 4 = 25x$ ……… (iv)

(iv) নং থেকে (iii) নং বিয়োগ করে পাই,

$25x - y = 0$

$\therefore y = 25x$ ……… (v)

(i) নং এ $y = 25x$ বসিয়ে পাই,

$x + \frac{4}{25x} = 1$

বা, $25x^2 + 4 = 25x$

বা, $25x^2 - 25x + 4 = 0$

বা, $25x^2 - 20x - 5x + 4 = 0$

বা, $5x(5x - 4) - 1(5x - 4) = 0$

বা, $(5x - 4)(5x - 1) = 0$

হয়, $5x - 4 = 0$

বা, $5x = 4$

$\therefore x = \frac{4}{5}$

অথবা, $5x - 1 = 0$

বা, $5x = 1$

$\therefore x = \frac{1}{5}$

x-এর মান (v) নং এ বসিয়ে পাই,

$x = \frac{4}{5}$ হলে, $y = 25.\left(\frac{4}{5}\right) = 20$

$x = \frac{1}{5}$ হলে, $y = 25.\left(\frac{1}{5}\right) = 5$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $(x, y) = \left(\frac{1}{5}, 5\right), \left(\frac{4}{5}, 20\right)$

৬। $y + 3 = \frac{4}{x}, x - 4 = \frac{5}{3y}$.

সমাধান:

$y + 3 = \frac{4}{x}$ ……… (i)

$x - 4 = \frac{5}{3y}$ ……… (ii)

(i) নং থেকে পাই $y = \frac{4}{x} - 3$ ……… (iii)

(iii) নং থেকে y এর মান (ii) নং এ বসিয়ে পাই,

$x - 4 = \frac{5}{3\left(\frac{4}{x} - 3\right)}$

বা, $x - 4 = \frac{5x}{12 - 9x}$

বা, $(x - 4)(12 - 9x) = 5x$

বা, $12x - 9x^2 - 48 + 36x = 5x$

বা, $-9x^2 + 48x - 48 - 5x = 0$

বা, $9x^2 - 43x + 48 = 0$

বা, $9x^2 - 27x - 16x + 48 = 0$

বা, $9x(x - 3) - 16(x - 3) = 0$

বা, $(9x - 16)(x - 3) = 0$

হয়, $9x - 16 = 0$ অথবা, $x - 3 = 0$

$\therefore x = \frac{16}{9}$ বা, $x = 3$

(iii) এ x এর মান বসিয়ে পাই,

যখন $x = \frac{16}{9}$ তখন $y = \frac{4}{\frac{16}{9}} - 3 = \frac{4 \times 9}{16} - 3 = \frac{9}{4} - 3 = -\frac{3}{4}$

যখন $x = 3$ তখন $y = \frac{4}{3} - 3 = -\frac{5}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $(x, y) = \left(\frac{16}{9}, -\frac{3}{4}\right), \left(3, -\frac{5}{3}\right)$.

৭। $xy - x^2 = 1, y^2 - xy = 2$.

সমাধান:

$xy - x^2 = 1$ ……… (i)

$y^2 - xy = 2$ ……… (ii)

(i) নং থেকে পাই $x(y - x) = 1$ ……… (iii)

(ii) নং থেকে পাই $y(y - x) = 2$ ……… (iv)

(iii) নং কে (iv) নং দ্বারা ভাগ করে পাই,

$\frac{x(y - x)}{y(y - x)} = \frac{1}{2}$

বা, $2x(y - x) = y(y - x)$

বা, $2x(y - x) - y(y - x) = 0$

বা, $(2x - y)(y - x) = 0$

বা, $2x - y = 0$ অথবা, $y - x = 0$

$\therefore y = 2x$ ……… (v) বা, $y = x$ ……… (vi)

(v) নং থেকে y এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$x \,.\, 2x - x^2 = 1$

বা, $2x^2 - x^2 = 1$

বা, $x^2 = 1$

$\therefore x = \pm 1$

$x = \pm 1$ হলে $y = 2(\pm 1) = \pm 2$

আবার (iv) থেকে y এর মান (i) এ বসিয়ে পাই,

$x \,.\, x - x^2 = 1$

বা, $x^2 - x^2 = 1$

বা, $0 = 1$ যা অসম্ভব।

$\therefore$ এক্ষেত্রে কোন সমাধান নাই। [$(-1, 2), (1, -2)$ বিন্দুসমূহের ক্ষেত্রে (i) ও (ii) সিদ্ধ হয় না।]

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $(x, y) = (1, 2), (-1, -2)$.

জেনে রাখা ভালো।

দ্বিঘাত সমীকরণের সর্বদা দুইটি মূল পাওয়া যায়। কিন্তু দ্বিঘাত সমীকরণের [illegible] অক্ষকে একটি মাত্র বিন্দুতে স্পর্শ করলে দুইটি সমান মূল পাওয়া যায়। [illegible] সমীকরণদ্বয়ের লেখ x অক্ষকে দুইবার স্পর্শ করে বলে এর দুই [illegible] পাওয়া যায়। তাই সমাধানের ক্ষেত্রে চারটির পরিবর্তে দুইটি মূল [illegible]

৮। $x^2 - xy = 14,\ y^2 + xy = 60.$

সমাধান:

$x^2 - xy = 14$ ……… (i)

$y^2 + xy = 60$ ……… (ii)

(i) নং সমীকরণ থেকে পাই,

$$y = \frac{x^2 - 14}{x}$$

বা, $y = x - \frac{14}{x}$ ……… (iii)

(iii) নং থেকে y এর মান (ii) নং এ বসিয়ে পাই,

$$\left(x - \frac{14}{x}\right)^2 + x\left(x - \frac{14}{x}\right) = 60$$

বা, $x^2 - 2.x.\frac{14}{x} + \left(\frac{14}{x}\right)^2 + x^2 - 14 = 60$

বা, $2x^2 - 28 + \frac{196}{x^2} - 14 = 60$

বা, $2x^2 - 28 + \frac{196}{x^2} - 14 - 60 = 0$

বা, $2x^2 - 102 + \frac{196}{x^2} = 0$

বা, $\frac{2x^4 - 102x^2 + 196}{x^2} = 0$

বা, $2x^4 - 102x^2 + 196 = 0$ [উভয় পক্ষকে x^2 দ্বারা গুণ করে]

বা, $x^4 - 51x^2 + 98 = 0$ [উভয় পক্ষকে 2 দ্বারা ভাগ করে]

বা, $x^4 - 49x^2 - 2x^2 + 98 = 0$

বা, $x^2(x^2 - 49) - 2(x^2 - 49) = 0$

বা, $(x^2 - 49)(x^2 - 2) = 0$

হয়, $x^2 - 49 = 0$ অথবা, $x^2 - 2 = 0$

$\therefore x = \pm 7$ অথবা $x = \pm\sqrt{2}$

x এর মান (iii) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

যখন $x = 7$ তখন $y = 7 - \frac{14}{7} = \frac{49 - 14}{7} = \frac{35}{7} = 5$

যখন $x = -7$ তখন $y = -7 + \frac{14}{7} = \frac{-49 + 14}{7} = \frac{-35}{7} = -5$

যখন $x = \sqrt{2}$ তখন

$$y = \sqrt{2} - \frac{14}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} - \frac{14\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \sqrt{2} - \frac{14\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} - 7\sqrt{2} = -6\sqrt{2}$$

যখন $x = -\sqrt{2}$ তখন $y = -\sqrt{2} - \frac{14}{-\sqrt{2}}$

$$= -\sqrt{2} + \frac{14\sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = -\sqrt{2} + \frac{14\sqrt{2}}{2}$$

$$= -\sqrt{2} + 7\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

∴ নির্ণেয় সমাধান:

$$(x, y) = (7, 5), (-7, -5), (\sqrt{2}, -6\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, 6\sqrt{2})$$

বিকল্প সমাধান:

$x^2 - xy = 14$ ……… (i)

$y^2 + xy = 60$ ……… (ii)

(i) নং হতে পাই,

$x(x - y) = 14$

বা, $x - y = \frac{14}{x}$ ……… (iii)

(ii) নং হতে পাই,

$y^2 + xy = 60$

বা, $y(x + y) = 60$

বা, $x + y = \frac{60}{y}$ ……… (iv)

(iii) ও (iv) নং যোগ করে পাই,

$$x - y = \frac{14}{x}$$
$$x + y = \frac{60}{y}$$

(+) করে $2x = \frac{14}{x} + \frac{60}{y}$

বা, $\frac{60}{y} = 2x - \frac{14}{x}$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $\frac{60}{y} = \frac{2x^2 - 14}{x}$

বা, $\frac{y}{60} = \frac{x}{2x^2 - 14}$

বা, $y = \frac{60x}{2x^2 - 14}$ $\therefore y = \frac{30x}{x^2 - 7}$

(i) নং এ $y = \frac{30x}{x^2 - 7}$ বসিয়ে পাই,

$$x^2 - x.\frac{30x}{x^2 - 7} = 14$$

বা, $x^2 - \frac{30x^2}{x^2 - 7} = 14$

বা, $\frac{x^4 - 7x^2 - 30x^2}{x^2 - 7} = 14$

বা, $x^4 - 7x^2 - 30x^2 = 14x^2 - 98$

বা, $x^4 - 37x^2 - 14x^2 + 98 = 0$

বা, $x^4 - 51x^2 + 98 = 0$

বা, $x^4 - 49x^2 - 2x^2 + 98 = 0$

বা, $x^2(x^2 - 49) - 2(x^2 - 49) = 0$

বা, $(x^2 - 49)(x^2 - 2) = 0$

হয়, $x^2 - 49 = 0$ অথবা, $x^2 - 2 = 0$

বা, $x^2 = 49$ বা, $x^2 = 2$

$\therefore x = \pm 7$ $\therefore x = \pm\sqrt{2}$

$x = 7$ হলে, $y = \frac{30.7}{(7)^2 - 7} = \frac{30.7}{42} = 5$

$x = -7$ হলে, $y = \frac{30.(-7)}{(-7)^2 - 7} = \frac{-30.7}{42} = -5$

$x = \sqrt{2}$ হলে, $y = \frac{30.\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2 - 7} = \frac{30.\sqrt{2}}{-5} = -6\sqrt{2}$

$x = -\sqrt{2}$ হলে, $y = \frac{30.(-\sqrt{2})}{(-\sqrt{2})^2 - 7} = \frac{30.\sqrt{2}}{-5} = 6\sqrt{2}$

∴ নির্ণেয় সমাধান:

$(x, y) = (7, 5), (-7, -5), (\sqrt{2}, -6\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, 6\sqrt{2})$

৯। $x^2 + y^2 = 25, xy = 12.$

সমাধান:

$x^2 + y^2 = 25$ ……… (i)

$xy = 12$ ……… (ii)

(ii) থেকে পাই, $y = \frac{12}{x}$ ……… (iii)

(iii) নং হতে y এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই-

$$x^2+\left(\frac{12}{x}\right)^2=25$$

বা, $x^2+\frac{144}{x^2}=25$

বা, $\frac{x^4+144}{x^2}=25$

বা, $x^4+144=25x^2$

বা, $x^4-25x^2+144=0$

বা, $x^4-16x^2-9x^2+144=0$

বা, $x^2(x^2-16)-9(x^2-16)=0$

বা, $(x^2-16)(x^2-9)=0$

হয়, $x^2-16=0$ অথবা, $x^2-9=0$

$\therefore x=\pm4$ অথবা, $x=\pm3$

(iii) নং থেকে পাই

যখন $x=\pm4$ তখন $y=\frac{12}{\pm4}=\pm3$

যখন $x=\pm3$ তখন $y=\frac{12}{\pm3}=\pm4$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $(x,y)=(4,3),(-4,-3),(3,4),(-3,-4)$

বিকল্প সমাধান:

$x^2+y^2=25$ ……… (i)

$xy=12$ ……… (iii)

এখন, (ii) নং কে 2 দ্বারা গুণ করে (i) নং এর সাথে যোগ করে পাই,

$$\begin{array}{r} x^2+y^2=25 \\ 2xy=24 \\ \hline (+)\ x^2+y^2+2xy=49 \end{array}$$

বা, $(x+y)^2=49$

$\therefore x+y=\pm7$ ……… (iii)

আবার, (ii) নং কে 2 দ্বারা গুণ করে (i) নং থেকে বিয়োগ করে পাই,

$$\begin{array}{r} x^2+y^2=25 \\ 2xy=24 \\ \hline (-)\ x^2+y^2-2xy=1 \end{array}$$

বা, $(x-y)^2=1$

$\therefore x-y=\pm1$ ……… (iv)

(iii) ও (iv) নং থেকে পাই,

$$\left.\begin{array}{l} x+y=7 \\ x-y=1 \end{array}\right\} \text{……… (v)}$$

$$\left.\begin{array}{l} x+y=7 \\ x-y=-1 \end{array}\right\} \text{……… (vi)}$$

$$\left.\begin{array}{l} x+y=-7 \\ x-y=1 \end{array}\right\} \text{……… (vii)}$$

$$\left.\begin{array}{l} x+y=-7 \\ x-y=-1 \end{array}\right\} \text{……… (viii)}$$

উপরের সমীকরণ জোটগুলো সমাধান করে পাই,

(v) নং থেকে $x=4, y=3$

(vi) নং থেকে $x=3, y=4$

(vii) নং থেকে $x=-3, y=-4$

(viii) নং থেকে $x=-4, y=-3$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $(x,y)=(4,3),(3,4),(-3,-4),(-4,-3)$

১০। $\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}=\frac{10}{3}, x^2-y^2=3.$

সমাধান:

$\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}=\frac{10}{3}$ ……… (i)

$x^2-y^2=3$ ……… (ii)

(i) নং থেকে পাই,

$$\frac{(x+y)^2+(x-y)^2}{(x-y)(x+y)}=\frac{10}{3}$$

বা, $\frac{x^2+y^2+2xy+x^2+y^2-2xy}{x^2-y^2}=\frac{10}{3}$

বা, $\frac{2(x^2+y^2)}{x^2-y^2}=\frac{10}{3}$

বা, $\frac{2(x^2+y^2)}{3}=\frac{10}{3}$ [(ii) নং থেকে $x^2-y^2=3$ বসিয়ে]

বা, $x^2+y^2=\frac{3\times10}{3\times2}$

$\therefore x^2+y^2=5$ ……… (iii)

(ii) ও (iii) নং যোগ করে পাই,

$2x^2=8$

বা, $x^2=4$

$\therefore x=\pm2$

আবার (iii) থেকে (ii) নং বিয়োগ করে পাই,

$2y^2=2$

বা, $y^2=1$

$\therefore y=\pm1$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $(x, y)=(2,1),(2,-1),(-2,1),(-2,-1)$.

১১। $x^2+xy+y^2=3, x^2-xy+y^2=7$

সমাধান:

$x^2+xy+y^2=3$ ……… (i)

$x^2-xy+y^2=7$ ……… (ii)

(i) থেকে (ii) বিয়োগ করে পাই,

$2xy=-4$

বা, $xy=-2$

$\therefore y=-\frac{2}{x}$ ……… (iii)

(iii) নং থেকে y এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$$x^2+x\left(-\frac{2}{x}\right)+\left(-\frac{2}{x}\right)^2=3$$

বা, $x^2-2+\frac{4}{x^2}=3$

বা, $x^2-5+\frac{4}{x^2}=0$

বা, $\frac{x^4-5x^2+4}{x^2}=0$

বা, $x^4-5x^2+4=0$ [$\because x\neq0$]

বা, $x^4-4x^2-x^2+4=0$

বা, $x^2(x^2-4)-1(x^2-4)=0$

বা, $(x^2-4)(x^2-1)=0$
হয়, $x^2-4=0$
বা, $x^2=4$
$\therefore x=\pm 2$

অথবা, x^2-1
বা, $x^2=1$
$\therefore x=\pm 1$

(iii) নং এ x এর মান বসিয়ে পাই,

যখন $x=2$ তখন $y=-\dfrac{2}{2}=-1$

যখন $x=-2$ তখন $y=-\dfrac{2}{-2}=1$

যখন $x=1$ তখন $y=-\dfrac{2}{1}=-2$

যখন $x=-1$ তখন $y=-\dfrac{2}{-1}=2$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $(x, y)=(2,-1),(-2,1),(1,-2),(-1,2)$

বিকল্প সমাধান: $x^2+xy+y^2=3$ ……… (i)
$x^2-xy+y^2=7$ ……… (ii)
(i) থেকে (ii) বিয়োগ করে পাই,
$2xy=-4$
বা, $xy=-2$
আমরা জানি,

$$x^2-y^2=\sqrt{(x^2+y^2)^2-4xy}$$
$$=\sqrt{5^2-4(-2)^2}=\sqrt{9}=\pm 3 \text{ ....(iv)}$$

(i) নং থেকে পাই, $x^2+xy+y^2=3$
$x^2+y^2=3+2=5$ .... (v)
(v) + (iv) যোগ করে পাই, $2x^2=8$ সুতরাং $x=\pm 2$ $\therefore y=\pm 1$
অথবা,
$x=\pm 1$ $\therefore y=\pm 2$ [$(x^2-y^2)=-3$ ব্যবহার করে]
$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $(x, y)=(2,-1),(-2,1),(1,-2),(-1,2)$

[illegible] $2x^2+3xy+y^2=20,\ 5x^2+4y^2=41.$

সমাধান:
$2x^2+3xy+y^2=20$ ……… (i)
$5x^2+4y^2=41$ ……… (iii)
(i) নং কে (ii) নং দ্বারা ভাগ করে পাই,

$$\frac{2x^2+3xy+y^2}{5x^2+4y^2}=\frac{20}{41}$$

বা, $82x^2+123xy+41y^2=100x^2+80y^2$
বা, $82x^2+123xy+41y^2-100x^2-80y^2=0$
বা, $-18x^2+123xy-39y^2=0$
বা, $18x^2-123xy+39y^2=0$
বা, $6x^2-41xy+13y^2=0$ [উভয় পক্ষকে 3 দ্বারা ভাগ করে]
বা, $6x^2-39xy-2xy+13y^2=0$
বা, $3x(2x-13y)-y(2x-13y)=0$
বা, $(2x-13y)(3x-y)=0$
হয়, $2x-13y=0$ অথবা, $3x-y=0$

$\therefore y=\dfrac{2x}{13}$ ……… (iii) বা, $y=3x$ ……… (iv)

(iii) নং থেকে y এর মান (ii) নং এ বসিয়ে পাই,

$$5x^2+4\left(\frac{2x}{13}\right)^2=41$$

বা, $5x^2+4.\dfrac{4x^2}{169}=41$
বা, $845x^2+16x^2=41\times 169$ [উভয় পক্ষকে 169 দ্বারা গুণ করে]
বা, $861x^2=41\times 169$
বা, $x^2=\dfrac{41\times 169}{861}$
বা, $x^2=\dfrac{169}{21}$
$\therefore x=\pm\sqrt{\dfrac{169}{21}}=\pm\dfrac{13}{\sqrt{21}}$

x এর এই মান (iii) নং এ বসিয়ে পাই,

$$y=\frac{2}{13}\times\left(\pm\frac{13}{\sqrt{21}}\right)=\pm\frac{2}{\sqrt{21}}$$

আবার (iv) নং থেকে y এর মান (ii) নং এ বসিয়ে পাই,
$5x^2+4(3x)^2=41$
বা, $5x^2+4.9x^2=41$
বা, $5x^2+36x^2=41$
বা, $41x^2=41$
বা, $x^2=1$
$\therefore x=\pm 1$
x এর এই মান (iv) নং এ বসিয়ে পাই,
$y=3(\pm 1)=\pm 3.$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $(x,y)=\left(\dfrac{13}{\sqrt{21}},\dfrac{2}{\sqrt{21}}\right),\left(\dfrac{-13}{\sqrt{21}},\dfrac{-2}{\sqrt{21}}\right),(1,3),(-1,-3)$

অনুশীলনী-৫.৫

প্রাথমিক আলোচনা

সমীকরণের ধারণা ব্যবহার করে দৈনন্দিন জীবনে বহু সমস্যার সমাধান করা যায়। এ ধরনের সমস্যা সমাধানে নিম্নোক্ত বিষয়গুলো মনে রাখা জরুরী–

(ক) প্রথমে দুইটি অজ্ঞাত রাশি এবং অন্য যেকোনো স্বতন্ত্র প্রতীক ধরতে হয়।

(খ) তারপর সমস্যার শর্ত বা শর্তগুলো থেকে পরস্পর অনির্ভর ও সঙ্গতিপূর্ণ সমীকরণ জোট গঠন করতে হয়।

(গ) সমীকরণ জোট সমাধান করেই অর্থাৎ অজ্ঞাত রাশির মান নির্ণয় করা হয়।

এ অধ্যায়ের গুরুত্বপূর্ণ সূত্র:

(ক) বর্গের একবাহুর দৈর্ঘ্য x একক হলে বর্গক্ষেত্রের–

(i) ক্ষেত্রফল $= x^2$ বর্গএকক (ii) কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{2}x$ একক (iii) পরিসীমা $= 4x$ একক

(খ) আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য x একক এবং প্রস্থে y একক হলে আয়তক্ষেত্রের–

(i) ক্ষেত্রফল $= xy$ বর্গএকক (ii) পরিসীমা $= 2(x+y)$ একক (iii) কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{x^2+y^2}$ একক

(গ) একটি সংখ্যার একক স্থানীয় অঙ্ক x এবং এবং দশক স্থানীয় অঙ্ক y হলে

(i) সংখ্যাটি $= x + 10y$ (ii) অঙ্কদ্বয় স্থান পরিবর্তন করলে সংখ্যাটি $= (y + 10x)$

উদাহরণ: একক স্থানীয় অঙ্ক 5 এবং দশক স্থানীয় অঙ্ক 2 হলে

সংখ্যাটি $= 5 + 2.10 = 25$

অঙ্কদ্বয় স্থান পরিবর্তন করলে সংখ্যাটি $= 2 + 5.10 = 52$

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৫.৫

১। দুইটি বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমষ্টি 481 বর্গমিটার। ঐ দুইটি বর্গক্ষেত্রের দুই বাহু দ্বারা গঠিত আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 240 বর্গমিটার হলে, বর্গক্ষেত্র দুইটির বাহুর পরিমাণ কত?

২। দুইটি ধনাত্মক সংখ্যার বর্গের সমষ্টি 250। সংখ্যা দুইটির গুণফল 117, সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

৩। একটি আয়তক্ষেত্রের কর্ণের দৈর্ঘ্য 10 মিটার। ইহার বাহুদ্বয়ের যোগফল ও বিয়োগফলের সমান দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট বাহুদ্বয় দ্বারা অঙ্কিত আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 28 বর্গমিটার হলে, প্রথম আয়তক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

৪। দুইটি সংখ্যার বর্গের সমষ্টি 181 এবং সংখ্যা দুইটির গুণফল 90, সংখ্যা দুইটির বর্গের অন্তর নির্ণয় কর।

৫। একটি আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 24 বর্গমিটার। অপর একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য এবং প্রস্থ প্রথম আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য এবং প্রস্থ অপেক্ষা যথাক্রমে 4 মিটার এবং 1 মিটার বেশি এবং ক্ষেত্রফল 50 বর্গমিটার। প্রথম আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

৬। একটি আয়তক্ষেত্রের প্রস্থের দ্বিগুণ দৈর্ঘ্য অপেক্ষা 23 মিটার বেশি। আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 600 বর্গমিটার হলে, এর দৈর্ঘ্য এবং প্রস্থ নির্ণয় কর।

৭। একটি আয়তক্ষেত্রের পরিসীমা কর্ণদ্বয়ের দৈর্ঘ্যের সমষ্টি অপেক্ষা 8 মিটার বেশি। ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল 48 বর্গমিটার হলে, এর দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

৮। দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যাকে এর অঙ্কদ্বয়ের গুণফল দ্বারা ভাগ করলে ভাগফল 2 হয়। সংখ্যাটির সাথে 27 যোগ করলে অঙ্কদ্বয় স্থান বিনিময় করে। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

৯। একটি আয়তাকার বাগানের পরিসীমা 56 মিটার এবং কর্ণ 20 মিটার। ঐ বাগানের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্য কত?

১০। একটি আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 300 বর্গমিটার এবং এর অর্ধপরিসীমা একটি কর্ণ অপেক্ষা 10 মিটার বেশি। ক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

অনুশীলনী-৫.৫ এর সমাধান

১। দুইটি বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমষ্টি 481 বর্গমিটার। ঐ দুইটি বর্গক্ষেত্রের দুই বাহু দ্বারা গঠিত আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 240 বর্গমিটার হলে, বর্গক্ষেত্র দুইটির বাহুর পরিমাণ কত?

সমাধান:

মনে করি, একটি বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্য x মিটার

এবং অপর বর্গক্ষেত্রটির এক বাহুর দৈর্ঘ্য y মিটার

প্রশ্নমতে, $x^2 + y^2 = 481 \ldots\ldots\ldots \text{(i)}$

এবং $xy = 240 \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(ii)}$

আমরা জানি, $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$

$= 481 + 2.240$

$= 481 + 480 = 961$

$\therefore (x+y) = \pm 31$

যেহেতু দৈর্ঘ্যের সমষ্টি ঋণাত্মক হতে পারে না।

সুতরাং $(x+y) = -31$ গ্রহণযোগ্য নয়।

$\therefore x + y = 31 \ldots\ldots\ldots \text{(iii)}$

আবার, $(x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy$

$= 481 - 2.240 = 481 - 480 = 1$

$\therefore x - y = \pm 1 \ldots\ldots\ldots \text{(iv)}$

(iii) ও (iv) যোগ করে,

$$\begin{array}{r} x + y = 31 \\ x - y = \pm 1 \\ \hline 2x = 31 \pm 1 \end{array}$$

বা, $x = \frac{31 \pm 1}{2}$

(+) চিহ্ন নিয়ে, $x = \frac{31+1}{2} = \frac{32}{2} = 16$

(−) চিহ্ন নিয়ে, $x = \frac{31-1}{2} = \frac{30}{2} = 15$

x এর মান (iii) নং এ বসিয়ে পাই,

$x = 16$ হলে,

$16 + y = 31$

বা, $y = 31 - 16$

$\therefore y = 15$

আবার, $x = 15$ হলে,

$15 + y = 31$

বা, $y = 31 - 15$

$\therefore y = 16$

$\therefore$ বর্গক্ষেত্র দুটির বাহুর পরিমাণ 16 মিটার এবং 15 মিটার। **(Ans)**

২। দুইটি ধনাত্মক সংখ্যার বর্গের সমষ্টি 250। সংখ্যা দুইটির গুণফল 117, সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর। (V.V.I)

সমাধান:

মনে করি, সংখ্যা দুইটি x ও y এবং $x > y$

প্রশ্নমতে, $x^2 + y^2 = 250$ ... ... (i)

এবং $xy = 117$ ... ... (ii)

আমরা জানি, $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$

$= 250 + 2.117$

$= 250 + 234$

$= 484$

$\therefore x + y = \pm 22$

যেহেতু দুটি ধনাত্মক সংখ্যার সমষ্টি ঋণাত্মক হতে পারে না।

সুতরাং $x + y = -22$ গ্রহণযোগ্য নয়।

$\therefore x + y = 22$ ... ... (iii)

আবার, $(x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy$

$= 250 - 2.117$

$= 250 - 234$

$= 16$

$\therefore x - y = \pm 4$ ... ... (iv)

(iii) ও (iv) নং সমীকরণ যোগ করে,

$$\begin{array}{r} x + y = 22 \\ x - y = \pm 4 \\ \hline 2x = 22 \pm 4 \end{array}$$

বা, $x = \dfrac{2(11 \pm 2)}{2}$

বা, $x = 11 \pm 2$

$\therefore x = 13$ অথবা, 9

x এর মান (iii) নং সমীকরণে বসিয়ে,

$x = 13$ হলে,

$13 + y = 22$

বা, $y = 22 - 13$

$\therefore y = 9$

আবার, $x = 9$ হলে,

$9 + y = 22$

বা, $y = 22 - 9$

$\therefore y = 13$

$\therefore$ সংখ্যা দুটি 13 এবং 9 **(Ans.)**

৩। একটি আয়তক্ষেত্রের কর্ণের দৈর্ঘ্য 10 মিটার। ইহার বাহুদ্বয়ের যোগফল ও বিয়োগফলের সমান দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট বাহুদ্বয় দ্বারা অঙ্কিত আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 28 বর্গমিটার হলে, প্রথম আয়তক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

সমাধান:

মনে করি, প্রথম আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ যথাক্রমে x মিটার ও y মিটার।

$\therefore$ এর আয়তক্ষেত্রটির কর্ণ $= \sqrt{x^2 + y^2}$ মিটার

প্রশ্নমতে, $\sqrt{x^2 + y^2} = 10$

বা, $x^2 + y^2 = 100$ [বর্গ করে] ... ... (i)

এবং অপর আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য $(x + y)$ মিটার এবং প্রস্থ $(x - y)$ মিটার।

প্রশ্নমতে, $(x + y)(x - y) = 28$

বা, $x^2 - y^2 = 28$

(i) নং ও (ii) নং যোগ করে পাই,

$x^2 + y^2 + x^2 - y^2 = 100 + 28$

বা, $2x^2 = 128$

বা, $x^2 = \dfrac{128}{2} = 64$

বা, $x = \pm\sqrt{64} = \pm 8$

$\therefore x = 8$ [$\therefore$ দৈর্ঘ্য ঋণাত্মক হতে পারে না]

x এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$8^2 + y^2 = 100$

বা, $y^2 = 100 - 8^2$

$= 100 - 64 = 36$

$\therefore y = \pm\sqrt{36} = \pm 6$

বা, $y = 6$ [$\therefore$ প্রস্থ ঋণাত্মক হতে পারে না]

$\therefore$ প্রথম আয়তক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য = 8 মিটার এবং প্রস্থ = 6 মিটার **(Ans.)**

৪। দুইটি সংখ্যার বর্গের সমষ্টি 181 এবং সংখ্যা দুইটির গুণফল 90, সংখ্যা দুইটির বর্গের অন্তর নির্ণয় কর।

সমাধান:

মনে করি, সংখ্যা দুইটি x ও y এবং $x > y$

প্রশ্নমতে, $x^2 + y^2 = 181$ ... ... (i)

এবং $xy = 90$ ... ... (ii)

সংখ্যা দুটির বর্গের অন্তর $x^2 - y^2$ অথবা, $y^2 - x^2$

আমরা জানি, $(x^2 - y^2)^2 = (x^2 + y^2)^2 - 4x^2y^2$

$= (181)^2 - 4.(90)^2$

$= 32761 - 32400 = 361$

$\therefore x^2 - y^2 = \pm\sqrt{361} = \pm 19$

আবার, $(y^2 - x^2)^2 = (y^2 + x^2)^2 - 4.y^2x^2$

$= (x^2 + y^2)^2 - 4.(xy)^2$

$= (181)^2 - 4.(90)^2$

$= 32761 - 32400 = 361$

$\therefore y^2 - x^2 = \pm\sqrt{361} = \pm 19$

যেহেতু সংখ্যা দুটির বর্গের অন্তর অর্থাৎ শুধুমাত্র মান চাওয়া হয়েছে।

$\therefore$ সংখ্যা দুটির বর্গের অন্তর = 19 **(Ans.)**

৫। একটি আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 24 বর্গমিটার। অপর একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য এবং প্রস্থ প্রথম আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য এবং প্রস্থ অপেক্ষা যথাক্রমে 4 মিটার এবং 1 মিটার বেশি এবং ক্ষেত্রফল 50 বর্গমিটার। প্রথম আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

সমাধান:

মনে করি, আয়তক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ যথাক্রমে x মিটার ও y মিটার।

$\therefore$ ক্ষেত্রফল $= xy$ বর্গমিটার।

প্রশ্নমতে, $xy = 24$ ... ... (i)

অপর আয়তক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ যথাক্রমে $(x + 4)$ মিটার ও $(y + 1)$ মিটার।

তাহলে অপর আয়তক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল

$= (x + 4)(y + 1)$ বর্গমিটার

$= (xy + x + 4y + 4)$ বর্গমিটার

প্রশ্নমতে, $xy + x + 4y + 4 = 50$

বা, $24 + x + 4y = 50 - 4$ [$\because xy = 24$]

বা, $x + 4y = 46 - 24$

বা, $x = 22 - 4y$ ... ... (ii)

(ii) নং হতে প্রাপ্ত $x = 22 - 4y$ (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$(22 - 4y).y = 24$

বা, $22y - 4y^2 = 24$

বা, $-4y^2 + 22y - 24 = 0$

বা, $2y^2 - 11y + 12 = 0$ [উভয় পক্ষকে -2 দ্বারা ভাগ করে]

বা, $2y^2 - 8y - 3y + 12 = 0$

বা, $2y(y - 4) - 3(y - 4) = 0$

বা, $(y - 4)(2y - 3) = 0$

হয় $y - 4 = 0$ অথবা, $2y - 3 = 0$

$\therefore y = 4$ বা, $2y = 3$

বা, $y = \dfrac{3}{2}$

$\therefore y = 1\dfrac{1}{2}$

y এর মান (ii) নং এ বসিয়ে পাই,

$y = 4$ হলে, $x = 22 - 4.4 = 22 - 16 = 6$

$y = \dfrac{3}{2}$ হলে, $x = 22 - 4.\dfrac{3}{2} = 22 - 6 = 16$

$\therefore$ ক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ যথাক্রমে 6 মিটার ও 4 মিটার অথবা, 16 মিটার ও $1\frac{1}{2}$ মিটার। **(Ans.)**

৬। একটি আয়তক্ষেত্রের প্রস্থের দ্বিগুণ দৈর্ঘ্য অপেক্ষা 23 মিটার বেশি। আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 600 বর্গমিটার হলে, এর দৈর্ঘ্য এবং প্রস্থ নির্ণয় কর।

সমাধান:

মনে করি, আয়তক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য x মিটার এবং প্রস্থ y মিটার।

$\therefore$ আয়তক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল $= xy$ বর্গমিটার

প্রশ্নানুসারে, $xy = 600$ ... ... (i)

এবং $2y = x + 23$

বা, $x = 2y - 23$ ... ... (ii)

(ii) নং হতে প্রাপ্ত $x = 2y - 23$ (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$y(2y - 23) = 600$

বা, $2y^2 - 23y - 600 = 0$

বা, $2y^2 - 48y + 25y - 600 = 0$

বা, $2y(y - 24) + 25(y - 24) = 0$

বা, $(y - 24)(2y + 25) = 0$

হয় $y - 24 = 0$ অথবা, $2y + 25 = 0$

$\therefore y = 24$ বা, $2y = -25$

$\therefore y = -\frac{25}{2}$

কিন্তু প্রস্থ $y = \frac{-25}{2}$ গ্রহণযোগ্য নহে। কারণ প্রস্থ ঋণাত্মক হতে পারে না।

$\therefore y = 24$ গ্রহণযোগ্য হবে।

y এর মান (ii) নং সমীকরণে বসিয়ে,

$x = 2y - 23$

বা, $x = 2.24 - 23$

বা, $x = 48 - 23$

$\therefore x = 25$

$\therefore$ আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 25 মিটার এবং প্রস্থ 24 মিটার। **(Ans.)**

৭। একটি আয়তক্ষেত্রের পরিসীমা কর্ণদ্বয়ের দৈর্ঘ্যের সমষ্টি অপেক্ষা 8 মিটার বেশি। ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল 48 বর্গমিটার হলে, এর দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর। (VVI)

সমাধান:

মনে করি, আয়তক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য x মিটার এবং প্রস্থ y মিটার

তাহলে, আয়তক্ষেত্রটির পরিসীমা $= 2(x + y)$ মিটার

এবং ক্ষেত্রফল $= xy$ বর্গমিটার

একটি কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{x^2 + y^2}$

$\therefore$ দুইটি কর্ণের সমষ্টি $= 2\sqrt{x^2 + y^2}$ মিটার

প্রশ্নমতে, $2\sqrt{x^2 + y^2} + 8 = 2(x + y)$ মিটার

বা, $\sqrt{x^2 + y^2} + 4 = x + y$ [2 দ্বারা উভয় পক্ষকে ভাগ করে]

বা, $\sqrt{x^2 + y^2} = x + y - 4$ ... ... (i)

এবং $xy = 48$ ... ... (ii)

(i) নং সমীকরণ থেকে,

$\sqrt{x^2 + y^2} = x + y - 4$

বা, $\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = (x + y - 4)^2$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2.(x + y).4 + 4^2$

বা, $x^2 + y^2 = x^2 + 2xy + y^2 - 8(x + y) + 16$

বা, $8(x + y) = x^2 + 2.48 + y^2 + 16 - x^2 - y^2$ [$\because xy = 48$]

বা, $8(x + y) = 96 + 16$

বা, $x + y = \frac{112}{8}$

বা, $x + y = 14$

বা, $y = 14 - x$ ... ... (iii)

(iii) নং হতে প্রাপ্ত $y = 14 - x$ (ii) নং এ বসিয়ে পাই,

$x.(14 - x) = 48$

বা, $14x - x^2 - 48 = 0$

বা, $-x^2 + 14x - 48 = 0$

বা, $x^2 - 14x + 48 = 0$ [উভয় পক্ষকে -1 দ্বারা গুণ করে]

বা, $x^2 - 8x - 6x + 48 = 0$

বা, $x(x - 8) - 6(x - 8) = 0$

বা, $(x - 8)(x - 6) = 0$

হয় $x - 8 = 0$ অথবা, $x - 6 = 0$

$\therefore x = 8$ $\therefore x = 6$

x এর মান (iii) নং এ বসিয়ে পাই,

$x = 8$ হলে, $y = 14 - 8 = 6$

$x = 6$ হলে, $y = 14 - 6 = 8$

$x = 6$ এবং $y = 8$ গ্রহণযোগ্য নহে। কারণ আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য প্রস্থ অপেক্ষা বৃহত্তর।

$\therefore x = 8$ এবং $y = 6$ গ্রহণযোগ্য হবে।

অতএব, আয়তক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য 8 মিটার এবং প্রস্থ 6 মিটার। **(Ans.)**

জেনে রাখা ভালো: কোনো আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য এর প্রস্থের চেয়ে সব সময় বড় হয়ে থাকে।

৮। দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যাকে এর অঙ্কদ্বয়ের গুণফল দ্বারা ভাগ করলে ভাগফল 2 হয়। সংখ্যাটির সাথে 27 যোগ করলে অঙ্কদ্বয় স্থান বিনিময় করে। সংখ্যাটি নির্ণয় কর। (VI)

সমাধান:

মনে করি, দশক স্থানীয় অঙ্ক x এবং একক স্থানীয় অঙ্ক y

$\therefore$ সংখ্যাটি $= 10x + y$

প্রশ্নানুসারে, $\frac{10x + y}{xy} = 2$

বা, $10x + y = 2xy$ ... ... (i)

আবার, $10x + y + 27 = 10y + x$

বা, $10x + y + 27 - 10y - x = 0$

বা, $9x - 9y + 27 = 0$

বা, $9(x - y + 3) = 0$

বা, $x - y + 3 = 0$ [9 দ্বারা উভয় পক্ষকে ভাগ করে]

বা, $x = y - 3$ ... ... (ii)

(ii) নং হতে প্রাপ্ত $x = y - 3$ (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$10.(y - 3) + y = 2y.(y - 3)$

বা, $10y - 30 + y = 2y^2 - 6y$

বা, $10y + y - 2y^2 + 6y - 30 = 0$

বা, $-2y^2 + 17y - 30 = 0$

বা, $2y^2 - 17y + 30 = 0$ [-1 দ্বারা উভয় পক্ষকে গুণ করে]

বা, $2y^2 - 12y - 5y + 30 = 0$

বা, $2y(y - 6) - 5(y - 6) = 0$

বা, $(y - 6)(2y - 5) = 0$

হয় $y - 6 = 0$ অথবা, $2y - 5 = 0$

$\therefore y = 6$ বা, $2y = 5$

$\therefore y = \frac{5}{2}$

কিন্তু, $y = \frac{5}{2}$ গ্রহণযোগ্য নহে। কারণ কোনো পূর্ণসংখ্যার অঙ্ক ভগ্নাংশ হতে পারে না।

$\therefore y = 6$ গ্রহণযোগ্য হবে।

y এর মান (ii) নং সমীকরণে বসিয়ে,

$x = y - 3 = 6 - 3 = 3$ $\therefore x = 3$

$\therefore$ সংখ্যাটি $= 10x + y$

$= 10 \times 3 + 6$

$= 30 + 6 = 36$ **(Ans.)**

বি.দ্র. কোন সংখ্যাকে নিম্নরূপ ভাবে প্রকাশ করা যায়

52

$\rightarrow +2$

$\rightarrow \underline{5 \times 10}$

যোগ করে 52

৯। একটি আয়তাকার বাগানের পরিসীমা 56 মিটার এবং কর্ণ 20 মিটার। ঐ বাগানের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্য কত?

সমাধান:

মনে করি, আয়তাকার বাগানটির দৈর্ঘ্য x মিটার
এবং প্রস্থ y মিটার

$\therefore$ বাগানের পরিসীমা $= 2(x + y)$ মিটার,

কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{x^2 + y^2}$ মিটার

এবং ক্ষেত্রফল $= xy$ বর্গমিটার।

প্রশ্নমতে, $2(x + y) = 56$

বা, $x + y = \dfrac{56}{2}$

বা, $x + y = 28$ ……… (i)

এবং $\sqrt{x^2 + y^2} = 20$

বা, $x^2 + y^2 = 400$ ……… (ii) [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]

সমীকরণ (i) হতে,

$x + y = 28$

বা, $(x + y)^2 = (28)^2$ [বর্গ করে]

বা, $x^2 + y^2 + 2xy = 784$

বা, $400 + 2xy = 784$ [$\because x^2 + y^2 = 400$]

বা, $2xy = 784 - 400$

বা, $2xy = 384$

বা, $xy = \dfrac{384}{2}$

বা, $xy = 192$

$\therefore$ বাগানের ক্ষেত্রফল $= 192$ বর্গমিটার।

অর্থাৎ বর্গক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল $= 192$ বর্গমিটার

$\therefore$ বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{192}$ মিটার
$= \sqrt{64 \times 3}$ মিটার
$= 8\sqrt{3}$ মিটার **(Ans.)**

১০। একটি আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 300 বর্গমিটার এবং এর অর্ধপরিসীমা একটি কর্ণ অপেক্ষা 10 মিটার বেশি। ক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

সমাধান:

মনে করি, আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য x মিটার ও প্রস্থ y মিটার।

$\therefore$ ক্ষেত্রফল $= xy$ বর্গমিটার এবং পরিসীমা $= 2(x + y)$

অর্ধপরিসীমা $= \dfrac{2(x + y)}{2}$
$= (x + y)$ মিটার

এবং কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{x^2 + y^2}$ মিটার।

শর্তমতে, $xy = 300$ ……… (i)

এবং $(x + y) - \sqrt{x^2 + y^2} = 10$ ……… (ii)

এখন, (ii) নং সমীকরণ থেকে পাই,

$(x + y) - 10 = \sqrt{x^2 + y^2}$

বা, $\{(x + y) - 10\}^2 = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2$ [বর্গ করে]

বা, $(x + y)^2 - 2.(x + y).10 + (10)^2 = x^2 + y^2$

বা, $x^2 + 2xy + y^2 - 20x - 20y + 100 - x^2 - y^2 = 0$

বা, $2xy - 20x - 20y + 100 = 0$

বা, $2.300 - 20x - 20y + 100 = 0$ [$\because xy = 300$]

বা, $-20x - 20y = -700$

বা, $-20(x + y) = -700$

বা, $x + y = \dfrac{-700}{-20}$

বা, $x + y = 35$ ……… (iii)

আবার আমরা জানি, $(x - y)^2 = (x + y)^2 - 4xy$

বা, $(x - y)^2 = (35)^2 - 4 \times 300$ [$\because xy = 300$]

বা, $(x - y)^2 = 1225 - 1200$

বা, $x - y = \pm\sqrt{25}$

বা, $x - y = 5$ ……… (iv)

[ধনাত্মক মান নিয়ে। কারণ দৈর্ঘ্য > প্রস্থ হয়।]

(iii) নং ও (iv) নং সমীকরণ যোগ করে,

$$\begin{array}{r} x + y = 35 \\ x - y = 5 \\ \hline 2x = 40 \end{array}$$

বা, $x = \dfrac{40}{2}$

$\therefore x = 20$

x এর মান (iv) নং এ বসিয়ে,

$x - y = 5$

বা, $-y = 5 - x$

বা, $-y = 5 - 20$

বা, $-y = -15$

$\therefore y = 15$ [-1 দ্বারা উভয়পক্ষকে গুণ করে]

$\therefore$ আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 20 মিটার এবং প্রস্থ 15 মিটার। **(Ans.)**

অনুশীলনী-৫.৬

প্রাথমিক আলোচনা

দুই চলকবিশিষ্ট সূচক সমীকরণ জোটে সাধারণত x ও y দুইটি চলক থাকে এবং সমাধানে নিম্নোক্ত নিয়মটি ব্যবহৃত হয়।
নিয়ম: $a \neq 1$ হলে $a^x = a^m$ হবে যদি এবং কেবল যদি $x = m$ হয়। এজন্য প্রথমে সমীকরণের উভয় পক্ষকে একই সংখ্যার ঘাত বা শক্তিরূপে প্রকাশ করা হয়।

জেনে রাখা ভালো:

(i) যেকোনো সংখ্যার সূচক বা ঘাত শূন্য (0) হলে তার মান 1.

যথা $a^0 = 1, (-2a)^0 = 1, \left(\frac{x}{5}\right)^0 = 1, \left(\frac{2x^2}{3x+12}\right)^0 = 1$ কিন্তু 0^0 অসংজ্ঞায়িত।

(ii) $y^{-2} = \frac{1}{9}$ হলে $y^2 = 9 \Rightarrow y = \pm 3$ [$\pm$ sign হয়েছে দ্বিঘাত সমীকরণের জন্য, বর্গমূল ($\sqrt{}$) এর জন্য নয়]

(iii) যেকোনো ধনাত্মক সংখ্যার বর্গমূল সর্বদা ধনাত্মক।

(iv) চলক দুইটি x ও y হলে $(x, y) = (a, b)$ এরূপ আকারে জোটের একটি সমাধান যদি সমীকরণ দুইটিতে x এর স্থলে a এবং y এর স্থলে b বসালে তাদের উভয় পক্ষ সমান হয়।

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৫.৬

১। $2^x + 3^y = 31$
$2^x - 3^y = -23$.

২। $3^x = 9^y$
$5^{x+y+1} = 25^{xy}$.

৩। $3^x . 9^y = 81$
$2x - y = 8$

৪। $2^x . 3^y = 18$
$2^{2x} . 3^y = 36$

৫। $a^x . a^{y+1} = a^7$
$a^{2y} . a^{3x+5} = a^{20}$

৬। $\left.\begin{array}{l} y^x = x^2 \\ x^{2x} = y^4 \end{array}\right\} y \neq 1$

৭। $y^x = 4$
$y^2 = 2^x$

৮। $4^x = 2^y$
$(27)^{xy} = 9^{y+1}$

৯। $8y^x - y^{2x} = 16$
$2^x = y^2$.

অনুশীলনী-৫.৬ এর সমাধান

**১। $2^x + 3^y = 31$
$2^x - 3^y = -23$.**

সমাধান:

$2^x + 3^y = 31$ ……… (i)
$2^x - 3^y = -23$ ……… (ii)

(i) ও (ii) নং যোগ করে পাই,
$2.2^x = 8$
বা, $2^x = 4$
বা, $2^x = 2^2$
$\therefore x = 2$ [$\because a^m = a^n$ হলে $m = n$]

আবার (i) থেকে (ii) বিয়োগ করে পাই,
$2 . 3^y = 54$
বা, $3^y = 27$
বা, $3^y = 3^3$
$\therefore y = 3$ [$\because a^m = a^n$ হলে $m = n$]

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $(x, y) = (2, 3)$.

**২। $3^x = 9^y$
$5^{x+y+1} = 25^{xy}$.**

সমাধান:

$3^x = 9^y$ ……… (i)
$5^{x+y+1} = 25^{xy}$ ……… (ii)

(i) নং সমীকরণ হতে পাই,
$3^x = 9^y$
বা, $3^x = (3^2)^y$
বা, $3^x = 3^{2y}$
বা, $x = 2y$ ……… (iii) [$\because a^m = a^n$ হলে $m = n$]

আবার (ii) নং সমীকরণ হতে পাই,
$5^{x+y+1} = 25^{xy}$
বা, $5^{x+y+1} = (5^2)^{xy}$
বা, $5^{x+y+1} = 5^{2xy}$
বা, $x + y + 1 = 2xy$ ……… (iv) [$\because a^m = a^n$ হলে $m = n$]

(iii) নং থেকে x এর মান (iv) নং এ বসিয়ে পাই,
$2y + y + 1 = 2.2y.y$
বা, $2y + y + 1 = 4y^2$
বা, $4y^2 - 3y - 1 = 0$
বা, $4y^2 - 4y + y - 1 = 0$
বা, $4y(y-1) + 1(y-1) = 0$
বা, $(y-1)(4y+1) = 0$

হয়, $y - 1 = 0$ অথবা, $4y + 1 = 0$
$\therefore y = 1$ বা, $y = -\frac{1}{4}$

y এর মান (iii) নং এ বসিয়ে পাই,
যখন $y = 1$ তখন $x = 2.1 = 2$
যখন $y = -\frac{1}{4}$ তখন $x = 2\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $(x,y) = (2,1), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$.

$3^x.9^y = 81$
$2x - y = 8$

সমাধান:

$3^x.9^y = 81$ ……… (i)
$2x - y = 8$ ……… (ii)
(i) নং হতে পাই,
$3^x.9^y = 81$
বা, $3^x.(3^2)^y = 3^4$ $[\therefore 3^4 = 81]$
বা, $3^x.3^{2y} = 3^4$ $[\therefore (a^m)^n = a^{mn}]$
বা, $3^{x+2y} = 3^4$ $[a^m.a^n = a^{m+n}]$
$\therefore x + 2y = 4$ $[\therefore a^m = a^n$ হলে $m = n]$
বা, $x + 2y - 4 = 0$ ……… (iii)
(ii) নং থেকে,
এখন, $2x - y = 8$
বা, $2x - y - 8 = 0$ ……… (iv)

(iii) ও (iv) নং সমীকরণ থেকে বজ্রগুণন পদ্ধতিতে পাই,

$$\frac{x}{2\times(-8)-(-4)\times(-1)} = \frac{y}{(-4)\times2-(-8)\times1} = \frac{1}{1\times(-1)-2\times2}$$

বা, $\dfrac{x}{-16-4} = \dfrac{y}{-8+8} = \dfrac{1}{-1-4} = \dfrac{1}{-5}$

$\therefore x = 4, y = 0.$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $(x, y) = (4, 0).$

অথবা, (iii) × 2 − (iv) করে
$4y + y = 8 - 8$
$\therefore \ y = 0$
এবং $x = 4$ [(iii) থেকে]

৪। $2^x.3^y = 18$
$2^{2x}.3^y = 36$

সমাধান:

$2^x.3^y = 18$ ……… (i)
$2^{2x}.3^y = 36$ ……… (ii)
(ii) নং কে (i) নং দ্বারা ভাগ করে পাই,

$$\frac{2^{2x}.3^y}{2^x.3^y} = \frac{36}{18}$$

বা, $2^{2x-x} = 2$ $[\because y \neq 0$ এবং $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}]$

বা, $2^x = 2^1$

$\therefore x = 1$ $[\because a^m = a^n$ হলে $m = n]$

x এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,
$2^1.3^y = 18$
বা, $3^y = 9$
বা, $3^y = 3^2$
$\therefore y = 2$ $[\because a^m = a^n$ হলে $m = n]$
$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $(x, y) = (1, 2).$

৫। $a^x.a^{y+1} = a^7$
$a^{2y}.a^{3x+5} = a^{20}$

সমাধান:

$a^x.a^{y+1} = a^7$ ……… (i)
$a^{2y}.a^{3x+5} = a^{20}$ ……… (ii)
(i) নং হতে পাই,
$a^x.a^{y+1} = a^7$
বা, $a^{x+y+1} = a^7$ $[\because a^m.a^n = a^{m+n}]$
$\therefore x + y + 1 = 7$ $[\because a^n = a^m$ হলে $n = m]$
বা, $x + y - 6 = 0$ ……… (iii)
(ii) নং হতে পাই-
$a^{2y}.a^{3x+5} = a^{20}$
বা, $a^{2y+3x+5} = a^{20}$
$\therefore 2y + 3x + 5 = 20$ $[\because a^n = a^m$ হলে $n = m]$
বা, $3x + 2y - 15 = 0$ ……… (iv)
এখন, (iii) ও (iv) থেকে বজ্রগুণন পদ্ধতি অনুসারে,

$$\frac{x}{1\times(-15)-(-6)\times2} = \frac{y}{(-6)\times3-(-15)\times1} = \frac{1}{1\times2-3\times1}$$

বা, $\dfrac{x}{-15+12} = \dfrac{y}{-18+15} = \dfrac{1}{2-3}$

বা, $\dfrac{x}{-3} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{1}{-1}$

$\therefore x = 3$ এবং $y = 3.$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $(x, y) = (3, 3).$

৬। $\left.\begin{array}{l} y^x = x^2 \\ x^{2x} = y^4 \end{array}\right\} y \neq 1$

সমাধান:

$y^x = x^2$ ……… (i)
$x^{2x} = y^4$ ……… (ii)
(ii) নং সমীকরণ হতে পাই,
$x^{2x} = y^4$
বা, $(x^2)^x = y^4$
বা, $(y^x)^x = y^4$ [(i) নং সমীকরণ থেকে x^2 এর মান বসিয়ে]
বা, $y^{x^2} = y^4$ $[(a^m)^n = a^{mn}]$
বা, $x^2 = 4$ $[a^m = a^n$ হলে $m = n]$
$\therefore x = \pm 2$
x এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,
যখন $x = 2$ তখন, $y^2 = 2^2$
বা, $y^2 = 4$
$\therefore y = \pm 2$
যখন $x = -2$ তখন, $y^{-2} = (-2)^2$

বা, $\dfrac{1}{y^2} = 4$ $\left[\because a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}\right]$

বা, $y^2 = \dfrac{1}{4}$ [বিপরীত করে]

$\therefore y = \pm\dfrac{1}{2}$ [বর্গমূল করে]

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $(x, y) = (2, \pm 2), \left(-2, \pm\dfrac{1}{2}\right).$

৭। $y^x = 4$
$y^2 = 2^x$

সমাধান:

$y^x = 4$ ……… (i)
$y^2 = 2^x$ ……… (ii)
(ii) নং সমীকরণ হতে পাই,
$y^2 = 2^x$
বা, $(y^2)^x = (2^x)^x$ [উভয়পক্ষের ঘাত x-এ উন্নীত করে]
বা, $y^{2x} = 2^{x^2}$ $[(a^m)^n = a^{mn}]$
বা, $(y^x)^2 = 2^{x^2}$ $[(a^m)^n = a^{mn}]$

বা, $(4)^2 = 2^{x^2}$ [(i) থেকে y^x এর মান বসিয়ে]

বা, $(2^2)^2 = 2^{x^2}$

বা, $2^4 = 2^{x^2}$ $[(a^m)^n = a^{mn}]$

বা, $x^2 = 4$ $[a^m = a^n$ হলে $m = n]$

$\therefore x = \pm 2$ [বর্গমূল করে]

x এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

যখন $x = 2$ তখন,

$y^2 = 4$

$\therefore y = \pm 2$

যখন $x = -2$ তখন,

$y^{-2} = 4$

বা, $\frac{1}{y^2} = 4$

বা, $y^2 = \frac{1}{4}$

$\therefore y = \pm\frac{1}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $(x, y) = (2, \pm 2), \left(-2, \pm\frac{1}{2}\right)$.

দৃষ্টি আকর্ষণ: $y^2 = 4$ বা, $y = \sqrt{4} = \pm 2$ লিখা যাবে না।
শুদ্ধরূপ: $y^2 = 4$ বা, $y = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

৮। $4^x = 2^y$
$(27)^{xy} = 9^{y+1}$

সমাধান:

$4^x = 2^y$ ……… (i)

$(27)^{xy} = 9^{y+1}$ ……… (ii)

(i) নং থেকে পাই,

$(2^2)^x = 2^y$

বা, $2^{2x} = 2^y$ $[(a^m)^n = a^{mn}]$

বা, $2x = y$ ……… (iii) $[a^m = a^n$ হলে $m = n]$

আবার, (ii) নং থেকে পাই,

$(27)^{xy} = 9^{y+1}$

বা, $(3^3)^{xy} = (3^2)^{y+1}$

বা, $3^{3xy} = 3^{2(y+1)}$ $[(a^m)^n = a^{mn}]$

বা, $3xy = 2(y+1)$ ……… (iv) $[a^m = a^n$ হলে $m = n]$

(iii) নং থেকে y এর মান (iv) নং এ বসিয়ে পাই,

$3x.2x = 2(2x+1)$

বা, $6x^2 = 2(2x+1)$

বা, $3x^2 = 2x + 1$

বা, $3x^2 - 2x - 1 = 0$

বা, $3x^2 - 3x + x - 1 = 0$

বা, $3x(x-1) + 1(x-1) = 0$

বা, $(x-1)(3x+1) = 0$

হয় $x - 1 = 0$ অথবা $3x + 1 = 0$

$\therefore x = 1$ বা $x = -\frac{1}{3}$

x এর মান (iii) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

যখন $x = 1$ তখন $y = 2.1 = 2$

যখন $x = -\frac{1}{3}$ তখন $y = 2.\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $(x, y) = (1, 2), \left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

৯। $8y^x - y^{2x} = 16$
$2^x = y^2$.

সমাধান:

$8y^x - y^{2x} = 16$ ……… (i)

$2^x = y^2$ ……… (ii)

(i) নং থেকে পাই,

$y^{2x} - 8y^x + 16 = 0$ [-1 দিয়ে গুণ করে]

বা, $(y^x)^2 - 2.y^x.4 + 4^2 = 0$

বা, $(y^x - 4)^2 = 0$

বা, $y^x - 4 = 0$

$\therefore y^x = 4$ ……… (iii)

আবার (ii) থেকে পাই,

$2^x = y^2$

বা, $(2^x)^x = (y^2)^x$ [উভয় পক্ষের ঘাত x-এ উন্নীত করে]

বা, $2^{x^2} = y^{2x}$ $[\because (a^m)^n = a^{mn}]$

বা, $2^{x^2} = (y^x)^2$ $[\because a^{mn} = (a^m)^n]$

বা, $2^{x^2} = 4^2$ [(iii) থেকে y^x এর মান বসিয়ে]

বা, $2^{x^2} = 16$

বা, $2^{x^2} = 2^4$

বা, $x^2 = 4$ $[a^m = a^n$ হলে $m = n]$

$\therefore x = \pm 2$

x এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

যখন $x = 2$ তখন

$2^2 = y^2$

বা, $y^2 = 4$

$\therefore y = \pm 2$

যখন $x = -2$ তখন

$2^{-2} = y^2$

বা, $y^2 = \frac{1}{2^2}$

বা, $y^2 = \frac{1}{4}$

$\therefore y = \pm\frac{1}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $(x, y) = (2, \pm 2), \left(-2, \pm\frac{1}{2}\right)$

অনুশীলনী-৫.৭

প্রাথমিক আলোচনা

দ্বিঘাত সমীকরণ: কোনো বীজগাণিতিক সমীকরণে চলকের সর্বোচ্চ ঘাত 2 হলে তাকে দ্বিঘাত সমীকরণ বলে।
উদাহরণ: $ax^2 + bx + c = 0, x^2 = 2, xy = 1, x^2 + y^2 = 25$ ইত্যাদি দ্বিঘাত সমীকরণ।
একচলক বিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ: কোনো সমীকরণের একটি মাত্র চলক থাকলে এবং এর সর্বোচ্চ ঘাত 2 হলে একে এক চলক বিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ বলে।
উদাহরণ: $x^2 + 5x + 6 = 0, x^2 - x - 2 = 0, x^2 - 4 = 0$ [এখানে, একটিমাত্র চলক হলো x]

লেখচিত্রের সাহায্যে দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান:
দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2 + bx + c = 0$ এর সমাধান হলো x এর যে মানের জন্য সমীকরণটি সত্য।

লক্ষণীয়: $y = ax^2 + bx + c$ সমীকরণে x এর যে সকল মানের জন্য $y = 0$ ঐ সকল মানই সমীকরণটির সমাধান। আবার x অক্ষের ওপর সর্বদা $y = 0$। অতএব লেখচিত্র x অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ করে সে বিন্দুর x স্থানাঙ্ক অর্থাৎ ভুজ $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের সমাধান।

দ্বিঘাত সমীকরণের লেখচিত্র:
দ্বিঘাত সমীকরণের লেখচিত্র সর্বদাই বক্ররেখা। তাই এই লেখচিত্র শুধুমাত্র কয়েকটি বিন্দুর মাধ্যমে সঠিকভাবে অঙ্কন সম্ভব নয়। নিম্নোক্ত বিষয়গুলোর দিকে নজর রাখতে হবে।
(i) ফাংশনে $x = 0$ বসিয়ে অর্থাৎ $(0, y)$ অর্থাৎ y অক্ষের ছেদবিন্দু নির্ধারণ করতে হবে।
(ii) $y = 0$ বসিয়ে অর্থাৎ x অক্ষের ছেদবিন্দু (সম্ভব হলে) নির্ধারণ করতে হবে।
(iii) অতঃপর লেখের সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন বিন্দু নির্ণয় করতে হবে। এ বিন্দুতেই ফাংশনের লেখ মোচড় বা বাঁক নেয়। একে মোচড় বিন্দু (*turning point*) বলা হয়।
(iv) অতঃপর সুবিধামতো একাধিক বিন্দু নির্ণয় করে ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন করা হয়।

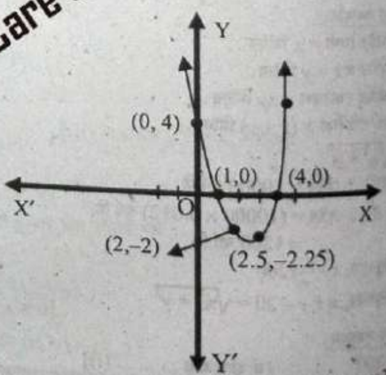
জেনে রাখা ভালো:
সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন বিন্দু নির্ণয়: সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন বিন্দুতে ফাংশনের লেখ বাঁক বা মোচড় নেয়। এটি নির্ণয়ে–
(i) প্রথমে সমীকরণকে $y = (x - a)^2 + b$ অথবা, $y = -(x - a)^2 + b$ আকারে প্রকাশ করতে হবে। এখানে a ও b বাস্তব সংখ্যা।
(ii) অতঃপর $x - a = 0$ অর্থাৎ $x = a$ বসিয়ে y এর মান নির্ণয় করতে হবে।
(iii) $x = a$ বসিয়ে পাই, $y = b$; অর্থাৎ $(x, y) = (a, b)$ বিন্দুই হবে সমীকরণের লেখের সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন বিন্দু।
(ক) $y = (x + a)^2 + b$ আকারের সমীকরণের লেখের (a, b) বিন্দু হবে সর্বনিম্ন বিন্দু [$x = a$ এর জন্য]।
(খ) $y = -(x - a)^2 + b$ আকারের সমীকরণের লেখের (a, b) বিন্দু হবে সর্বোচ্চ বিন্দু [$x = a$ এর জন্য]।

সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন বিন্দুতে ফাংশনের লেখ বাঁক বা মোচড় নেয় বলে একে মোচড় বিন্দু (turning point) বলা হয়।

উপরোক্ত বিষয়গুলো পাঠ্যবইয়ের উদাহরণের আলোকে ব্যাখ্যা করা হলো।

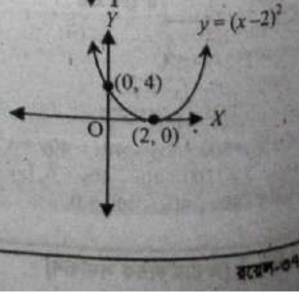
পাঠ্যবই উদাহরণ-১: লেখচিত্রের সাহায্যে $x^2 - 5x + 4 = 0$ এর সমাধান কর।
সমাধান:
মনেকরি, $y = x^2 - 5x + 4$

অক্ষদ্বয়ের ছেদবিন্দু নির্ণয়:
(i) $x = 0$ হলে $y = 4$ অর্থাৎ সমীকরণটির লেখ y অক্ষকে $(0, 4)$ বিন্দুতে ছেদ করে।
(ii) $y = 0$ হলে $x^2 - 5x + 4 = 0$
$(x - 4)(x - 1) = 0$
$\therefore x = 1, 4$
সুতরাং সমীকরণটির লেখ x অক্ষকে $(1,0)$ ও $(4,0)$ বিন্দুতে ছেদ করে।



পাঠ্যবই উদাহরণ-২: লেখচিত্রের সাহায্যে $x^2 - 4x + 4 = 0$ এর সমাধান কর।
মনেকরি, $y = x^2 - 4x + 4$
অক্ষদ্বয়ের ছেদবিন্দু নির্ণয়:
(i) $x = 0$ হলে $y = 4$ অর্থাৎ সমীকরণটির লেখ y অক্ষকে $(0,4)$ বিন্দুতে ছেদ করে।
(ii) $y = 0$ হলে $x^2 - 4x + 4 = 0$
বা, $(x - 2)^2 = 0$
$\therefore x = 2$ অর্থাৎ সমীকরণটির লেখ x অক্ষকে $(2,0)$ বিন্দুতে স্পর্শ করে।

মোচড় বিন্দু নির্ণয়: $y = x^2 - 4x + 4$
বা, $y = x^2 - 2.2x + 2^2$
$= (x - 2)^2 + 0$



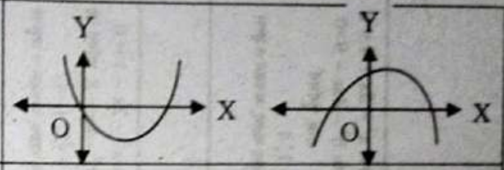
$(x-2)^2=0$ হবে যদি $x=2$ হয়, তখন $y=0$; অতএব মোচড় বিন্দু $(2,0)$ এবং এ বিন্দুতেই ফাংশনটির লেখ বাঁক বা মোচড় নেবে। এখন সুবিধামতো কয়েকটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করি।

x	0	1	1.5	2	3	4
y	4	1	0.25	0	1	4

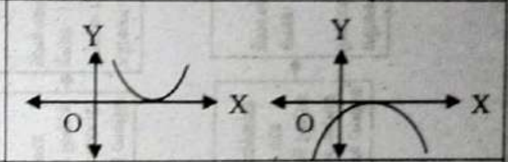
বিন্দুগুলো xy সমতলে স্থাপন করে সংযোগ করে লেখচিত্র অঙ্কন করি। দেখা যায় যে, লেখচিত্রটি x অক্ষকে $(2, 0)$ বিন্দুতে স্পর্শ করেছে। যেহেতু দ্বিঘাত সমীকরণের দুইটি মূল থাকে সুতরাং সমীকরণটির সমাধান $x = 2$ বা, $x = 2$.

সমীকরণের লেখ থেকে সমাধান নির্ণয়: $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের লেখচিত্র x-অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ করে, সেই বিন্দুর ভুজ (x স্থানাঙ্ক) হলো উক্ত সমীকরণের মূল। এক্ষেত্রে দ্বিঘাত সমীকরণটির–

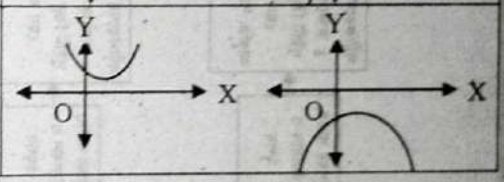
- নিশ্চায়ক $b^2 - 4ac > 0$ এবং মূলদ্বয় বাস্তব তাই লেখটি x-অক্ষকে দুইটি ভিন্ন বিন্দুতে ছেদ করে।



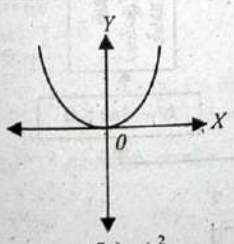
- নিশ্চায়ক $b^2 - 4ac = 0$ এবং উভয় মূল সমান তাই লেখটি x-অক্ষকে একটি বিন্দুতে স্পর্শ করে।



- নিশ্চায়ক $b^2 - 4ac < 0$ এবং মূলদ্বয় অবাস্তব তাই এ লেখটি x-অক্ষকে ছেদ বা স্পর্শ করে না।



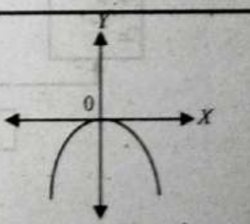
দ্বিঘাত সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কনের আরেকটি পদ্ধতি শিখে নিই। মূল সমীকরণ $y = x^2$ এর লেখচিত্রের সাহায্যে যেকোনো দ্বিঘাত সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন সহজ। একটি উদাহরণের সাহায্যে বিষয়টি পরিষ্কার হওয়া যাক:



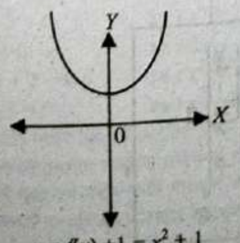
$y = f(x) = x^2$

নিশ্চায়ক $b^2 - 4ac = 0$ এবং উভয় মূল সমান তাই লেখটি x-অক্ষকে একটি বিন্দুতে স্পর্শ করে।

নিশ্চায়ক $b^2 - 4ac = 0$ এবং উভয় মূল সমান তাই লেখটি x-অক্ষকে একটি বিন্দুতে স্পর্শ করে।



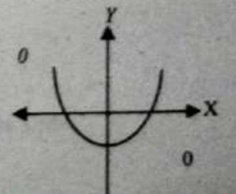
$y = -f(x) = -x^2$



$y = f(x) + 1 = x^2 + 1$

নিশ্চায়ক $b^2 - 4ac < 0$ এবং মূলদ্বয় অবাস্তব তাই এ লেখটি x-অক্ষকে ছেদ বা স্পর্শ করে না।

নিশ্চায়ক $b^2 - 4ac > 0$ এবং মূলদ্বয় বাস্তব তাই লেখটি x-অক্ষকে দুইটি ভিন্ন বিন্দুতে ছেদ করে।



$y = f(x) - 1 = x^2 - 1$

লক্ষণীয়: $y = f(x) + c$ হলে $f(x)$ এর লেখটি y অক্ষ বরাবর c একক উপরে উঠবে $y = f(x) - c$ হলে $f(x)$ এর লেখটি y অক্ষ বরাবর c একক নিচে নামবে।

দ্বিঘাত সমীকরণ

$ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$
$2x^2 + 3x + 5 = 0$

→ $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

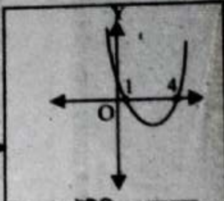
প্রথম মূল: $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

অপর মূল: $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

→ $b^2 - 4ac$ নিশ্চায়ক

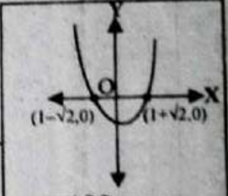
$b^2 - 4ac > 0$

(ক) $b^2 - 4ac$ পূর্ণ বর্গ → মূলদ্বয় বাস্তব, অসমান ও মূলদ → সমীকরণের লেখচিত্র x অক্ষকে অবশ্যই দুইটি ভিন্ন বিন্দুতে ছেদ করে; আকৃতি: পরাবৃত্তাকার → সমীকরণ: $x^2 - 5x + 4 = 0$; নিশ্চায়ক: $b^2 - 4ac = 9 > 0$ এবং পূর্ণবর্গ; মূলদ্বয়: 1, 4; মূলের ধরন: বাস্তব, অসমান ও মূলদ



x অক্ষকে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করে

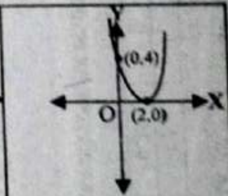
(খ) $b^2 - 4ac$ পূর্ণ বর্গ নয় → মূলদ্বয় বাস্তব, অসমান ও অমূলদ → সমীকরণের লেখচিত্র x অক্ষকে অবশ্যই দুইটি ভিন্ন বিন্দুতে ছেদ করে → সমীকরণ: $x^2 - 2x - 1 = 0$; নিশ্চায়ক: $b^2 - 4ac = 8$; পূর্ণবর্গ নয়; মূলদ্বয়: $1+\sqrt{2}$, $1-\sqrt{2}$; মূলের ধরন: বাস্তব, অসমান ও অমূলদ



x অক্ষকে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করে

$b^2 - 4ac = 0$

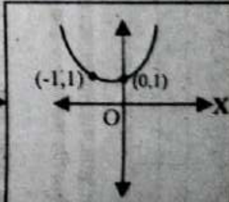
মূলদ্বয় বাস্তব ও সমান → সমীকরণের লেখচিত্র x অক্ষকে একটি বিন্দুতে স্পর্শ করে; আকৃতি: পরাবৃত্তাকার → সমীকরণ: $x^2 - 4x + 4 = 0$; নিশ্চায়ক: $b^2 - 4ac = 0$; মূলদ্বয়: 2, 2; মূলের ধরন: বাস্তব ও সমান



x অক্ষকে একটি বিন্দুতে স্পর্শ করে

$b^2 - 4ac < 0$

মূলদ্বয় অবাস্তব (অনুবন্ধী) জটিল বা কাল্পনিক → সমীকরণের লেখচিত্র কখনই x অক্ষকে কোনো বিন্দুতে স্পর্শ বা ছেদ করবে না; আকৃতি: প → সমীকরণ: $x^2 + x + 1 = 0$; নিশ্চায়ক: $b^2 - 4ac = -3 < 0$; মূলদ্বয়: $\dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}, \dfrac{-1-\sqrt{-3}}{2}$; মূলের ধরন: অবাস্তব (অনুবন্ধী জটিল)



x অক্ষকে কোনো বিন্দুতে ছেদ বা স্পর্শ করে না

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৫.৭

১। $x^2 - x - 12 = 0$ সমীকরণটিকে $ax^2 + bx + c$ এর সাথে তুলনা করে b এর মান কোনটি?

(ক) 0 (খ) 1 (গ) -1 (ঘ) 3

২। $16^x = 4^{x+1}$ সমীকরণটির সমাধান কোনটি?

(ক) 2 (খ) 0 (গ) 4 (ঘ) 1

৩। $x^2 - x - 13 = 0$ হলে সমীকরণটির একটি মূল কোনটি?

(ক) $\frac{-1+\sqrt{-51}}{2}$ (খ) $\frac{-1-\sqrt{51}}{2}$

(গ) $\frac{1+\sqrt{-51}}{2}$ (ঘ) $\frac{1+\sqrt{53}}{2}$

৪। $y^x = 9, y^2 = 3x$ সমীকরণ জোটের একটি সমাধান-

(ক) $(-3, -3)$ (খ) $(2, \frac{1}{3})$

(গ) $(-2, \frac{1}{3})$ (ঘ) $(-2, 3)$

নিচের তথ্যের ভিত্তিতে ৫ ও ৬ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

দুইটি ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যার বর্গের অন্তর 9 এবং গুণফল 20।

৫। সংখ্যা দুইটি কি কি?

(ক) 1 এবং 30 (খ) 2 এবং 15 (গ) 5 এবং 6 (ঘ) 4 এবং 5

৬। সংখ্যা দুইটির বর্গের সমষ্টি কত?

(ক) 1 (খ) 5° (গ) 41 (ঘ) $\sqrt{41}$

৭। একটি সংখ্যা ঐ সংখ্যার গুণাত্মক বিপরীত সংখ্যার সমষ্টি 6। সম্ভাব্য সমীকরণটি গঠন করলে হয়-

i. $x + \frac{1}{x} = 6$

ii. $x^2 + 1 = 6x$

iii. $x^2 - 6x - 1 = 0$

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii (খ) i ও iii

(গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

৮। $2^{px-1} = 2q^{px-2}$ এর সমাধান কোনটি?

(ক) $\frac{p}{2}$ (খ) p (গ) $-\frac{p}{2}$ (ঘ) $\frac{2}{p}$

লেখচিত্রের সাহায্যে নিচের সমীকরণগুলোর সমাধান কর:

৯। $x^2 - 4x + 3 = 0$

১০। $x^2 + 2x - 3 = 0$

১১। $x^2 + 7x = 0$

১২। $2x^2 - 7x + 3 = 0$

১৩। $2x^2 - 5x + 2 = 0$

১৪। $x^2 + 8x + 16 = 0$

১৫। $x^2 + x - 3 = 0$

১৬। $x^2 = 8$

১৭। একটি সংখ্যার বর্গের দ্বিগুণ সংখ্যাটির 5 গুণ থেকে 3 কম। কিন্তু ঐ সংখ্যাটির বর্গের 3 গুণ সংখ্যাটির 5 গুণ থেকে 3 বেশি।

(ক) উদ্দীপকের তথ্যগুলোর সাহায্যে সমীকরণ গঠন কর।

(খ) সূত্র প্রয়োগ করে ১ম সমীকরণটি সমাধান কর।

(গ) ২য় সমীকরণটি লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান কর।

১৮। জনাব আশফাক আলীর জমির ক্ষেত্রফল 0.12 হেক্টর। জমিটির অর্ধপরিসীমা এর একটি বর্গ অপেক্ষা 20 মিটার বেশি। তিনি তাঁর জমি থেকে শ্যামবাবুর নিকট এক তৃতীয়াংশ বিক্রি করেন। শ্যাম বাবুর জমির দৈর্ঘ্য, প্রস্থ অপেক্ষা 5 মিটার বেশি। [১ হেক্টর = ১০,০০০ বর্গ মিটার]

(ক) উদ্দীপকের আলোকে দুইটি সমীকরণ গঠন কর।

(খ) আশফাক আলীর জমির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

(গ) শ্যামবাবুর জমিটির দৈর্ঘ্য ও পরিসীমা নির্ণয় কর।

অনুশীলনী -৫.৭ এর সমাধান

১। $x^2 - x - 12 = 0$ সমীকরণটিকে $ax^2 + bx + c$ এর সাথে তুলনা করে b এর মান কোনটি? (VVI)

(ক) 0 (খ) 1 (গ) -1 (ঘ) 3

উত্তর: (গ) -1

ব্যাখ্যা:

$x^2 - x - 12 = 0$

বা, $1.x^2 + (-1)x + (-12) = 0$ কে $ax^2 + bx + c = 0$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $b = -1$.

২। $16^x = 4^{x+1}$ সমীকরণটির সমাধান কোনটি?

(ক) 2 (খ) 0 (গ) 4 (ঘ) 1

উত্তর: (ঘ) 1

ব্যাখ্যা:

$16^x = 4^{x+1}$. বা, $(4^2)^x = 4^{x+1}$.বা, $4^{2x} = 4^{x+1}$.

বা, $2x = x + 1$ বা, $2x - x = 1$ $\therefore x = 1$.

কৌশল: x এর যে মানের জন্য সমীকরণটি সিদ্ধ হবে, তাই সমীকরণের সমাধান। $x = 1$এর জন্য $16^1 = 4^{1+1} = 4^2 = 16$.

অতএব, সঠিক উত্তর: (ঘ)।

৩। $x^2 - x - 13 = 0$ হলে সমীকরণটির একটি মূল কোনটি?

(ক) $\frac{-1+\sqrt{+51}}{2}$ (খ) $\frac{-1-\sqrt{51}}{2}$ (গ) $\frac{1+\sqrt{-51}}{2}$ (ঘ) $\frac{1+\sqrt{53}}{2}$

উত্তর: (ঘ) $\frac{1+\sqrt{53}}{2}$

ব্যাখ্যা:

আমরা জানি, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

এখন, $x^2 - x - 13 = 0$

বা, $1.x^2 + (-1)x - 13 = 0$

$$\therefore x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\times1\times(-13)}}{2.1}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{1+52}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{+53}}{2}$$

$\therefore$ মূলদ্বয় $\frac{1+\sqrt{53}}{2}$ ও $\frac{1-\sqrt{53}}{2}$.

৪। $y^x = 9, y^2 = 3x$ সমীকরণ জোটের একটি সমাধান- (VVI)

(ক) $(-3, -3)$ (খ) $(2, \frac{1}{3})$

(গ) $(-2, \frac{1}{3})$ (ঘ) $(-2, 3)$

উত্তর: (গ) $(-2, \frac{1}{3})$

সমাধান:

$y^x = 9$, $y^2 = 3^x$.

এখন, $y^x = 9$

বা, $(y^x)^2 = 9^2$

বা, $(y^2)^x = 9^2$

বা, $(3^x)^x = (3^2)^2$ [$\because y^2 = 3^x$]

বা, $3^{x^2} = 3^4$

বা, $x^2 = 4$

$\therefore x = \pm 2$

এখন y এর মান নির্ণয়:

$x = +2$ হলে,

$y^2 = 9$

$y = \pm 3$

আবার, $x = -2$ হলে,

$y^{-2} = 9$

বা, $y^2 = \frac{1}{9}$

$\therefore y = \pm \frac{1}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $(2, \pm 3)$ ও $(-2, \pm \frac{1}{3})$.

অর্থাৎ $(2, 3), (2, -3), (-2, \frac{1}{3}), (-2, -\frac{1}{3})$

অতএব, প্রশ্নটির সঠিক উত্তর (গ) $(-2, \frac{1}{3})$

নিচের তথ্যের ভিত্তিতে ৫ ও ৬ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

দুইটি ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যার বর্গের অন্তর 9 এবং গুণফল 20।

৫। সংখ্যা দুইটি কী কী?

(ক) 1 এবং 30 (খ) 2 এবং 15 (গ) 5 এবং 6 (ঘ) 4 এবং 5

উত্তর: (ঘ) 4 এবং 5

ব্যাখ্যা:

প্রশ্নটির অপশনগুলো নিয়ে বুদ্ধিমত্তার সাথে চিন্তা করলে পাই, $5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$ এবং $5\times4 = 20$; অতএব, সঠিক উত্তর (ঘ)।

বিকল্প: সংখ্যা দুটি x ও y হলে,

$x^2 - y^2 = 9$ ……… (i) ও $xy = 20$ ……… (ii)

এখন, $4x^2y^2 = (x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2)^2$

বা, $(2xy)^2 = (x^2 + y^2)^2 - 9^2$

বা, $(x^2 + y^2)^2 = (2 \times 20)^2 + 9^2$

বা, $(x^2 + y^2)^2 = 1681$

$\therefore x^2 + y^2 = 41$ ……… (iii)

(i) ও (iii) যোগ করে পাই,

$2x^2 = 9 + 41$ বা, $x^2 = \frac{50}{2} = 25$ $\therefore x = 5$

এখন, $xy = 20$

বা, $y = \frac{20}{x}$

$= \frac{20}{5}$ [$\because x = 5$]

$= 4$

সুতরাং সংখ্যা দুইটি 5 ও 4।

৬। সংখ্যা দুইটির বর্গের সমষ্টি কত?

(ক) 1 (খ) 5 (গ) 41 (ঘ) $\sqrt{41}$

উত্তর: (গ) 41

ব্যাখ্যা:

৫নং প্রশ্ন থেকে আমরা জানি, সংখ্যা দুটি হলো 5 ও 4।

$\therefore 5^2 + 4^2 = 25 + 16 = 41$.

Note: পাঠ্যবইয়ের উদ্দীপকের তথ্যে গুণফল 30 এর পরিবর্তে 20 হবে এবং ৫নং প্রশ্নের (ঘ) অপশনে 4 এবং 5 হবে।

৭। একটি সংখ্যা ঐ সংখ্যার গুণাত্মক বিপরীত সংখ্যার সমষ্টি 6। সম্ভাব্য সমীকরণটি গঠন করলে হয়- (VVI)

i. $x + \frac{1}{x} = 6$

ii. $x^2 + 1 = 6x$

iii. $x^2 - 6x - 1 = 0$

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii (খ) i ও iii

(গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

উত্তর: (ক) i ও ii

ব্যাখ্যা:

সংখ্যাটি x হলে প্রশ্নমতে,

$x + \frac{1}{x} = 6$ [(i) সত্য]

বা, $x^2 + 1 = 6x$ [(ii) সত্য]

বা, $x^2 - 6x + 1 = 0$ [(iii) সত্য নয়]

৮। $2^{px-1} = 2q^{px-2}$ এর সমাধান কোনটি? (VVI)

(ক) $\frac{p}{2}$ (খ) p (গ) $-\frac{p}{2}$ (ঘ) $\frac{2}{p}$

উত্তর: (ঘ) $\frac{2}{p}$

ব্যাখ্যা:

$2^{px-1} = 2q^{px-2}$

বা, $\frac{2^{px-1}}{2} = q^{px-2}$

বা, $2^{px-1-1} = q^{px-2}$

বা, $2^{px-2} = q^{px-2}$

বা, $\frac{2^{px-2}}{q^{px-2}} = 1$

বা, $\left(\frac{2}{q}\right)^{px-2} = 1$

বা, $\left(\frac{2}{q}\right)^{px-2} = \left(\frac{2}{q}\right)^{0}$

বা, $px - 2 = 0$ বা, $px = 2$

$\therefore x = \frac{2}{p}$

লেখচিত্রের সাহায্যে নিচের সমীকরণগুলোর সমাধান কর:

লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান নির্ণয়ের জন্য প্রথমে জেনে নাও:

i. $x = 0$ বসিয়ে y অক্ষের ছেদবিন্দু এবং $y = 0$ বসিয়ে x অক্ষের ছেদবিন্দু অবশ্যই বের করবে। অন্যথায় কাঙ্ক্ষিত সমাধান পাবেনা।

ii. মোচড় বিন্দু বের করবে (প্রাথমিক আলোচনা) দ্রষ্টব্য।

মনে রাখবে যে, x অক্ষের ছেদবিন্দু বা স্পর্শবিন্দুর x স্থানাঙ্ক বা ভুজ সমীকরণের সমাধান।

বি.দ্র: পরীক্ষায় সরাসরি x এর মান বসিয়ে y এর মান নির্ণয় করলেও হবে। মোচড় বিন্দু নির্ণয় আবশ্যক নয়।

১। $x^2 - 4x + 3 = 0$

সমাধান:

ধরি, $y = x^2 - 4x + 3$

অক্ষদ্বয়ের ছেদবিন্দু নির্ণয়:

$x = 0$ হলে $y = 3$

$\therefore$ সমীকরণটির লেখ y অক্ষকে $(0,3)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

$y = 0$ হলে $x^2 - 4x + 3 = 0$

বা, $x^2 - 3x - x + 3 = 0$

বা, $(x-3)(x-1) = 0$ $\therefore x = 1, 3$

$\therefore$ সমীকরণটির লেখ x অক্ষকে $(1,0)$ ও $(3,0)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

আবার, $y = x^2 - 2.2.x + 2^2 - 1 = (x-2)^2 - 1$

মোচড়বিন্দু নির্ণয়: $(x-2)^2 = 0$ বা, $x = 2$

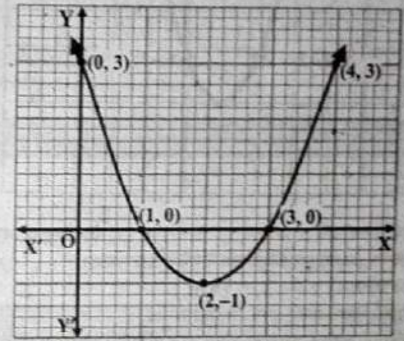
$x = 2$ হলে $y = -1$ $\therefore$ মোচড় বিন্দু $(2, -1)$

এখানে, $x^2 - 4x + 3 = 0$

সমীকরণটির লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x এর কয়েকটি মান নিয়ে তাদের অনুরূপ y এর মান নির্ণয় করি:

x	0	1	2	3	4
y	3	0	−1	0	3

সারণিতে স্থাপিত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করে সমীকরণটির লেখচিত্র অঙ্কন করি। লেখচিত্রটি x-অক্ষকে যেসব বিন্দুতে ছেদ বা স্পর্শ করে সেই বিন্দুর x স্থানাঙ্কই সমীকরণের সমাধান।



দেখা যায় যে, লেখচিত্রটি x অক্ষকে $(1, 0)$ ও $(3, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করে। সমীকরণের লেখের x অক্ষের ছেদবিন্দুর ভুজ-ই সমীকরণের সমাধান।

সুতরাং নির্ণেয় সমাধান : $x = 1, 3$. **(Ans.)**

বি.দ্র. $y = x^2$ সমীকরণে সর্বনিম্ন বিন্দু হলো মোচড় বিন্দু

$y = -x^2$ এর ক্ষেত্রে সর্বোচ্চ বিন্দু হলো মোচড় বিন্দু।

১০। $x^2 + 2x - 3 = 0$

সমাধান:

মনে করি, $y = x^2 + 2x - 3$

অক্ষদ্বয়ের ছেদবিন্দু নির্ণয়:

(i) $x = 0$ হলে $y = -3$

অর্থাৎ সমীকরণটির লেখ y অক্ষকে $(0, -3)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

(ii) $y = 0$ হলে $x^2 + 2x - 3 = 0$

বা, $x^2 + 3x - x - 3 = 0$

বা, $(x+3)(x-1) = 0$

$\therefore x = 1, -3$

অর্থাৎ সমীকরণটির লেখ x অক্ষকে $(1, 0)$ ও $(-3, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

মোচড় বিন্দুর জন্য $y = x^2 + 2x - 3$

$= (x^2 + 2x + 1) - 4$

$= (x+1)^2 - 4$

$(x+1) = 0$

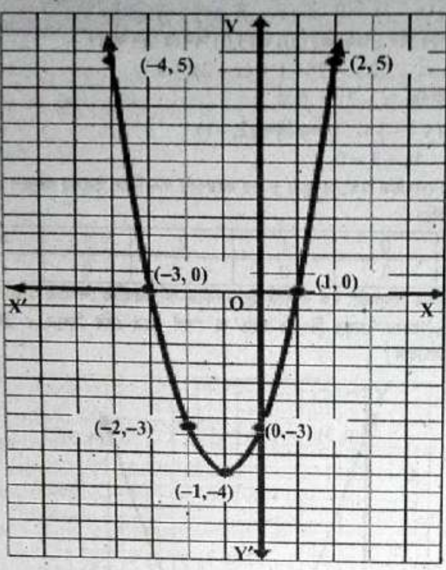
$x = -1$ হলে $y = -4$

$\therefore$ মোচড় বিন্দু $(-1, -4)$

সমীকরণটির লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x এর কয়েকটি মান নিয়ে তাদের অনুরূপ y এর মান নির্ণয় করি :

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2
y	5	0	−3	−4	−3	0	5

সারণিতে প্রাপ্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করে সমীকরণটির লেখচিত্র অঙ্কন করি,



দেখা যায় যে, লেখচিত্রটি x অক্ষকে $(-3, 0)$ ও $(1, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করে। সমীকরণের লেখের x অক্ষের ছেদবিন্দুর ভুজ-ই সমীকরণের সমাধান।

সুতরাং নির্ণেয় সমাধান : $x = -3, 1$. **(Ans.)**

বি.দ্র.: প্রত্যেকটি দ্বিঘাত সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কনে
i. $x = 0$ বসিয়ে y অক্ষের ছেদবিন্দু এবং $y = 0$ বসিয়ে x অক্ষের ছেদবিন্দু অবশ্যই বের করবে।
ii. সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন অর্থাৎ মোচড় বিন্দু বের করবে।

১১। $x^2 + 7x = 0$

সমাধান:

মনে করি, $y = x^2 + 7x$

অক্ষদ্বয়ের ছেদবিন্দু নির্ণয়:

(i) $x = 0$ হলে $y = 0$ অর্থাৎ সমীকরণটির লেখ y অক্ষকে $(0, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

(ii) $y = 0$ হলে $x^2 + 7x = 0$

বা, $x(x + 7) = 0$

$\therefore x = 0, -7$; অর্থাৎ সমীকরণটির লেখ x অক্ষকে $(0, 0)$ ও $(-7, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

মোচড় বিন্দুর জন্য:

$$y = x^2 + 7x$$
$$= x^2 + 2.\frac{7}{2}x + \left(\frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2$$
$$= \left(x + \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{2}$$

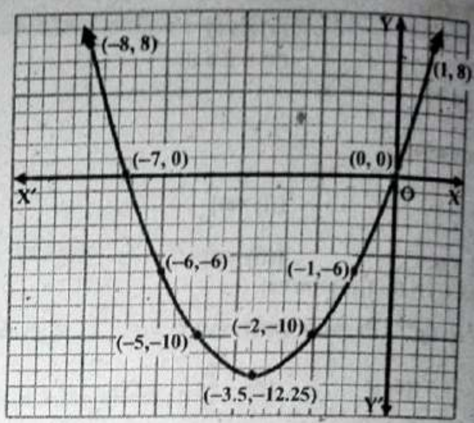
$\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 = 0$ অর্থাৎ $x = -\frac{7}{2}$ হলে $y = -\frac{49}{4}$

$\therefore$ মোচড় বিন্দু $(-3.5, -12.25)$

সমীকরণটির লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x এর কয়েকটি মান নিয়ে তাদের অনুরূপ y এর মান নির্ণয় করি :

x	−8	−7	−6	−5	−4	−3	−3.5	−2	−1	0
y	8	0	−6	−10	−12	−12	−12.25	−10	−6	0

সারণিতে প্রাপ্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করে সমীকরণটির লেখচিত্র অঙ্কন করি।



দেখা যায় যে, লেখচিত্রটি x অক্ষকে $(-7, 0)$ ও $(0, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $x = -7, 0$. **(Ans.)**

১২। $2x^2 - 7x + 3 = 0$

সমাধান:

মনে করি, $y = 2x^2 - 7x + 3$

অক্ষদ্বয়ের ছেদবিন্দু নির্ণয়:

(i) $x = 0$ হলে $y = 3$ অর্থাৎ সমীকরণটির লেখ y অক্ষকে $(0, 3)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

(ii) $y = 0$ হলে $2x^2 - 7x + 3 = 0$

বা, $2x^2 - 6x - x + 9 = 0$

বা, $(2x - 1)(x - 3) = 0$

$\therefore x = \frac{1}{2}, 3$ অর্থাৎ সমীকরণটির লেখ x অক্ষকে $(0.5, 0)$ ও $(3, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

মোচড় বিন্দু নির্ণয়: $y = 2x^2 - 7x + 3$

$$= 2\left(x^2 - \frac{7}{2}x\right) + 3$$
$$= 2\left\{x^2 - 2\frac{7}{4}x + \left(\frac{7}{4}\right)^2 - \left(\frac{7}{4}\right)^2\right\} + 3$$
$$= 2\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 - 2\left(\frac{7}{4}\right)^2 + 3$$
$$= 2\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{49}{8} + 3$$
$$= 2\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{25}{8}$$

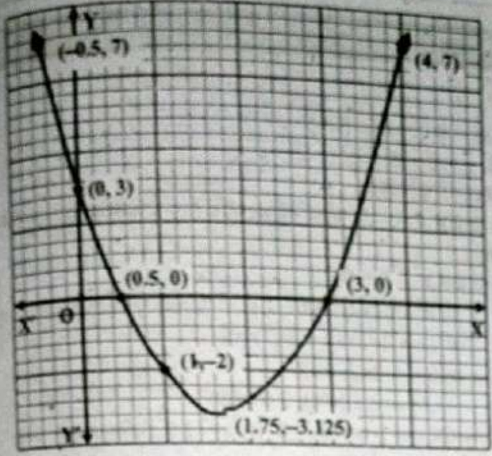
$\left(x - \frac{7}{4}\right) = 0$ অর্থাৎ $x = \frac{7}{4}$ হলে $y = -\frac{25}{8}$

$\therefore$ মোচড় বিন্দু $\left(\frac{7}{4}, \frac{-25}{8}\right)$ বা, $(1.75, -3.125)$

সমীকরণটির লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x এর কয়েকটি মান নিয়ে তাদের অনুরূপ y এর মান নির্ণয় করি:

x	0	0.5	1	1.75	2	3	4
y	3	0	−2	−3.125	−3	0	7

সারণিতে প্রাপ্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করে সীকরণটির লেখচিত্র অঙ্কন করি।



দেখা যায় যে, লেখচিত্রটি x অক্ষকে $(0.5, 0)$ ও $(3, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

∴ নির্ণেয় সমাধান : $x = 0.5, 3$ **(Ans.)**

১৩। $2x^2 - 5x + 2 = 0$ **(VVI)**

সমাধান:

মনে করি, $y = 2x^2 - 5x + 2$

অক্ষদ্বয়ের ছেদবিন্দু নির্ণয়:

(i) $x = 0$ হলে $y = 2$ অর্থাৎ সমীকরণটির লেখ y অক্ষকে $(0, 2)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

(ii) $y = 0$ হলে, $2x^2 - 5x + 2 = 0$

বা, $2x^2 - 4x - x + 2 = 0$

বা, $(2x - 1)(x - 2) = 0$ ∴ $x = \frac{1}{2}, 2$

অর্থাৎ সমীকরণটির লেখ x অক্ষকে $(0.5, 0)$ ও $(2, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

মোচড় বিন্দু নির্ণয়: $y = 2x^2 - 5x + 2$

$$= 2\left(x^2 - \frac{5}{2}x\right) + 2$$

$$= 2\left\{x^2 - 2.\frac{5}{4}.x + \left(\frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{5}{4}\right)^2\right\} + 2$$

$$= 2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - 2.\frac{25}{16} + 2$$

$$= 2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{9}{8}$$

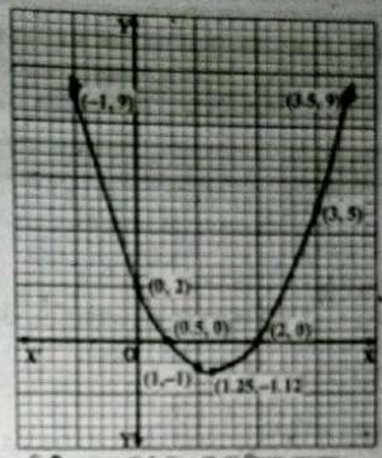
$\left(x - \frac{5}{4}\right) = 0$ অর্থাৎ $x = \frac{5}{4}$ হলে $y = -\frac{9}{8}$

∴ মোচড় বিন্দু $(1.25, -1.25)$

সমীকরণটির লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x এর কয়েকটি মান নিয়ে তাদের অনুরূপ y এর মান নির্ণয় করি :

x	−1	0	0.5	1	1.25	2	3
y	9	2	0	−1	−1.125	0	5

সারণি থেকে প্রাপ্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করে সমীকরণটির লেখচিত্র অঙ্কন করি।



দেখা যায় যে, লেখচিত্রটি x-অক্ষকে $(0.5, 0)$ ও $(2, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

∴ নির্ণেয় সমাধান : $x = 0.5; 2$ **(Ans.)**

১৪। $x^2 + 8x + 16 = 0$

সমাধান:

মনে করি, $y = x^2 + 8x + 6$

অক্ষদ্বয়ের ছেদবিন্দু নির্ণয়:

(i) $x = 0$ হলে $y = 6$ অর্থাৎ সমীকরণটির লেখ y অক্ষকে $(0, 6)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

(ii) $y = 0$ হলে $x^2 + 8x + 16 = 0$

বা, $x^2 + 2.4.x + 4^2 = 0$

বা, $(x + 4)^2 = 0$

∴ $x = -4$

অর্থাৎ সমীকরণটির লেখ x অক্ষকে $(-4, 0)$ বিন্দুতে স্পর্শ করে।

মোচড় বিন্দু নির্ণয়:

$y = x^2 + 8x + 16$

$= x^2 + 2.4x + 4^2$

$= (x + 4)^2$

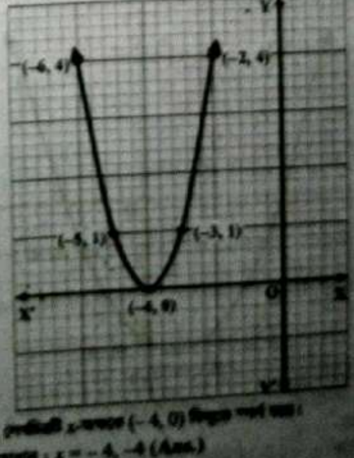
$(x + 4)^2 = 0$ অর্থাৎ $x = -4$ হলে $y = 0$

∴ মোচড় বিন্দু $(-4, 0)$

সমীকরণটির লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x এর কয়েকটি মান নিয়ে তাদের অনুরূপ y এর মান নির্ণয় করি :

x	−6	−5	−4	−3	−2
y	4	1	0	1	4

সারণি থেকে প্রাপ্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করে সমীকরণটির লেখচিত্র অঙ্কন করি।



দেখা যায় যে, লেখচিত্রটি x-অক্ষকে $(-4, 0)$ বিন্দুতে স্পর্শ করে।

∴ নির্ণেয় সমাধান : $x = -4, -4$ **(Ans.)**

বিদ্র. দ্বিঘাত সমীকরণ x অক্ষকে কোনো বিন্দুতে স্পর্শ করলে মূলদ্বয় সমান হয়। কারণ আবার নিশ্চায়ক $b^2 - 4ac = 0$ হলে সমীকরণের মূলদ্বয় সমান। সুতরাং $b^2 - 4ac = 0$ হলে সমীকরণের লেখ x অক্ষকে মাত্র একটি বিন্দুতে স্পর্শ করে।

১৫। $x^2 + x - 3 = 0$

সমাধান:

মনে করি, $y = x^2 + x - 3$

অক্ষদ্বয়ের ছেদবিন্দু নির্ণয়:

(i) $x = 0$ হলে $y = -3$ অর্থাৎ সমীকরণটির লেখ y অক্ষকে $(0, -3)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

(ii) $y = 0$ হলে, $x^2 + x - 3 = 0$

$$\text{বা, } x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4.1.(-3)}}{2.1}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$= \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}, \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}$$

$= 1.3$ (প্রায়), -2.3 (প্রায়)

অর্থাৎ, সমীকরণটির লেখ x অক্ষকে $(1.3, 0)$ ও $(-2.3, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

মোচড় বিন্দু নির্ণয়: $y = x^2 + x - 3$

$$= x^2 + 2.\frac{x}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 3$$

$$= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{13}{4}$$

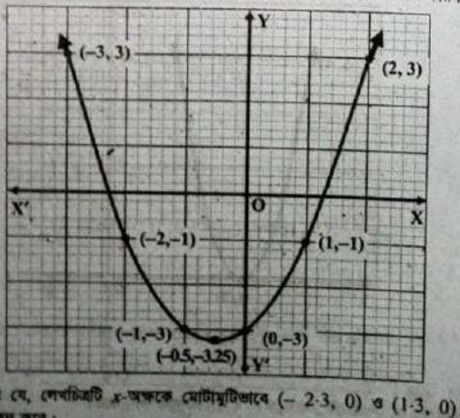
$\therefore x = -\frac{1}{2}$ এর জন্য $y = -\frac{13}{4}$

$\therefore$ মোচড় বিন্দু $(-0.5, -3.25)$

সমীকরণটির লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x এর কয়েকটি মান নিয়ে তাদের অনুরূপ y এর মান নির্ণয় করি :

x	-3	-2	-1	-0.5	0	1	2
y	3	-1	-3	-3.25	-3	-1	3

সারণিতে প্রাপ্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করে সমীকরণটির লেখচিত্র অঙ্কন করি।



দেখা যায় যে, লেখচিত্রটি x-অক্ষকে মোটামুটিভাবে $(-2{\cdot}3, 0)$ ও $(1{\cdot}3, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $x = -2{\cdot}3$ (আসন্ন) $1{\cdot}3$ (আসন্ন). **(Ans.)**

১৬। $x^2 = 8$

সমাধান:

এখানে, $x^2 = 8 \quad \therefore x^2 - 8 = 0$

মনে করি, $y = x^2 - 8$ ... ... (i)

অক্ষদ্বয়ের ছেদবিন্দু নির্ণয়:

(i) $x = 0$ হলে $y = -.8$ অর্থাৎ সমীকরণটির লেখ y অক্ষকে $(0, -8)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

(ii) $y = 0$ হলে $x^2 - 8 = 0$

বা, $x^2 - (2\sqrt{2})^2 = 0$

বা, $(x + 2\sqrt{2})(x - 2\sqrt{2}) = 0$

বা, $x = -2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}$

$= -2.8$ (প্রায়), 2.8 (প্রায়)

অর্থাৎ সমীকরণটির লেখ x অক্ষকে $(2.8, 0)$ ও $(-2.8, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

মোচড় বিন্দু নির্ণয়: $y = x^2 - 8$

$(x - 0)^2 - 8$

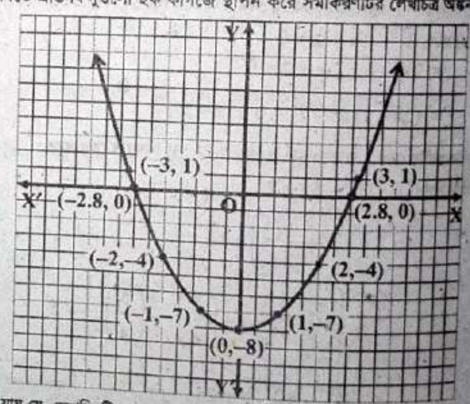
$\therefore x = 0$ হলে $y = -8$

$\therefore$ মোচড় বিন্দু $(0, -8)$

(i) নং সমীকরণটির লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x এর কয়েকটি মান নিয়ে তাদের অনুরূপ y এর মান নির্ণয় করি :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	1	-4	-7	-8	-7	-4	1

সারণিতে প্রাপ্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করে সমীকরণটির লেখচিত্র অঙ্কন করি।



দেখা যায় যে, লেখচিত্রটি x-অক্ষকে $(-2{\cdot}8, 0)$ ও $(2{\cdot}8, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $x = -2{\cdot}8$ (প্রায়), $2{\cdot}8$ (প্রায়). **(Ans.)**

১৭। একটি সংখ্যার বর্গের দ্বিগুণ সংখ্যাটির 5 গুণ থেকে 3 কম। কিন্তু ঐ সংখ্যাটির বর্গের 3 গুণ সংখ্যাটির 5 গুণ থেকে 3 বেশি। (VVI)

(ক) উদ্দীপকের তথ্যগুলোর সাহায্যে সমীকরণ গঠন কর।

(খ) সূত্র প্রয়োগ করে ১ম সমীকরণটি সমাধান কর।

(গ) ২য় সমীকরণটি লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান কর।

(ক) এর সমাধান:

ধরি, সংখ্যাটি $= x$

শর্তমতে, প্রথম সমীকরণ $2x^2 = 5x - 3$

এবং দ্বিতীয় সমীকরণ $3x^2 = 5x + 3$

(খ) এর সমাধান:

প্রথম সমীকরণটি হলো, $2x^2 = 5x - 3$

বা, $2x^2 - 5x + 3 = 0$ ... ... (i)

(i) নং কে $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের সাথে তুলনা করে পাই,

$a = 2, b = -5$ ও $c = 3$.

আমরা জানি, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$= \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \times 2 \times 3}}{2 \times 2}$

$= \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{4} = \frac{5 \pm 1}{4}$

সুতরাং একটি মূল $= \frac{5+1}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$.

ও অপর মূল $= \frac{5-1}{4} = \frac{4}{4} = 1$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান : $x = \frac{3}{2}, 1$. **(Ans.)**

গ এর সমাধান:

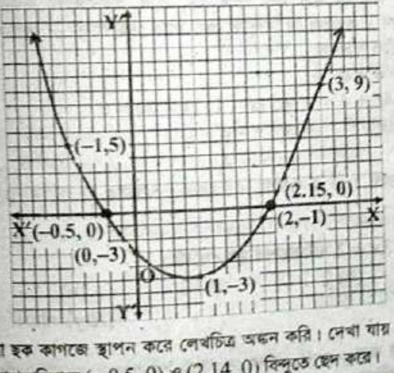
২য় সমীকরণটি হলো, $3x^2 = 5x + 3$.

বা, $3x^2 - 5x - 3 = 0 \ldots\ldots\ldots$ (i)

ধরি, $y = 3x^2 - 5x - 3$

x এর কয়েকটি মানের জন্য y এর মান নির্ণয় করে প্রদত্ত সমীকরণের লেখের কয়েকটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করি।

x	-1	0	1	2	3
y	5	-3	-5	-1	9



বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করে লেখচিত্র অঙ্কন করি। দেখা যায় যে, লেখচিত্রটি x-অক্ষকে আসন্নভাবে $(-0.5, 0)$ ও $(2.14, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $x = -0.5$ (আসন্ন) অথবা $x = 2.15$ (আসন্ন)।

১৮। জনাব আশফাক আলীর জমির ক্ষেত্রফল 0.12 হেক্টর। জমিটির অর্ধপরিসীমা এর একটি কর্ণ অপেক্ষা 20 মিটার বেশি। তিনি তাঁর জমি থেকে শ্যামবাবুর নিকট এক তৃতীয়াংশ বিক্রি করেন। শ্যাম বাবুর জমির দৈর্ঘ্য, প্রস্থ অপেক্ষা 5 মিটার বেশি। [১ হেক্টর = ১০,০০০ বর্গ মিটার]

(ক) উদ্দীপকের আলোকে দুইটি সমীকরণ গঠন কর।

(খ) আশফাক আলীর জমির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

(গ) শ্যামবাবুর জমিটির দৈর্ঘ্য ও পরিসীমা নির্ণয় কর।

(ক) এর সমাধান:

মনে করি, আশফাক আলীর জমির দৈর্ঘ্য x মিটার ও প্রস্থ y মিটার।

আশফাক আলীর জমির ক্ষেত্রফল $= 0.12$ হেক্টর

$= 0.12 \times 10000$ বর্গমিটার [$\because$ 1 হেক্টর $= 10000$ বর্গ মিটার]

$= 1200$ বর্গ মিটার

অনুসারে, $xy = 1200 \ldots\ldots\ldots$ (i)

ও $x + y = \sqrt{x^2 + y^2} + 20 \ldots\ldots\ldots$ (ii)

(খ) এর সমাধান:

(ii) নং সমীকরণ থেকে পাই,

$x + y = \sqrt{x^2 + y^2} + 20$

বা, $(x + y) - 20 = \sqrt{x^2 + y^2}$

বা, $(x + y)^2 - 2(x + y)\,20 + (20)^2 = x^2 + y^2$

বা, $x^2 + 2xy + y^2 - 40x - 40y + 400 = x^2 + y^2$

বা, $2xy - 40(x + y) + 400 = 0$

বা, $2 \times 1200 - 40(x + y) + 400 = 0$

বা, $x + y = \frac{-2400 - 400}{-40} = \frac{-2800}{-40}$

$\therefore x + y = 70 \ldots\ldots\ldots$ (iii)

আবার, $(x - y)^2 = (x + y)^2 - 4xy$

$= (70)^2 - 4 \times 1200$

$= 4900 - 4800 = 100$

$\therefore x - y = 10 \ldots\ldots$ (iv) [দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের অন্তরফল ধনাত্মক]

(iii) ও (iv) যোগ করে পাই,

$2x = 80$

বা, $x = \frac{80}{2}$ $\therefore x = 40$

(iii) নং এ $x = 40$ বসিয়ে পাই,

$40 + y = 70$

বা, $y = 70 - 40$ $\therefore y = 30$

অতএব আশফাক আলীর জমির দৈর্ঘ্য 40 মিটার ও প্রস্থ 30 মিটার।

(গ) এর সমাধান:

এখানে,

শ্যামবাবুর জমির ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{3} \times 1200$ বর্গমিটার

$= 400$ বর্গমিটার

ধরি, শ্যামবাবুর জমির দৈর্ঘ্য $= a$ মিটার

$\therefore$ জমির প্রস্থ $= (a - 5)$ মিটার

সুতরাং, $a(a - 5) = 400$

বা, $a^2 - 5a - 400 = 0$

$\therefore a = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \times 1 \times (-400)}}{2.1}$

$= \frac{5 \pm \sqrt{25 + 1600}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{1625}}{2} = \frac{5 \pm 40.31}{2}$

$= \frac{5 + 40.31}{2}$ [$\because$ জমির দৈর্ঘ্য ঋণাত্মক হতে পারে না]

$= 22.66$

$\therefore$ দৈর্ঘ্য $= 22.66$ মিটার

এবং প্রস্থ $= (22.66 - 5)$ মিটার $= 17.66$ মিটার।

এখন, কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(\text{দৈর্ঘ্য})^2 + (\text{প্রস্থ})^2}$

$= \sqrt{(22.66)^2 + (17.66)^2}$

$= 28.73$ মিটার **(Ans.)**

আবার, পরিসীমা $= 2$ (দৈর্ঘ্য + প্রস্থ)

$= 2(22.66 + 17.66)$ মিটার

$= 80.64$ মিটার। **(Ans.)**