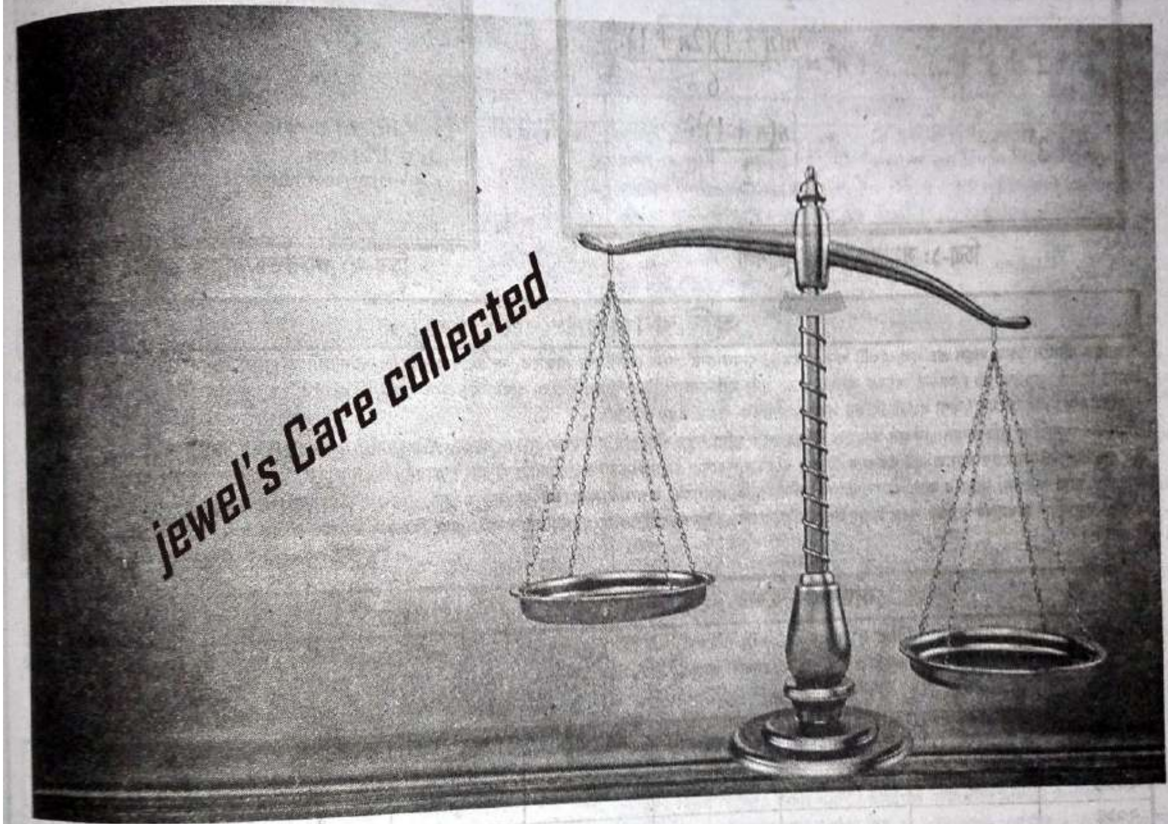
বাস্তব জীবনে এ অধ্যায়ের প্রয়োগ

দৈনন্দিন জীবনে অসমতার প্রয়োজনীয় অপরিসীম। প্রকৃতিতে সংগঠিত বিভিন্ন ঘটনা সম্পূর্ণ সঠিকরূপে পরিমাপ করা যায় না। বরং অসমতার মাধ্যমে বিভিন্ন ঘটনা সম্পর্কে প্রয়োজনীয় ধারণা অর্জন করা যায়।

কোনো ব্যক্তি বাজারে খরচ করার জন্য যাবে। তার খরচের সর্বোচ্চ সীমা ১০০০ টাকা পর্যন্ত। সে কোনো দ্রব্যের মূল্য সঠিক ভাবে জানে না। যদি তার ক্রয়কৃত সকল দ্রব্যের মূল্য x টাকা হয় তাহলে এক্ষেত্রে সঠিক অসমতা হলো $x \leq ১০০০$। অর্থাৎ সে অবশ্যই ১০০০ টাকা বা এর কম টাকা দ্বারা খরচ করতে পারবে কিন্তু ১০০০ টাকার বেশি খরচ করতে পারবে না। এই অসমতার মাধ্যমে অর্জিত ধারনার মাধ্যমে সে তার বাজার খরচ করবে।

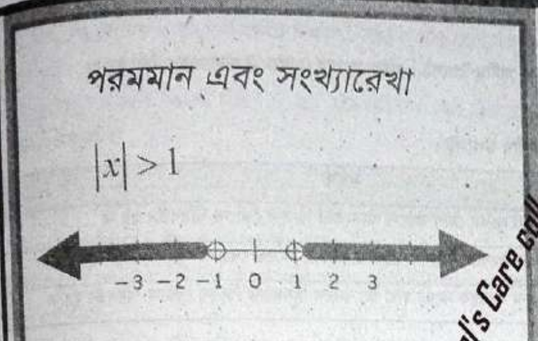


"Anyone who has never made a mistake has never tried anything new".

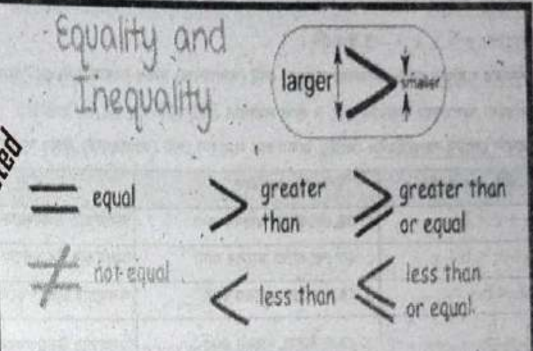
–Albert Einstein

৬ অসমতা [Inequality]

অনুশীলনী-৬.১



চিত্র-১:



চিত্র-২:

ভূমিকা [Introduction]

দৈনন্দিন জীবনে প্রকৃতিতে আমরা যতকিছু দেখি এর কোনোটির ক্ষেত্রেই এক জাতীয় দুইটি বস্তুর বা জীবজন্তুর বা দুইজন মানুষের কোনো ধরনের পরিমাপ হুবহু এক পাওয়া যায় না। এমনকি দেখতে একই রকম হয় না। ফলে আমাদের অসমতার ধারণার প্রয়োজন হয়। মনে করি, একটি স্কুলে ছাত্রসংখ্যা 2500 জন। স্বাভাবিকভাবে দেখা যায়, ঐ ক্লাসে সবদিন সকলে উপস্থিত থাকে না। একটি দিনে স্কুলে উপস্থিত ছাত্রসংখ্যা x হলে আমরা লিখতে পারি $0 < x \leq 2500$। একইভাবে কোনো অনুষ্ঠানেও আমন্ত্রিত সকল অতিথি উপস্থিত হন না। পোশাক পরিচ্ছদ, দালানকোঠা তৈরি, পুস্তক মুদ্রণ ইত্যাদিসহ দৈনন্দিন জীবনে অসমতার ধারণাটা খুবই গুরুত্বপূর্ণ।


ল্যা কব বার্নোলী

বোর্ড প্রশ্নাবলির বিশ্লেষণ [Board Questions Analysis]

এই অধ্যায় থেকে বিভিন্ন বোর্ডে বিগত দু'বছরের এসএসসি পরীক্ষায় কোনো সৃজনশীল প্রশ্ন আসেনি ও ১৫টি বহুনির্বাচনি প্রশ্ন এসেছে। নিচের 'Board Analysis' অংশে এই অধ্যায় থেকে কোন সালে কোন বোর্ডে কতটি প্রশ্ন হয়েছে তা দেওয়া আছে।

সৃজনশীল প্রশ্ন:

বোর্ড / সাল	ঢাকা	রাজশাহী	কুমিল্লা	যশোর	চট্টগ্রাম	বরিশাল	সিলেট	দিনাজপুর
২০১৬	–	–	–	–	–	–	–	–
২০১৫	–	–	–	–	–	–	–	–

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন:

বোর্ড / সাল	ঢাকা	রাজশাহী	কুমিল্লা	যশোর	চট্টগ্রাম	বরিশাল	সিলেট	দিনাজপুর
২০১৬	১	–	২	২	–	২	২	–
২০১৫	১	১	২	–	–	১	–	১

মূল শব্দাবলি [Key Words]

অসমতা (*Inequality*) অসমতার সমাধান (*Solution of Inequality*) সংখ্যারেখা (*Line of Number*) অসমতার লেখচিত্র (*Graph of Inequality*).

এ অধ্যায়ের আলোচ্যসূচি

- অসমতার ধারণা
- অসমতার সমাধান নির্ণয় পদ্ধতি
- অসমতার সমাধান সেট নির্ণয় পদ্ধতি
- সংখ্যারেখার ধারণা
- অসমতাকে সংখ্যারেখায় প্রকাশের পদ্ধতি
- লেখচিত্রের ধারণা
- অসমতার লেখচিত্র

প্রাথমিক আলোচনা

অসমতা: কতগুলো শর্ত যাচাইয়ের সাপেক্ষে অজানা রাশির মাধ্যমে সমস্যার গাণিতিক রূপকে অসমতা বলে।

মনে করি একটি ক্লাসের ছাত্রসংখ্যা 200 জন। স্বাভাবিকভাবে দেখা যায় যে, ঐ ক্লাসে সবদিন সকলে উপস্থিত থাকেনা। একটি নির্দিষ্ট দিনে উপস্থিত ছাত্রসংখ্যা x হলে আমরা লিখতে পারি $0 < x \le 200$।

অসমতার সমাধান: সমীকরণের সমাধান যেমন একটি সমীকরণ (সমতা) দ্বারা প্রকাশ পায়, তেমনি অসমতার সমাধান একটি অসমতা দ্বারা প্রকাশ পায়।

উদাহরণ: $x < 3, x > -5$ ইত্যাদি।

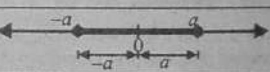
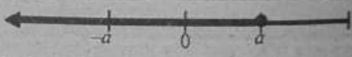
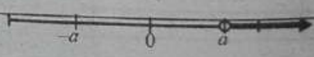
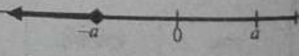
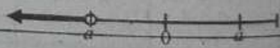
অসমতার সমাধান সেট: অসমতার সমাধান সেট (সাধারণত) বাস্তব সংখ্যার (*Real Number*) অসীম উপসেট। বাস্তব সংখ্যার সেটকে R দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

উদাহরণ: অসমতার সমাধান $x < 3$ হলে সমাধান সেট, $S = \{x \in R : x < 3\}$

সমাধান সেটের সংখ্যারেখা: যেহেতু অসমতার সমাধান সেট (সাধারণত) বাস্তব সংখ্যার অসীম উপসেট।

যদি a < b হয়	c এর মান	মন্তব্য
$a + c < b + c$	c এর যেকোনো মানের জন্য	অসমতার উভয়পক্ষে কোনো সংখ্যা যোগ করলে অসমতার চিহ্নের কোনো পরিবর্তন হয় না
$a - c < b - c$	c এর যেকোনো মানের জন্য	অসমতার উভয়পক্ষে কোনো সংখ্যা বিয়োগ করলে অসমতার চিহ্নের কোনো পরিবর্তন হয় না
$ac < bc$	c এর ধনাত্মক মানের জন্য	অসমতার উভয়পক্ষকে কোনো ধনাত্মক সংখ্যা দ্বারা গুণ করলে অসমতার চিহ্নের কোনো পরিবর্তন হয় না
$\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$	c এর ধনাত্মক মানের জন্য	অসমতার উভয়পক্ষকে কোনো ধনাত্মক সংখ্যা দ্বারা ভাগ করলে অসমতার চিহ্ন পরিবর্তন হয় না
কিন্তু $ac > bc$	c এর ঋণাত্মক মানের জন্য	অসমতার উভয়পক্ষকে কোনো ঋণাত্মক সংখ্যা দ্বারা গুণ করলে অসমতার চিহ্ন পরিবর্তন হয়
$\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$	c এর ঋণাত্মক মানের জন্য	অসমতার উভয়পক্ষকে কোনো ঋণাত্মক সংখ্যা দ্বারা ভাগ করলে অসমতার চিহ্ন পরিবর্তন হয়

নিম্নে বিভিন্ন সমাধান সেট এর সংখ্যারেখা দেখানো হলো

সমাধান সেট	ব্যবধি	সংখ্যারেখা
$S = \{x \in R : -a \le x \le a\}$	$[-a, a]$	
$S = \{x \in R : -a < x < a\}$	$(-a, a)$	
$S = \{x \in R : x \le a\}$	$(-\infty, a]$	
$S = \{x \in R : x < a\}$	$(-\infty, a)$	
$S = \{x \in R : x \ge a\}$	$[a, \infty)$	
$S = \{x \in R : x > a\}$	(a, ∞)	
$S = \{x \in R : x \le -a\}$	$(-\infty, -a]$	
$S = \{x \in R : x < -a\}$	$(-\infty, -a)$	
$S = \{x \in R : x \ge -a\}$	$[-a, \infty)$	
$S = \{x \in R : x > -a\}$	$(-a, \infty)$	

বি.দ্র: (i) সংখ্যারেখার যেকোনো সংখ্যার অবস্থান থেকে ডানদিকে সংখ্যাগুলোর মান ক্রমান্বয়ে বৃদ্ধি পায় এবং বামদিকে সংখ্যাগুলোর মান ক্রমান্বয়ে হ্রাস পায়।

(ii) '≤' ও '≥' চিহ্ন থাকলে বৃত্তটি ভরাট হবে এবং '<' ও '>' চিহ্ন থাকলে বৃত্তটি ভরাট হবে না।

(iii) সমীকরণ সংক্রান্ত স্বতঃসিদ্ধ বা বিধিসমূহ অসমতার ক্ষেত্রেও প্রযোজ্য। শুধু ব্যতিক্রম হলো অসমান রাশিকে সমান সমান ঋণাত্মক সংখ্যা দ্বারা গুণ বা ভাগ করলে অসমতার দিক পাল্টে যায়।

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনমূলক কাজের সমাধান

কাজ:

১। তোমাদের শ্রেণির যে সকল ছাত্র-ছাত্রীর উচ্চতা 5 ফুটের চেয়ে বেশি এবং 5 ফুটের চেয়ে কম তাদের উচ্চতা অসমতার মাধ্যমে প্রকাশ কর। [পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-১১১]

২। কোনো পরীক্ষার মোট নম্বর 1000 হলে, একজন পরীক্ষার্থীর প্রাপ্ত নম্বর অসমতার মাধ্যমে প্রকাশ কর।

১-এর সমাধান:

মনে করি, আমাদের শ্রেণিতে x জন ছাত্র-ছাত্রীর উচ্চতা 5 ফুটের চেয়ে বেশি। ফলে x জন ছাত্র-ছাত্রীর মোট উচ্চতা $5x$ অপেক্ষা বেশি।

অর্থাৎ, 5 ফুটের চেয়ে বেশি উচ্চতা বিশিষ্ট x জন ছাত্র-ছাত্রীদের মোট উচ্চতাকে অসমতাতে প্রকাশ করলে,

x জন ছাত্র-ছাত্রীর মোট উচ্চতা $> 5x$

আবার, মনে করি, আমাদের শ্রেণিতে y জন ছাত্র-ছাত্রীর উচ্চতা 5 ফুটের চেয়ে কম। ফলে y জন ছাত্র-ছাত্রীর মোট উচ্চতা $5y$ অপেক্ষা কম।

$\therefore$ 5 ফুটের চেয়ে কম উচ্চতা বিশিষ্ট y জন ছাত্র-ছাত্রীর মোট উচ্চতাকে অসমতার মাধ্যমে প্রকাশ করলে,

y জন ছাত্র-ছাত্রীর মোট উচ্চতা $< 5y$.

২-এর সমাধান:

এখানে, মোট নম্বর $= 1000$

ধরি, প্রাপ্ত নম্বর $= x$

এখন পরিক্ষার্থী 0 থেকে 1000 এর মধ্যে যেকোনো নম্বর পেতে পারে।

$\therefore$ নির্ণেয় অসমতা, $0 \le x \le 1000$. **(Ans.)**

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৬.১

অসমতাগুলো সমাধান কর এবং সংখ্যারেখায় সমাধান সেট দেখাও:

১। $y-3<5$

২। $3(x-2)<6$

৩। $3x-2>2x-1$

৪। $z \le \frac{1}{2}z+3$

৫। $8 \ge 2-2x$

৬। $x \le \frac{x}{3}+4$

৭। $5(3-2t) \le 3(4-3t)$

৮। $\frac{x}{3}+\frac{x}{4}+\frac{x}{5} > \frac{47}{60}$

অনুশীলনী-৬.১ এর সমাধান

অসমতাগুলো সমাধান কর এবং সংখ্যারেখায় সমাধান সেট দেখাও:

১। $y-3<5$

সমাধান:

দেওয়া আছে,

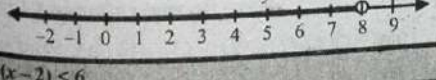
$y-3<5$

বা, $y-3+3<5+3$ [উভয়পক্ষে 3 যোগ করে]

বা, $y<8$ $\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $y<8$ **(Ans.)**

এখানে সমাধান সেট, $S = \{y \in \boldsymbol{R} : y < 8\}$

8 অপেক্ষা ছোট সকল বাস্তব সংখ্যা প্রদত্ত অসমতার সমাধান যা নিচে অঙ্কিত সংখ্যারেখায় দেখানো হলো।



২। $3(x-2)<6$

সমাধান:

দেওয়া আছে,

$3(x-2)<6$

বা, $\frac{3(x-2)}{3} < \frac{6}{3}$ [উভয়পক্ষকে 3 দ্বারা ভাগ করে]

বা, $x-2<2$

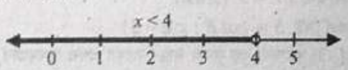
বা, $x-2+2<2+2$ [উভয়পক্ষে 2 যোগ করে]

বা, $x<4$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x<4$. **(Ans.)**

এখানে সমাধান সেট, $S = \{x \in \boldsymbol{R} : x < 4\}$

4 অপেক্ষা ছোট সকল বাস্তব সংখ্যা প্রদত্ত অসমতার সমাধান যা নিচে অঙ্কিত সংখ্যারেখায় দেখানো হলো:



৩। $3x-2>2x-1$

সমাধান:

দেওয়া আছে,

$3x-2>2x-1$

বা, $3x-2-2x>2x-1-2x$ [উভয়পক্ষে $2x$ বিয়োগ করে]

বা, $x-2>-1$

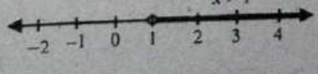
বা, $x-2+2>-1+2$ [উভয়পক্ষে 2 যোগ করে]

বা, $x>1$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x>1$. **(Ans.)**

এখানে সমাধান সেট, $S = \{x \in \boldsymbol{R} : x > 1\}$

1 অপেক্ষা বড় সকল বাস্তব সংখ্যা প্রদত্ত অসমতার সমাধান যা নিচে অঙ্কিত সংখ্যারেখায় দেখানো হলো:



৪। $z \le \frac{1}{2}z + 3$ (VVI)

সমাধান:

দেওয়া আছে,

$z \le \frac{1}{2}z + 3$

বা, $z - \frac{1}{2}z \le \frac{1}{2}z + 3 - \frac{1}{2}z$ [উভয়পক্ষে $\frac{1}{2}z$ বিয়োগ করে]

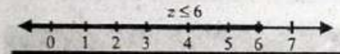
বা, $\frac{1}{2}z \le 3$

বা, $\frac{1}{2}z \times 2 \le 3 \times 2$ [উভয়পক্ষকে 2 দ্বারা গুণ করে]

বা, $z \le 6$ ∴ নির্ণেয় সমাধান, $z \le 6$. (Ans.)

এখানে সমাধান সেট, $S = \{z \in R : z \le 6\}$

6 এবং 6 অপেক্ষা ছোট সকল বাস্তব সংখ্যা প্রদত্ত অসমতার সমাধান যা নিচে অঙ্কিত সংখ্যারেখায় দেখানো হলো:



৫। $8 \ge 2 - 2x$

সমাধান:

দেওয়া আছে,

$8 \ge 2 - 2x$

বা, $8 + 2x \ge 2 - 2x + 2x$ [উভয়পক্ষে $2x$ যোগ করে]

বা, $8 + 2x \ge 2$

বা, $8 + 2x - 8 \ge 2 - 8$ [উভয়পক্ষ থেকে 8 বিয়োগ করে]

বা, $2x \ge -6$

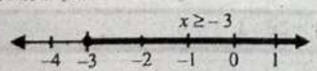
বা, $\frac{2x}{2} \ge \frac{-6}{2}$ [উভয়পক্ষকে 2 দ্বারা ভাগ করে]

বা, $x \ge -3$

∴ নির্ণেয় সমাধান, $x \ge -3$. **(Ans.)**

এখানে সমাধান সেট, $S = \{x \in R : x \ge -3\}$

(-3) এবং (-3) অপেক্ষা বড় সকল বাস্তব সংখ্যা প্রদত্ত অসমতার সমাধান যা নিচে অঙ্কিত সংখ্যারেখায় দেখানো হলো:



৬। $x \le \frac{x}{3} + 4$ (VVI)

সমাধান:

দেওয়া আছে,

$x \le \frac{x}{3} + 4$

বা, $x - \frac{x}{3} \le \frac{x}{3} + 4 - \frac{x}{3}$ [উভয়পক্ষ থেকে $\frac{x}{3}$ বিয়োগ করে]

বা, $\frac{3x - x}{3} \le 4$

বা, $\frac{2x}{3} \le 4$

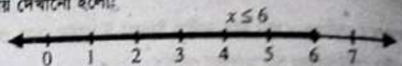
বা, $\frac{2x}{3} \times \frac{3}{2} \le 4 \times \frac{3}{2}$ [উভয়পক্ষকে $\frac{3}{2}$ দ্বারা গুণ করে]

বা, $x \le 6$

∴ নির্ণেয় সমাধান, $x \le 6$. **(Ans.)**

এখানে সমাধান সেট, $S = \{x \in R : x \le 6\}$

6 এবং 6 অপেক্ষা ছোট সকল বাস্তব সংখ্যা প্রদত্ত অসমতার সমাধান যা নিচে অঙ্কিত সংখ্যারেখায় দেখানো হলো:



৭। $5(3 - 2t) \le 3(4 - 3t)$ (VVI)

সমাধান:

দেওয়া আছে,

$5(3 - 2t) \le 3(4 - 3t)$

বা, $15 - 10t \le 12 - 9t$

বা, $15 - 10t + 9t \le 12 - 9t + 9t$ [উভয়পক্ষে $9t$ যোগ করে]

বা, $15 - t \le 12$

বা, $15 - t - 15 \le 12 - 15$ [উভয়পক্ষ থেকে 15 বিয়োগ করে]

বা, $-t \le -3$

বা, $\frac{-t}{-1} \ge \frac{-3}{-1}$ [উভয়পক্ষকে ঋণাত্মক সংখ্যা (-1) দিয়ে ভাগ করায় অসমতার দিক পাল্টে গেছে]

বা, $t \ge 3$

∴ নির্ণেয় সমাধান, $t \ge 3$

এখানে সমাধান সেট, $S = \{t \in R : t \ge 3\}$

3 এবং 3 অপেক্ষা বড় সকল বাস্তব সংখ্যা প্রদত্ত অসমতার সমাধান যা নিচে অঙ্কিত সংখ্যারেখায় দেখানো হলো:

৮। $\frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} > \frac{47}{60}$ (VVI)

সমাধান:

দেওয়া আছে,

$\frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} > \frac{47}{60}$

বা, $\frac{20x + 15x + 12x}{60} > \frac{47}{60}$

বা, $\frac{47x}{60} > \frac{47}{60}$

বা, $\frac{47x}{60} \times \frac{60}{47} > \frac{47}{60} \times \frac{60}{47}$ [উভয়পক্ষকে $\frac{60}{47}$ দ্বারা গুণ করে]

বা, $x > 1$

∴ নির্ণেয় সমাধান, $x > 1$. **(Ans.)**

এখানে সমাধান সেট, $S = \{x \in R : x > 1\}$

1 অপেক্ষা বড় সকল বাস্তব সংখ্যা প্রদত্ত অসমতার সমাধান যা নিচে অঙ্কিত সংখ্যারেখায় দেখানো হলো:

অনুশীলনী-৬.২

প্রাথমিক আলোচনা

অসমতার সমস্যা সমাধানে নিম্নোক্ত বিষয়গুলো খেয়াল রাখতে হবে-

(i) অজানা রাশি বা চলকের সাহায্যে বর্ণিত সমস্যাটি প্রকাশ করতে হবে।

(ii) বর্ণিত সমস্যা অনুসারে অথবা উপস্থিত ও বুদ্ধিবৃত্তিক চিন্তার মাধ্যমে সম্পর্ক চিহ্ন বসাতে হবে।

(iii) অসমতা সংক্রান্ত স্বতঃসিদ্ধ বা বিধিসমূহ প্রয়োগ করে অজানা রাশি বা চলকের মান নির্ণয় করতে হবে।

(iv) অজানা রাশি বা চলকের মানই কাঙ্ক্ষিত সমাধান। এক্ষেত্রে মনে রাখতে হবে যে অসমতার সমাধান কোনো নির্দিষ্ট সংখ্যা নয়। এটি সর্বদাই একটি ব্যবধি নির্দেশ করে।

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনমূলক কাজের সমাধান

১. কাজ: [পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-১১৩]

140 টাকা কেজি দরে জেভিড x কেজি আপেল কিনলেন। তিনি বিক্রেতাকে 1000 টাকার একখানা নোট দিলেন। বিক্রেতা 50 টাকার x খানা নোটসহ বাকী টাকা ফেরত দিলেন। সমস্যাটিকে অসমতার মাধ্যমে প্রকাশ কর এবং x এর সম্ভাব্য মান নির্ণয় কর।

সমাধান:

140 টাকা কেজি দরে x কেজি আপেলের দাম $= 140x$ টাকা

50 টাকার x খানা নোট $= 50x$ টাকা

বিক্রেতাকে প্রদত্ত টাকা $= 1000$

$\therefore$ নির্ণেয় অসমতা, $140x + 50x < 1000$ **(Ans.)**

এখন, $140x + 50x < 100$

বা, $190x < 100$

বা, $\frac{190x}{190} < \frac{1000}{190}$ [উভয়পক্ষে 190 দ্বারা ভাগ করে]

বা, $x < 5.26$

কিন্তু 50 টাকার নোট সংখ্যা ভগ্নাংশ অথবা ঋণাত্মক হতে পারে না অর্থাৎ x এর মান 5 অথবা 5 অপেক্ষা ছোট ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হবে। নির্ণেয় সম্ভাব্য মান $0 < x \leq 5$ এবং x পূর্ণসংখ্যা। **(Ans.)**

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৬.২

১-৫ পর্যন্ত সমস্যাগুলো অসমতার মাধ্যমে প্রকাশ কর এবং x এর সম্ভাব্য মান নির্ণয় কর।

১। এক বালক ঘণ্টায় x কি.মি. বেগে 3 ঘণ্টা হাঁটল এবং ঘণ্টায় $(x + 2)$ কি.মি. বেগে $\frac{1}{2}$ ঘণ্টা দৌড়াল এবং তার অতিক্রান্ত পথ 29 কি.মি. এর কম।

২। একটি বোর্ডিং-এ রোজ $4x$ কেজি চাল এবং $(x - 3)$ কেজি ডাল লাগে এবং চাল ও ডাল মিলে 40 কেজির বেশি লাগে না।

৩। 70 টাকা কেজি দরে সোহরাব সাহেব x কেজি আম কিনলেন। বিক্রেতাকে 500 টাকার একখানা নোট দিলেন। বিক্রেতা 20 টাকার x খানা নোটসহ বাকি টাকা ফেরত দিলেন।

৪। একটি গাড়ি 4 ঘণ্টায় যায় x কি.মি. এবং 5 ঘণ্টায় যায় $(x + 120)$ কি.মি.। গাড়িটির গড় গতিবেগ ঘণ্টায় 100 কি.মি. এর বেশি নয়।

৫। এক টুকরা কাগজের ক্ষেত্রফল 40 বর্গ সে.মি.। তা থেকে x সে.মি. দীর্ঘ এবং 5 সে.মি. প্রস্থবিশিষ্ট আয়তাকার কাগজ কেটে নেওয়া হলো।

৬। পুত্রের বয়স মায়ের বয়সের এক-তৃতীয়াংশ। পিতা মায়ের চেয়ে 6 বছরের বড়। তিনজনের বয়সের সমষ্টি অনূর্ধ্ব 90 বছর। পিতার বয়স অসমতার মাধ্যমে প্রকাশ কর।

৭। জেনি 14 বছর বয়সে জুনিয়র বৃত্তি পরীক্ষা দিয়েছিল। 17 বছর বয়সে সে এস.এস.সি পরীক্ষা দিবে। তার বর্তমান বয়স অসমতায় প্রকাশ কর।

৮। একখানি জেট প্লেনের গতি প্রতি সেকেন্ডে সর্বাধিক 300 মিটার। প্লেনটি 15 কি.মি. যাওয়ার প্রয়োজনীয় সময় অসমতায় প্রকাশ কর।

৯। ঢাকা থেকে জেদ্দার বিমান পথে দূরত্ব 5000 কি.মি.। জেট বিমানের সর্বোচ্চ গতিবেগ ঘণ্টায় 900 কি.মি.। কিন্তু ঢাকা থেকে জেদ্দা যাবার পথে প্রতিকূল দিকে ঘণ্টায় 100 কি.মি. বেগে বায়ু প্রবাহের সম্মুখীন হতে হয়। ঢাকা থেকে জেদ্দার বিরতিহীন উড্ডয়নের প্রয়োজনীয় সময় একটি অসমতার মাধ্যমে প্রকাশ কর।

১০। পূর্ববর্তী প্রশ্নের সূত্র ধরে, জেদ্দা থেকে ঢাকা পথে উড্ডয়নের প্রয়োজনীয় সময় একটি অসমতার মাধ্যমে প্রকাশ কর।

১১। কোনো ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যার 5 গুণ, সংখ্যাটির দ্বিগুণ এবং 15 এর সমষ্টি অপেক্ষা ছোট। সংখ্যাটির সম্ভাব্য মান অসমতায় প্রকাশ কর।

অনুশীলনী-৬.২ এর সমাধান

১-৫ পর্যন্ত সমস্যাগুলো অসমতার মাধ্যমে প্রকাশ কর এবং x এর সম্ভাব্য মান নির্ণয় কর।

১। এক বালক ঘণ্টায় x কি.মি. বেগে 3 ঘণ্টা হাঁটল এবং ঘণ্টায় $(x+2)$ কি.মি. বেগে $\frac{1}{2}$ ঘণ্টা দৌড়াল এবং তার অতিক্রান্ত পথ 29 কি.মি. এর কম।

সমাধান:

ঘণ্টায় x কি.মি. বেগে 3 ঘণ্টায় অতিক্রান্ত দূরত্ব $= 3x$ কি.মি. ঘণ্টায় $(x+2)$ কি.মি. বেগে $\frac{1}{2}$ ঘণ্টায় অতিক্রান্ত দূরত্ব $= \frac{1}{2}(x+2)$ কি.মি.।

এখানে, মোট অতিক্রান্ত পথ 29 কি.মি. এর কম।

$\therefore$ নির্ণেয় অসমতা, $3x + \frac{x+2}{2} < 29$. **(Ans.)**

এখন, $3x + \frac{x+2}{2} < 29$

বা, $\frac{6x+x+2}{2} < 29$

বা, $\frac{7x+2}{2} \times 2 < 29 \times 2$ [উভয়পক্ষকে 2 দ্বারা গুণ করে]

বা, $7x+2 < 58$

বা, $7x+2-2 < 58-2$ [উভয়পক্ষ হতে 2 বিয়োগ করে]

বা, $7x < 56$

বা, $\frac{7x}{7} < \frac{56}{7}$ [উভয়পক্ষকে 7 দ্বারা ভাগ করে]

$\therefore x < 8$.

দূরত্ব ঋণাত্মক হতে পারে না।

সুতরাং নির্ণেয় সম্ভাব্য মান, $0 < x < 8$. **(Ans.)**

২। একটি বোর্ডিং-এ রোজ $4x$ কেজি চাল এবং $(x-3)$ কেজি ডাল লাগে এবং চাল ও ডাল মিলে 40 কেজির বেশি লাগে না।

সমাধান:

চাল লাগে $= 4x$ কেজি

ডাল লাগে $= (x-3)$ কেজি

চাল ও ডাল মিলে 40 কেজির বেশি লাগে না

$\therefore$ নির্ণেয় অসমতা, $4x + x - 3 \leq 40$. **(Ans.)**

এখন, $4x + x - 3 \leq 40$

বা, $5x - 3 + 3 \leq 40 + 3$ [উভয় পক্ষে 3 যোগ করে]

বা, $5x \leq 43$

বা, $\frac{5x}{5} \leq \frac{43}{5}$ [উভয় পক্ষকে 5 দ্বারা ভাগ করে]

$\therefore x \leq \frac{43}{5}$

আবার, ডালের পরিমাণ $= (x-3)$ কেজি

যেহেতু, ডালের পরিমাণ শূন্য (0) কেজির বেশি হবে।

অর্থাৎ $x - 3 > 0$

$\therefore x > 3$

নির্ণেয় সম্ভাব্য মান, $3 < x \leq \frac{43}{5}$ **(Ans.)**

৩। 70 টাকা কেজি দরে সোহরাব সাহেব x কেজি আম কিনলেন। বিক্রেতাকে 500 টাকার একখানা নোট দিলেন। বিক্রেতা 20 টাকার x খানা নোটসহ বাকি টাকা ফেরত দিলেন।

সমাধান:

70 টাকা কেজি দরে x কেজি আমের দাম $= 70x$ টাকা

20 টাকার x খানা নোট $= 20x$ টাকা

বিক্রেতাকে প্রদত্ত টাকা $= 500$

বিক্রেতা 20 টাকার x খানা নোটসহ বাকি টাকা ফেরত দিলেন, অর্থাৎ $20x$ টাকা ছাড়া আরও কিছু টাকা আছে, সুতরাং $(70x + 20x)$ টাকা 500 টাকা অপেক্ষা অবশ্যই কম হবে।

$\therefore$ নির্ণেয় অসমতা, $70x + 20x < 500$. **(Ans.)**

এখন, $70x + 20x < 500$

বা, $90x < 500$

বা, $x < \frac{500}{90}$

$\therefore x < 5.56$

কিন্তু 20 টাকার নোট সংখ্যা ভগ্নাংশ বা ঋণাত্মক হতে পারে না অর্থাৎ x এর মান 5 অথবা 5 থেকে ছোট ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হবে।

$\therefore$ নির্ণেয় সম্ভাব্য মান, $0 < x \leq 5$ এবং x পূর্ণসংখ্যা। **(Ans.)**

[বি.দ্র. এইভাবে উত্তর যুক্তি যুক্ত]

৪। একটি গাড়ি 4 ঘণ্টায় যায় x কি.মি. এবং 5 ঘণ্টায় যায় $(x+120)$ কি.মি.। গাড়িটির গড় গতিবেগ ঘণ্টায় 100 কি.মি. এর বেশি নয়।

সমাধান:

মোট সময় $= (4+5)$ ঘণ্টা $= 9$ ঘণ্টা

9 ঘণ্টায় গাড়িটি যায় $(x + x + 120)$ কি.মি.

$\therefore$ গাড়িটির গড় গতিবেগ $= \frac{x+x+120}{9}$ কি.মি./ঘণ্টা

দেওয়া আছে,

গাড়িটির গড় গতিবেগ ঘণ্টায় 100 কি.মি. এর বেশি নয়।

$\therefore$ নির্ণেয় অসমতা, $\frac{x+x+120}{9} \leq 100$. **(Ans.)**

এখন, $\frac{x+x+120}{9} \leq 100$

বা, $\frac{2x+120}{9} \times 9 \leq 100 \times 9$

বা, $2x + 120 \leq 900$

বা, $2x + 120 - 120 \leq 900 - 120$ [উভয়পক্ষ হতে 120 বিয়োগ করে]

বা, $2x \leq 780$

বা, $\frac{2x}{2} \leq \frac{780}{2}$ [উভয়পক্ষকে 2 দ্বারা ভাগ করে]

$\therefore x \leq 390$

যেহেতু গাড়ির গতিবেগ ঋণাত্মক হবে না সেহেতু নির্ণেয় সম্ভাব্য মান, $0 < x \leq 390$.

[N.B: গড় গতিবেগ $= \frac{\text{মোট দূরত্ব}}{\text{মোট সময়}}$]

৫। এক টুকরা কাগজের ক্ষেত্রফল 40 বর্গ সে.মি.। তা থেকে x সে.মি. দৈর্ঘ্য এবং 5 সে.মি. প্রস্থবিশিষ্ট আয়তাকার কাগজ কেটে নেওয়া হলো।

সমাধান:

কেটে নেওয়া কাগজের, দৈর্ঘ্য $= x$ সে.মি. ও

প্রস্থ $= 5$ সে.মি.

$\therefore$ কেটে নেওয়া কাগজের ক্ষেত্রফল $= 5x$ বর্গ সে.মি.

দেওয়া আছে, মূল কাগজটির ক্ষেত্রফল $= 40$ বর্গ সে.মি.

এখন, কেটে নেওয়া কাগজের ক্ষেত্রফল অবশ্যই মূল কাগজের ক্ষেত্রফলের থেকে কম হবে।

$\therefore$ নির্ণেয় অসমতা, $5x < 40$ **(Ans.)**

এখন, $5x < 40$

বা, $\frac{5x}{5} < \frac{40}{5}$ [উভয়পক্ষকে 5 দ্বারা ভাগ করে]

বা, $x < 8$

কিন্তু আয়তাকার, সুতরাং দৈর্ঘ্য > প্রস্থ

আবার যেহেতু প্রস্থ 5 সে.মি. সেহেতু দৈর্ঘ্য, $x > 5$ হবে।

∴ নির্ণেয় x এর সম্ভাব্য মান, $5 < x < 8$. **(Ans.)**

৬। পুত্রের বয়স মায়ের বয়সের এক-তৃতীয়াংশ। পিতা মায়ের চেয়ে 6 বছরের বড়। তিনজনের বয়সের সমষ্টি অনূর্ধ্ব 90 বছর। পিতার বয়স অসমতার মাধ্যমে প্রকাশ কর।

সমাধান:

ধরি, মায়ের বয়স = x বছর

∴ পুত্রের বয়স = $\frac{x}{3}$ বছর

ও পিতার বয়স = $(x+6)$ বছর

দেওয়া আছে, তিনজনের বয়সের সমষ্টি অনূর্ধ্ব 90 বছর।

$\therefore x + \frac{x}{3} + x + 6 \leq 90$

বা, $\frac{3x + x + 3x + 18}{3} \leq 90$

বা, $\frac{7x+18}{3} \times 3 \leq 90 \times 3$ [উভয়পক্ষকে 3 দ্বারা গুণ করে]

বা, $7x + 18 \leq 270$

বা, $7x + 18 - 18 \leq 270 - 18$ [উভয়পক্ষ হতে 18 বিয়োগ করে]

বা, $7x \leq 252$

বা, $\frac{7x}{7} \leq \frac{252}{7}$ [উভয়পক্ষকে 7 দ্বারা ভাগ করে]

বা, $x \leq 36$

বা, $x + 6 \leq 36 + 6$ [উভয়পক্ষকে 6 যোগ করে]

বা, $x + 6 \leq 42$

∴ পিতার বয়স ≤ 42 বছর **(Ans.)**

৭। জেনি 14 বছর বয়সে জুনিয়র বৃত্তি পরীক্ষা দিয়েছিল। 17 বছর বয়সে সে এস.এস.সি পরীক্ষা দিবে। তার বর্তমান বয়স অসমতায় প্রকাশ কর।

সমাধান:

ধরি,

জেনির বর্তমান বয়স = x বছর

যেহেতু জেনি 14 বছর বয়সে জুনিয়র বৃত্তি পরীক্ষা দিয়েছিল সুতরাং, $x > 14$.

আবার, যেহেতু 17 বছর বয়সে এস.এস.সি পরীক্ষা দিবে

সুতরাং, $x < 17$.

∴ নির্ণেয় অসমতা, $14 < x < 17$. **(Ans.)**

৮। একখানি জেট প্লেনের গতি প্রতি সেকেন্ডে সর্বাধিক 300 মিটার। প্লেনটি 15 কি.মি. যাওয়ার প্রয়োজনীয় সময় অসমতায় প্রকাশ কর।

সমাধান:

ধরি,

15 কি.মি. যাওয়ার প্রয়োজনীয় সময় = t সেকেন্ড

এখন, 15 কি.মি. = 15×1000 মিটার = 15000 মিটার

তাহলে, t সেকেন্ডে প্লেনটি যায় 15000 মিটার

∴ 1 " " " $\frac{15000}{t}$ "

দেওয়া আছে,

প্লেনটির গতি প্রতি সেকেন্ডে সর্বাধিক 300 মিটার।

$\therefore \frac{15000}{t} \leq 300$

বা, $15000 \leq 300t$

বা, $300t \geq 15000$

বা, $\frac{300t}{300} \geq \frac{15000}{300}$ [উভয়পক্ষকে 300 দ্বারা ভাগ করে]

∴ নির্ণেয় অসমতা, $t \geq 50$. **(Ans.)**

৯। ঢাকা থেকে জেদ্দার বিমান পথে দূরত্ব 5000 কি.মি.। জেট বিমানের সর্বোচ্চ গতিবেগ ঘণ্টায় 900 কি.মি.। কিন্তু ঢাকা থেকে জেদ্দা যাবার পথে প্রতিকূল দিকে ঘণ্টায় 100 কি.মি. বেগে বায়ু প্রবাহের সম্মুখীন হতে হয়। ঢাকা থেকে জেদ্দার বিরতিহীন উড্ডয়নের প্রয়োজনীয় সময় একটি অসমতার মাধ্যমে প্রকাশ কর।

সমাধান:

মনে করি,

প্রয়োজনীয় সময় = t ঘণ্টা

এখানে, বিমানের বেগ ≤ 900 কি.মি./ঘণ্টা

বায়ুর বেগ = 100 কি.মি./ঘণ্টা

অর্থাৎ, বাতাসের প্রতিকূলে বিমানটির বেগ ≤ $(900 - 100) = 800$ কি.মি./ঘণ্টা।

t ঘণ্টায় যায় 5000 কি.মি.

∴ 1 ঘণ্টায় যায় $\frac{5000}{t}$ কি.মি.

এখানে, বিমানটির সর্বাধিক বেগ প্রতি ঘণ্টায় 800 কি.মি.

$\therefore \frac{5000}{t} \leq 800$

বা, $\frac{1}{t} \leq \frac{800}{5000}$ [উভয়পক্ষকে $\frac{1}{5000}$ দ্বারা গুণ করে]

বা, $\frac{1}{t} \leq \frac{8}{50}$

বা, $t \geq \frac{50}{8}$ [বিপরীত করণ করে]

$\therefore t \geq 6\frac{1}{4}$

∴ নির্ণেয় অসমতা, $t \geq 6\frac{1}{4}$. **(Ans.)**

১০। পূর্ববর্তী প্রশ্নের সূত্র ধরে, জেদ্দা থেকে ঢাকা পথে উড্ডয়নের প্রয়োজনীয় সময় একটি অসমতার মাধ্যমে প্রকাশ কর।

সমাধান:

ধরি, প্রয়োজনীয় সময় = t ঘণ্টা

বাতাসের অনুকূলে বিমানটির বেগ ≤ $(900 + 100)$

= 1000 কি.মি./ঘণ্টা

1 ঘণ্টায় বিমানটি যায় = $\frac{5000}{t}$ কি.মি.

সুতরাং, $\frac{5000}{t} \leq 1000$

বা, $\frac{1}{t} \leq \frac{1000}{5000}$ [উভয়পক্ষকে $\frac{1}{5000}$ দ্বারা গুণ করে]

বা, $\frac{1}{t} \leq \frac{1}{5}$

$\therefore t \geq 5$. [বিপরীত করণ করে]

∴ নির্ণেয় অসমতা, $t \geq 5$. **(Ans.)**

১১। কোনো ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যার 5 গুণ, সংখ্যাটির দ্বিগুণ এবং 15 এর সমষ্টি অপেক্ষা ছোট। সংখ্যাটির সম্ভাব্য মান অসমতায় প্রকাশ কর।

সমাধান:

ধরি, সংখ্যাটির মান $= x$

প্রশ্নমতে,

$5x < 2x + 15$

বা, $5x - 2x < 2x + 15 - 2x$ [উভয়পক্ষ হতে $2x$ বিয়োগ করে]

বা, $3x < 15$

বা, $\frac{3x}{3} < \frac{15}{3}$ [উভয়পক্ষকে 3 দ্বারা ভাগ করে]

বা, $x < 5$

যেহেতু সংখ্যাটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা

$\therefore$ সংখ্যাটির সম্ভাব্য মান, $0 < x < 5$. **(Ans.)**

জেনে রাখা ভালো: ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার সেটকে বলা হয় স্বাভাবিক সংখ্যার সেট একে N দ্বারা প্রকাশ করা হয়, তালিকা পদ্ধতিতে $N = \{1, 2, 3, ...\}$ উল্লেখ্য যে শূন্য (0) ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা নয়, শূন্য অঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

অনুশীলনী-৬.৩

প্রাথমিক আলোচনা

দুই চলকবিশিষ্ট অসমতার লেখচিত্র অঙ্কন

লেখচিত্র অঙ্কন করতে নিম্নোক্ত ধাপগুলো মনে রাখা জরুরি।

(i) অসমতার সমীকরণকে সাধারণ সমীকরণ ধরতে হবে। অর্থাৎ অসমতা চিহ্নের পরিবর্তে সমান (=) চিহ্ন বসাতে হবে।

(ii) যার দুইটি বিন্দু x অক্ষের ছেদবিন্দু ও y অক্ষের ছেদবিন্দু নির্ণয় করে বিন্দুদ্বয় সংযোগ করলেই সমীকরণের লেখ পাওয়া যায়।

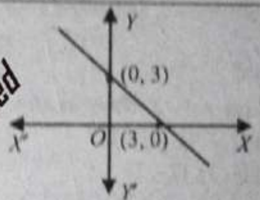
এখন সমীকরণে $x = 0$ বসিয়ে y এর মান এবং $y = 0$ বসিয়ে x এর মান নির্ণয় করতে হয়। অতঃপর $(0, y)$ ও $(x, 0)$ বিন্দুই হবে যথাক্রমে y অক্ষ ও x অক্ষের ছেদবিন্দু।

উদাহরণ: $x + y - 3 > 0$ অসমতার জন্য ধরি $x + y - 3 = 0$

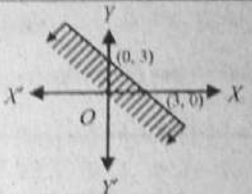
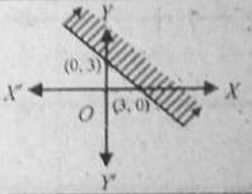
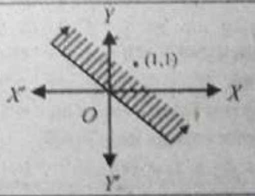
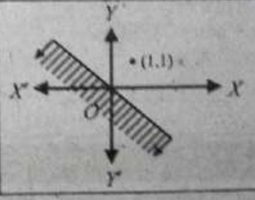
এখন, $x = 0$ হলে পাই, $y = 3$ এবং $y = 0$ হলে পাই, $x = 3$

অতএব $(0, 3)$ ও $(3, 0)$ বিন্দুদ্বয় যথাক্রমে y অক্ষ ও x অক্ষের ছেদবিন্দু।

বিন্দুদ্বয় সংযোগ করলেই $x + y - 3 = 0$ সমীকরণের লেখ পাওয়া যায়।



অসমতার অনুকূল এলাকা

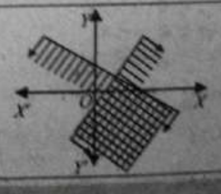
পদ্ধতি-১: (ক) $(0, 0)$ বা মূলবিন্দুর জন্য কোনো অসমতা সত্য হলে লেখের যে পাশে মূলবিন্দু আছে সে পাশের এলাকাই হবে অনুকূল এলাকা।	উদাহরণ: $x + y - 3 < 0$ অসমতাটি $(0, 0)$ বিন্দুর জন্য $(0 + 0 - 3 < 0 \Rightarrow -3 < 0)$ সত্য। তাই মূলবিন্দু যে পাশে আছে সে পাশের এলাকাই হবে অনুকূল এলাকা।	
পদ্ধতি-১: (খ) $(0, 0)$ বা মূলবিন্দুর জন্য কোনো অসমতা সত্য না হলে লেখের যে পাশে মূলবিন্দু আছে তার বিপরীত পাশের এলাকাই হবে অনুকূল এলাকা।	উদাহরণ: $x + y + 3 > 0$ অসমতাটি $(0, 0)$ বিন্দুর জন্য $(0 + 0 + 3 < 0 \Rightarrow + 3 > 0)$ যা সত্য নয়। তাই মূলবিন্দু যে পাশে আছে তার বিপরীত পাশের এলাকাই হবে অনুকূল এলাকা।	
পদ্ধতি-২: (ক) সংখ্যারেখাটি $(0,0)$ দিয়ে গেলে $(0,0)$ ব্যতিত অন্য যেকোনো বিন্দুর জন্য কোনো অসমতা সত্য হলে লেখের যে পাশে উক্ত বিন্দুটি আছে সে পাশের এলাকাই হবে অনুকূল এলাকা।	উদাহরণ: $3x - y > 0$ অসমতাটি $(1, 1)$ বিন্দুর জন্য $(3 - 1 > 0 \Rightarrow 2 > 0)$ যা সত্য। তাই $(1, 1)$ বিন্দু যে পাশে আছে সে পাশের এলাকাই হবে অনুকূল এলাকা।	
পদ্ধতি-২: (খ) সংখ্যারেখাটি $(0,0)$ দিয়ে গেলে $(0,0)$ ব্যতিত অন্য যেকোনো বিন্দুর জন্য কোনো অসমতা সত্য না হলে লেখের যে পাশে উক্ত বিন্দুটি আছে তার বিপরীত পাশের এলাকাই হবে অনুকূল এলাকা।	উদাহরণ: $3x - y < 0$ অসমতাটি $(1, 1)$ বিন্দুর জন্য $(3 - 1 < 0 \Rightarrow 2 < 0)$ যা সত্য নয়। তাই $(1, 1)$ বিন্দু যে পাশে আছে তার বিপরীত পাশের এলাকাই হবে অনুকূল এলাকা।	

অসমতার যুগলের যুগপৎ সমাধান

একঘাতবিশিষ্ট অসমতার সমীকরণের লেখচিত্র সর্বদাই সরলরেখা। দুইটি সরলরেখা কেবলমাত্র একটি বিন্দুতে ছেদ করে। এ ছেদবিন্দুই অসমতাযুগলের যুগপৎ সমাধান হবে যদি

(i) ছেদবিন্দুটি অবশ্যই উভয় অসমতার অনুকূল এলাকায় অবস্থিত হতে হবে।

(ii) অসমতার লেখ দুইটির সংশ্লিষ্ট অংশসহ এই দুইভাবে চিহ্নিত অংশের ছেদাংশই অসমতা দুইটি যুগপৎ সমাধানের লেখচিত্র।



বিশেষ কথা মনে রাখা আবশ্যক:

(i) < ও > চিহ্নবিশিষ্ট অসমতার সমীকরণ লেখের উপরিস্থিত কোনো বিন্দুর জন্য সিদ্ধ নয়। তাই লেখচিত্রের উপরস্থ এলাকা অনুকূল এলাকা নির্দেশ করেনা।

(ii) ≤ ও ≥ চিহ্নবিশিষ্ট অসমতার সমীকরণ লেখের উপরিস্থিত বিন্দুসহ অনুকূল এলাকার সকল বিন্দুর জন্য সিদ্ধ হয়। তাই লেখের উপরিস্থিত সকল বিন্দু অনুকূল এলাকার অন্তর্ভুক্ত।

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৬.৩

১। $5x + 5 > 25$ অসমতাটির সমাধান সেট কোনটি?

(ক) $S = \{x \in R : x > 4\}$ (খ) $S = \{x \in R : x < 4\}$

(গ) $S = \{x \in R : x \leq 4\}$ (ঘ) $S = \{x \in R : x \geq 4\}$

২। $x + y = -2$ সমীকরণটিতে x এর কোন মানের জন্য $y = 0$ হবে?

(ক) 2 (খ) 0

(গ) 4 (ঘ) -2

৩। $2xy + y = 3$ সমীকরণটির সঠিক স্থানাংক কোনগুলো?

(ক) $(1, -1), (2, -1)$ (খ) $(1, 1), (-2, -1)$

(গ) $(1, 1), (2-, 1)$ (ঘ) $(-1, 1), (2, -1)$

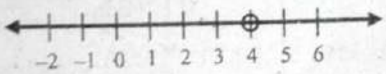
নিম্নে অসমতাটির থেকে ৪ ও ৫ নম্বর প্রশ্নের উত্তর দাও?

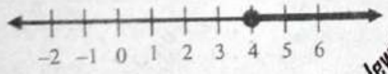
৪। অসমতাটির সমাধান সেট কোনটি?

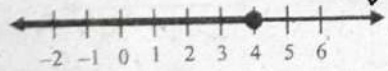
(ক) $S = \{x \in R : x > 4\}$ (খ) $S = \{x \in R : x < 4\}$

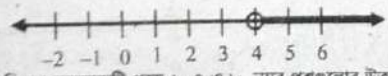
(গ) $S = \{x \in R : x \leq 4\}$ (ঘ) $S = \{x \in R : x \geq 4\}$

৫। অসমতাটির সমাধান সেটের সংখ্যা রেখা কোনটি?

(ক) 

(খ) 

(গ) 

(ঘ) 

নিম্নের অনুচ্ছেদটি পড়ে ৬, ৭ ও ৮ নম্বর প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও:

একজন ছাত্রী 10.00 টাকা দরে xটি পেন্সিল এবং 6.00 টাকা দরে (x+3) টি খাতা কিনেছে। সবগুলো মিলে মোট মূল্য অনূর্ধ্ব 114.00 টাকা।

৬। সমস্যাটির অসমতার প্রকাশ কোনটি?

i. $10x + 6(x + 3) \leq 114$

ii. $10x + 6(x + 3) \geq 114$

iii. $10x + 6(x + 3) < 114$

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i (খ) ii

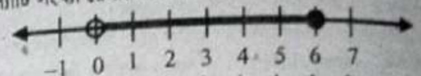
(গ) iii (ঘ) i ও ii

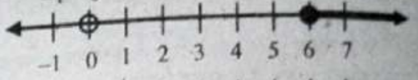
৭। ছাত্রীটি সর্বাধিক কতটি পেন্সিল কিনল?

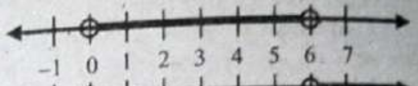
(ক) 1টি (খ) 3টি

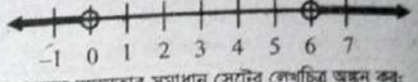
(গ) 5টি (ঘ) 6টি

৮। সমস্যাটি সংখ্যা রেখায় কোনটি প্রযোজ্য হবে?

(ক) 

(খ) 

(গ) 

(ঘ) 

৯। নিম্নের প্রত্যেক অসমতার সমাধান সেটের লেখচিত্র অঙ্কন কর:

(i) $x - y > -10$ (ii) $2x - y < 6$

(iii) $3x - y \geq 0$ (iv) $3x - 2y \leq 12$

(v) $y < -2$ (vi) $x \geq 4$

(vii) $y > x + 2$ (viii) $y < x + 2$

(ix) $y \geq 2x$ (x) $x + 3y < 0$

১০। হযরত শাহজালাল বিমানবন্দর থেকে সিঙ্গাপুর বিমান পথের দূরত্ব 1793 কি.মি.। বাংলাদেশ বিমানের সর্বোচ্চ গতিবেগ 500 কি.মি./ঘণ্টা। কিন্তু হযরত শাহজালাল বিমানবন্দর থেকে সিঙ্গাপুর যাবার পথে প্রতিকূলে 60 কি.মি./ঘণ্টা বেগে বায়ু প্রবাহের সম্মুখীন হয়।

(ক) উদ্দীপকের সমস্যাটির প্রয়োজনীয় সময় t ঘণ্টা ধরে সমস্যাটিকে অসমতায় লেখও।

(খ) হযরত শাহজালাল বিমানবন্দর থেকে সিঙ্গাপুর বিমানবন্দরে বিরতিহীন উড্ডায়নের প্রয়োজনীয় সময় (ক) তে বর্ণিত অসমতা থেকে নির্ণয় কর এবং সংখ্যা রেখায় দেখাও।

(গ) সিঙ্গাপুর থেকে হযরত শাহজালাল বিমানবন্দরে ফেরার পথে বিরতিহীন উড্ডায়নের প্রয়োজনীয় সময়কে x ধরে সমস্যাটিকে অসমতার মাধ্যমে প্রকাশ করে লেখের সাহায্যে সমাধান কর।

১১। দুইটি সংখ্যার ১ম সংখ্যাটির 3 গুণ থেকে ২য় সংখ্যাটির 5 গুণ বিয়োগ করলে 5 অপেক্ষা বৃহত্তর হয়। আবার ১ম সংখ্যা থেকে ২য় সংখ্যার 3 গুণ বিয়োগ করলে অনূর্ধ্ব 9 হয়।

(ক) উদ্দীপকের সমস্যাগুলোকে অসমতায় দেখাও।

(খ) যদি ১ম সংখ্যাটির 5 গুণ, ১ম সংখ্যার দ্বিগুণ এবং 15 এর সমষ্টি অপেক্ষা ছোট হলে সংখ্যাটির সম্ভাব্য মান অসমতায় প্রকাশ কর।

(গ) ক নং. এ প্রাপ্ত অসমতা যুগলের সমাধান সেটের লেখচিত্র অঙ্কন কর।

অনুশীলনী-৬.৩ এর সমাধান

১। $5x + 5 > 25$ অসমতাটির সমাধান সেট কোনটি? (VI)

(ক) $S = \{x \in R : x > 4\}$ (খ) $S = \{x \in R : x < 4\}$

(গ) $S = \{x \in R : x \leq 4\}$ (ঘ) $S = \{x \in R : x \geq 4\}$

উত্তর: (ক) $S = \{x \in R : x > 4\}$

ব্যাখ্যা:

প্রদত্ত অসমতা,

$5x + 5 > 25$

বা, $5x > 20$

$\therefore x > 4$

সুতরাং, অসমতার সমাধান সেট $S = \{x \in R : x > 4\}$.

২। $x + y = -2$ সমীকরণটিতে x এর কোন মানের জন্য $y = 0$ হবে?

(ক) 2 (খ) 0 (গ) 4 (ঘ) -2

উত্তর: (ঘ) -2

ব্যাখ্যা:

প্রদত্ত সমীকরণ,

$x + y = -2$

$y = 0$ হলে,

$x + 0 = -2$

$\therefore x = -2$

৩। $2xy + y = 3$ সমীকরণটির সঠিক স্থানাংক কোনগুলো? (VI)

(ক) $(1, -1), (2, -1)$ (খ) $(1, 1), (-2, -1)$

(গ) $(1, 1), (-2, 1)$ (ঘ) $(-1, 1), (2, -1)$

উত্তর: (খ) $(1, 1), (-2, -1)$

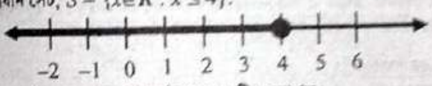
ব্যাখ্যা:
প্রদত্ত সমীকরণ
$2xy + y = 3$
$(1, 1)$ এর জন্য সমীকরণটির বামপক্ষ $= 2.1.1 + 1 = 3 =$ ডানপক্ষ
$(-2, -1)$ এর জন্য সমীকরণটির বামপক্ষ $= 2.(-2).(-1) - 1 = 3 =$ ডানপক্ষ
সুতরাং, $(1, 1), (-2, -1)$ বিন্দুর জন্য সমীকরণটি সত্য।
[বি.দ্র: সমীকরণটির স্থানাঙ্ক বিন্দু দ্বারা সমীকরণটি অবশ্যই সিদ্ধ হবে।]
Note: ২০১৫ সালের পাঠ্যবই (খ) অপশনে -2 এর পরিবর্তে শুধু 2 দেওয়া হয়েছে। আসলে -2 ই হবে।

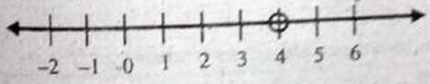
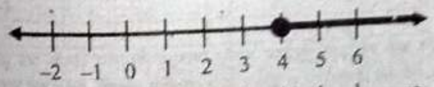
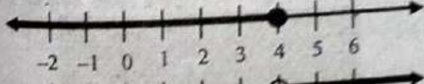
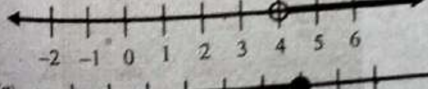
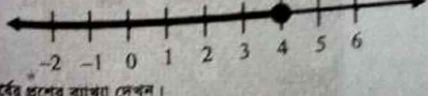
নিচের অসমতাটি থেকে ৪ ও ৫ নম্বর প্রশ্নের উত্তর দাও:

$$x \le \frac{x}{4} + 3$$

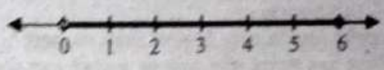
৪। অসমতাটির সমাধান সেট কোনটি?
(ক) $S = \{x \in R : x > 4\}$
(খ) $S = \{x \in R : x < 4\}$
(গ) $S = \{x \in R : x \le 4\}$
(ঘ) $S = \{x \in R : x \ge 4\}$
উত্তর: (গ) $S = \{x \in R : x \le 4\}$
ব্যাখ্যা:
প্রদত্ত অসমতা

$$x \le \frac{x}{4} + 3$$

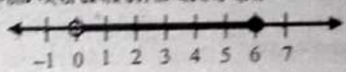
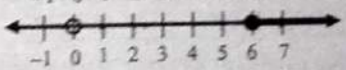
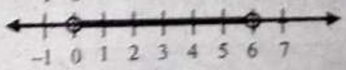
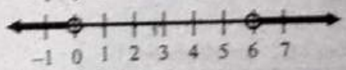
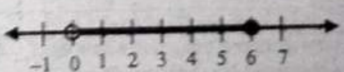
বা, $4x \le x + 12$
বা, $3x \le 12$
$\therefore x \le 4$
অতএব সমাধান সেট, $S = \{x \in R : x \le 4\}$.
সংখ্যারেখা:

4 বা 4 থেকে ছোট সকল বাস্তব সংখ্যাই অসমতাটির সমাধান।
অসমতাটি '≤' চিহ্নযুক্ত হওয়ায় ('4') বৃত্তটি ভরাট করা হয়েছে।

৫। অসমতাটির সমাধান সেটের সংখ্যা রেখা কোনটি?
(ক)

(খ)

(গ)

(ঘ)

উত্তর: (গ)

Note: পূর্বের প্রশ্নের ব্যাখ্যা দেখুন।

নিচের অনুচ্ছেদটি পড়ে ৬, ৭ ও ৮ নম্বর প্রশ্নগুলো উত্তর দাও: (VVI)
একজন ছাত্রী 10.00 টাকা দরে x টি পেন্সিল 6.00 টাকা দরে $(x + 3)$ টি খাতা কিনেছে। সবগুলো মিলে মোট মূল্য অনূর্ধ্ব 114.00 টাকা।

৬। সমস্যাটির অসমতার প্রকাশ কোনটি?
i. $10x + 6(x + 3) \le 114$
ii. $10x + 6(x + 3) \ge 114$
iii. $10x + 6(x + 3) < 114$
নিচের কোনটি সঠিক?
(ক) i
(খ) ii
(গ) iii
(ঘ) i ও ii
উত্তর: (ক) i
ব্যাখ্যা:
খাতা ও পেন্সিলের মোট মূল্য $= 10x + 6(x + 3)$
শর্তমতে $10x + 6(x + 3) \le 114$
বা $10x + 6x + 18 \le 114$
বা $16x \le 96$
$\therefore x \le 6$
$\therefore$ অতএব সর্বাধিক 6টি পেন্সিল ক্রয় করা যাবে।
নির্ণেয় সমাধান $0 < x \le 6$ [$\because$ পেন্সিলের সংখ্যা ঋণাত্মক বা শূন্য হতে পারে না]
সংখ্যারেখা


৭। ছাত্রীটি সর্বাধিক কয়টি পেন্সিল কিনল?
(ক) 1টি (খ) 3টি (গ) 5টি (ঘ) 6টি
উত্তর: (ঘ) 6টি
Note: পূর্বের প্রশ্নের ব্যাখ্যা দেখুন।

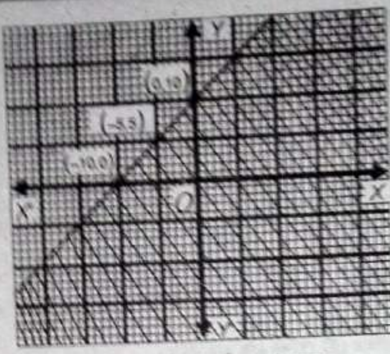
৮। সমস্যাটি সংখ্যা রেখার কোনটি প্রযোজ্য হবে?
(ক)

(খ)

(গ)

(ঘ)

উত্তর: (ক)

Note: পূর্বের প্রশ্নের ব্যাখ্যা দেখুন।

৯। নিচের প্রত্যেক অসমতার সমাধান সেটের লেখচিত্র অঙ্কন কর:
(i) $x - y > -10$
(ii) $2x - y < 6$
(iii) $3x - y \ge 0$
(iv) $3x - 2y \le 12$
(v) $y < -2$
(vi) $x \ge 4$
(vii) $y > x + 2$
(viii) $y < x + 2$
(ix) $y \ge 2x$
(x) $x + 3y < 0$

(i)-এর সমাধান: (VI)
প্রদত্ত অসমতাটি
$x - y > -10$
বা $x - y + 10 > 0$
এখন, $x - y + 10 = 0$
বা, $y = x + 10$.
সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন করি। সমীকরণটি থেকে পাই,

x	-10	-5	0
y	0	5	10

ছক কাগজে ক্ষুদ্রতম বর্গের দৈর্ঘ্যকে একক ধরে $(-10, 0), (-5, 5), (0, 10)$ বিন্দুগুলোকে স্থাপন করে লেখচিত্র রেখাটি অঙ্কন করা হলো।



ক্ষুদ্রতম বর্গের 1 বাহু = 1 একক

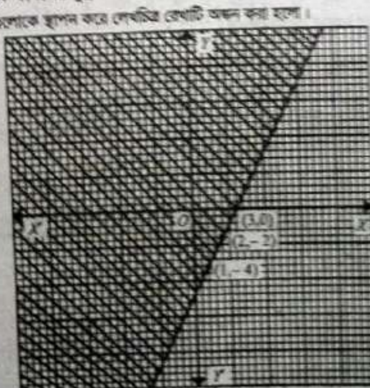
যেহেতু, মূলবিন্দু (0, 0) তে $(x-y+10)$ রাশিটির মান 10 যা ধনাত্মক। সুতরাং, $x-y+10=0$ এর লেখচিত্র রেখার যে পার্শ্বে মূলবিন্দু সেই পার্শ্বের সকল বিন্দুর জন্য $x-y+10>0$ প্রযোজ্য।
সুতরাং লেখচিত্র রেখাটির (লেখচিত্র রেখার বিন্দুগুলো বিবেচ্য নয়, কারণ '>' চিহ্ন বিশিষ্ট অসমতা) নিচের অংশ সমন্বয়ে গঠিত সমতলের অংশটুকুই প্রদত্ত অসমতার লেখচিত্র।

জেনে রাখা ভালো:
১. সরলরেখার লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য দুইটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয়ই যথেষ্ট।
২. '>' বা '<' চিহ্ন বিশিষ্ট অসমতা লেখচিত্র রেখার উপর বিন্দু দ্বারা সিদ্ধ হয় না বলে (লেখচিত্র রেখার বিন্দুগুলো বিবেচ্য নয়, কারণ '>' চিহ্ন বিশিষ্ট অসমতা)। শুধুমাত্র '≥' বা '≤' চিহ্ন বিশিষ্ট অসমতার ক্ষেত্রে লেখচিত্র রেখার উপরস্থ বিন্দুগুলো বিবেচ্য হবে।
"বিস্তারিত প্রাথমিক আলোচনায় দ্রষ্টব্য"

(ii)-এর সমাধান:
প্রদত্ত অসমতাটি
$2x-y<6$
বা $2x-y-6<0$
এখন, $2x-y-6=0$
বা, $y=2x-6$.
সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন করি। সমীকরণটি থেকে পাই,

x	1	2	3
y	-4	-2	0

স্থানাঙ্কিত ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গের দৈর্ঘ্যের দ্বিগুণকে একক ধরে $(1,-4)$, $(2,-2)$, $(3,0)$ বিন্দুগুলোকে স্থাপন করে লেখচিত্র রেখাটি অঙ্কন করা হলো।



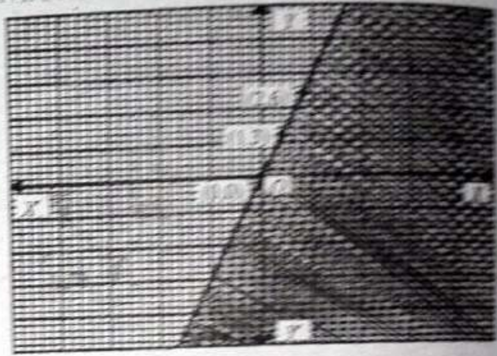
ক্ষুদ্রতম দৈর্ঘ্যের 2 বর্গবাহু = 1 একক

যেহেতু, মূলবিন্দু (0, 0) তে $(2x-y-6)$ রাশিটির মান -6 যা ঋণাত্মক। সুতরাং, $2x-y-6=0$ এর লেখচিত্র রেখার যে পার্শ্বে মূলবিন্দু সেই পার্শ্বে সকল বিন্দুর জন্য $2x-y-6<0$ প্রযোজ্য।
সুতরাং লেখচিত্র রেখাটির (লেখচিত্র রেখার বিন্দুগুলো বিবেচ্য নয়, কারণ '<' চিহ্ন বিশিষ্ট অসমতা) উপরের অংশ সমন্বয়ে গঠিত সমতলের অংশটুকুই প্রদত্ত অসমতার লেখচিত্র।

(iii)-এর সমাধান:
প্রদত্ত অসমতাটি,
$3x-y\geq 0$
এখন, $3x-y=0$
বা, $y=3x$
সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন করি। সমীকরণটি থেকে পাই,

x	0	1	2
y	0	3	6

স্থানাঙ্কিত ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গের দৈর্ঘ্যের দ্বিগুণকে একক ধরে (0, 0), (1, 3), (2, 6) বিন্দুগুলোকে স্থাপন করে লেখচিত্র রেখাটি অঙ্কন করা হলো।



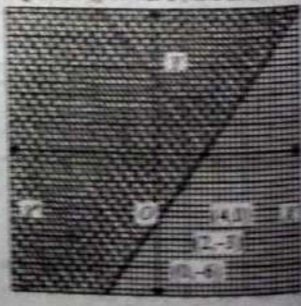
ক্ষুদ্রতম দৈর্ঘ্যের 2 বর্গবাহু = 1 একক

(1, 1) বিন্দুটি লেখচিত্র রেখার "নিচের অংশে" আছে। এই বিন্দুতে $3x-y=3-1=2$ যা ধনাত্মক।
আবার, যেহেতু, $3x-y\geq 0$.
সুতরাং লেখচিত্র রেখাটি ও তার নিচের অংশ (অর্থাৎ, যে অংশে (1, 1) বিন্দুটি অবস্থিত) সমন্বয়ে গঠিত সমতলের অংশটুকুই প্রদত্ত অসমতার লেখচিত্র।

(iv)-এর সমাধান:
প্রদত্ত অসমতাটি
$3x-2y\leq 12$
বা $3x-2y-12\leq 0$
এখন, $3x-2y-12=0$
বা, $y=\dfrac{3x-12}{2}$
সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন করি। সমীকরণটি থেকে পাই,

x	0	2	4
y	-6	-3	0

স্থানাঙ্কিত ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গের দৈর্ঘ্যের দ্বিগুণকে একক ধরে $(0,-6)$, $(2,-3)$, $(4,0)$ বিন্দুগুলোকে স্থাপন করে লেখচিত্র রেখাটি অঙ্কন করা হলো।



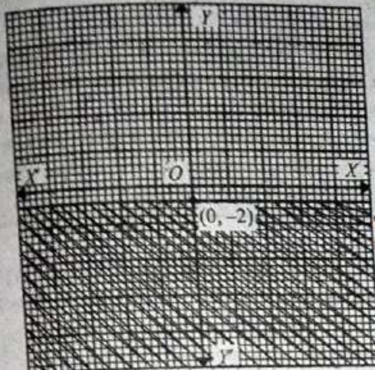
ক্ষুদ্রতম দৈর্ঘ্যের 2 বাহু = 1 একক

যেহেতু, মূলবিন্দু (0, 0) তে $(3x-2y-12)$ রাশিটির মান -12, যা ঋণাত্মক। সুতরাং, $3x-2y-12=0$ এর লেখচিত্র রেখার যে পার্শ্বে মূলবিন্দু সেই পার্শ্বের সকল বিন্দুর জন্য $3x-2y-12\leq 0$ প্রযোজ্য।
সুতরাং লেখচিত্র রেখাটি ও তার উপরের অংশ সমন্বয়ে গঠিত সমতলের অংশটুকুই প্রদত্ত অসমতার লেখচিত্র।

(v)-এর সমাধান:

প্রদত্ত অসমতাটি $y < -2$

এখন, ছায়াঙ্কিত (x, y) সমতলে $y = -2$ সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন করি। ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্যের দ্বিগুণকে একক ধরে $(0, -2)$ বিন্দু দিয়ে X-অক্ষের সমান্তরাল করে লেখচিত্র রেখাটি অঙ্কন করি।



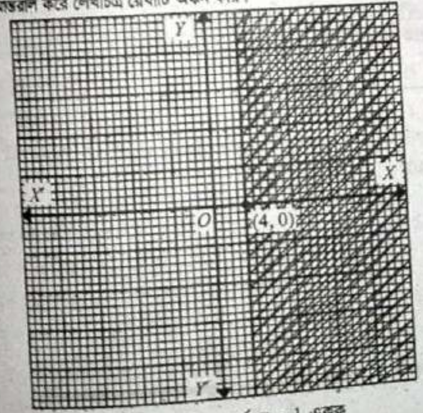
ক্ষুদ্রতম দৈর্ঘ্যের 1 বাহু = 1 একক

এই লেখচিত্র রেখার উপরে মূলবিন্দু অবস্থিত এবং মূলবিন্দুতে $y = 0$ যা, > -2.
সুতরাং লেখচিত্র রেখার নিচের পাশের সকল বিন্দুর স্থানাংকই প্রদত্ত অসমতার সমাধান (লেখচিত্র রেখার বিন্দুগুলো বিবেচ্য নয়)। সমাধান সেটের লেখচিত্র উপরের চিত্রের চিহ্নিত অংশটুকু (যার মধ্যে লেখচিত্র রেখাটি অন্তর্ভুক্ত নয়)।

(vi)-এর সমাধান: (VI)

প্রদত্ত অসমতাটি $x \geq 4$

এখন ছায়াঙ্কিত (x, y) সমতলে $x = 4$ সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন করি। ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্যের দ্বিগুণকে একক ধরে $(4, 0)$ বিন্দু দিয়ে y-অক্ষের সমান্তরাল করে লেখচিত্র রেখাটি অঙ্কন করি।



ক্ষুদ্রতম দৈর্ঘ্যের 1 বর্গঘর = 1 একক

এই লেখচিত্র রেখার বাম পাশের মূলবিন্দু অবস্থিত এবং মূলবিন্দুতে $x = 0$ যা, < 4.
সুতরাং লেখচিত্র রেখার ডান পাশের সকল বিন্দু এবং লেখ-রেখার উপর সকল বিন্দুর স্থানাংকই প্রদত্ত অসমতার সমাধান।

(vii)-এর সমাধান:

প্রদত্ত অসমতাটি,

$y > x + 2$

বা $y - x - 2 > 0$

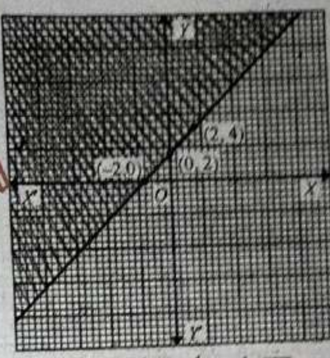
এখন, $y - x - 2 = 0$

বা, $y = x + 2$

সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন করি। সমীকরণটি থেকে পাই,

x	-2	0	2
y	0	2	4

ছায়াঙ্কিত ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গের দৈর্ঘ্যের দ্বিগুণকে একক ধরে $(-2, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 4)$ বিন্দুগুলোকে স্থাপন করে লেখচিত্র রেখাটি অঙ্কন করা হলো।



ক্ষুদ্রতম দৈর্ঘ্যের 2 বর্গঘর = 1 একক

যেহেতু, মূলবিন্দু $(0, 0)$ তে $(y - x - 2)$ রাশিটির মান -2, যা ঋণাত্মক। সুতরাং, $y - x - 2 = 0$ এর লেখচিত্র রেখার যে পাশে মূলবিন্দু অবস্থিত তার বিপরীত পার্শ্বে সকল বিন্দুর জন্য $y - x - 2 > 0$ প্রযোজ্য.
সুতরাং লেখচিত্র রেখা ব্যতীত তার উপরের অংশ সমন্বয়ে গঠিত সমতলের অংশটুকুই প্রদত্ত অসমতার লেখচিত্র।

(viii)-এর সমাধান:

প্রদত্ত অসমতাটি,

$y < x + 2$

বা $y - x - 2 < 0$

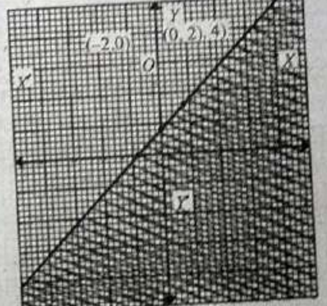
এখন, $y - x - 2 = 0$

বা, $y = x + 2$

সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন করি। সমীকরণটি থেকে পাই,

x	-2	0	2
y	0	2	4

ছায়াঙ্কিত ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গের দৈর্ঘ্যের দ্বিগুণকে একক ধরে $(-2, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 4)$ বিন্দুগুলোকে স্থাপন করে লেখচিত্র রেখাটি অঙ্কন করা হলো।



ক্ষুদ্রতম দৈর্ঘ্যের 2 বর্গঘর = 1 একক

যেহেতু, মূলবিন্দু $(0, 0)$ তে $(y - x - 2)$ রাশিটির মান -2, যা ঋণাত্মক। সুতরাং, $y - x - 2 = 0$ এর লেখচিত্র রেখার যে পার্শ্বে মূলবিন্দু অবস্থিত সেই পার্শ্বের সকল বিন্দুর জন্য $y - x - 2 < 0$ প্রযোজ্য.
সুতরাং লেখচিত্র রেখা ব্যতীত তার নিচের অংশ সমন্বয়ে গঠিত সমতলের অংশটুকুই প্রদত্ত অসমতার লেখচিত্র।

(ix)-এর সমাধান: (VI)

প্রদত্ত অসমতাটি,

$y \geq 2x$

বা $y - 2x \geq 0$

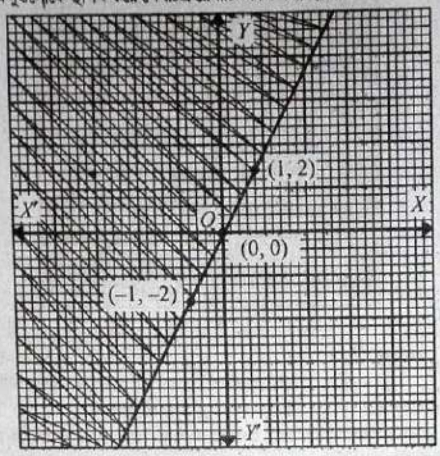
এখন, $y - 2x = 0$

বা, $y = 2x$

সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন করি। সমীকরণটি থেকে পাই,

x	-1	0	1
y	-2	0	2

স্থানাঙ্কায়িত ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গের দৈর্ঘ্যের চারগুণকে একক ধরে $(-1, -2)$, $(0, 0)$, $(1, 2)$ বিন্দুগুলোকে স্থাপন করে লেখচিত্র রেখাটি অঙ্কন করা হলো।



ক্ষুদ্রতম দৈর্ঘ্যের 4 বর্গঘর = 1 একক

$(0, 1)$ বিন্দুটি লেখচিত্র রেখার "উপরের অংশে" আছে। এই বিন্দুতে $y - 2x = 1 - 2.0 = 1 > 0$

সুতরাং লেখচিত্র রেখাটি ও তার উপরের অংশ (অর্থাৎ, যে অংশে $(0, 1)$ বিন্দুটি অবস্থিত) সমন্বয়ে গঠিত সমতলের অংশটুকুই প্রদত্ত অসমতার লেখচিত্র।

(x)-এর সমাধান:

প্রদত্ত অসমতাটি $x + 3y < 0$

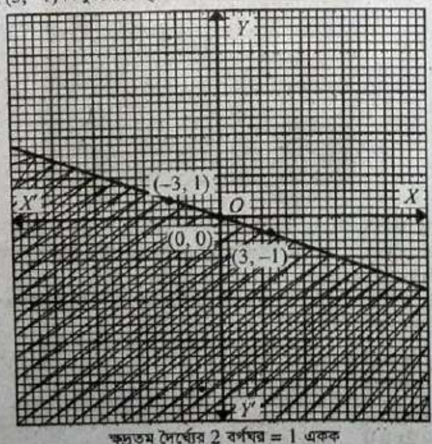
এখন, $3y = -x$

বা, $y = -\dfrac{x}{3}$

সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন করি। সমীকরণটি থেকে পাই,

x	-3	0	3
y	1	0	-1

স্থানাঙ্কায়িত ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গের দৈর্ঘ্যের দ্বিগুণকে একক ধরে $(-3, 0)$, $(0, 0)$, $(3, -1)$ বিন্দুগুলোকে স্থাপন করে লেখচিত্র রেখাটি অঙ্কন করা হলো।



ক্ষুদ্রতম দৈর্ঘ্যের 2 বর্গঘর = 1 একক

$(1, 1)$ বিন্দুটি লেখচিত্র রেখার "উপরের অংশে" আছে। এই বিন্দুতে $x + 3y = 1 + 3 = 4$, যা ধনাত্মক।

সুতরাং লেখচিত্র রেখা ব্যতীত তার নিচের অংশ (অর্থাৎ, যে অংশে $(1, 1)$ বিন্দুটি অবস্থিত তার বিপরীত পাশে) সমন্বয়ে গঠিত সমতলের অংশটুকু প্রদত্ত অসমতার লেখচিত্র।

১০। হযরত শাহজালাল বিমানবন্দর থেকে সিঙ্গাপুর বিমান পথের দূরত্ব 1793 কি.মি.। বাংলাদেশ বিমানের সর্বোচ্চ গতিবেগ 500 কি.মি./ঘণ্টা। কিন্তু হযরত শাহজালাল বিমানবন্দর থেকে সিঙ্গাপুর যাবার পথে প্রতিকূলে 60 কি.মি./ঘণ্টা বেগে বায়ু প্রবাহের সম্মুখীন হয়।

(ক) উদ্দীপকের সমস্যাটির প্রয়োজনীয় সময় t ঘণ্টা ধরে সমস্যাটিকে অসমতায় দেখাও।

(খ) হযরত শাহজালাল বিমানবন্দর থেকে সিঙ্গাপুর বিমানবন্দরে বিরতিহীন উড্ডায়নের প্রয়োজনীয় সময় (ক) তে বর্ণিত সমীকরণ থেকে নির্ণয় কর এবং সংখ্যা রেখায় দেখাও।

(গ) সিঙ্গাপুর থেকে হযরত শাহজালাল বিমানবন্দরে ফেরার পথে বিরতিহীন উড্ডায়নের প্রয়োজনীয় সময়কে x ধরে সমস্যাটিকে অসমতার মাধ্যমে প্রকাশ করে লেখের সাহায্যে সমাধান কর।

(ক)-এর সমাধান:

ধরি, শাহজালাল বিমানবন্দর হতে সিঙ্গাপুর বিমান পথের দূরত্ব 1793 কি.মি. যেতে প্রয়োজনীয় সময় t ঘণ্টা।

$\therefore$ বিমানের গতিবেগ $= \dfrac{1793}{t}$ কি.মি./ঘণ্টা।

আবার বিমানে সর্বোচ্চ গতিবেগ 500 কি.মি./ঘণ্টা

অর্থাৎ বিমানের গতিবেগ ≤ 500 কি.মি./ঘণ্টা

এবং বায়ুর গতিবেগ $= 60$ কি.মি./ঘণ্টা

সুতরাং, শাহজালাল বিমানবন্দর হতে সিঙ্গাপুর যাবার পথে বায়ুর প্রতিকূলে বিমানের বেগ $\leq (500 - 60)$ বা 440 কি.মি./ঘণ্টা

$\therefore \dfrac{1793}{t} \leq 440$ (উত্তর)

(খ)-এর সমাধান:

'ক' হতে প্রাপ্ত অসমতা,

$\dfrac{1793}{t} \leq 440$

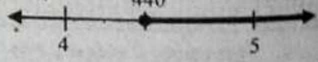
বা, $1793 \leq 440t$ [উভয় পক্ষকে t দ্বারা গুণ করে]

বা, $440t \geq 1793$

বা, $t \geq \dfrac{1793}{440}$

$\therefore t \geq 4\dfrac{33}{440}$

সংখ্যা রেখা:



(গ)-এর সমাধান:

সিঙ্গাপুর থেকে শাহজালাল বিমানবন্দর ফেরার পথে প্রয়োজনীয় সময় x ঘণ্টা হলে,

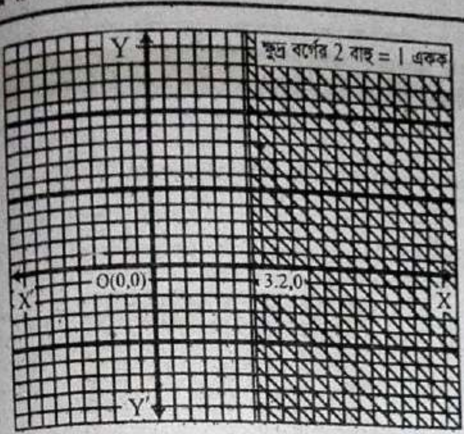
বিমানের গতিবেগ $= \dfrac{1793}{x}$ কি.মি./ঘণ্টা

আবার, সিঙ্গাপুর থেকে ফেরার পথে বায়ুর অনুকূলে বিমানের বেগ $\leq (500 + 60)$ বা 560 কি.মি./ঘণ্টা।

অতএব, $\dfrac{1793}{x} \leq 560$

বা, $1793 \leq 260x$ বা, $260x \geq 1793$ বা, $x \geq \dfrac{1793}{560}$

$\therefore x \geq 3.2$ (প্রায়)



ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গের দুই বাহু সমান 1 একক ধরে অসমতাটিকে ছক কাগজে স্থাপন করা হলো। লেখচিত্র হতে দেখা যায় যে, $x = 3.2$ বিন্দুগামী রেখা থেকে ডানপাশে অবস্থিত সকল বিন্দুই অসমতার সমাধান।

১১। দুইটি সংখ্যার ১ম সংখ্যাটির 3 গুণ থেকে ২য় সংখ্যাটির 5 গুণ বিয়োগ করলে 5 অপেক্ষা বৃহত্তর হয়। আবার ১ম সংখ্যা থেকে ২য় সংখ্যার 3 গুণ বিয়োগ করলে অনূর্ধ্ব 9 হয়।

(ক) উদ্দীপকের সমস্যাগুলোকে অসমতায় দেখাও।

(খ) যদি ১ম সংখ্যাটির 5 গুণ, ১ম সংখ্যার দ্বিগুণ এবং 15 এর সমষ্টি অপেক্ষা ছোট হলে সংখ্যাটির সম্ভাব্য মান অসমতায় প্রকাশ কর।

(গ) ক নং এ প্রাপ্ত অসমতা যুগলের সমাধান সেটের লেখচিত্র অঙ্কন কর।

[ঘাটাইল ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল এন্ড কলেজ, টাঙ্গাইল]

(ক)-এর সমাধান:

মনে করি, সংখ্যা দুটি x ও y

তাহলে, $3x - 5y > 5$

এবং $x - 3y \leq 9$

(খ)-এর সমাধান:

$5x < 2x + 15$

বা, $5x - 2x < 15$ [উভয় পক্ষে $(-2x)$ যোগ করে]

বা, $3x < 15$

$\therefore x < 5$ [উভয় পক্ষে দ্বারা $\frac{1}{3}$ গুণ করে]

(গ)-এর সমাধান:

$3x - 5y = 5$ ……… (i)

$x - 3y = 9$ ……… (ii)

(i) নং হতে পাই, $-5y = 5 - 3x$

$\therefore y = \frac{(3x-5)}{5}$

এখানে,

x	-5	0	5	10	15
y	-4	-1	2	5	8

(ii) নং হতে পাই,

$x - 3y = 9$

বা, $3y = x - 9$

বা, $y = \frac{x-9}{3}$

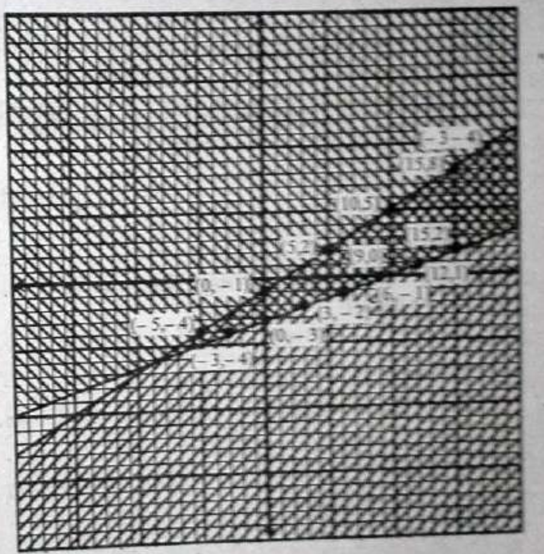
বা, $y = \frac{1}{3}(x-9)$

$\therefore y = \frac{1}{3}(x-9)$

এখানে,

x	-3	0	3	6	9	12	15
y	-4	-3	-2	-1	0	1	2

এখন ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গের 2 বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে (0, – 1), (– 10, 7), (10, 5) বিন্দুগুলো স্থাপন করে (i) নং সমীকরণের লেখ চিত্র ও (0, – 3), (3, – 2), (6, – 1) বিন্দুগুলো স্থাপন করে (ii) নং সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন করি।



মূলবিন্দু (0, 0) তে $3x - 5y - 5$ রাশির মান -5, যা ঋণাত্মক। সুতরাং, $3x - 5y - 5 = 0$ বা $3x - 5y = 5$ এর লেখচিত্রের যে পাশে মূলবিন্দু অবস্থিত সে পাশের সকল বিন্দুর জন্য $3x - 5y - 5 < 0$ সত্য।

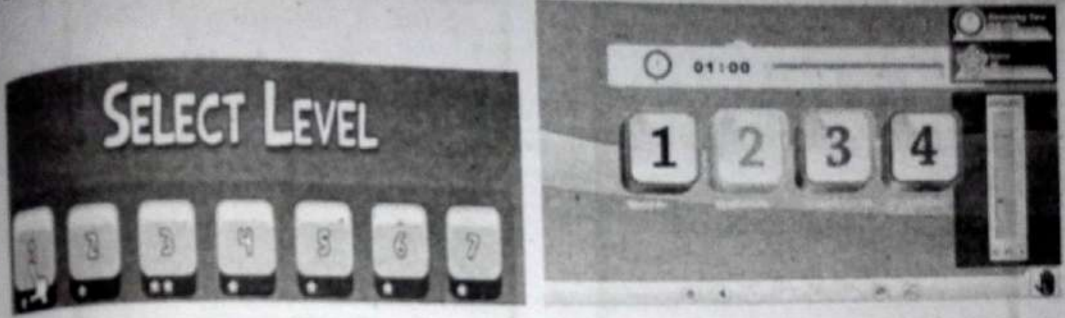
অতএব, $3x - 5y > 5$ অসমতার সমাধান হবে $3x - 5y = 5$ সমীকরণের লেখ ছাড়া লেখের যে পাশে মূলবিন্দু আছে তার বিপরীত পাশের সকল বিন্দু।

আবার, মূলবিন্দু (0, 0) তে $x - 3y - 9$ রাশির মান -9, যা ঋণাত্মক। সুতরাং, $x - 3y - 9 = 0$ বা $x - 3y = 9$ এর লেখচিত্রের যে পাশে মূলবিন্দু অবস্থিত সে পাশের সকল বিন্দুর জন্য $x - 3y - 9$ অঋণাত্মক, $x - 3y \leq 9$ অসমতার সমাধান হবে $x - 3y = 9$ সমীকরণের লেখসহ লেখের যে পাশে মূলবিন্দু আছে সে পাশের সকল বিন্দু।

সুতরাং, $x - 3y = 9$ লেখ-রেখাসহ (রেখাবিন্দু ছাড়া) চিহ্নিত অংশটির ক্ষেত্রটি প্রদত্ত অসমতাদ্বয়ের সমাধান সেটের লেখচিত্র। চিত্রে গাঢ়ভাবে চিহ্নিত অংশই এই লেখচিত্র।

বাস্তব জীবনে এ অধ্যায়ের প্রয়োগ

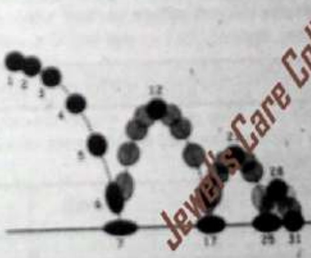
ক্রম বা ধারা শব্দটির সাথে কম বেশি আমরা সকলেই পরিচিত। তথ্য প্রযুক্তির এই যুগে প্রায় সকলেই স্মার্টফোনের সাথে পরিচিত। আর এই স্মার্টফোনের গেইমের প্রতি অনেকেরই Addiction, কিন্তু একটু খেয়াল করলেই দেখা যায় প্রায় প্রতিটি গেইমের ক্ষেত্রেই Level বা Mode নামে একটি অপশন থাকে। এই Level বা Mode-ই ক্রমাগতভাবে সহজ থেকে কঠিন ধারায় গেইমটিকে নিয়ে যায়।



চিত্র-১ ও ২ : স্মার্টফোনের গেইমে বিভিন্ন লেভেলের মাধ্যমে ধারার ব্যবহার

ওষুধের দোকানের তাকে ওষুধপত্র সাজাতে, নাটক ও অনুষ্ঠানের ঘটনাবলী সাজাতে, গুদামঘরে সুন্দরভাবে দ্রব্যাদি রাখতে ক্রমের ধারণা ব্যবহৃত হয়। এছাড়া অনেক কাজ সহজে এবং দৃষ্টিনন্দনভাবে সম্পাদন করতে ধারার উদ্ভব হয়েছে। ভৌত, নিউক্লিয় ও জীব বিজ্ঞানের বিভিন্ন ক্ষেত্রে, ব্যাংক বীমা ইত্যাদি প্রতিষ্ঠানে এবং বিভিন্ন প্রকার প্রযুক্তি বিদ্যায় ধারার ব্যাপক প্রয়োগ আছে। উদাহরণস্বরূপ, যখন একটি বলকে বাউন্স করা হয় তখন প্রথম বার যতটুকু উচ্চতায় ওঠে তা সাজালে একটি ধারা পাওয়া যাবে এবং এই ধারার সাহায্যে কততম বাউন্সে কতটুকু উচ্চতায় উঠে তা নির্ণয় করা যাবে এবং বলটির মোট অতিক্রান্ত দূরত্ব নির্ণয় করা যাবে।

চিত্র-৩ : বুক সেলফে বই সাজাতে ক্রমের ব্যবহার



চিত্র-৪ : একটি বলের বাউন্সের ফলে সৃষ্ট ধারা

"As we express our gratitude, we must never forget that the highest appreciation is not to utter words, but to live by them".

–John F. Kennedy

৭ অসীম ধারা [Infinite Series]

অনুশীলনী-৭

$$1+2+3+\ldots\ldots\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^3+2^3+3^3+\ldots\ldots\ldots+n^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

চিত্র-১: সমান্তর ধারার সূত্রাবলী

Formula for the Sum of a Finite Geometric Series

$$S_n=a_1\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)$$

n = no. of terms
a_1 = 1st term
r = common ratio

চিত্র-২: গুণোত্তর ধারার সমষ্টির সূত্র

ভূমিকা [Introduction]

Srinivasa Ramanujan

প্রাত্যহিক জীবনে 'ক্রম' বহুল প্রচলিত একটি শব্দ। যেমন- দোকানের তাকে ভোগ্যপণ্য সাজাতে, নাটক ও অনুষ্ঠানের ঘটনাবলী সাজাতে, গুদামঘরে সুন্দরভাবে দ্রব্যাদি রাখতে ক্রমের ধারণা ব্যবহৃত হয়। আবার অনেক কাজ সহজে এবং দৃষ্টিনন্দনভাবে সম্পাদন করতে আমরা বড় হতে ছোট, শিশু হতে বৃদ্ধ, হালকা হতে ভারী ইত্যাদি ধরনের ক্রম ব্যবহার করি। এই ক্রমের ধারণা হতেই বিভিন্ন প্রকার গাণিতিক ধারার উদ্ভব হয়েছে।

রামানুজন অসামান্য প্রতিভাবান একজন ভারতীয় গণিতবিদ। পুরো নামে শ্রীনিবাস রামানুজন (*Srinivasa Ramanujan*)। রামানুজন ১৮৮৭ খ্রীষ্টাব্দের ২২ শে ডিসেম্বর ভারতের মাদ্রাজ এর তাঞ্জোর জেলার ইরেভদ শহরের এক দরিদ্র ব্রাহ্মণ পরিবারে জন্মগ্রহণ করেন। রামানুজনের উল্লেখযোগ্য কাজের মধ্যে রয়েছে- গামা ফাংশন, মডুলার রূপ, রামানুজানের অবিচ্ছিন্ন ভগ্নাংশসমূহ, অপসারী ধারা, অধিজ্যামিতীয় ধারা, মৌলিক সংখ্যা তত্ত্ব ও মক থেটা ফাংশন। এছাড়া ক্যামব্রিজ অধ্যাপক হার্ডির সঙ্গে মিলে উদ্ভাবন করেছেন- উচ্চতর যৌগিক সংখ্যাসমূহের বৈশিষ্ট্য এবং বিভাজন ফাংশন ও এর অসীমতট সম্পর্কীয় তত্ত্বসমূহ।

বোর্ড প্রশ্নাবলির বিশ্লেষণ [Board Questions Analysis]

এই অধ্যায় থেকে বিভিন্ন বোর্ডে বিগত দু'বছরের এসএসসি পরীক্ষায় মোট ৪টি সৃজনশীল প্রশ্ন ও ২৬টি বহুনির্বাচনি প্রশ্ন এসেছে। নিচের 'Board Analysis' অংশে এই অধ্যায় থেকে কোন সালে কোন বোর্ডে কতটি প্রশ্ন হয়েছে তা দেওয়া আছে।

সৃজনশীল প্রশ্ন:

বোর্ড / সাল	ঢাকা	রাজশাহী	কুমিল্লা	যশোর	চট্টগ্রাম	বরিশাল	সিলেট	দিনাজপুর
২০১৬	–	–	–	–	১	১	–	–
২০১৫	–	–	–	–	–	–	১	১

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন:

বোর্ড / সাল	ঢাকা	রাজশাহী	কুমিল্লা	যশোর	চট্টগ্রাম	বরিশাল	সিলেট	দিনাজপুর
২০১৬	২	২	৩	১	২	২	১	–
২০১৫	২	১	১	–	৩	২	১	৩

মূল শব্দাবলি [Key Words]

অনুক্রম (*Sequence*), পদ (*Term*), ফাংশন (*Function*), ধারা (*Series*), সমান্তর ধারা (*Arithmetic Series*), সাধারণ অন্তর (*Common Interval*), সসীম ধারা/সান্ত ধারা (*Finite Series*), অসীম ধারা/অনন্ত ধারা (*Infinite Series*), সমষ্টি (*Summation*), গুণোত্তর ধারা (*Geometric Series*), সাধারণ অনুপাত (*Common Ratio*).

এ অধ্যায়ের আলোচ্যসূচি

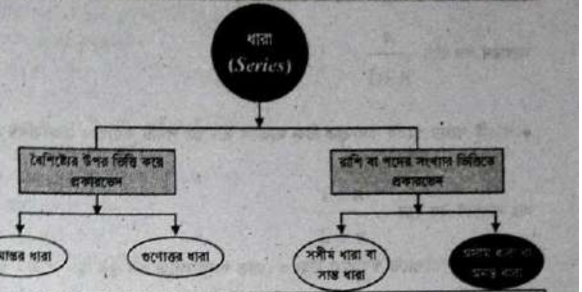
- অনুক্রম, ধারা বর্ণনা
- সমান্তর ও গুণোত্তর ধারার পার্থক্য
- অনুক্রমের সাধারণ পদ নির্ণয়
- ধারার বিভিন্ন সূত্র প্রয়োগ করে গাণিতিক সমস্যার সমাধান
- সমান্তর ধারার নির্দিষ্টতম পদ ও নির্দিষ্ট সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয়ের সূত্র গঠন এবং সূত্র প্রয়োগ করে গাণিতিক সমস্যা সমাধান।

প্রাথমিক আলোচনা

অনুক্রম

অনুক্রম (Sequence): যখন কতকগুলো রাশি একটা বিশেষ নিয়মে ক্রমান্বয়ে এমনভাবে সাজানো হয় যে প্রত্যেক রাশি এর পূর্বের ও পরের পদের সাথে সম্পর্কিত থাকে, তখন সাজানো রাশিগুলোর সেটকে অনুক্রম বলে (Sequence)। যেমন: 1, 4, 9, ...।
অনুক্রমের পদগুলোর মধ্যে যোগ বা বিয়োগ চিহ্ন দিলে তা ধারায় রূপান্তরিত হয়।

অনুক্রমের পদ নির্ণয়: অনুক্রমের প্রথম রাশিকে প্রথম পদ, দ্বিতীয় রাশিকে দ্বিতীয় পদ, তৃতীয় রাশিকে তৃতীয় পদ বলা হয়। যেমন: 1, 4, 9, ...
অনুক্রমের প্রথম পদ = 1, দ্বিতীয় পদ = 4, তৃতীয় পদ = 9



সমান্তর ধারা

সংজ্ঞা: কোনো ধারার যেকোনো পদ ও এর পূর্ববর্তী পদের পার্থক্য সব সময় সমান হলে, সেই ধারাটিকে সমান্তর ধারা বলে।
উদাহরণ: $1+3+5+7+9+11$ একটি সমান্তর ধারা।

◆ সমান্তর ধারার ক্ষেত্রে প্রথম পদ $= a$, সাধারণ অন্তর $= d$ হলে, n তম পদ (সাধারণ পদ) $= a+(n-1)d$

◆ nটি পদের সমষ্টি, $S_n = \dfrac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$

গুণোত্তর ধারা

সংজ্ঞা: কোনো ধারার যেকোনো পদ ও এর পূর্ববর্তী পদের অনুপাত সব সময় সমান হলে অর্থাৎ, যেকোনো পদকে এর পূববর্তী পদ দ্বারা ভাগ করে ভাগফল সর্বদা সমান পাওয়া গেল, সে ধারাটিকে গুণোত্তর ধারা বলে। **উদাহরণ:** $2+4+8+16+32$ একটি গুণোত্তর ধারা।

◆ গুণোত্তর ধারার ক্ষেত্রে প্রথম পদ $= a$, সাধারণ অনুপাত r হলে, n তম পদ (সাধারণ পদ) $= ar^{n-1}$

◆ nটি পদের সমষ্টি, $S_n = a.\dfrac{r^n-1}{r-1}$, যখন $r>1$

এবং $S_n = a.\dfrac{1-r^n}{1-r}$, যখন $r<1$

অনুক্রমের সাধারণ পদ নির্ণয়ের নিয়ম

নিয়ম- ১ (সমান্তর অনুক্রম)

☐ সমান্তর অনুক্রমে যেকোনো পদ ও এর পূর্ববর্তী পদের পার্থক্য সব সময় সমান থাকে এবং এ পার্থক্যকে সাধারণ অন্তর বলা হয়। যেমন: 1, 4, 7, 10, 13 অনুক্রমের প্রথম পদ 1, দ্বিতীয় পদ 4, তৃতীয় পদ 7, চতুর্থ পদ 10 এবং পঞ্চম পদ 13.
এখানে,
দ্বিতীয় পদ – প্রথম পদ $= 4-1 = 3$,
তৃতীয় পদ – দ্বিতীয় পদ $= 7-4 = 3$,
চতুর্থ পদ – তৃতীয় পদ $= 10-7 = 3$,
পঞ্চম পদ – চতুর্থ পদ $= 13-10 = 3$,
সুতরাং এটি একটি সমান্তর অনুক্রম। এই অনুক্রমের যেকোনো পদ ও এর পূর্ববর্তী পদের অন্তর সর্বদা সমান।
এই অনুক্রমের প্রাপ্ত দুইটি পদের বিয়োগফলকে সাধারণ অন্তর বলা হয়। উল্লিখিত অনুক্রমের সাধারণ অন্তর 3.

☐ **সমান্তর অনুক্রমের ক্ষেত্রে প্রথম পদ $= a$, সাধারণ অন্তর $= d$ হলে, n তম পদ (সাধারণ পদ) $= a+(n-1)d$**

উদাহরণ:
• 1, 3, 5, 7, 9, ... অনুক্রমের সাধারণ পদ নির্ণয়:
এখানে, অনুক্রমের প্রথম পদ $a = 1$, সাধারণ অন্তর $d = (3-1) = 2$

$$\therefore n \text{ তম পদ (সাধারণ পদ)} = a+(n-1)d$$
$$= 1+(n-1)2$$
$$= 1+2n-2$$
$$= 2n-1$$

$\therefore$ অনুক্রমটির সাধারণ পদ $= 2n-1$

নিয়ম- ২ (গুণোত্তর অনুক্রম)

☐ **গুণোত্তর অনুক্রমে যেকোনো পদ ও এর পূর্ববর্তী পদের অনুপাত সবসময় সমান থাকে এবং এ অনুপাতকে সাধারণ অনুপাত বলা হয়।**
যেমন: 2, 4, 8, 16, 32 অনুক্রমটির প্রথম পদ 2, দ্বিতীয় পদ 4, তৃতীয় পদ 8, চতুর্থ পদ 16 এবং পঞ্চম পদ 32.
এখানে,
দ্বিতীয় পদের সাথে প্রথম পদের অনুপাত $= \dfrac{4}{2} = 2$

তৃতীয় পদের সাথে দ্বিতীয় পদের অনুপাত $= \dfrac{8}{4} = 2$

চতুর্থ পদের সাথে তৃতীয় পদের অনুপাত $= \dfrac{16}{8} = 2$

পঞ্চম পদের সাথে চতুর্থ পদের অনুপাত $= \dfrac{32}{16} = 2.$

সুতরাং, অনুক্রমটি একটি গুণোত্তর অনুক্রম। এই অনুক্রমের যেকোনো পদ ও এর পূর্ববর্তী পদের অনুপাত সর্বদা সমান। উল্লিখিত অনুক্রমের সাধারণ অনুপাত 2.

☐ **গুণোত্তর অনুক্রমের ক্ষেত্রে প্রথম পদ $= a$, সাধারণ অনুপাত $= q$ হলে, n তম পদ (সাধারণ পদ) $= aq^{n-1}$**

উদাহরণ:
• **2, 4, 8, 16, ... অনুক্রমের সাধারণ পদ নির্ণয়:**
এখানে, অনুক্রমের প্রথম পদ $a = 2$, সাধারণ অনুপাত $q = \dfrac{4}{2} = 2$

$$\therefore n \text{ তম পদ (সাধারণ পদ)} = aq^{n-1}$$
$$= 2\times 2^{n-1}$$
$$= 2^{1+n-1}$$
$$= 2^n$$

$\therefore$ অনুক্রমটির সাধারণ পদ $= 2^n$.

মিশ্র অনুক্রমের উদাহরণ (নিয়ম ১ ও নিয়ম ২ এর মিশ্রণ)

• $\dfrac{1}{5}, \dfrac{2}{5^2}, \dfrac{3}{5^3}$, ... অনুক্রমটির সাধারণ পদ নির্ণয়:
উপরের অনুক্রমটিতে দেখা যায় যে, অনুক্রমটির লবের পদগুলো সমান্তর অনুক্রম অনুসরণ করছে এবং হরের পদগুলো গুণোত্তর অনুক্রম অনুসরণ করছে।

$$\therefore n \text{ তম পদ (সাধারণ পদ)} = \frac{1+(n-1)1}{5\times(5)^{n-1}} = \frac{n}{5^n}$$

সুতরাং, অনুক্রমটির সাধারণ পদ $= \dfrac{n}{5^n}$

ধনাত্মক ও ঋণাত্মক চিহ্নের ক্ষেত্রে নিয়মসমূহ

- প্রতিটি পদের পূর্বেই ধনাত্মক চিহ্ন থাকলে সাধারণ পদটি ধনাত্মক চিহ্ন বিশিষ্ট হবে। যেমনঃ $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \dots\dots\dots$ অনুক্রমটির প্রতিটি পদ ধনাত্মক চিহ্নবিশিষ্ট। তাই এর সাধারণ পদ হবে $\frac{n}{n+1}$.
- প্রতিটি পদের পূর্বেই ঋণাত্মক চিহ্ন থাকলে সাধারণ পদটি ঋণাত্মক চিহ্নবিশিষ্ট হবে। যেমনঃ $-\frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \dots\dots\dots$ অনুক্রমের প্রতিটি পদ ঋণাত্মক চিহ্নবিশিষ্ট। তাই এর সাধারণ পদ হবে $-\frac{n+1}{n+2}$.
- বিজোড় পদগুলোতে ঋণাত্মক চিহ্ন ও জোড় পদগুলোতে ধনাত্মক চিহ্ন থাকলে সাধারণ পদে $(-1)^n$ থাকবে।

যেমনঃ $-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots\dots\dots$ অনুক্রমটির সাধারণ পদ $(-1)^n \frac{n}{n+1}$

- বিজোড় পদগুলোতে ধনাত্মক চিহ্ন ও জোড় পদগুলোতে ঋণাত্মক চিহ্ন থাকলে সাধারণ পদে $(-1)^{n+1}$ থাকবে।

যেমনঃ $\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \dots\dots\dots$ অনুক্রমটির সাধারণ পদ $(-1)^{n+1} \frac{n}{n+1}$

☑ কোনো ধারার রাশি বা পদের সংখ্যার উপর নির্ভর করে ধারাকে দুইভাবে ভাগ করা যায়। যথা-

(i) সসীম ধারা বা সান্ত ধারা (*Finite Series*),

(ii) অসীম ধারা বা অনন্ত ধারা (*Infinite Series*).

সসীম ধারা বা সান্ত ধারা: যে ধারার রাশি বা পদের সংখ্যা নির্দিষ্ট তাকে সসীম বা সান্ত ধারা বলে।

অসীম ধারা বা অনন্ত ধারা: যে ধারার রাশি বা পদের সংখ্যা নির্দিষ্ট নয় তাকে অসীম বা অনন্ত ধারা বলে।

অসীম গুণোত্তর ধারার সমষ্টি (*Sum of Infinite Series in Geometric Progression*):

$a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots\dots\dots$ গুণোত্তর ধারাটির প্রথম পদ a এবং সাধারণ অনুপাত r.

সুতরাং, ধারাটির n তম পদ $= ar^{n-1}$, যেখানে $n \in N$ এবং $r \neq 1$ হলে ধারাটির n তম আংশিক সমষ্টি

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots\dots\dots + ar^{n-1}$$

$$= a.\frac{r^n - 1}{r - 1}, \text{ যখন } r > 1$$

এবং $S_n = a.\frac{1 - r^n}{1 - r}$, যখন $r < 1$

লক্ষ করি:

(i) $|r| < 1$ হলে, অর্থাৎ, $-1 < r < 1$ হলে, n এর মান বৃদ্ধি করলে ($n \to \infty$ হলে) $|r^n|$ এর মান হ্রাস পায় এবং n এর মান যথেষ্ট বড় করলে $|r^n|$ এর মান 0 এর কাছাকাছি হয়। অর্থাৎ r^n এর প্রান্তীয় মান (*Limiting Value*) 0 হয়। ফলে S_n এর প্রান্তীয় মান,

$$\boxed{S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} = \frac{a}{1 - r} - \frac{\overset{0}{ar^n}}{1 - r} = \frac{a}{1 - r}}$$

এক্ষেত্রে, $a + ar + ar^2 + \dots\dots\dots$ অসীম ধারাটির সমষ্টি $S_\infty = \frac{a}{1 - r}$

(ii) $|r| > 1$ হলে, অর্থাৎ $r > 1$ অথবা $r < -1$ হলে, n এর মান বৃদ্ধি করলে $|r^n|$ এর মান বৃদ্ধি পায় এবং n কে যথেষ্ট বড় করে $|r^n|$ এর মান যথেষ্ট বড় করা যায়। সুতরাং এমন কোনো নির্দিষ্ট সংখ্যা S পাওয়া যায় না, যাকে S_n এর প্রান্তীয় মান ধরা যায়।
অর্থাৎ, এক্ষেত্রে অসীম ধারাটির কোনো সমষ্টি নাই।

(iii) $r = -1$ হলে, S_n এর প্রান্তীয় মান পাওয়া যায় না।
কেননা, n জোড় সংখ্যা হলে $(-1)^n = 1$ এবং
n বিজোড় সংখ্যা হলে $(-1)^n = -1$
এক্ষেত্রে ধারাটি হবে, $a - a + a - a + a - a + \dots\dots\dots$
সুতরাং, এই অসীম ধারাটির কোনো সমষ্টি নাই।

সাধারণ অনুপাত (r) শর্ত	ফলাফল
$r < 1$	অসীম ধারার সমষ্টি বিদ্যমান
$r > -1$	অসীম ধারার সমষ্টি বিদ্যমান
$r > 1$	অসীম ধারার সমষ্টি নেই
$r < -1$	অসীম ধারার সমষ্টি নেই

$|r| < 1$ অর্থাৎ, $-1 < r < 1$ হলে, $a + ar + ar^2 + \dots\dots\dots$ অসীম গুণোত্তর ধারাটির সমষ্টি $S_\infty = \frac{a}{1 - r}$.
r এর অন্য সকল মানের জন্য অসীম ধারাটির সমষ্টি থাকবে না।

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনমূলক কাজের সমাধান

কাজ: [পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-১৩১]

১। নিচের অনুক্রমগুলোর সাধারণ পদ নির্ণয় কর:

(i) $\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \ldots\ldots\ldots$ (ii) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8} \ldots\ldots\ldots$

(iii) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2^3}, \frac{4}{2^4}, \ldots\ldots\ldots$ (iv) $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2 \ldots\ldots\ldots$

২। প্রদত্ত সাধারণ পদ হতে নিচের অনুক্রমগুলো লেখ:

(i) $1+(-1)^n$ (ii) $1-(-1)^n$ (iii) $1+\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

(iv) $\frac{n^2}{\sqrt[3]{\pi}}$ (v) $\frac{\ln n}{n}$ (vi) $\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

৩। তোমরা প্রত্যেকে একটি করে অনুক্রমের সাধারণ পদ লিখে অনুক্রমটি লেখ।

১(i)-এর সমাধান:

প্রদত্ত অনুক্রমের লব ও হর উভয়ই সমান্তর প্রগোমনভূক্ত। অনুক্রমটির বিজোড় পদগুলোতে ধনাত্মক ও জোড় পদগুলোতে ঋণাত্মক চিহ্ন বিদ্যমান।

$$\therefore \text{সাধারণ পদ } (n \text{ তম পদ}) = (-1)^{n+1}\frac{1+(n-1)1}{2+(n-1)}$$

$$= (-1)^{n+1}\frac{n}{n+1}$$

১(ii)-এর সমাধান:

প্রদত্ত অনুক্রমের লব ও হর উভয়ই সমান্তর প্রগোমনভূক্ত।

$$\therefore \text{সাধারণ পদ } (n \text{ তম পদ}) = \frac{1+(n-1)2}{2+(n-1)2}$$

$$= \frac{1+2n-2}{2+2n-2} = \frac{2n-1}{2n}$$

১(iii)-এর সমাধান:

প্রদত্ত অনুক্রমটিকে সাজিয়ে লিখে পাই,

$\frac{1}{2}, \frac{2}{2^2}, \frac{3}{2^3}, \frac{4}{2^4}, \ldots\ldots\ldots$

অনুক্রমটি লব সমান্তর প্রগোমনভূক্ত এবং হর গুণোত্তর প্রগোমনভূক্ত।

$$\therefore \text{সাধারণ পদ } (n \text{ তম পদ}) = \frac{1+(n-1)1}{2(2)^{n-1}}$$

$$= \frac{n}{2^{1+n-1}} = \frac{n}{2^n}$$

১(iv)-এর সমাধান:

প্রদত্ত অনুক্রমটিকে সাজিয়ে লিখে পাই,

$\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \ldots\ldots\ldots\ldots$

$\therefore n$ তম পদ (সাধারণ পদ) $= \sqrt{1+(n-1)1} = \sqrt{n}$

২(i)-এর সমাধান:

অনুক্রমটির সাধারণ পদ, $u_n = 1+(-1)^n$

$n=1$ হলে, প্রদত্ত অনুক্রমটির

১ম পদ, $u_1 = 1+(-1)^1 = 1+(-1) = 0$

$n=2$ হলে, প্রদত্ত অনুক্রমটির

২য় পদ, $u_2 = 1+(-1)^2 = 1+1 = 2$

$n=3$ হলে, প্রদত্ত অনুক্রমটির

৩য় পদ, $u_3 = 1+(-1)^3 = 1-1 = 0$

$n=4$ হলে, প্রদত্ত অনুক্রমটির

৪র্থ পদ, $u_4 = 1+(-1)^4 = 1+1 = 2$

$n=5$ হলে, প্রদত্ত অনুক্রমটির

৫ম পদ, $u_5 = 1+(-1)^5 = 1-1 = 0$

... ...

... ...

সুতরাং প্রদত্ত সাধারণ পদ হতে প্রাপ্ত অনুক্রমটি হলো,

$0, 2, 0, 2, 0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

২(ii)-এর সমাধান:

মনে করি, অনুক্রমটির সাধারণ পদ, $u_n = 1-(-1)^n$

$\therefore n=1$ হলে, প্রদত্ত অনুক্রমটির ১ম পদ,

$u_1 = 1-(-1)^1 = 1-(-1) = 1+1 = 2$

$n=2$ হলে, প্রদত্ত অনুক্রমটির ২য় পদ,

$u_2 = 1-(-1)^2 = 1-1 = 0$

$n=3$ হলে, প্রদত্ত অনুক্রমটির ৩য় পদ,

$u_3 = 1-(-1)^3 = 1+1 = 2$

$n=4$ হলে, প্রদত্ত অনুক্রমটির ৪র্থ পদ,

$u_4 = 1-(-1)^4 = 1-1 = 0$

$n=5$ হলে, প্রদত্ত অনুক্রমটির ৫ম পদ,

$u_5 = 1-(-1)^5 = 1+1 = 2$

... ...

... ...

সুতরাং প্রদত্ত সাধারণ পদ হতে প্রাপ্ত অনুক্রমটি হলো,

$2, 0, 2, 0, 2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

২(iii)-এর সমাধান:

মনে করি, অনুক্রমটির সাধারণ পদ, $u_n = 1+\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

$\therefore n=1$ হলে, প্রদত্ত অনুক্রমটির ১ম পদ,

$$u_1 = 1+\left(-\frac{1}{2}\right)^1 = 1-\frac{1}{2} = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$$

$n=2$ হলে, প্রদত্ত অনুক্রমটির ২য় পদ,

$$u_2 = 1+\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 1+\frac{1}{4} = \frac{4+1}{4} = \frac{5}{4}$$

$n=3$ হলে, প্রদত্ত অনুক্রমটির ৩য় পদ,

$$u_3 = 1+\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = 1-\frac{1}{8} = \frac{8-1}{8} = \frac{7}{8}$$

$n=4$ হলে, প্রদত্ত অনুক্রমটির ৪র্থ পদ,

$$u_4 = 1+\left(-\frac{1}{2}\right)^4 = 1+\frac{1}{16} = \frac{16+1}{16} = \frac{17}{16}$$

... ...

... ...

সুতরাং প্রদত্ত সাধারণ পদ হতে প্রাপ্ত অনুক্রমটি হলো, $\frac{1}{2}, \frac{5}{4}, \frac{7}{8}, \frac{17}{16}, \ldots$

<u>২(iv)-এর সমাধান:</u>

মনে করি, অনুক্রমটির সাধারণ পদ, $u_n = \dfrac{n^2}{\sqrt[n]{\pi}}$

$\therefore n = 1$ হলে, প্রদত্ত অনুক্রমটির ১ম পদ,

$u_1 = \dfrac{1^2}{\sqrt[1]{\pi}} = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$

$n = 2$ হলে, প্রদত্ত অনুক্রমটির ২য় পদ,

$u_2 = \dfrac{2^2}{\sqrt[2]{\pi}} = \dfrac{4}{\sqrt[2]{\pi}}$

$n = 3$ হলে, প্রদত্ত অনুক্রমটির ৩য় পদ,

$u_3 = \dfrac{3^2}{\sqrt[3]{\pi}} = \dfrac{9}{\sqrt[3]{\pi}}$

$n = 4$ হলে, প্রদত্ত অনুক্রমটির ৪র্থ পদ, $u_4 = \dfrac{4^2}{\sqrt[4]{\pi}} = \dfrac{16}{\sqrt[4]{\pi}}$

... ...

... ...

সুতরাং প্রদত্ত সাধারণ পদ হতে প্রাপ্ত অনুক্রমটি হলো,

$\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}, \dfrac{4}{\sqrt[2]{\pi}}, \dfrac{9}{\sqrt[3]{\pi}}, \dfrac{16}{\sqrt[4]{\pi}}, \ldots \ldots \ldots \ldots$

<u>২(v)-এর সমাধান:</u>

মনে করি, অনুক্রমটির সাধারণ পদ, $u_n = \dfrac{\ln n}{n}$

$\therefore n = 1$ হলে, প্রদত্ত অনুক্রমটির ১ম পদ,

$u_1 = \dfrac{\ln 1}{1} = \ln 1 = 0$

$n = 2$ হলে, প্রদত্ত অনুক্রমটির ২য় পদ,

$u_2 = \dfrac{\ln 2}{2} = \dfrac{\ln 2}{2}$

$n = 3$ হলে, প্রদত্ত অনুক্রমটির ৩য় পদ,

$u_3 = \dfrac{\ln 3}{3} = \dfrac{\ln 3}{3}$

$n = 4$ হলে, প্রদত্ত অনুক্রমটির ৪র্থ পদ,

$u_4 = \dfrac{\ln 4}{4} = \dfrac{\ln 4}{4}$

... ...

সুতরাং প্রদত্ত সাধারণ পদ হতে প্রাপ্ত অনুক্রমটি হলো, $0, \dfrac{\ln 2}{2}, \dfrac{\ln 3}{3}, \dfrac{\ln 4}{4}, \ldots$

... ...

<u>২(vi)-এর সমাধান:</u>

মনে করি, অনুক্রমটির সাধারণ পদ, $u_n = \cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$

$\therefore n = 1$ হলে, প্রদত্ত অনুক্রমটির ১ম পদ,

$u_1 = \cos\left(\dfrac{1 \times \pi}{2}\right) = \cos\dfrac{\pi}{2} = 0$

$n = 2$ হলে, প্রদত্ত অনুক্রমটির ২য় পদ,

$u_2 = \cos\left(\dfrac{2 \times \pi}{2}\right) = \cos\pi = -1$

$n = 3$ হলে, প্রদত্ত অনুক্রমটির ৩য় পদ,

$u_3 = \cos\left(\dfrac{3 \times \pi}{2}\right) = 0$

$n = 4$ হলে, প্রদত্ত অনুক্রমটির ৪র্থ পদ,

$u_4 = \cos\left(\dfrac{4 \times \pi}{2}\right) = 1$

$n = 5$ হলে, প্রদত্ত অনুক্রমটির ৫ম পদ,

$u_5 = \cos\left(\dfrac{5 \times \pi}{2}\right) = 0$

$n = 6$ হলে, প্রদত্ত অনুক্রমটির ৬ষ্ঠ পদ,

$u_6 = \cos\left(\dfrac{6 \times \pi}{2}\right) = -1$

$n = 7$ হলে, প্রদত্ত অনুক্রমটির ৭ম পদ,

$u_7 = \cos\left(\dfrac{7 \times \pi}{2}\right) = 0$

$n = 8$ হলে, প্রদত্ত অনুক্রমটির ৮ম পদ,

$u_8 = \cos\left(\dfrac{8 \times \pi}{2}\right) = 1$

... ...

সুতরাং প্রদত্ত সাধারণ পদ হতে প্রাপ্ত অনুক্রমটি হলো, $0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, \ldots$ ... ...

<u>(৩) এর সমাধান:</u>

মনে করি, একটি অনুক্রমের সাধারণ পদ, $u_n = \dfrac{n^2}{n+1}$

$\therefore n = 1$ হলে, প্রদত্ত অনুক্রমটির ১ম পদ,

$u_1 = \dfrac{1^2}{1+1} = \dfrac{1}{2}$

$n = 2$ হলে, প্রদত্ত অনুক্রমটির ২য় পদ,

$u_2 = \dfrac{2^2}{2+1} = \dfrac{4}{3}$

$n = 3$ হলে, প্রদত্ত অনুক্রমটির ৩য় পদ,

$u_3 = \dfrac{3^2}{3+1} = \dfrac{16}{5}$

$n = 4$ হলে, প্রদত্ত অনুক্রমটির ৪র্থ পদ,

$u_4 = \dfrac{4^2}{4+1} = \dfrac{16}{5}$

... ...

... ...

সুতরাং সাধারণ পদ হতে প্রাপ্ত অনুক্রমটি হলো, $\dfrac{1}{2}, \dfrac{4}{3}, \dfrac{9}{4}, \dfrac{16}{5}, \ldots$

প্রশ্ন [পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-১৬৫]

১। নিচের প্রত্যেক ক্ষেত্রে একটি অসীম গুণোত্তর ধারার প্রথম পদ a এবং সাধারণ অনুপাত r দেওয়া আছে। ধারাটি লেখ এবং যদি এর অসীমতক সমষ্টি থাকে তা-ও নির্ণয় কর:

(i) $a=4, r=\frac{1}{2}$ (ii) $a=2, r=-\frac{1}{3}$

(iii) $a=\frac{1}{3}, r=3$ (iv) $a=5, r=\frac{1}{10^2}$

(v) $a=1, r=-\frac{2}{7}$ (vi) $a=81, r=-\frac{1}{3}$

২। তোমরা প্রত্যেকে একটি করে অসীম গুণোত্তর ধারা লেখ।

১(i)-এর সমাধান:

দেওয়া আছে,

ধারাটির প্রথম পদ, $a=4$ এবং সাধারণ অনুপাত, $r=\frac{1}{2}$

$\therefore$ ধারাটি $= ar^0+ar^1+ar^2+ar^3+\dots\dots\dots$

$$=4.\left(\frac{1}{2}\right)^0+4.\left(\frac{1}{2}\right)^1+4.\left(\frac{1}{2}\right)^2+4.\left(\frac{1}{2}\right)^3+\dots$$

$$=4+4.\frac{1}{2}+4.\frac{1}{4}+4.\frac{1}{8}+\dots\dots\dots$$

$$=4+2+1+\frac{1}{2}+\dots\dots\dots$$

আবার, $r=\frac{1}{2}\quad\therefore|r|<1$

$\therefore$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি আছে।

অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty=\frac{a}{1-r}=\frac{4}{1-\frac{1}{2}}=\frac{4}{\frac{2-1}{2}}$

$$=4\times\frac{2}{1}=8\text{ (Ans)}$$

১(ii)-এর সমাধান:

দেওয়া আছে,

ধারাটির প্রথম পদ, $a=2$ এবং সাধারণ অনুপাত, $r=-\frac{1}{3}$

$\therefore$ ধারাটি $= ar^0+ar^1+ar^2+ar^3+\dots\dots\dots$

$$=2\left(-\frac{1}{3}\right)^0+2\left(-\frac{1}{3}\right)^1+2\left(-\frac{1}{3}\right)^2+2\left(-\frac{1}{3}\right)^3+\dots\dots$$

$$=2-\frac{2}{3}+2.\frac{1}{9}+2.\left(-\frac{1}{27}\right)+\dots\dots\dots$$

$$=2-\frac{2}{3}+\frac{2}{9}-\frac{2}{27}+\dots\dots\dots$$

আবার, $r=-\frac{1}{3}\quad\therefore|r|<1$

$\therefore$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি আছে।

অসীমতক সমষ্টি,

$$S_\infty=\frac{a}{1-r}=\frac{2}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=\frac{2}{1+\frac{1}{3}}=\frac{2}{\frac{3+1}{3}}=\frac{2}{\frac{4}{3}}$$

$$=2\times\frac{3}{4}=\frac{3}{2}\text{ [Ans]}$$

১(iii)-এর সমাধান:

দেওয়া আছে,

ধারাটির প্রথম পদ, $a=\frac{1}{3}$ এবং সাধারণ অনুপাত, $r=3$

$\therefore$ ধারাটি $= ar^0+ar^1+ar^2+ar^3+\dots\dots\dots$

$$=\frac{1}{3}(3)^0+\frac{1}{3}(3)^1+\frac{1}{3}.(3)^2+\frac{1}{3}.(3)^3+\dots$$

$$=\frac{1}{3}+1+3+9+\dots\dots\dots$$

আবার, $r=3\;\therefore|r|>1$

$\therefore$ ধারাটির কোনো অসীমতক সমষ্টি নেই।

১(iv)-এর সমাধান:

দেওয়া আছে,

ধারাটির প্রথম পদ, $a=5$ এবং সাধারণ অনুপাত, $r=\frac{1}{10^2}$

$\therefore$ ধারাটি $= ar^0+ar^1+ar^2+ar^3+\dots\dots\dots$

$$=5\left(\frac{1}{10^2}\right)^0+5\left(\frac{1}{10^2}\right)^1+5\left(\frac{1}{10^2}\right)^2+5\left(\frac{1}{10^2}\right)^3+\dots\dots$$

$$=5+5.\frac{1}{100}+5.\left(\frac{1}{100}\right)^2+5.\left(\frac{1}{100}\right)^3+\dots\dots\dots$$

$$=5+\frac{1}{20}+\frac{1}{2000}+\frac{1}{200000}+\dots\dots\dots$$

আবার, $r=\frac{1}{10^2}=\frac{1}{100}\quad\therefore|r|<1$

$\therefore$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি আছে।

অসীমতক সমষ্টি,

$$S_\infty=\frac{a}{1-r}$$

$$=\frac{5}{1-\frac{1}{10^2}}=\frac{5}{1-\frac{1}{100}}=\frac{5}{\frac{100-1}{100}}=\frac{5}{\frac{99}{100}}$$

$$=5\times\frac{100}{99}$$

$$=\frac{500}{99}\text{ (Ans)}$$

১(v)-এর সমাধান:

দেওয়া আছে,

ধারাটির প্রথম পদ, $a=1$ এবং সাধারণ অনুপাত, $r=-\frac{2}{7}$

$\therefore$ ধারাটি $= ar^0+ar^1+ar^2+ar^3+\dots\dots\dots$

$$=1\left(-\frac{2}{7}\right)^0+1\left(-\frac{2}{7}\right)^1+1\left(-\frac{2}{7}\right)^2+1\left(-\frac{2}{7}\right)^3+\dots\dots$$

$$=1-\frac{2}{7}+\frac{4}{49}-\frac{8}{343}+\dots\dots\dots$$

আবার, $r=-\frac{2}{7}\quad\therefore|r|<1$

$\therefore$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি আছে।

অসীমতক সমষ্টি,

$$S_\infty=\frac{a}{1-r}=\frac{1}{1-\left(-\frac{2}{7}\right)}=\frac{1}{1+\frac{2}{7}}=\frac{1}{\frac{7+2}{7}}=\frac{7}{9}\text{ (Ans)}$$

১(vi)-এর সমাধান:
দেওয়া আছে,

ধারাটির প্রথম পদ, $a = 81$ এবং সাধারণ অনুপাত, $r = -\frac{1}{3}$

$\therefore$ ধারাটি $= ar^0 + ar^1 + ar^2 + ar^3 + \dots\dots$

$$= 81\left(-\frac{1}{3}\right)^0 + 81\left(-\frac{1}{3}\right)^1 + 81\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 81\left(-\frac{1}{3}\right)^3 + \dots$$

$$= 81 - 27 + 81.\frac{1}{9} - 81.\frac{1}{27} + \dots\dots$$

$$= 81 - 27 + 9 - 3 + \dots\dots$$

আবার, $r = -\frac{1}{3}$ $\therefore |r| < 1$

$\therefore$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি আছে।

অসীমতক সমষ্টি,

$$S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{81}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{81}{1+\frac{1}{3}} = \frac{81}{\frac{3+1}{3}} = \frac{81}{\frac{4}{3}}$$

$$= 81 \times \frac{3}{4} = \frac{243}{4} \text{ (Ans)}$$

(২)-এর সমাধান:
নিম্নে একটি অসীম গুণোত্তর ধারা লিখা হলো যার প্রথম পদ $a = 2$

সাধারণ অনুপাত $r = \frac{1}{3^2}$

অসীম গুণোত্তর ধারা: $2 + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^4} + \frac{2}{3^6} + \dots\dots$

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৭

১। 1, 3, 5, 7, ধারাটির 12 তম পদ কোনটি?
(ক) 12 (খ) 13 (গ) 23 (ঘ) 25

২। কোনো অনুক্রমের n তম পদ $= \frac{1}{n(n+1)}$, এর ৩য় পদ কোনটি?
(ক) $\frac{1}{3}$ (খ) $\frac{1}{6}$ (গ) $\frac{1}{12}$ (ঘ) $\frac{1}{20}$

৩। কোনো অনুক্রমের n তম পদ $= \frac{1-(-1)^n}{2}$ হলে 20 তম পদ কোনটি?
(ক) 0 (খ) 1 (গ) -1 (ঘ) 2

৪। কোন অনুক্রমের n তম পদ $U_n = \frac{1}{n}$ এবং $U_n < 10^{-4}$ হলে n এর মান হবে –
i. $n < 10^3$ ii. $n < 10^4$ iii. $n > 10^4$
নিচের কোনটি সঠিক?
(ক) iii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

নিচের ধারাটি লক্ষ কর এবং (৫-৭) নম্বর প্রশ্নের উত্তর দাও।

$4, \frac{4}{3}, \frac{4}{9}, \dots\dots$

৫। ধারাটির 10 তম পদ কোনটি?
(ক) $\frac{4}{3^{10}}$ (খ) $\frac{4}{3^9}$ (গ) $\frac{4}{3^{11}}$ (ঘ) $\frac{4}{3^{12}}$

৬। ধারাটির ১ম 5 পদের সমষ্টি কত?
(ক) $\frac{160}{27}$ (খ) $\frac{484}{81}$ (গ) $\frac{12}{9}$ (ঘ) $\frac{20}{9}$

৭। ধারাটির অসীমতক সমষ্টি কত?
(ক) 0 (খ) 5 (গ) 6 (ঘ) 7

৮। প্রদত্ত অনুক্রমের 10 তম পদ, 15 তম পদ এবং r তম পদ নির্ণয় কর:
(ক) $2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots$ (খ) $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \dots\dots$
(গ) অনুক্রমের n তম পদ $= \frac{1}{n(n+1)}$, $n \in N$
(ঘ) $0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots\dots$ (ঙ) $5, \frac{5}{3}, \frac{5}{9}, \frac{5}{27}, \frac{5}{81}, \dots\dots$
(চ) অনুক্রমটির n তম পদ $= \frac{1-(-1)^{3n}}{2}$

৯। একটি অনুক্রমের n তম পদ $u_n = \frac{1}{n}$.
(ক) $u_n < 10^{-5}$ হলে, n এর মান কিরূপ হবে?
(খ) $u_n > 10^{-5}$ হলে, n এর মান কিরূপ হবে?
(গ) u_n এর প্রান্তীয় মান (n যথেচ্ছ বড় হলে) সম্পর্কে কি বলা যায়?

১০। গাণিতিক আরোহ পদ্ধতির সাহায্যে দেখাও যে,
$r \neq 1$ হলে গুণোত্তর ধারা $a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots\dots\dots$ এর n তম আংশিক সমষ্টি $S_n = a.\frac{1-r^n}{1-r}$.

১১। প্রদত্ত অসীম গুণোত্তর ধারার (অসীমতক) সমষ্টি যদি থাকে, তবে তা নির্ণয় কর:
(ক) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots\dots\dots$
(খ) $\frac{1}{5} - \frac{2}{5^2} - \frac{4}{5^3} + \frac{8}{5^4} + \dots\dots\dots$
(গ) $8 + 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \dots\dots\dots$
(ঘ) $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots\dots\dots$
(ঙ) $\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{8} + \left(-\frac{1}{16}\right) + \dots\dots\dots$

১২। নিচের ধারাগুলোর প্রথম n সংখ্যক পদের যোগফল নির্ণয় কর।
(ক) $7 + 77 + 777 + \dots\dots\dots$ (খ) $5 + 55 + 555 + \dots\dots$

১৩। x এর উপর কি শর্ত আরোপ করলে $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)^3} + \dots\dots$ অসীম ধারাটির (অসীমতক) সমষ্টি থাকবে এবং সেই সমষ্টি নির্ণয় কর।

১৪। প্রদত্ত পৌনঃপুনিক দশমিকগুলোকে মূলদীয় ভগ্নাংশ প্রকাশ কর:
(ক) $.\dot{2}\dot{7}$ (খ) $2.\dot{3}0\dot{5}$ (গ) $.0\dot{1}2\dot{3}$ (ঘ) $3.0\dot{4}0\dot{3}$

১৫। একটি অনুক্রমের n তম পদ $Un = \frac{1}{n(n+1)}$.
(ক) ধারাটি নির্ণয় করে সাধারণ অনুপাত নির্ণয় কর।
(খ) ধারাটির 15 তম পদ এবং ১ম 10 পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।
(গ) ধারাটির অসীমতক সমষ্টি নির্ণয় কর এবং n এর মান যথেষ্ট ছোট হলে Un এর প্রান্তীয় মান সম্পর্কে কি বলা যায়?

১৬। নিম্নের ধারাটি লক্ষ কর: $\frac{1}{2x+1} + \frac{1}{(2x+1)^2} + \frac{1}{(2x+1)^3} + \dots$
(ক) $x = 1$ হলে ধারাটি নির্ণয় কর এবং প্রাপ্ত ধারাটির সাধারণ অনুপাত কত?
(খ) ক নং এ প্রাপ্ত ধারাটির 10 তম পদ এবং ১ম 10টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।
(গ) x এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে প্রদত্ত ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে এবং সমষ্টি নির্ণয় কর।

অনুশীলনী-৭ এর সমাধান

১। 1, 3, 5, 7, ধারাটির 12 তম পদ কোনটি?
(ক) 12 (খ) 13 (গ) 23 (ঘ) 25
উত্তর: (গ) 23
ব্যাখ্যা:
১ম পদ $a = 1$ এবং সাধারণ অন্তর $d = 2$
$\therefore n$ তম পদ $= a + (n-1)\,d$
$\therefore 12$ তম পদ $= 1+(12-1).2 = 1 + 11 \times 2 = 1 + 22 = 23$

২। কোনো অনুক্রমের n তম পদ $= \dfrac{1}{n(n+1)}$ এর ৩য় পদ কোনটি?
(ক) $\frac{1}{3}$ (খ) $\frac{1}{6}$ (গ) $\frac{1}{12}$ (ঘ) $\frac{1}{20}$
উত্তর: (গ) $\frac{1}{12}$
ব্যাখ্যা:
n তম পদ $= \dfrac{1}{n(n+1)}$
$\therefore$ ৩য় পদ $= \dfrac{1}{3(3+1)} = \dfrac{1}{3\times4} = \dfrac{1}{12}$ [$\because$ ৩য় পদের জন্য $n = 3$]

৩। কোনো অনুক্রমের n তম পদ $= \dfrac{1-(-1)^n}{2}$ হলে 20 তম পদ কোনটি?
(ক) 0 (খ) 1 (গ) -1 (ঘ) 2
উত্তর: (ক) 0
ব্যাখ্যা:
$\therefore 20$ তম পদ $= \dfrac{1-(-1)^{20}}{2}$ [$\because$ 20 তম পদের $n = 20$]
$= \dfrac{1-1}{2} = 0$

দ্রষ্টব্য:
(-1) এর Power জোড় হলে তা 1 হবে এবং বিজোড় হলে তা -1
আবার, $(-1)^0 = 1$

৪। কোন অনুক্রমের n তম পদ $U_n = \dfrac{1}{n}$ এবং $U_n < 10^{-4}$ হলে n এর মান হবে –
i. $n < 10^3$
ii. $n < 10^4$
iii. $n > 10^4$
নিচের কোনটি সঠিক?
(ক) iii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii
উত্তর: (ক) iii
ব্যাখ্যা:
$U_n = \dfrac{1}{n}$ এবং $U_n < 10^{-4} = \dfrac{1}{10^4}$
$\therefore \dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{10^4}$ বা, $n > 10^4$

নিচের ধারাটি লক্ষ কর এবং (৫-৭) নম্বর প্রশ্নের উত্তর দাও।

$$4, \frac{4}{3}, \frac{4}{9}, \ldots\ldots\ldots$$

৫। ধারাটির 10 তম পদ কোনটি?
(ক) $\frac{4}{3^{10}}$ (খ) $\frac{4}{3^9}$ (গ) $\frac{4}{3^{11}}$ (ঘ) $\frac{4}{3^{12}}$
উত্তর: (খ) $\frac{4}{3^9}$
ব্যাখ্যা:
১ম পদ $a = 4$, সাধারণ অনুপাত, $n = \frac{1}{3}$, n তম পদ $= ar^{n-1}$
$\therefore 10$ তম পদ $= 4\left(\frac{1}{3}\right)^{10-1} = 4\left(\frac{1}{3}\right)^9 = \frac{4}{3^9}$

৬। ধারাটির ১ম 5 পদের সমষ্টি কত?
(ক) $\frac{160}{27}$ (খ) $\frac{484}{81}$ (গ) $\frac{12}{9}$ (ঘ) $\frac{20}{9}$
উত্তর: (খ) $\frac{484}{81}$
ব্যাখ্যা:
এখানে $a = 4$, $r = \frac{1}{3}$, যেহেতু $r < 1$ হলে, $S = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

সুতরাং, $S_5 = 4\dfrac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^5}{1-\frac{1}{3}}$

$= 4\dfrac{1-\frac{1}{3^5}}{1-\frac{1}{3}} = 4\dfrac{\frac{242}{243}}{\frac{2}{3}} = 4 \times \dfrac{242}{243} \times \dfrac{3}{2} = \dfrac{484}{81}$

৭। ধারাটির অসীমতক সমষ্টি কত?
(ক) 0 (খ) 5
(গ) 6 (ঘ) 7
উত্তর: (গ) 6
ব্যাখ্যা:
যেহেতু $r < 1$
$\therefore r < 1,\ S_\infty = \dfrac{a}{1-r} = \dfrac{4}{1-\frac{1}{3}} = \dfrac{4}{\frac{2}{3}} = \dfrac{2}{4} \times \dfrac{3}{2} = 6$

৮। প্রদত্ত অনুক্রমের 10 তম পদ, 15 তম পদ এবং r তম পদ নির্ণয় কর:
(ক) 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...
(খ) $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \ldots\ldots\ldots$
(গ) অনুক্রমের n তম পদ $= \dfrac{1}{n(n+1)}$, $n \in N$
(ঘ) 0, 1, 0, 1, 0, 1, ...
(ঙ) $5, \frac{5}{3}, \frac{5}{9}, \frac{5}{27}, \frac{5}{81}, \ldots\ldots\ldots$
(চ) অনুক্রমটির n তম পদ $= \dfrac{1-(-1)^{3n}}{2}$

(ক) এর সমাধান:

প্রদত্ত অনুক্রমটি হলো,

2, 4, 6, 8, 10, 12, ...

প্রদত্ত অনুক্রমটির,

যেকোনো পদ – পূর্ববর্তী পদ

$4 - 2 = 2$

অথবা, $6 - 4 = 2$

অথবা, $8 - 6 = 2$

$\therefore$ প্রদত্ত অনুক্রমটি একটি সমান্তর অনুক্রম।

এখানে,

প্রথম পদ, $a = 2$

এবংসাধারণ অন্তর, $d = 2$

আমরা জানি,

অনুক্রমের n তম পদ, $u_n = a + (n-1)d$

$\therefore$ অনুক্রমটির 10 তম পদ, $u_{10} = 2 + (10-1)2$ [$\because a=2, d=2, n=10$]

$= 2 + 9 \times 2$

$= 2 + 18 = 20$

$\therefore$ অনুক্রমটির 15 তম পদ, $u_{15} = 2 + (15-1)2$ [$\because a=2, d=2, n=15$]

$= 2 + 14 \times 2$

$= 2 + 28 = 30$

$\therefore$ অনুক্রমটির r তম পদ, $u_r = 2 + (r-1)2$ [$\because a = 2, d = 2, n = r$]

$= 2 + 2r - 2$

$= 2r$

Ans: 20, 30 এবং $2r$

(খ) এর সমাধান:

প্রদত্ত অনুক্রমটি হলো,

$\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \dots\dots$

প্রদত্ত অনুক্রমটির,

যে কোন পদ – পূর্ববর্তী পদ

$1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

অথবা, $\frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$

অথবা, $2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$

$\therefore$ প্রদত্ত অনুক্রমটি একটি সমান্তর অনুক্রম।

এখানে,

প্রথম পদ, $a = \frac{1}{2}$

এবং সাধারণ অন্তর, $d = \frac{1}{2}$

আমরা জানি,

অনুক্রমের n তম পদ, $u_n = a + (n-1)d$

$\therefore$ অনুক্রমটির 10 তম পদ, $u_{10} = \frac{1}{2} + (10-1)\frac{1}{2}$

[$\because a = \frac{1}{2}, d = \frac{1}{2}, n = 10$]

$= \frac{1}{2} + \frac{9}{2}$

$= \frac{10}{2} = 5$

$\therefore$ অনুক্রমটির 15 তম পদ, $u_{15} = \frac{1}{2} + (15-1)\frac{1}{2}$

[$\because a = \frac{1}{2}, d = \frac{1}{2}, n = 15$]

$= \frac{1}{2} + \frac{14}{2} = \frac{15}{2}$

$\therefore$ অনুক্রমটির r তম পদ, $u_r = \frac{1}{2} + (r-1)\frac{1}{2}$

[$\because a = \frac{1}{2}, d = \frac{1}{2}, n = r$]

$= \frac{1}{2} + \frac{r}{2} - \frac{1}{2}$

$= \frac{r}{2}$

Ans: 5, $\frac{15}{2}$ এবং $\frac{r}{2}$

(গ) এর সমাধান:

দেয়া আছে,

অনুক্রমটির n তম পদ, $u_n = \frac{1}{n(n+1)}, n \in N$

$\therefore$ অনুক্রমটির 10 তম পদ, $u_{10} = \frac{1}{10(10+1)}$ [এখানে, $n = 10$]

$= \frac{1}{10 \times 11}$

$= \frac{1}{110}$

$\therefore$ অনুক্রমটির 15 তম পদ, $u_{15} = \frac{1}{15(15+1)}$ [এখানে, $n = 15$]

$= \frac{1}{15 \times 16}$

$= \frac{1}{240}$

$\therefore$ অনুক্রমটির r তম পদ, $u_r = \frac{1}{r(r+1)}$ [এখানে, $n = r$]

Ans: $\frac{1}{110}, \frac{1}{240}$ এবং $\frac{1}{r(r+1)}$

(ঘ) এর সমাধান:

দেয়া আছে,

0, 1, 0, 1, 0, 1, ...

প্রদত্ত অনুক্রমটি থেকে দেখা যায় যে,

বিজোড় স্থানের পদগুলো 0 (শূন্য)

এবং জোড় স্থানের পদগুলো 1.

$\therefore$ অনুক্রমটির 10 তম পদ, $u_{10} = 1$ [$\because$ 10 জোড় স্থানীয় পদ]

$\therefore$ অনুক্রমটির 15 তম পদ, $u_{15} = 0$ [$\because$ 15 বিজোড় স্থানীয় পদ]

এখন যদি r জোড় হয় তবে r তম পদ, $u_r = 1$

এবং যদি r বিজোড় হয় তবে r তম পদ, $u_r = 0$

Ans: 1, 0 এবং 1 (r জোড় হলে) ও 0 (r বিজোড় হলে)

(ক) এর সমাধান:

প্রদত্ত অনুক্রমটি হলো,

$5, \frac{5}{3}, \frac{5}{9}, \frac{5}{27}, \frac{5}{81}, \dots \dots \dots$

অনুক্রমটির,

(যে কোন পদ ÷ পূর্ববর্তী পদ) $= \frac{5}{3} \div 5 = \frac{1}{3}$

অথবা, $\frac{5}{9} \div \frac{5}{3} = \frac{1}{3}$

অথবা, $\frac{5}{27} \div \frac{5}{9} = \frac{1}{3}$

$\therefore$ প্রদত্ত অনুক্রমটি একটি গুণোত্তর অনুক্রম, যার প্রথম পদ, $a = 5$ এবং সাধারণ অনুপাত, $q = \frac{1}{3}$

আমরা জানি,

গুণোত্তর অনুক্রমের n তম পদ, $u_n = aq^{n-1}$

$\therefore$ অনুক্রমটির 10 তম পদ, $u_{10} = 5.\left(\frac{1}{3}\right)^{10-1}$ $\left[\because a = 5, q = \frac{1}{3}, n = 10\right]$

$= 5.\left(\frac{1}{3}\right)^{9} = \frac{5}{3^9}$

$\therefore$ অনুক্রমটির 15 তম পদ, $u_{15} = 5.\left(\frac{1}{3}\right)^{15-1}$ $\left[\because a = 5, q = \frac{1}{3}, n = 15\right]$

$= 5.\left(\frac{1}{3}\right)^{14} = \frac{5}{3^{14}}$

$\therefore$ অনুক্রমটির r তম পদ, $u_r = 5.\left(\frac{1}{3}\right)^{r-1}$ $\left[\because a = 5, q = \frac{1}{3}, n = r\right]$

$= 5.\frac{1}{3^{r-1}} = \frac{5}{3^{r-1}}$

Ans: $\frac{5}{3^9}, \frac{5}{3^{14}}$ এবং $\frac{5}{3^{r-1}}$

(খ) এর সমাধান:

দেওয়া আছে, অনুক্রমটির n তম পদ, $u_n = \frac{1-(-1)^{3n}}{2}$

$\therefore$ অনুক্রমটির 10 তম পদ, $u_{10} = \frac{1-(-1)^{3.10}}{2}$

$= \frac{1-1}{2} = \frac{0}{2} = 0$

$\therefore$ অনুক্রমটির 15 তম পদ, $u_{15} = \frac{1-(-1)^{3.15}}{2}$

$= \frac{1-(-1)}{2}$

$= \frac{1+1}{2} = \frac{2}{2} = 1$

$\therefore$ অনুক্রমটির r তম পদ, $u_r = \frac{1-(-1)^{3r}}{2}$

উত্তর: $0, 1, \frac{1-(-1)^{3r}}{2}$

(গ) এর সমাধান:

এখানে, r জোড় হলে $3r$ জোড় হবে, তখন, $u_r = \frac{1-(-1)^{3r}}{2}$

$= \frac{1-1}{2}$

$= \frac{0}{2} = 0$

এবং, r বিজোড় হলে $3r$ বিজোড় হবে, তখন, $u_r = \frac{1-(-1)^{3r}}{2}$

$= \frac{1-(-1)}{2}$

$= \frac{1+1}{2} = \frac{2}{2} = 1$

অতএব, 0, 1 এবং 0 (r জোড় হলে) ও 1 (r বিজোড় হলে)

৯। একটি অনুক্রমের n তম পদ $u_n = \frac{1}{n}$,

(ক) $u_n < 10^{-5}$ হলে, n এর মান কিরূপ হবে?

(খ) $u_n > 10^{-5}$ হলে, n এর মান কিরূপ হবে?

(গ) u_n এর প্রান্তীয় মান (n যথেষ্ট বড় হলে) সম্পর্কে কি বলা যায়?

(ক) এর সমাধান:

দেওয়া আছে, অনুক্রমটির n তম পদ, $u_n = \frac{1}{n}$

এখানে, $u_n < 10^{-5}$

বা, $\frac{1}{n} < 10^{-5}$ $\left[\because u_n = \frac{1}{n}\right]$

বা, $\frac{1}{n} < \frac{1}{10^5}$

$\therefore n > 10^5$ [বিপরীতকরণ করে]

[লক্ষ্য কর যে, বিপরীতকরণে অসমতার চিহ্ন পরিবর্তিত হয়।]

Ans: $n > 10^5$

(খ) এর সমাধান:

দেওয়া আছে, অনুক্রমটির n তম পদ, $u_n = \frac{1}{n}$

এখানে, $u_n > 10^{-5}$

বা, $\frac{1}{n} > 10^{-5}$ $[\because u_n = \frac{1}{n}]$

বা, $\frac{1}{n} > \frac{1}{10^5}$

$\therefore n < 10^5$ [বিপরীতকরণ করে]

Ans: $n < 10^5$

(গ) এর সমাধান:

দেওয়া আছে, অনুক্রমটির n তম পদ, $u_n = \frac{1}{n}$

$u_n = \frac{1}{n}$ সমীকরণে n এর মান যত বড় হবে u_n এর মান তত ছোট হবে।

এভাবে, n এর মান যথেচ্ছ বড় হতে থাকলে u_n এর মান এক সময় শূন্য (0) হবে। সুতরাং, u_n এর প্রান্তীয় মান 0 (শূন্য)।

Ans: 0 (শূন্য)

১০। গাণিতিক আরোহ পদ্ধতির সাহায্যে দেখাও যে, $r \neq 1$ হলে গুণোত্তর ধারা $a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots\ldots\ldots$ এর n তম আংশিক সমষ্টি

$S_n = a.\frac{1-r^n}{1-r}$.

সমাধান:

গাণিতিক আরোহ পদ্ধতির সাহায্যে দেখাতে হবে যে, গুণোত্তর ধারা $a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots$ এর n তম আংশিক সমষ্টি,

$S_n = a.\frac{1-r^n}{1-r}$; যখন $r \neq 1$

ধারাটির প্রথম পদ $= a$, সাধারণ পদ $= r$

$\therefore$ ধারাটির n তম পদ $= ar^{n-1}$

অর্থাৎ, দেখাতে হবে যে,

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \ldots (i) \text{ যখন } r \neq 1$$

প্রথম ধাপ:

$n = 1$ এর জন্য (i) নং সমীকরণের

বামপক্ষ $= a$

এবং ডানপক্ষ $= \frac{a(1-r^1)}{1-r} = \frac{a(1-r)}{(1-r)} = a$

সুতরাং, $n = 1$ এর জন্য (i) নং সমীকরণটি সত্য।

দ্বিতীয় ধাপ:

ধরি, $n = m$ এর জন্য (i) নং সমীকরণটি সত্য। অর্থাৎ,

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots\ldots + ar^{m-1} = \frac{a(1-r^m)}{1-r} \ldots\ldots\ldots (ii)$$

এখন (i) নং সমীকরণটি $n = m + 1$ এর জন্য সত্য হবে যদি,

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots\ldots + ar^{m+1-1} = \frac{a(1-r^{m+1})}{1-r}$$

বা, $a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots\ldots + ar^m = \frac{a(1-r^{m+1})}{1-r}$ সত্য হয়। ……………(iii)

(ii) নং সমীকরণের উভয় পক্ষে ar^m যোগ করে পাই,

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots\ldots\ldots + ar^{m-1} + ar^m$$

$$= \frac{a(1-r^m)}{1-r} + ar^m$$

$$= \frac{a(1-r^m) + ar^m(1-r)}{1-r}$$

$$= \frac{a - ar^m + ar^m - ar^{m+1}}{1-r}$$

$$= \frac{a - ar^{m+1}}{1-r} = \frac{a(1-r^{m+1})}{1-r}$$

$\therefore$ (iii) নং প্রমাণিত হলো, অর্থাৎ $n = m + 1$ এর জন্য (i) নং সমীকরণটি সত্য। সুতরাং গাণিতিক আরোহ বিধি অনুযায়ী সকল $n \in N$ এর জন্য $r \neq 1$ হলে, গুণোত্তর ধারা

$a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots\ldots\ldots$ এর n তম আংশিক সমষ্টি $= \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

(দেখানো হলো)

১১। প্রদত্ত অসীম গুণোত্তর ধারার (অসীমতক) সমষ্টি যদি থাকে, তবে তা নির্ণয় কর:

(ক) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots\ldots\ldots$

(খ) $\frac{1}{5} - \frac{2}{5^2} - \frac{4}{5^3} + \frac{8}{5^4} + \ldots\ldots\ldots$

(গ) $8 + 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \ldots\ldots\ldots$

(ঘ) $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots\ldots\ldots$

(ঙ) $\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{8} + \left(-\frac{1}{16}\right) + \ldots\ldots\ldots$

(ক) এর সমাধান:

প্রদত্ত গুণোত্তর ধারাটি হলো,

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots\ldots\ldots$

এখানে, প্রথম পদ, $a = 1$

সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{1}{2} \div 1 = \frac{1}{2}$

এখানে, $r = \frac{1}{2}$ $\therefore |r| < 1$

সুতরাং ধারাটির অসীমতক সমষ্টি আছে।

অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$ (Ans)

[illegible]

$$\frac{1}{5} - \frac{2}{5^2} + \frac{4}{5^3} - \frac{8}{5^4} + \cdots\cdots$$

[illegible], $a = \frac{1}{5}$

[illegible], $r = -\frac{2}{5^2} \div \frac{1}{5}$

$$= -\frac{2}{5^2} \times \frac{5}{1} = -\frac{2}{5}$$

[illegible], $r = -\frac{2}{5}$ $\therefore |r| < 1$

[illegible]

[illegible] $S_\infty = \frac{a}{1-r}$

$$= \frac{\frac{1}{5}}{1-\left(-\frac{2}{5}\right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{5}}{1+\frac{2}{5}}$$

$$= \frac{\frac{1}{5}}{\frac{5+2}{5}} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{7}{5}} = \frac{1}{5} \times \frac{5}{7} = \frac{1}{7} \text{ (Ans)}$$

[illegible]

$$8 + 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \cdots\cdots$$

[illegible], $a = 8$

[illegible], $r = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

[illegible], $r = \frac{1}{4}$ $\therefore |r| < 1$

[illegible]

$$S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{8}{1-\frac{1}{4}} = \frac{8}{\frac{4-1}{4}} = \frac{8}{\frac{3}{4}} = 8 \times \frac{4}{3} = \frac{32}{3} \text{ (Ans)}$$

[illegible]

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots\cdots$$

[illegible], $a = 1$

[illegible], $r = \frac{2}{1} = 2$

[illegible], $r = 2$ $\therefore |r| > 1$ [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

$$\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{8} + \left(-\frac{1}{16}\right) + \cdots\cdots$$

[illegible], $a = \frac{1}{2}$

[illegible], $r = \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{4} \times \frac{2}{1} = -\frac{1}{2}$

[illegible], $r = -\frac{1}{2}$ $\therefore |r| < 1$

[illegible]

[illegible] $S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2+1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \text{ (Ans)}$$

[illegible]

(ক) $7 + 77 + 777 + \cdots\cdots$ (খ) $5 + 55 + 555 + \cdots\cdots$

[illegible]

[illegible] $7 + 77 + 777 + \cdots\cdots$

[illegible] S_n

$\therefore S_n = 7 + 77 + 777 + \cdots\cdots$ [illegible]

$\therefore S_n = 7(1 + 11 + 111 + \cdots\cdots$ [illegible]$)$

$\therefore S_n = \frac{7}{9}(9 + 99 + 999 + \cdots\cdots$ [illegible]$)$

$\therefore \frac{9}{7}S_n = 9 + 99 + 999 + \cdots\cdots$ [illegible]

$= (10-1) + (100-1) + (1000-1) + \cdots\cdots$ [illegible]

$= (10 + 10^2 + 10^3 + \cdots\cdots + 10^n) - (1 + 1 + 1 + \cdots\cdots$ [illegible]$)$

$= 10(1 + 10 + 10^2 + \cdots\cdots + 10^{n-1}) - n$

$= 10 \cdot \frac{10^n - 1}{10 - 1} - n$ [$\frac{a(r^n-1)}{r-1}$ [illegible] $r = 10 > 1$ [illegible]]

$= \frac{10}{9}(10^n - 1) - n$

$\therefore S_n = \frac{10}{9} \times \frac{7}{9}(10^n - 1) - \frac{7n}{9}$

$\therefore S_n = \frac{70}{81}(10^n - 1) - \frac{7n}{9}$

$\therefore$ [illegible] n [illegible] $= \frac{70}{81}(10^n - 1) - \frac{7n}{9}$ (Ans)

[N.B. এই টাইপের ধারার জন্য n সংখ্যক পদের সমষ্টি a + aa + aaa + ...
$= \frac{a\times 10}{81}(10^n - 1) - \frac{an}{9}$]

(খ) এর সমাধান:

প্রদত্ত ধারা, $5 + 55 + 555 + \ldots\ldots$

মনে করি, প্রদত্ত ধারার প্রথম n সংখ্যক পদের যোগফল S_n

$\therefore S_n = 5 + 55 + 555 + \ldots\ldots$ n তম পদ পর্যন্ত

$= 5(1 + 11 + 111 + \ldots\ldots$ n তম পদ পর্যন্ত)

$= \frac{5}{9}(9 + 99 + 999 + \ldots\ldots$ n তম পদ পর্যন্ত)

$= \frac{5}{9}(9 + 99 + 999 + \ldots\ldots$ n তম পদ পর্যন্ত)

$= \frac{5}{9}\{(10-1)+(100-1)+(1000-1)+\ldots\ldots$ n তম পদ পর্যন্ত}

$= \frac{5}{9}\{(10 + 10^2 + 10^3 + \ldots\ldots 10^n)$
$- (1 + 1 + 1 + \ldots\ldots$ n তম পদ পর্যন্ত)}

$= \frac{5}{9}\times 10(1 + 10 + 10^2 + \ldots\ldots 10^{n-1}) - \frac{5n}{9}$

$= \frac{50}{9}\times 1.\frac{10^n - 1}{10-1} - \frac{5n}{9}$

[$\frac{a(r^n-1)}{r-1}$ সূত্র প্রয়োগ করে; কারণ $r = 10$ যা 1 থেকে বড়]

$= \frac{50}{9\times 9}(10^n - 1) - \frac{5n}{9}$

$\therefore S_n = \frac{50}{81}(10^n - 1) - \frac{5n}{9}$

$\therefore$ ধারাটির প্রথম n পদের যোগফল $= \frac{50}{81}(10^n - 1) - \frac{5n}{9}$ **(Ans.)**

১৩। x এর উপর কি শর্ত আরোপ করলে $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)^3} + \ldots\ldots$ অসীম ধারাটির (অসীমতক) সমষ্টি থাকবে এবং সেই সমষ্টি নির্ণয় কর।

সমাধান:

প্রদত্ত ধারা, $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)^3} + \ldots\ldots$

ধারাটির প্রথম পদ, $a = \frac{1}{x+1}$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{1}{(x+1)^2} \div \frac{1}{x+1}$

$= \frac{1}{(x+1)^2}\times\frac{x+1}{1}$

$= \frac{1}{x+1}$

এখন প্রদত্ত ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে, যদি এবং কেবল যদি $|r| < 1$ হয়
অর্থাৎ, $-1 < r < 1$ হয়

বা, $-1 < \frac{1}{x+1} < 1$ হয় [$r = \frac{1}{x+1}$ বসিয়ে]

এখন, $-1 < \frac{1}{x+1}$

বা, $-(x+1) < 1$ [উভয় পক্ষকে $(x+1)$ দ্বারা গুণ করে]

বা, $-1 > x + 1$ [উভয় পক্ষকে -1 দ্বারা গুণ করে]

বা, $-1 - 1 > x + 1 - 1$ [উভয় পক্ষ থেকে 1 বিয়োগ করে]

বা, $-2 > x$

$\therefore x < -2$

অথবা, $\frac{1}{x+1} < 1$

বা, $1 < x + 1$ [উভয় পক্ষকে $(x+1)$ দ্বারা গুণ করে]

বা, $x + 1 > 1$

বা, $x + 1 - 1 > 1 - 1$ [উভয় পক্ষ থেকে 1 বিয়োগ করে]

$\therefore x > 0$

$\therefore$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি, $x < -2$ অথবা $x > 0$ হয়।

$\therefore$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1-r}$

$= \frac{\frac{1}{x+1}}{1 - \frac{1}{x+1}}$ $\left[\because a = \frac{1}{x+1}, r = \frac{1}{x+1}\right]$

$= \frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{x+1-1}{x+1}}$

$= \frac{1}{x+1}\times\frac{x+1}{x}$

$= \frac{1}{x}$

$\therefore$ যখন $x > 0$ অথবা $x < -2$ তখন ধারাটির অসীমতক সমষ্টি $\frac{1}{x}$।

ভুল সতর্কতা:

$-1 < \frac{1}{x+1} < 1$

বা, $-1 > x + 1 > 1$ [বিপরীতকরণ করে]

বা, $-1 - 1 > x + 1 - 1 > 1 - 1$ [উভয়পক্ষ হতে 1 বিয়োগ করে]

$\therefore -2 > x > 0$

[illegible]

১৪। প্রদত্ত পৌনঃপুনিক দশমিকগুলোকে মূলদীয় ভগ্নাংশ আকারে প্রকাশ কর:
(ক) $.\dot{2}\dot{7}$ (খ) $2.3\dot{4}\dot{5}$ (গ) $.\dot{0}12\dot{3}$ (ঘ) $3.0\dot{4}0\dot{3}$

(ক) এর সমাধান:

$0.\dot{2}\dot{7} = 0.272727\ldots\ldots$
$= 0.27 + 0.0027 + 0.000027 + \ldots\ldots$

ইহা একটি অসীম গুণোত্তর ধারা।
এখানে, প্রথম পদ $a = 0.27$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = \dfrac{0.0027}{0.27} = 0.01$

$$\therefore 0.\dot{2}\dot{7} = \frac{a}{1-r} = \frac{0.27}{1-0.01} = \frac{0.27}{0.99} = \frac{27}{99} = \frac{3}{11} \text{ (Ans)}$$

[লব ও হরকে 100 দ্বারা গুণ করে]

(খ) এর সমাধান:

$2.\dot{3}0\dot{5} = 2.305305305\ldots\ldots$
$= 2 + (0.305 + 0.000305 + 0.000000305 + \ldots\ldots)$

এখানে বন্ধনীর অভ্যন্তরের ধারাটি একটি অসীম গুণোত্তর ধারা।
ধারাটির প্রথম পদ $a = 0.305$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = \dfrac{0.000305}{0.305} = 0.001$

$$\therefore 2.\dot{3}0\dot{5} = 2 + \frac{a}{1-r} = 2 + \frac{0.305}{1-0.001} = 2 + \frac{0.305}{0.999} = 2 + \frac{305\times1000}{999\times1000} = 2 + \frac{305}{999} = \frac{1998+305}{999} = \frac{2303}{999} \text{ (Ans)}$$

(গ) এর সমাধান:

$0.0\dot{1}2\dot{3} = 0.0123123123\ldots\ldots$
$= 0.0123 + 0.0000123 + 0.0000000123 + \ldots\ldots$

ইহা একটি অসীম গুণোত্তর ধারা।
এখানে ধারাটির প্রথম পদ $a = 0.0123$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = \dfrac{0.0000123}{0.0123} = 0.001$

$$\therefore 0.0\dot{1}2\dot{3} = \frac{a}{1-r} = \frac{0.0123}{1-0.001} = \frac{0.0123}{0.999} = \frac{123\times1000}{999\times10000} = \frac{123}{9990} = \frac{41}{3330} \text{ (Ans.)}$$

(ঘ) এর সমাধান:

$3.0\dot{4}0\dot{3} = 3.0403403403\ldots\ldots$
$= 3 + (0.0403 + 0.0000403 + 0.0000000403 + \ldots)$

এখানে বন্ধনীর অভ্যন্তরের ধারাটি একটি অসীম গুণোত্তর ধারা।
ধারাটির প্রথম পদ $a = 0.0403$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = \dfrac{0.0000403}{0.0403} = 0.001$

$$\therefore 3.0\dot{4}0\dot{3} = 3 + \frac{a}{1-r} = 3 + \frac{0.0403}{1-0.001} = 3 + \frac{0.0403}{0.999} = 3 + \frac{403\times1000}{999\times10000} = 3 + \frac{403}{9990} = \frac{29970+403}{9990} = \frac{30373}{9990} = 3\frac{403}{9990} \text{ (Ans)}$$

১৫। একটি অনুক্রমের n তম পদ $Un = \dfrac{1}{n(n+1)}$. (VVI)

(ক) ধারাটি নির্ণয় করে সাধারণ অনুপাত নির্ণয় কর।
(খ) ধারাটির 15 তম পদ এবং ১ম 10 পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।
(গ) ধারাটির অসীমতক সমষ্টি নির্ণয় কর এবং n এর মান যথেষ্ট ছোট হলে u_n এর প্রান্তীয় মান সম্পর্কে কি বলা যায়?

(ক) এর সমাধান:

দেয়া আছে, ধারাটির n তম পদ, $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$

$n = 1$ হলে, ধারাটির প্রথম পদ, $u_1 = \dfrac{1}{1(1+1)} = \dfrac{1}{2}$

$n = 2$ হলে, ধারাটির দ্বিতীয় পদ, $u_2 = \dfrac{1}{2(2+1)} = \dfrac{1}{6}$

$n = 3$ হলে, ধারাটির তৃতীয় পদ, $u_3 = \dfrac{1}{3(3+1)} = \dfrac{1}{12}$

....

....

$\therefore$ ধারাটি হলো, $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{12} + \ldots\ldots$ (Ans.)

এবং সাধারণ অনুপাত = দ্বিতীয় পদ ÷ প্রথম পদ

$$=\frac{1}{6}\div\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{6}\times\frac{2}{1}=\frac{1}{3}\ \textbf{(Ans.)}$$

আবার, তৃতীয় পদ ÷ দ্বিতীয় পদ $=\frac{1}{12}\div\frac{1}{6}=\frac{1}{12}\times\frac{6}{1}=\frac{1}{2}$ দেখা যাচ্ছে যে, ধারাটির সাধারণ অনুপাত নেই।

(খ) এর সমাধান:

ধারাটির n তম পদ, $U_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$

$\therefore$ ধারাটির 15 তম পদ, $U_{15}=\dfrac{1}{15(15+1)}$

$$=\frac{1}{15\times16}=\frac{1}{240}\ \textbf{(Ans.)}$$

এখন, $U_n=\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$

$\therefore U_1=1-\frac{1}{2}$ $\qquad U_2=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$

$U_3=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$ $\qquad U_4=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}$

$U_5=\frac{1}{5}-\frac{1}{6}$ $\qquad U_6=\frac{1}{6}-\frac{1}{7}$

$U_7=\frac{1}{7}-\frac{1}{8}$ $\qquad U_8=\frac{1}{8}-\frac{1}{9}$

$U_9=\frac{1}{9}-\frac{1}{10}$ $\qquad U_{10}=\frac{1}{10}-\frac{1}{11}$

$\therefore$ ১ম দশটি পদের সমষ্টি $S_{10}=U_1+U_2+U_3+\ldots\ldots+U_{10}$

$$=1+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{10}\right)-\frac{1}{11}$$

$$=1-\frac{1}{11}=\frac{11-1}{11}=\frac{10}{11}\ \textbf{(Ans.)}$$

(গ) এর সমাধান:

ধারাটির n পদের সমষ্টি $S_n=U_1+U_2+U_3+\ldots\ldots+U_n$

$$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$

$$\therefore S_n=\frac{n}{n+1}=\frac{n}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\frac{1}{1+\frac{1}{n}}$$

$n\to\infty$ (অসীম) হলে ধারাটির অসীমতক সমষ্টি

$$S_\infty=\frac{1}{1+\frac{1}{\infty}}=\frac{1}{1+0}=1\left[\because\frac{1}{\infty}=0\right]$$

$\therefore$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি 1 **(Ans.)**

$U_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$ এখানে দেখা যায় যে, n এর মান বৃদ্ধি পেলে U_n এর মান হ্রাস পা

এবং n এর মান হ্রাস পেলে U_n এর মান বৃদ্ধি পায়। n এর মান যথেষ্ট ছোট হলে U_n এ প্রান্তীয় মান পাওয়া যায় না। অর্থাৎ অসীমের দিকে ধাবিত হয়।

অসীমতক সমষ্টি মানে n এর মান ∞ পর্যন্ত বাড়ালে যে সমষ্টি পাওয়া যাবে।

১৬। নিম্নের ধারাটি লক্ষ কর: (YVI)

$$\frac{1}{2x+1}+\frac{1}{(2x+1)^2}+\frac{1}{(2x+1)^3}+\ldots\ldots$$

(ক) $x=1$ হলে ধারাটি নির্ণয় কর এবং প্রাপ্ত ধারাটির সাধারণ অনুপাত কত?

(খ) ক নং এ প্রাপ্ত ধারাটির 10 তম পদ এবং ১ম 10টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

(গ) x এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে প্রদত্ত ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে এবং সমষ্টি নির্ণয় কর।

(ক) এর সমাধান:

প্রদত্ত ধারা, $\dfrac{1}{2x+1}+\dfrac{1}{(2x+1)^2}+\dfrac{1}{(2x+1)^3}+\ldots\ldots$

$x=1$ হলে, প্রদত্ত ধারাটি হবে,

$$\frac{1}{2.1+1}+\frac{1}{(2.1+1)^2}+\frac{1}{(2.1+1)^3}+\ldots\ldots$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots\ldots\ \textbf{(Ans)}$$

প্রাপ্ত ধারাটির সাধারণ অনুপাত = দ্বিতীয় পদ ÷ প্রথম পদ

$$=\frac{1}{3^2}\div\frac{1}{3}$$
$$=\frac{1}{3^2}\times\frac{3}{1}=\frac{1}{3}\ \textbf{(Ans.)}$$

(খ) এর সমাধান:

'ক' থেকে প্রাপ্ত ধারা, $\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots\ldots$

ধারাটির প্রথম পদ, $a=\frac{1}{3}$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r=\frac{1}{3}$

$\therefore$ ধারাটির 10 তম পদ $=ar^{10-1}$

$$=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^9$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^9}=\frac{1}{3^{10}}\ \textbf{(Ans.)}$$

এখন, ধারাটির প্রথম 10 পদের সমষ্টি $= \dfrac{a(1-r^{10})}{1-r}$

$$= \frac{\frac{1}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\right\}}{1-\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3^{10}}\right)}{\frac{3-1}{3}}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{3^{10}-1}{3^{10}}\right)}{\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{3^{10}-1}{3\times 3^{10}} \times \frac{3}{2}$$

$$= \frac{3^{10}-1}{2\times 3^{10}} \quad \textbf{(Ans)}$$

(গ) এর সমাধান:

প্রদত্ত ধারা, $\dfrac{1}{2x+1} + \dfrac{1}{(2x+1)^2} + \dfrac{1}{(2x+1)^3} + \dots \dots \dots$

প্রদত্ত ধারাটির প্রথম পদ, $a = \dfrac{1}{2x+1}$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = \dfrac{1}{(2x+1)^2} \div \dfrac{1}{2x+1}$

$$= \frac{1}{(2x+1)^2} \times \frac{2x+1}{1}$$

$$= \frac{1}{2x+1}$$

সুতরাং, অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি $x < -1$ অথবা $x > 0$ হয়।

এখন, ধারাটির অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \dfrac{a}{1-r}$

$$= \frac{\frac{1}{2x+1}}{1-\frac{1}{2x+1}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2x+1}}{\frac{2x+1-1}{2x+1}}$$

$$= \frac{1}{2x+1} \times \frac{2x+1}{2x}$$

$$= \frac{1}{2x}$$

Ans: $x < -1$ অথবা, $x > 0$ হলে সমষ্টি $\dfrac{1}{2x}$

বিকল্প পদ্ধতি:

$$\left|\frac{1}{2x+1}\right| < 1$$

বা, $-1 < \dfrac{1}{2x+1} < 1$

বা, $-1 > 2x+1 > 1$ [বিপরীত করণ করে]

বা, $-1-1 > 2x+1-1 > 1-1$ [সবপক্ষ হতে 1 বিয়োগ করে]

বা, $-2 > 2x > 0$

বা, $-\dfrac{2}{2} > \dfrac{2x}{2} > \dfrac{0}{2}$ [সবপক্ষকে 2 দ্বারা ভাগ করে]

$\therefore -1 > x > 0$

এ পদ্ধতিতে একই সমাধান পাওয়া যায়।

বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

বাস্তব জীবনে এ অধ্যায়ের প্রয়োগ

ইতিহাসের দিকে তাকালে দেখা যায়, জ্যোতির্বিদ্যা ও ভূগোলের বিভিন্ন বিষয় সমাধা করতে গিয়েই ত্রিকোণমিতির উদ্ভব হয়েছে; কিন্তু বিজ্ঞানীরা ... বিভিন্ন ক্ষেত্রে ত্রিকোণমিতি ব্যবহার করে যাচ্ছেন। পদার্থবিজ্ঞান, প্রকৌশলবিদ্যা, রসায়নশাস্ত্র প্রভৃতিতে ত্রিকোণমিতি ব্যবহৃত হয়। গণিতশাস্ত্রে ত্রিকোণমিতি ব্যবহার হয় ক্যালকুলাস, যোগাশ্রয়ী বীজগণিত বা লিনিয়ার অ্যালজেবরা ও পরিসংখ্যানে। সুতরাং বোঝাই যাচ্ছে ত্রিকোণমিতির গুরুত্ব অপরিসীম। এবার ... জীবনে ত্রিকোণমিতির কিছু প্রয়োগ দেখা যাক।

পর্বত কিংবা টাওয়ারের উচ্চতা নির্ণয় খুব সাধারণ একটি সমস্যা। এ সমস্যা সমাধানে ত্রিকোণমিতি ব্যবহৃত হয়।

নৌচালনবিদ্যায় সমুদ্রের কোন নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে তীরের দূরত্ব নির্ণয়েও ত্রিকোণমিতি ব্যবহৃত হয়।

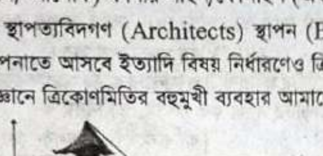
সমুদ্রবিদ্যায় (Oceonography) উঁচু ঢেউয়ের উচ্চতা নির্ণয়ে ত্রিকোণমিতির ব্যবহার রয়েছে।

মহাকাশবিজ্ঞানে মহাশূণ্যের বিভিন্ন বস্তুর (গ্রহ-উপগ্রহ) মধ্যে দূরত্ব নির্ণয়েও এ শাস্ত্রের ব্যবহার আছে।

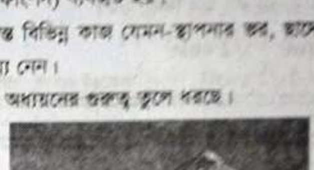
পর্যায়বৃত্তিক ফাংশন (শব্দ তরঙ্গ/ আলোক) বর্ণনায় সাইন/কোসাইন (অর্থাৎ ত্রিকোণমিতিক ফাংশন) ব্যবহৃত হয়।

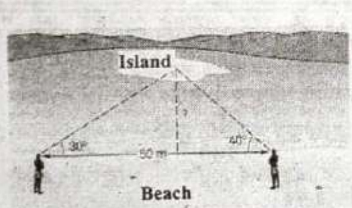
প্রকৌশলী (Engineer) ও স্থাপত্যবিদগণ (Architects) স্থাপন (Building) সংক্রান্ত বিভিন্ন কাজ যেমন-স্থাপনার স্তর, ছাদের ঢাল, ভূমির পৃষ্ঠ, দিন আলোক রশ্মি কত কোণে স্থাপনাতে আসবে ইত্যাদি বিষয় নির্ধারণেও ত্রিকোণমিতির সাহায্য নেন।

মোটকথা বাস্তব জীবন ও বিজ্ঞানে ত্রিকোণমিতির বহুমুখী ব্যবহার আমাদের সামনে এ শাস্ত্র অধ্যয়নের গুরুত্ব তুলে ধরছে।



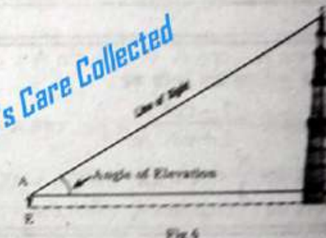
চিত্র-১: গাছের উচ্চতা নির্ণয়


চিত্র-২ পর্বতের উচ্চতা নির্ণয়

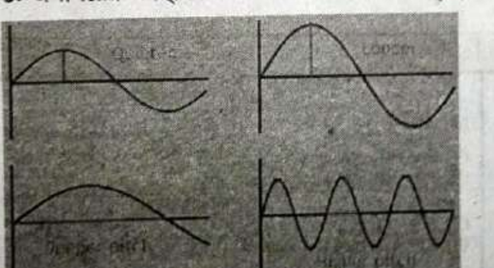


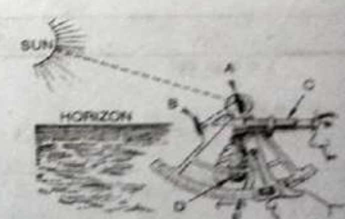
চিত্র-৩: জলাশয়ের অবস্থান নির্ণয়

চিত্র-৪: দূরত্ব নির্ণয়



চিত্র-৫: মিনারের উচ্চতা নির্ণয়


চিত্র-৬: শব্দ তরঙ্গে ত্রিকোণমিতির ব্যবহার



চিত্র-৭: দূরত্ব নির্ণয়

"As we express our gratitude, we must never forget that the highest appreciation is not to utter words, but to live by them".

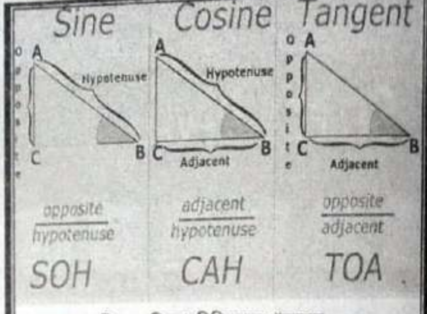
-John F. Kennedy

৮ ত্রিকোণমিতি [Trigonometry]

অনুশীলনী-৮.১

Angles / Degrees	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Not defined
cosec	Not defined	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1
sec	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	Not defined
cot	Not defined	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

চিত্র-১: বিভিন্ন কোণের ত্রিকোণমিতিক মানসমূহ



চিত্র-২: ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ

ভূমিকা [Introduction]

প্রাচীন যুগে মানুষ জ্যামিতির সাহায্যে নদীর তীরে দাঁড়িয়ে নদীর প্রস্থ নির্ণয় করার কৌশল শিখেছিল। গাছে না উঠেও গাছের ছায়ার সঙ্গে লাঠির তুলনা করে নিখুঁত ভাবে গাছের উচ্চতা মাপতে শিখেছিল। এই গাণিতিক কৌশল শেখানোর জন্য সৃষ্টি হয়েছে ত্রিকোণমিতি নামে গণিতের একটি বিশেষ শাখা। Trigonometry শব্দটি গ্রিক শব্দ tri (তিন) gon (ধার) metron (পরিমাপ) দ্বারা গঠিত। মিশর ও ব্যাবিলনীয় সভ্যতায় ত্রিকোণমিতির ব্যবহারের নিদর্শন রয়েছে। মিশরীয়রা ভূমি জরিপ ও প্রকৌশল কাজে এর বহুল ব্যবহার করতো বলে ধারণা করা হয়। এর সাহায্যে জোতির্বিদগণ পৃথিবী থেকে দূরবর্তী গ্রহ নক্ষত্রের দূরত্ব নির্ণয় করতেন। অধুনা ত্রিকোণমিতির ব্যবহার গণিতের সকল শাখায়। ত্রিভুজ সংক্রান্ত সমস্যার সমাধান, নেভিগেশন ইত্যাদি ক্ষেত্রে ত্রিকোণমিতির ব্যাপক ব্যবহার হয়ে থাকে। গণিতের গুরুত্বপূর্ণ জোতির্বিজ্ঞান শাখার ক্যালকুলাসে এর বহুল ব্যবহার রয়েছে।

আর্যভট্ট (Aryabhatta খ্রিস্টাব্দ: 476-550) প্রাচীন ভারতের সবচেয়ে বিখ্যাত গণিতবিদদের মধ্যে একজন। প্রাচীন ভারতীয় গণিতের ইতিহাসে আর্যভট্টের হাত ধরেই ক্লাসিক্যাল যুগ (কিংবা স্বর্ণযুগ) শুরু হয়। গণিত এবং জ্যোতির্বিদ্যা সংক্রান্ত আর্যভট্টের বিভিন্ন কাজ মূলত দুটি গ্রন্থে সংকলিত হয়েছে বলে জানা গেছে। এর মাঝে 'আর্যভটীয়' একটি, যেটি উদ্ধার করা গিয়েছে। এটি রচিত চার খণ্ডে, মোট ১১৮টি স্তবকে।

Aryabhatta

বোর্ড প্রশ্নাবলির বিশ্লেষণ [Board Questions Analysis]

এই অধ্যায় থেকে বিভিন্ন বোর্ডে বিগত দু'বছরের এসএসসি পরীক্ষায় মোট ১৬টি সৃজনশীল প্রশ্ন ও ৫৮টি বহুনির্বাচনি প্রশ্ন এসেছে। নিচের 'Board Analysis' অংশে এই অধ্যায় থেকে কোন সালে কোন বোর্ডে কতটি প্রশ্ন হয়েছে তা দেওয়া আছে।

সৃজনশীল প্রশ্ন

সাল \ বোর্ড	ঢাকা	রাজশাহী	কুমিল্লা	যশোর	চট্টগ্রাম	বরিশাল	সিলেট	দিনাজপুর
২০১৬	১	১	১	১	১	১	১	১
২০১৫	১	১	১	১	১	১	১	১

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

সাল \ বোর্ড	ঢাকা	রাজশাহী	কুমিল্লা	যশোর	চট্টগ্রাম	বরিশাল	সিলেট	দিনাজপুর
২০১৬	৭	৩	৪	৫	১	৫	৫	৪
২০১৫	৪	৩	৪	৩	৩	—	৬	২

মূল শব্দাবলি [Key Words]

সমকোণী ত্রিভুজ (*Right Angled Triangle*), অতিভুজ (*Hypotenuse*), বিপরীত বাহু (*Opposite Side*), সন্নিহিত বাহু (*Adjacent Side*), থিটা, θ (*Theta*), লম্ব (*Perpendicular*), সূক্ষ্মকোণ (*Acute Angle*), ত্রিকোণমিতিক অভেদাবলি (*Trigonometrical Identities*), ত্রিকোণমিতিক অনুপাত (*Trigonometrical Ratios*).

এ অধ্যায়ের আলোচ্যসূচি

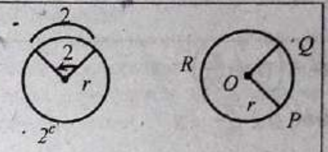
- কোণ পরিমাপের একক
- কোণের বৃত্তীয় পরিমাপ
- বিভিন্ন চতুর্ভাগে ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহের চিহ্ন
- সূক্ষ্মকোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত
- সূক্ষ্মকোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলো মধ্যে পারস্পরিক সম্পর্ক
- সূক্ষ্মকোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোর ধ্রুবতা যাচাই
- জ্যামিতিক পদ্ধতিতে 30°, 45°, 60° কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মান নির্ণয় ও প্রয়োগ
- 0° ও 90° কোণের অর্থপূর্ণ ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোর মান নির্ণয়
- ত্রিকোণমিতিক অভেদাবলির প্রমাণ
- ত্রিকোণমিতিক অভেদাবলির প্রয়োগ

প্রাথমিক আলোচনা

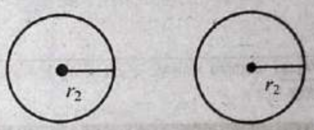
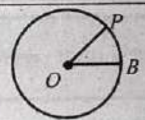
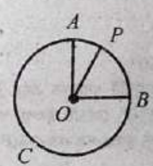
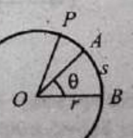
কোণ পরিমাপের একক: কোনো কোণের মান বা পরিমাণ নির্ণয়ে সাধারণত দুই প্রকার একক (*Unit*) পদ্ধতি ব্যবহার করা হয়;
১। ষাটমূলক পদ্ধতি (*Sexagesimal system*) ও
২। বৃত্তীয় পদ্ধতি (*Circular System*)।

১। ষাটমূলক পদ্ধতি: ষাটমূলক পদ্ধতিতে সমকোণকে কোণ পরিমাপের একক ধরা হয়। এই পদ্ধতিতে এক সমকোণ বা $90°$ কে সমান 90 ভাগে বিভক্ত করে প্রতি ভাগকে এক ডিগ্রি ($1° =$ *one degree*) ধরা হয়।

$60''$ (সেকেন্ড) $= 1'$ (মিনিট)	$60'$ (মিনিট) $= 1°$ (ডিগ্রি)	$90°$ (ডিগ্রি) $= 1$ (সমকোণ)

রেডিয়ান: কোনো বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান চাপ ঐ বৃত্তের কেন্দ্রে যে কোণ উৎপন্ন করে সেই কোণকে এক রেডিয়ান কোণ বলে।	চিত্রে, বৃত্তের ব্যাসার্ধ OP এর সমান চাপ PQ। চাপ PQ দ্বারা কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ $\angle POQ$ সংজ্ঞানুসারে, $\angle POQ =$ এক রেডিয়ান	

বৃত্তীয় পদ্ধতি: বৃত্তীয় পদ্ধতিতে এক রেডিয়ান কোণকে কোণ পরিমাপের একক ধরা হয়। রেডিয়ানের পরিমাণ বৃত্তের ওপর নির্ভর করে না। এটি একটি ধ্রুবক এবং কোণ পরিমাপের একক হিসেবে ব্যবহৃত হয়। এ একককে বৃত্তীয় একক বলা হয়।

প্রতিজ্ঞা-১: যেকোনো দুইটি বৃত্তের স্ব-স্ব পরিধি ও ব্যাসের অনুপাত সমান।	১ম বৃত্তের পরিধি, $x_1 = 2\pi r_1$ ২য় বৃত্তের পরিধি, $x_2 = 2\pi r_2$ ১ম বৃত্তের ব্যাস $= 2r_1$ ২য় বৃত্তের ব্যাস $= 2r_2$ $\therefore \frac{\text{১ম বৃত্তের পরিধি}}{\text{২য় বৃত্তের পরিধি}} = \frac{2\pi r_1}{2\pi r_2} = \frac{r_1}{r_2}$	
প্রতিজ্ঞা-২: বৃত্তের কোনো চাপ দ্বারা উৎপন্ন কেন্দ্রস্থ কোণ ঐ বৃত্তচাপের সমানুপাতিক।	চিত্রে O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে কেন্দ্রস্থ $\angle POB$, যা BP চাপ দ্বারা উৎপন্ন। সংজ্ঞানুসারে, $\angle POB \propto BP$	
প্রতিজ্ঞা-৩: রেডিয়ান কোণ একটি ধ্রুব কোণ।	চিত্রে $\angle POB = 1$ রেডিয়ান [কোনো বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান চাপ দ্বারা কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণের পরিমাণই 1 রেডিয়ান] $\angle POB = \frac{2}{\pi}$ সমকোণ $\therefore 1$ রেডিয়ান $= \frac{2}{\pi}$ সমকোণ যেহেতু 2 ও π উভয়ই ধ্রুবক	
প্রতিজ্ঞা-৪: r ব্যাসার্ধের কোনো বৃত্তে s দৈর্ঘ্যের কোনো চাপ কেন্দ্রে θ পরিমাণ কোণ উৎপন্ন করলে, $s = r\theta$ হবে। S r θ চাপের দৈর্ঘ্য ব্যাসার্ধ কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ (রেডিয়ান এককে)	চিত্রে $\angle POB = 1^c$ (1 রেডিয়ান) চাপ $AB = s$ একক, চাপ $PB = r$ একক আমরা জানি, কোনো বৃত্তচাপ দ্বারা উৎপন্ন কেন্দ্রস্থ কোণ ঐ বৃত্তচাপের সমানুপাতিক। $\therefore \frac{\text{চাপ } AB}{\text{চাপ } PB} = \frac{\angle AOB}{\angle POB}$ বা, $\frac{s}{r} = \frac{\theta}{1}$ $\therefore s = r\theta$	
মন্তব্য-১: যেকোনো বৃত্তের পরিধি ও ব্যাসের অনুপাত একটি ধ্রুবক (π), যা সবসময় সমান এবং একই ধ্রুব সংখ্যা। একে গ্রিক বর্ণ π দ্বারা প্রকাশ করা হয়। π একটি অমূলদ সংখ্যা ($\pi = 3.1415926535$ ....) **মজার বিষয়:** π এর আসন্ন মান (3.14) এর সাথে মিল রেখে মার্চের ১৪ তারিখ অর্থাৎ, 3/14 কে π দিবস (Piday) হিসেবে পালন করা হয়।	বৃত্তের ব্যাসার্ধ r হলে বৃত্তের ব্যাস $= 2r$ বৃত্তের পরিধি $= 2\pi r$ $\therefore \frac{\text{বৃত্তের পরিধি}}{\text{বৃত্তের ব্যাস}} = \frac{2\pi r}{2r} = \pi$