কোণের ডিগ্রি পরিমাপ ও রেডিয়ান (বৃত্তীয়) পরিমাপের সম্পর্ক

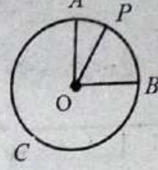
1 রেডিয়ান $= \frac{2}{\pi}$ সমকোণ

অর্থাৎ, $1^c = \frac{2}{\pi}$ সমকোণ। $[1 \text{ রেডিয়ান} = 1^c]$

$\therefore$ 1 সমকোণ $= \left(\frac{\pi}{2}\right)^c$

বা, $90^\circ = \left(\frac{\pi}{2}\right)^c$

$\therefore 1^\circ = \left(\frac{\pi}{180}\right)^c$ এবং $1^c = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$



কোণের ষাটমূলক ও রেডিয়ান (বৃত্তীয়) পরিমাপের সম্পর্ক

$D^\circ = \left(D \times \frac{\pi}{180}\right)^c = R^c$

অর্থাৎ, $D \times \frac{\pi}{180} = R$

বা, $\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$

1 রেডিয়ান	$\frac{2}{\pi}$ সমকোণ
π রেডিয়ান	2 সমকোণ
1 রেডিয়ান	$\frac{180^\circ}{\pi} = \frac{180^\circ}{3.14159} = 57^\circ 17' 44.8''$
1°	$\frac{\pi}{180}$ রেডিয়ান $= \frac{3.14159}{180}$ রেডিয়ান $= 0.0174533$ রেডিয়ান

দ্রষ্টব্য-২: অধ্যায়ের সমস্যায় π এর আসন্ন মান চার দশমিক স্থান ($\pi = 3.1416$) পর্যন্ত ব্যবহার করা হবে। π এর আসন্ন মান ব্যবহৃত হলে উত্তরে অবশ্যই 'প্রায়' কথাটি লিখতে হবে।

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনমূলক কাজের সমাধান

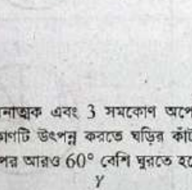
কাজ: [Ref: পাঠ্যবই পৃষ্ঠা: ১৪৪]

330°, 535°, 777° ও 1045° কোণসমূহ কোন চতুর্ভাগে অবস্থান করে তা চিত্রসহ দেখাও।

সমাধান:

• 330°
$= 270^\circ + 60^\circ$
$= 3 \times 90^\circ + 60^\circ$

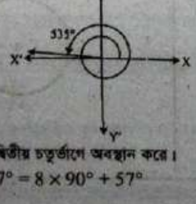
এখানে, 330° কোণটি ধনাত্মক এবং 3 সমকোণ অপেক্ষা বড় কিন্তু 4 সমকোণ অপেক্ষা ছোট। 330° কোণটি উৎপন্ন করতে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে কোনো রশ্মিকে 3 সমকোণ ঘুরার পর আরও 60° বেশি ঘুরতে হয়েছে।



সুতরাং, 330° কোণটি চতুর্থ চতুর্ভাগে অবস্থান করে।

• $535^\circ = 450^\circ + 85^\circ = 5 \times 90^\circ + 85^\circ$

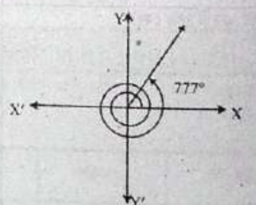
এখানে, 535° কোণটি ধনাত্মক এবং 5 সমকোণ অপেক্ষা বড় কিন্তু 6 সমকোণ অপেক্ষা ছোট। 535° কোণটি উৎপন্ন করতে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে কোনো রশ্মিকে 5 সমকোণ বা একবার সম্পূর্ণ ঘুরে আদি অবস্থানে আসার পর আরো এক সমকোণের চেয়ে 85° বেশি ঘুরতে হয়েছে।



সুতরাং, 535° কোণটি দ্বিতীয় চতুর্ভাগে অবস্থান করে।

• $777^\circ = 720^\circ + 57^\circ = 8 \times 90^\circ + 57^\circ$

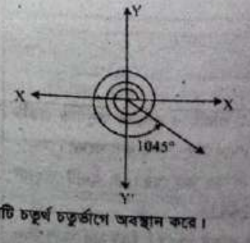
777° কোণটি ধনাত্মক এবং 8 সমকোণ অপেক্ষা বড় কিন্তু 9 সমকোণ অপেক্ষা ছোট। 777° কোণটি উৎপন্ন করতে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে কোনো রশ্মিকে 8 সমকোণ বা দুইবার সম্পূর্ণ ঘুরে আদি অবস্থানে আসার পর আরও 57° বেশি ঘুরতে হয়েছে।



সুতরাং, 777° কোণটি প্রথম চতুর্ভাগে অবস্থান করে।

• $1045^\circ = 990^\circ + 55^\circ = 11 \times 90^\circ + 55^\circ$

এখানে, 1045° কোণটি ধনাত্মক এবং 11 সমকোণ অপেক্ষা বড় কিন্তু 12 সমকোণ অপেক্ষা ছোট। 1045° কোণটি কোণ উৎপন্ন করতে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে কোনো রশ্মিকে 8 সমকোণ বা দুইবার সম্পূর্ণ ঘুরে আদি অবস্থানে আসার পর আরও তিন সমকোণের চেয়ে 55° বেশি ঘুরতে হয়েছে।



সুতরাং, 1045° কোণটি চতুর্থ চতুর্ভাগে অবস্থান করে।

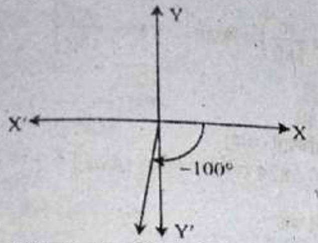
কাজ: [Ref: পাঠ্যবই পৃষ্ঠা: ১৪৪]

-100°, -365°, -720° ও 1320° কোণসমূহ কোন চতুর্ভাগে অবস্থান করে চিত্রসহ নির্ণয় কর।

সমাধান:

• $-100° = -90° - 10° = -1 \times 90° - 10°$

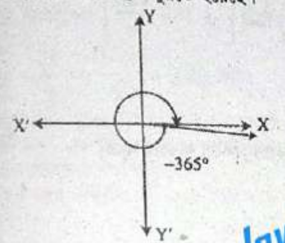
এখানে, $-100°$ কোণটি ঋণাত্মক এবং ঘড়ির কাঁটার দিকে এক সমকোণ ঘুরার পর একই দিকে আরও $10°$ ঘুরতে হয়েছে।



সুতরাং, $-100°$ কোণটির অবস্থান তৃতীয় চতুর্ভাগে।

• $-365° = -360° - 5° = -4 \times 90° - 5°$

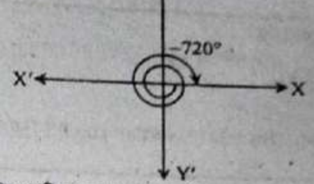
এখানে, $-365°$ কোণটি ঋণাত্মক এবং ঘড়ির কাঁটার দিকে একবার সম্পূর্ণ (4 সমকোণ) ঘুরার পর একই দিকে আরও $5°$ ঘুরতে হয়েছে।



সুতরাং, $-365°$ কোণটির অবস্থান চতুর্থ চতুর্ভাগে।

• $-720° = -8 \times 90°$

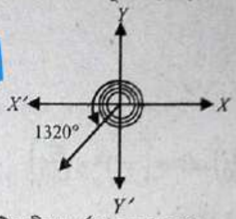
এখানে, $-720°$ কোণটি ঋণাত্মক এবং ঘড়ির কাঁটার দিকে দুইবার সম্পূর্ণ (8 সমকোণ) ঘুরার পর আর ঘুরেনি।



সুতরাং, $-720°$ কোণটির অবস্থান প্রথম চতুর্ভাগে।

• $1320° = 1260° + 60° = 14 \times 90° + 60°$

এখানে, $1320°$ কোণটি ধনাত্মক এবং 14 সমকোণ অপেক্ষা বড় কিন্তু 15 সমকোণ অপেক্ষা ছোট। $1320°$ কোণটি উৎপন্ন করতে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে কোনো রশ্মিকে 12 সমকোণ বা তিনবার সম্পূর্ণ ঘুরে আদি অবস্থানে আসার পর আরও দুই সমকোণের চেয়ে $60°$ বেশি ঘুরতে হয়েছে।



সুতরাং, $1320°$ কোণটি তৃতীয় চতুর্ভাগে অবস্থান করে।

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী ৮.১

ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে নিম্নের সমস্যাগুলোর সমাধান নির্ণয় কর। সমস্ত ক্ষেত্রে π এর আসন্ন মান চার দশমিক স্থান পর্যন্ত ব্যবহার কর $(\pi = 3.1416)$।

১। (ক) রেডিয়ানে প্রকাশ কর:

(i) $75°30'$ (ii) $55°54'53'$ (iii) $33°22°11''$

১। (খ) ডিগ্রিতে প্রকাশ কর:

(i) $\frac{8\pi}{13}$ রেডিয়ান (ii) 1.3117 রেডিয়ান (iii) 0.9759 রেডিয়ান

২। একটি কোণকে ষাটমূলক ও বৃত্তীয় পদ্ধতিতে যথাক্রমে D^0 ও R^c দ্বারা প্রকাশ করা হলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$.

৩। একটি চাকার ব্যাসার্ধ 2 মিটার 3 সে.মি. হলে, চাকার পরিধির আসন্ন মান চার দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় কর।

৪। একটি গাড়ির চাকার ব্যাস 0.84 মিটার এবং চাকাটি প্রতি সেকেন্ডে 6 বার ঘুরে। গাড়িটির গতিবেগ নির্ণয় কর।

৫। কোনো ত্রিভুজের কোণ তিনটির অনুপাত $2 : 5 : 3$ ক্ষুদ্রতম ও বৃহত্তম কোণের বৃত্তীয় মান কত?

৬। একটি ত্রিভুজের কোণগুলো সমান্তর শ্রেণিভুক্ত এবং বৃহত্তম কোণটি ক্ষুদ্রতম কোণের দ্বিগুণ। কোণগুলোর রেডিয়ান পরিমাপ কত?

৭। পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 6440 কি.মি.। ঢাকা ও চট্টগ্রাম পৃথিবীর কেন্দ্রে $5°$ কোণ উৎপন্ন করে। ঢাকা ও চট্টগ্রামের দূরত্ব কত?

৮। পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 6440 কি.মি.। টেকনাফ ও তেতুলিয়া পৃথিবীর কেন্দ্রে $10°6'3''$ কোণ উৎপন্ন করে। টেকনাফ ও তেতুলিয়ার মধ্যবর্তী দূরত্ব কত?

৯। শাহেদ একটি সাইকেলে চড়ে বৃত্তাকার পথে 11 সেকেন্ডে একটি বৃত্তচাপ অতিক্রম করে। যদি চাপটি কেন্দ্রে $30°$ কোণ উৎপন্ন করে এবং বৃত্তের ব্যাস 201 মিটার হয়, তবে শাহেদের সাইকেলের গতিবেগ কত?

১০। পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 6440 কি.মি.। পৃথিবীর উপরের যে দুইটি স্থান কেন্দ্রে $32''$ কোণ উৎপন্ন করে তাদের দূরত্ব কত?

১১। সকাল 9.30 টায় ঘড়ির ঘন্টার কাঁটা ও মিনিটের কাঁটার অন্তর্গত কোণকে রেডিয়ানে প্রকাশ কর।

[সংকেত: এক ঘর কেন্দ্রে $\frac{360°}{60} = 6°$ ডিগ্রি কোণ উৎপন্ন করে। 9.30 টায় ঘন্টার কাঁটা ও মিনিটের কাঁটার মধ্যে ব্যবধান $\left(15 + 2\frac{1}{2}\right)$ বা $17\frac{1}{2}$ ঘর]

১২। এক ব্যক্তি বৃত্তাকার পথে ঘন্টায় 6 কি.মি. বেগে দৌড়ে 36 সেকেন্ডে যে বৃত্তচাপ অতিক্রম করে তা কেন্দ্রে $60°$ কোণ উৎপন্ন করে। বৃত্তের ব্যাস নির্ণয় কর।

১৩। 750 কিলোমিটার দূরে একটি বিন্দুতে কোনো পাহাড় $8'$ কোণ উৎপন্ন করে। পাহাড়টির উচ্চতা নির্ণয় কর।

অনুশীলনী-৮.১ এর সমাধান

ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে নিম্নের সমস্যাগুলোর সমাধান নির্ণয় কর। সমস্ত ক্ষেত্রে π এর আসন্ন মান চার দশমিক স্থান পর্যন্ত ব্যবহার কর ($\pi = 3.1416$)।

১। (ক) রেডিয়ানে প্রকাশ কর:
(i) $75°30'$ (ii) $55°54'53''$ (iii) $33°22'11''$
১। (খ) ডিগ্রিতে প্রকাশ কর:
(i) $\frac{8\pi}{13}$ রেডিয়ান (ii) 1.3117 রেডিয়ান (iii) 0.9759 রেডিয়ান

১। (ক) রেডিয়ানে প্রকাশ কর:

(i) $75°30'$

সমাধান: $75°30'$

$= \left(75\frac{30}{60}\right)^\circ$

$= \left(75\frac{1}{2}\right)^\circ$

$= \left(\frac{251}{2}\right)^\circ$

$= \left(\frac{151}{2} \times \frac{\pi}{180}\right)$ রেডিয়ান $\left[\because 1° = \frac{\pi^c}{180}\right]$

$= \frac{151\pi}{360}$ $[\pi = 3.1416]$

$= 1.3178$ রেডিয়ান (প্রায়)

$\therefore 75°30' = 1.3178$ রেডিয়ান (প্রায়) [Ans.]

(ii) $55°54'53''$

সমাধান: $55°54'53''$

$= 55°\left(54\frac{53}{60}\right)'$ $[\because 1' = 60'']$

$= 55°\left(\frac{3293}{60}\right)'$

$= \left(55\frac{3293}{60 \times 60}\right)^\circ$ $[\because 1° = 60']$

$= \left(\frac{201293}{3600}\right)^\circ$

$= \left(\frac{201293}{3600} \times \frac{\pi}{180}\right)$ রেডিয়ান $\left[\because 1° = \frac{\pi^c}{180}\right]$

$= \frac{201293\pi}{648000}$ $[\because \pi = 3.1416]$

$= 0.9759$ রেডিয়ান (প্রায়)

$\therefore 0.9759$ রেডিয়ান (প্রায়) [Ans.]

(iii) $33°22'11''$

সমাধান: $33°22'11''$

$= 33°\left(22\frac{11}{60}\right)'$ $[\because 1' = 60'']$

$= 33°\left(\frac{1331}{60}\right)'$

$= \left(33 + \frac{1331}{60 \times 60}\right)^\circ$ $[\because 1° = 60']$

$= \left(\frac{120131}{3600}\right)^\circ$

$= \left(\frac{12031}{3600} \times \frac{\pi}{180}\right)$ রেডিয়ান $\left[\because 1° = \frac{\pi^c}{180}\right]$

$= \frac{120131\pi}{3600 \times 180}$

$= 0.5824$ রেডিয়ান (প্রায়)

$\therefore 33°22'11'' = 0.5824$ রেডিয়ান (প্রায়) [Ans.]

১। (খ) ডিগ্রিতে প্রকাশ কর:

(i) $\frac{8\pi}{13}$ রেডিয়ান

সমাধান: $\left(\frac{8\pi}{13} \times \frac{180}{\pi}\right)$ ডিগ্রি $\left[\because 1^c = \frac{180}{\pi}\right]$

$= \frac{1440}{13}$ ডিগ্রী

$= 110.7692308$

$= 110°46'9.23''$ [ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে]

(ii) 1.3177 রেডিয়ান

সমাধান

1.3177 রেডিয়ান

$= 1.3177 \times \frac{180}{\pi}$ ডিগ্রি $\left[\because 1^c = \frac{180°}{\pi}\right]$

$= \frac{237.186}{\pi}$ ডিগ্রী

$= \frac{237.186}{3.1416}$ ডিগ্রী

$= (75.49847)$ ডিগ্রী $[\therefore \pi = 3.1416]$

$= 75°29'54.49''$ [ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে]

$\therefore 1.3177$ রেডিয়ান $= 75°29'54.49''$

(iii) 0.9759 রেডিয়ান

সমাধান:

0.9759 রেডিয়ান

$= 0.9759 \times \frac{180}{\pi}$ ডিগ্রি $\left[\because 1^c = \frac{180°}{\pi}\right]$

$= 55.914821$

$= 55°54'53.36''$ [ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে]

$\therefore 0.9759$ রেডিয়ান $= 55°54'53.36''$

২। একটি কোণকে ষাটমূলক ও বৃত্তীয় পদ্ধতিতে যথাক্রমে $D°$ ও R^c দ্বারা প্রকাশ করা হলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$

সমাধান:

আমরা জানি,

$\therefore 1° = \left(\frac{\pi}{180}\right)^c$

$\therefore D° = \left(\frac{D \times \pi}{180}\right)^c$

ষাটমূলক ও বৃত্তীয় পদ্ধতিতে একটি কোণের পরিমাণ যথাক্রমে, $D°$ ও R^c হলে, $D° = R^c$

বা, $\frac{D \times \pi}{180} = R$

বা, $\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$ (প্রমাণিত)

৩। একটি চাকার ব্যাসার্ধ 2 মিটার 3 সে.মি. হলে, চাকার পরিধির আসন্ন মান চার দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় কর।

সমাধান:

দেওয়া আছে,
চাকার ব্যাসার্ধ, $r = 2$ মিটার 3 সে.মি.

$= 2$ মিটার $+ \frac{3}{100}$ মিটার [$\because$ 100 সে.মি. $=$ 1 মিটার]

$= (2 + 0.03)$ মিটার

$= 2.03$ মিটার

আমরা জানি, পরিধি $= 2\pi r$

অতএব, চাকার পরিধি $= 2 \times 3.1416 \times 2.03 = 12.7549$ মিটার (প্রায়)

উত্তর: 12.7549 মিটার (প্রায়)

৪। একটি গাড়ির চাকার ব্যাস 0.84 মিটার এবং চাকাটি প্রতি সেকেন্ডে 6 বার ঘুরে। গাড়িটির গতিবেগ নির্ণয় কর।

সমাধান:

দেওয়া আছে,
চাকার ব্যাস, $d = 0.84$ মিটার

অতএব, ব্যাসার্ধ, $r = \frac{d}{2} = \frac{0.84}{2} = 0.42$ মিটার

$\therefore$ চাকাটির পরিধি, $2\pi r = 2 \times 3.1416 \times 0.42 = 2.6389$ মিটার

আমরা জানি, একটি চাকা এক বার ঘুরলে তার পরিধি সমান দূরত্ব অতিক্রম করে।
আবার চাকাটি প্রতি সেকেন্ডে 6 বার ঘুরে।

অতএব, 6 বার ঘুরার ফলে গাড়িটির অতিক্রান্ত দূরত্ব $= 6 \times$ পরিধি

$= 6 \times 2.6389$ মিটার

$= 15.8336$ মিটার

সুতরাং, গাড়িটির 1 সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব $= 15.8336$ মিটার

$\therefore$ গাড়িটির 1 ঘন্টার বা 3600 সেকেন্ডে অতিক্রান্ত দূরত্ব $= 15.8336 \times 3600$ মিটার

$= 57000.96$ মিটার

$= 57$ কি.মি. (প্রায়)

$\therefore$ গাড়িটির গতিবেগ ≈ 57 কি.মি./ঘন্টা (প্রায়)

উত্তর: 57 কি.মি./ঘন্টা (প্রায়)

৫। কোনো ত্রিভুজের কোণ তিনটির অনুপাত 2 : 5 : 3 ক্ষুদ্রতম ও বৃহত্তম কোণের বৃত্তীয় মান কত?

সমাধান:

দেওয়া আছে, ত্রিভুজের কোণ তিনটির অনুপাত 2 : 5 : 3
ধরি, কোণ তিনটি যথাক্রমে $2x^c$, $5x^c$ এবং $3x^c$

আমরা জানি, ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি 2 সমকোণ বা, π^c

প্রশ্নমতে, $2x^c + 5x^c + 3x^c = \pi^c$

বা, $10x^c = \pi^c$

বা, $x = \frac{\pi}{10}$

$\therefore$ ক্ষুদ্রতম কোণ $= 2x^c = \left(2 \times \frac{\pi}{10}\right)^c = \frac{\pi}{5}$ রেডিয়ান

বৃহত্তম কোণ $= 5x^c = \left(5 \times \frac{\pi}{10}\right)^c = \frac{\pi}{2}$ রেডিয়ান

উত্তর: $\frac{\pi}{5}$ রেডিয়ান, $\frac{\pi}{2}$ রেডিয়ান

৬। একটি ত্রিভুজের কোণগুলো সমান্তর প্রেণিভুক্ত এবং বৃহত্তম কোণটি ক্ষুদ্রতম কোণের দ্বিগুণ। কোণগুলোর রেডিয়ান পরিমাপ কত?

সমাধান:

মনে করি, ত্রিভুজটির ক্ষুদ্রতম কোণ x রেডিয়ান
এবং ত্রিভুজটির বৃহত্তম কোণ $2x$ রেডিয়ান

যেহেতু কোণগুলো সমান্তর শ্রেণিভুক্ত, তাই অপর কোণটি $= \frac{x + 2x}{2}$ রেডিয়ান

$= \frac{3x}{2}$ রেডিয়ান

[এখানে, কোণগুলো সমান্তর শ্রেণিভুক্ত, তাই ক্ষুদ্রতম কোণটি একটি সমান্তর ধারার ১ম পদ, বৃহত্তম কোণটি ৩য় পদ হবে এবং অপর কোণটি হবে ২য় পদ, আমরা জানি, সমান্তর ধারার ক্ষেত্রে, ২য় পদ $=$ $\frac{\text{১ম পদ + ৩য় পদ}}{2}$ সাধারণ ভাবে, n তম পদ ও $(n + 2)$ তম পদের গাণিতিক গড় হলো $(n + 1)$ তম পদের সমান। যেমন, $2 + 4 + 6 + 8 + \ldots\ldots\ldots$ সমান্তর ধারাটির ২য় পদ 4 যা ১ম পদ ও তৃতীয় পদের গড়ের সমান অর্থাৎ $\frac{2+6}{2} = \frac{8}{2} = 4$]

আমরা জানি, ত্রিভুজের তিনকোণের সমষ্টি দুই সমকোণ বা 180° বা π রেডিয়ান।
প্রশ্নমতে,

$$x + \frac{3x}{2} + 2x = \pi$$

বা, $\frac{2x + 3x + 4x}{2} = \pi$

বা, $9x = 2\pi$

$\therefore x = \frac{2\pi}{9}$ রেডিয়ান

$\therefore$ ত্রিভুজটির ক্ষুদ্রতম কোণ, $x = \frac{2\pi}{9}$ রেডিয়ান

ত্রিভুজটির বৃহত্তম কোণ, $2x = 2 \times \frac{2\pi}{9}$

$= \frac{4\pi}{9}$ রেডিয়ান

$\therefore$ অপর কোণটি হলো, $\frac{3}{2}x = \frac{3}{2} \times \frac{2\pi}{9} = \frac{\pi}{3}$ রেডিয়ান

$\therefore$ ত্রিভুজটি কোণ তিনটি যথাক্রমে, $\frac{2\pi}{9}$, $\frac{\pi}{3}$ এবং $\frac{4\pi}{9}$ রেডিয়ান।

উত্তর: $\frac{2\pi}{9}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{9}$

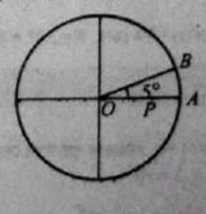
৭। পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 6440 কি.মি.। ঢাকা ও চট্টগ্রাম পৃথিবীর কেন্দ্রে 5° কোণ উৎপন্ন করে। ঢাকা ও চট্টগ্রামের দূরত্ব কত?

সমাধান:

মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট পৃথিবীর উপরস্থ দুটি স্থান ঢাকা ও চট্টগ্রাম যথাক্রমে A এবং B।

পৃথিবীর ব্যাসার্ধ $r = 6440$ কি.মি.

পৃথিবীর কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ



$\angle AOB = \theta = 5^\circ = 5 \times \frac{\pi^c}{180}$

$= \frac{\pi}{36}$ রেডিয়ান।

ঢাকা ও চট্টগ্রামের দূরত্ব $=$ চাপ $AB = S$

$\therefore S = r\theta = 6440 \times \frac{\pi}{36}$ কি.মি.

$= 561.997$ কি.মি. (প্রায়)

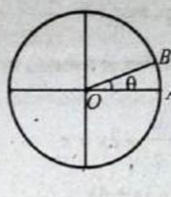
$= 562$ কি.মি. (প্রায়)

[দ্রষ্টব্য: পৃথিবী গোলাকার (কমলা লেবুর আকৃতির)। তাই পৃথিবীর যেকোনো দুইটি স্থানের মধ্যবর্তী দূরত্ব, রৈখিক দূরত্ব নয় বরং দূরত্ব হবে চাপ আকৃতির]

৮। পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 6440 কি.মি.। টেকনাফ ও তেঁতুলিয়া পৃথিবীর কেন্দ্রে 10°6'3" কোণ উৎপন্ন করে। টেকনাফ ও তেঁতুলিয়ার মধ্যবর্তী দূরত্ব কত?

সমাধান:

মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট পৃথিবীর উপরস্থ দুটি স্থান টেকনাফ ও তেঁতুলিয়া যথাক্রমে A এবং B।
এখানে, পৃথিবীর ব্যাসার্ধ, $r = 6440$ কি.মি.
পৃথিবীর কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ,
$\angle AOB = \theta = 10°6'3''$



$$= 10°\left(6\frac{3}{60}\right)'$$

$$= 10°\left(6\frac{1}{20}\right)'$$

$$= 10°\left(\frac{121}{20}\right)'$$

$$= \left(10\frac{121}{20\times 60}\right)°$$

$$= \left(\frac{12121}{1200}\right)°$$

$$= \left(\frac{12121}{1200}\times\frac{\pi}{180}\right) \text{ রেডিয়ান}$$

$= 0.17629$ রেডিয়ান

এবং $AB = S =$ টেকনাফ ও তেঁতুলিয়ার দূরত্ব
$\therefore S = r\theta$
$= 6440 \times 0.17629$ কি.মি.
$= 1135.3076$ কি.মি. (প্রায়) **(উত্তর)**

৯। শাহেদ একটি সাইকেলে চড়ে বৃত্তাকার পথে 11 সেকেন্ডে একটি বৃত্তচাপ অতিক্রম করে। যদি চাপটি কেন্দ্রে 30° কোণ উৎপন্ন করে এবং বৃত্তের ব্যাস 201 মিটার হয়, তবে শাহেদের সাইকেলের গতিবেগ কত?

সমাধান:

দেওয়া আছে, বৃত্তের ব্যাস, $d = 201$ মিটার

$\therefore$ বৃত্তের ব্যাসার্ধ, $r = \frac{d}{2} = \frac{201}{2} = 100.5$ মিটার

কেন্দ্রে গঠিত কোণ, $\theta = 30° = 30 \times \frac{\pi}{180}^c$

$= \frac{\pi}{6}$ রেডিয়ান

মনে করি, অতিক্রান্ত বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য $= S$ মিটার।
$\therefore S = r\theta$

$= 100.5 \times \frac{\pi}{6}$

$= 52.62$ মিটার।
অর্থাৎ, শাহেদ 11 সেকেন্ডে অতিক্রম করে 52.62 মিটার

$\therefore$ " 1 " " " $= \frac{52.62}{11}$

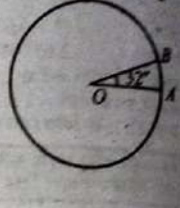
$= 4.78$ মিটার (প্রায়)

$\therefore$ শাহেদের সাইকেলের গতিবেগ 4.78 মিটার/সেকেন্ড
উত্তর: 4.78 মিটার/সেকেন্ড

১০। পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 6440 কি.মি.। পৃথিবীর উপরের যে দুইটি স্থান কেন্দ্রে 32" কোণ উৎপন্ন করে তাদের দূরত্ব কত?

সমাধান:

মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট পৃথিবীর উপরস্থ দুটি স্থান A ও B কেন্দ্রে 32" কোণ উৎপন্ন করে।
পৃথিবীর কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ $\theta = 32''$



$$= \left(\frac{32}{60}\right)' = \left(\frac{32}{60\times 60}\right)°$$

$$= \left(\frac{32\times\pi}{60\times 60\times 180}\right) \text{ রেডিয়ান}$$

স্থান দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব চাপ, $AB = S = r\theta$

$= 6440 \times \frac{32\times\pi}{60\times 60\times 180}$ কি.মি.

$= 0.9991$ কি.মি. $= 1$ কি.মি. (প্রায়)

উত্তর: 1 কি.মি. (প্রায়)

১১। সকাল 9.30 টায় ঘড়ির ঘণ্টার কাঁটা ও মিনিটের কাঁটার অন্তর্গত কোণকে রেডিয়ানে প্রকাশ কর।

[সংকেত: এক ঘর কেন্দ্রে $\frac{360°}{60} = 6°$ কোণ উৎপন্ন করে। 9.30 টায় ঘণ্টার কাঁটা ও মিনিটের কাঁটার মধ্যে ব্যবধান $\left(15 + 2\frac{1}{2}\right)$ বা $17\frac{1}{2}$ ঘর]

সমাধান:

60 মিনিটে ঘড়ির মিনিটের কাঁটা 60 টি ঘর অতিক্রম করে এবং 60 মিনিটে ঘণ্টার কাঁটা 5 টি ঘর অতিক্রম করে। সুতরাং 30 মিনিটে ঘণ্টার কাঁটা $\frac{5}{2}$ ঘর সামনে অতিক্রম করে যায়।

আবার, ঘড়ির ডায়াল বা মুখপাত্রের 60 টি ঘর কেন্দ্রে চার সমকোণ বা 360° কোণ ধারণ করে।

$\therefore$ একটি ঘর কেন্দ্রে $\frac{360°}{60} = 6°$ কোণ ধারণ করে।

সুতরাং, 9.30 টায় ঘড়ির মিনিটের কাঁটা ও ঘণ্টার কাঁটার মধ্যে ব্যবধান $= (15$ ঘর $+ \frac{5}{2}$ ঘর$)$

$= 17\frac{1}{2}$ ঘর।

[ঘণ্টার কাটা 1 ঘণ্টায় ঘোরে 5 ঘর সুতরাং 12 থেকে 7 টা মোট 3 ঘণ্টায় ঘোরে $3 \times 5 = 15$ ঘর]

যেহেতু 1 ঘর কেন্দ্রে 6° কোণ ধারণ করে

সেহেতু $17\frac{1}{2}$ ঘর কেন্দ্রে $17\frac{1}{2} \times 6° = 105°$ কোণ ধারণ করে

আমরা জানি, $1° = \frac{\pi}{180}$ রেডিয়ান

$$\therefore 105° = \left(\frac{\pi}{180}\times 105\right)$$

$= 1.833$ রেডিয়ান (প্রায়)

উত্তর: 1.833 রেডিয়ান (প্রায়)

১২। এক ব্যক্তি বৃত্তাকার পথে ঘণ্টায় 6 কি.মি. বেগে দৌড়ে 36 সেকেন্ডে যে বৃত্তচাপ অতিক্রম করে তা কেন্দ্রে 60° কোণ উৎপন্ন করে। বৃত্তের ব্যাস নির্ণয় কর।

সমাধান:

মনে করি, O কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধ $= r$ মিটার

আমরা জানি, 1 ঘণ্টা = 3600 সেকেন্ড

আবার, 6 কি.মি. $= 6 \times 1000$ মিটার

সুতরাং,

লোকটি 3600 সেকেন্ড অতিক্রম করে 6×1000 মিটার পথ

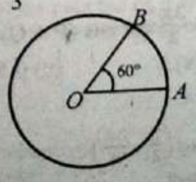
$\therefore$ লোকটি 36 সেকেন্ড অতিক্রম করে $\frac{6 \times 1000 \times 36}{3600}$ মিটার পথ

$= 60$ মিটার পথ

যদি 36 সেকেন্ডে উৎপন্ন বৃত্তচাপটি AB চাপ হয় তাহলে AB চাপের দৈর্ঘ্য, $s = 60$ মিটার দেওয়া আছে,

কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ, $\theta = 60^\circ = 60 \times \frac{\pi}{180}$ রেডিয়ান $\left[\because 1^\circ = \frac{\pi^c}{180}\right]$

$= \frac{\pi}{3}$ রেডিয়ান



আমরা জানি,

$s = r\theta$

বা, $60 = r \times \frac{\pi}{3}$

বা, $r = \frac{60 \times 3}{\pi}$

বা, $r = \frac{60 \times 3}{3.1416}$

$\therefore r = 57.2956$

$\therefore$ বৃত্তের ব্যাস $= 2r$ মিটার

$= 2 \times 57.2956$ মিটার

$= 114.59$ মিটার (প্রায়)

$\therefore$ নির্ণেয় ব্যাস $= 114.59$ মিটার (প্রায়)

উত্তর: 114.59 মিটার (প্রায়)

১৩। 750 কিলোমিটার দূরে একটি বিন্দুতে কোনো পাহাড় $8'$ কোণ উৎপন্ন করে। পাহাড়টির উচ্চতা নির্ণয় কর।

সমাধান:

আমরা জানি, r ব্যাসার্ধের বৃত্তের কেন্দ্রে s চাপ θ কোণ উৎপন্ন করলে, $s = r\theta$

এখন, $\theta = 8' = \frac{8}{60}^\circ = \frac{8}{60} \times \frac{\pi}{180}$ রেডিয়ান

এবং $r = 750$ কি.মি.

$\therefore$ পাহাড়ের উচ্চতা, $s = r\theta$

$= 750 \times \frac{8}{60} \times \frac{\pi}{180}$ কি.মি.

$= 1.745$ কি.মি. বা 1745 মিটার

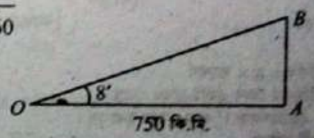
$= 1.745$ কি.মি. (প্রায়) বা 1745 মিটার (প্রায়)

$\therefore$ নির্ণেয় উচ্চতা $= 1.745$ কি.মি. (প্রায়) বা 1745 মিটার (প্রায়)

উত্তর: 1.745 কি.মি. (প্রায়) বা 1745 মিটার (প্রায়)

বিকল্প পদ্ধতি:

এখানে, $\theta = 8' = \frac{8}{60}^\circ$



মনে করি, পাহাড়ের উচ্চতা $= AB$

এবং নির্দিষ্ট বিন্দু হতে পাহাড়ের দূরত্ব, $OA = 750$ কি.মি.

$\therefore \tan\theta = \frac{AB}{OA}$

বা, $AB = OA \times \tan\theta$

বা, $AB = 750 \times \tan\left(\frac{8}{60}\right)^\circ$

$\therefore AB = 1.745$ কি.মি. $= 1745$ মিটার $[\because 1km = 1000m]$

$\therefore$ পাহাড়ের উচ্চতা $= 1.745$ কি.মি. বা 1745 মিটার। [Ans.]

অনুশীলনী-৮.২

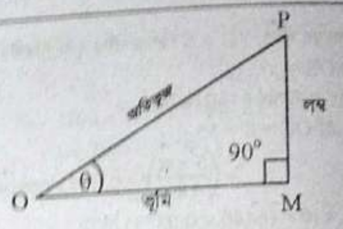
প্রাথমিক আলোচনা

ত্রিকোণমিতির ভিত্তি: সমকোণী ত্রিভুজের উপর ভিত্তি করেই 'ত্রিকোণমিতি' নামক বিষয়টি গড়ে উঠেছে।

ত্রিকোণমিতির অনুপাতসমূহ:

মনে করি, ΔOPM একটি সমকোণী ত্রিভুজ।

এখানে, $\angle M = 90^\circ$ বা এক সমকোণ এবং $\angle O = \theta$, একটি সূক্ষ্মকোণ। OPM সমকোণী ত্রিভুজে $OP =$ অতিভুজ, $OM =$ ভূমি এবং $PM =$ লম্ব।



এই সমকোণী ত্রিভুজের সূক্ষ্মকোণ (θ) এর ৬টি ত্রিকোণমিতিক অনুপাত পাওয়া যায়।

যথা:

(i) $\sin\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{PM}{OP}$ (ইহা লম্ব ও অতিভুজের অনুপাত)

(ii) $\cos\theta = \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{OM}{OP}$ (ইহা ভূমি ও অতিভুজের অনুপাত)

(iii) $\tan\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \frac{PM}{OM}$ (ইহা লম্ব ও ভূমির অনুপাত)

(iv) $\cot\theta = \frac{\text{ভূমি}}{\text{লম্ব}} = \frac{OM}{PM}$ (ইহা ভূমি ও লম্বের অনুপাত)

(v) $\sec\theta = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{ভূমি}} = \frac{OP}{OM}$ (ইহা অতিভুজ ও ভূমির অনুপাত)

(vi) $\text{cosec}\theta = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{লম্ব}} = \frac{OP}{PM}$ (ইহা অতিভুজ ও লম্বের অনুপাত)

পরস্পর বিপরীত অনুপাতসমূহ:

1. $\sin\theta$ ও $\text{cosec}\theta$ পরস্পর বিপরীত:
   অর্থাৎ, $\sin\theta = \frac{1}{\text{cosec}\theta}$ বা, $\text{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$
2. $\cos\theta$ ও $\sec\theta$ পরস্পর বিপরীত:
   অর্থাৎ, $\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}$ বা, $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$
3. $\tan\theta$ ও $\cot\theta$ পরস্পর বিপরীত:
   অর্থাৎ, $\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$ বা, $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$

লক্ষ করি: $\sin\theta$ প্রতীকটি θ কোণের সাইন অনুপাতকে বোঝায়। sin ও θ এর গুণফল নয়। θ বাদে sin আলাদা কোনো অর্থ বহন করে না। অনুরূপ উক্তি $\cos\theta$, $\sec\theta$, $\text{cosec}\theta$, $\tan\theta$, $\cot\theta$ অনুপাতগুলোর জন্যও প্রযোজ্য। [Ref: পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-১৫৪]

ত্রিকোণমিতিক অনুপাত মনে রাখার উপায়:

Mnemonic:

$\sin\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}}$	সাগরে	লবণ	আছে
	↓	↓	↓
	sine	লম্ব	অতিভুজ

$\cos\theta = \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}}$	কবরে	ভূত	আছে
	↓	↓	↓
	cos	ভূমি	অতিভুজ

$\tan\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}}$	ট্যারা	লম্বা	ভূত
	↓	↓	↓
	tan	লম্ব	ভূমি

ত্রিকোণমিতিতে বহুল ব্যবহৃত সূত্রসমূহ

1. $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$	2. $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$	3. $\text{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$	4. $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$	5. $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

ত্রিকোণমিতির অনুপাত সংক্রান্ত কতিপয় সহজ অভেদাবলি

OPM সমকোণী ত্রিভুজে $OP^2 = PM^2 + OM^2$ ... ... (i)

বা, $\left(\frac{OP}{OP}\right)^2 = \left(\frac{PM}{OP}\right)^2 + \left(\frac{OM}{OP}\right)^2$

বা, $1 = (\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2$

$\therefore \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

(i) নং এর উভয়পক্ষে PM^2 দ্বারা ভাগ করে পাই,

$\left(\frac{OP}{PM}\right)^2 = \left(\frac{PM}{PM}\right)^2 + \left(\frac{OM}{PM}\right)^2$

বা, $(\text{cosec}\theta)^2 = 1 + (\cot\theta)^2$

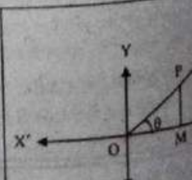
$\therefore \text{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta$

(i) নং এর উভয়পক্ষে OM^2 দ্বারা ভাগ করে পাই,

$\left(\frac{OP}{OM}\right)^2 = \left(\frac{PM}{OM}\right)^2 + \left(\frac{OM}{OM}\right)^2$

বা, $(\sec\theta)^2 = (\tan\theta)^2 + 1$

$\therefore \sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$



আবার, θ-এর যেকোনো মানের জন্য অভেদগুলো সত্য হওয়ায় লেখা যায়—

$\sin^2 0^\circ + \cos^2 0^\circ = 1$; $\sin^2\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2} = 1$; $\sin^2 5\theta + \cos^2 5\theta = 1$

...ক্ষেত্রে রাখা ভালো:
...পূর্ণসংখ্যা সূচক n এর জন্য
$(\sin\theta)^n = \sin^n\theta$ অনুরূপভাবে, $(\cos\theta)^n = \cos^n\theta$
সুতরাং $(\sin\theta)^2 = \sin^2\theta$ এবং $(\cos\theta)^2 = \cos^2\theta$
একইভাবে, $(\sin\theta)^3 = \sin^3\theta$ এবং $(\cos\theta)^3 = \cos^3\theta$

...আকর্ষণ: $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
একইভাবে, $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$. একইভাবে, $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

কিন্তু মনে রাখবেন,
$$\sin^2 A + \cos^2 B \neq 1$$
অর্থাৎ, $\sin^2 A + \cos^2 B$ এর মান 1 হতে পারে না।
একইভাবে, $\sin^2\theta + \cos^2 A \neq 1$
অর্থাৎ sin ও cos উভয়ের বেলায় একই কোণ না হলে-
$\boxed{\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1}$ -এই সূত্র প্রযোজ্য হবে না।

আদর্শ কোণসমূহের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ

মনে রাখার কৌশল (0, 1, 2, 3 এবং 4 সংখ্যাগুলোর প্রত্যেকটিকে 4 দ্বারা ভাগ করে)

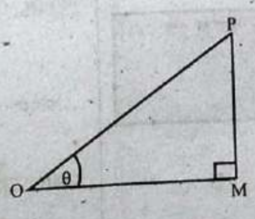
কোণ অনুপাত	0	$\frac{\pi}{6}(30°)$	$\frac{\pi}{4}(45°)$	$\frac{\pi}{3}(60°)$	$\frac{\pi}{2}(90°)$
sin	$\sqrt{\frac{0}{4}} = 0$	$\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{\frac{4}{4}} = 1$
cos	$\sqrt{\frac{4}{4}} = 1$	$\sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{0}{4}} = 0$
tan	$\sqrt{\frac{0}{3}} = 0$	$\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{\frac{3}{3}} = 1$	$\sqrt{\frac{9}{3}} = \sqrt{3}$	অসংজ্ঞায়িত
cot: $\cot = \frac{1}{\tan\theta}$	অসংজ্ঞায়িত	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
sec: $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	অসংজ্ঞায়িত
cosec: $\text{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$	অসংজ্ঞায়িত	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1

$\tan\theta = \frac{y}{x}$ যখন $\theta = 90°$; স্থানাঙ্ক হবে $(0, a)$ অর্থাৎ $x = 0$, ফলে $\tan 90°$ সর্বদা ∞

বি.দ্র.: শূন্য (0) দ্বারা কোনো কিছুকে ভাগ করলে অসংজ্ঞায়িত হয়। যথা- $\frac{a}{0}, \frac{x}{0}, \frac{2}{0}, \frac{5}{0}$ ইত্যাদি অসংজ্ঞায়িত।

ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মানের সীমাবদ্ধতা ও পরিধি

OPM সমকোণী ত্রিভুজে অতিভুজ OP বৃহত্তম বাহু
$\therefore \frac{PM}{OP} < 1$ অর্থাৎ $\sin\theta < 1$
$\frac{OM}{OP} < 1$ অর্থাৎ $\cos\theta < 1$
$\frac{OP}{PM} > 1$ অর্থাৎ $\text{cosec}\theta > 1$
$\frac{OP}{OM} > 1$ অর্থাৎ $\sec\theta > 1$
আবার, ΔPOM-এ $PM + OM > OP$
বা, $\frac{PM}{OP} + \frac{OM}{OP} > 1$
$\therefore \sin\theta + \cos\theta > 1$ যখন θ সূক্ষ্মকোণ।



আবার, $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ এক্ষেত্রে লক্ষণীয়:
(i) $\sin^2\theta$ ও $\cos^2\theta$ উভয়েই বাস্তব সংখ্যার বর্গ অতএব, উভয়ই ধনাত্মক।
(ii) এ হিসেবে $\sin^2\theta$ কিংবা $\cos^2\theta$ কোনোটিরই মান 1 এর বেশি হতে পারে না।
(iii) যদি $\sin^2\theta$ এর মান 1 এর চেয়ে বড় হয় তবে $\cos^2\theta$ এর মান ঋণাত্মক হবে যা অসম্ভব।
(iv) অতএব, $\sin^2\theta$ অথবা $\cos^2\theta$ কোনোটিরই মান 1 এর বেশি হতে পারে না।
(v) সুতরাং θ এর যেকোনো মানের জন্য $\sin\theta$ ও $\cos\theta$ এর সংখ্যামান কখনই 1 এর থেকে বড় হবে না।

sinθ ও cosθ এর মান সবসময়ই +1 থেকে −1 এর মধ্যে হবে। অর্থাৎ $-1 \le \sin\theta \le 1$ এবং $-1 \le \cos\theta \le 1$

sinθ ও cosθ এর মান সবসময়ই + 1 থেকে − 1 এর মধ্যে হবে। সুতরাং cosecθ এবং secθ এর মান + 1 অপেক্ষা ছোট কিংবা − 1 অপেক্ষা বড় হতে পারে না।

আবার, যেহেতু $\text{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$ এবং $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ সুতরাং cosecθ এবং secθ এর মান + 1 অপেক্ষা ছোট কিংবা − 1 অপেক্ষা বড় হতে পারে না।

cosecθ এবং secθ এর মান কখনই + 1 থেকে − 1 এর মধ্যবর্তী হবে না।

মন্তব্য: tanθ বা cotθ এর মান + 1 অপেক্ষা বৃহত্তর বা − 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হতে পারে।

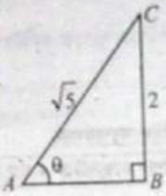
পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনমূলক কাজের সমাধান

১. কাজ: [Ref: পাঠ্যবই পৃষ্ঠা: ১৪৫]

ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ এবং $\sin\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$ । অন্য ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ নির্ণয় কর।

সমাধান:

ধরি, ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ।



অতিভুজ $= AC$, ভূমি $= AB$,
লম্ব $= BC$ এবং $\angle BAC = \theta$

দেওয়া আছে, $\sin\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$

বা, $\sin\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\therefore BC$ লম্ব $= 2$ একক এবং AC অতিভুজ $= \sqrt{5}$ একক।

পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুযায়ী,

ভূমি $\sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{5-4} = \sqrt{1} = 1$ একক।

$\therefore$ অন্য ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ,

$$\cos\theta = \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sec\theta = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{ভূমি}} = \frac{\sqrt{5}}{1} = \sqrt{5}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \frac{2}{1} = 2$$

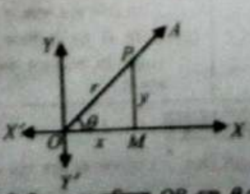
$$\cot\theta = \frac{\text{ভূমি}}{\text{লম্ব}} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{লম্ব}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

২. কাজ: [Ref: পাঠ্যবই পৃষ্ঠা: ১৪৮]

প্রমাণ কর যে, (চিত্রের সাহায্যে):
(i) $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$
(ii) $\operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$

সমাধান:



চিত্রে, OPM সমকোণী ত্রিভুজ এর অতিভুজ OP এবং θ কোণের সাপেক্ষে ভূমি $OM = x$, লম্ব $PM = y$

পীথাগোরাসের উপপাদ্য হতে পাই, $OP^2 = PM^2 + OM^2$
বা, $r^2 = y^2 + x^2$

(i) এখানে, $\sec\theta = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{ভূমি}} = \frac{r}{x}$

$$\tan\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \frac{y}{x}$$

এবং $r^2 = x^2 + y^2$

$$\therefore \sec^2\theta - \tan^2\theta = \frac{r^2}{x^2} - \frac{y^2}{x^2} = \frac{r^2 - y^2}{x^2} = \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$\therefore \sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$ [প্রমাণিত]

(ii) আবার চিত্র হতে,

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{লম্ব}} = \frac{r}{y}$$

$$\cot\theta = \frac{\text{ভূমি}}{\text{লম্ব}} = \frac{x}{y}$$

এবং $r^2 = x^2 + y^2$

এখন, $\operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = \frac{r^2}{y^2} - \frac{x^2}{y^2} = \frac{r^2 - x^2}{y^2} = \frac{y^2}{y^2} = 1$

$\therefore \operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$ [প্রমাণিত]

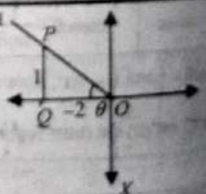
৩. কাজ: [Ref: পাঠ্যবই পৃষ্ঠা: ১৪৮]

θ স্থূলকোণ $\left(\frac{\pi}{2} < \theta < \pi\right)$ এবং $\tan\theta = -\frac{1}{2}$ হলে, অন্য ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ, সমকোণী ত্রিভুজ এবং ত্রিকোণমিতিক অঙ্কন এর সাহায্যে নির্ণয় কর।

সমাধান:

আমরা জানি,

$$\tan\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = -\frac{1}{2}$$



চিত্রে সমকোণী ত্রিভুজ POQ থেকে পাই,

অতিভুজ, $OP = \sqrt{PQ^2 + OQ^2} = \sqrt{1^2 + (-2)^2}$
$= \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$ একক।

$$\therefore \sin\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{OQ}{OP} = \frac{-2}{\sqrt{5}}$$

$$\operatorname{cosec} = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{লম্ব}} = \frac{OP}{PQ} = \frac{\sqrt{5}}{1} = \sqrt{5}$$

$$\sec\theta = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{ভূমি}} = \frac{OP}{OQ} = \frac{\sqrt{5}}{-2} = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\cot\theta = \frac{\text{ভূমি}}{\text{লম্ব}} = -2$$

ত্রিকোণমিতিক অভেদ ব্যবহার করে:

আমরা জানি, $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$

বা, $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta = 1 + \frac{1}{4} = \frac{4+1}{4} = \frac{5}{4}$

$\therefore \sec\theta = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$

যেহেতু θ স্থূলকোণ, তাই θ দ্বিতীয় চতুর্ভাগে এবং $\sin\theta$ এবং $\operatorname{cosec}\theta$ ধনাত্মক ও $\sec\theta, \operatorname{cosec}\theta, \cot\theta, \tan\theta$ ঋণাত্মক।

$\therefore \sec\theta = -\frac{\sqrt{5}}{2}$

এখন, $\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} = -\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = -2$

এখন, $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

বা, $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

$= 1 - \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = 1 - \frac{4}{5} = \frac{5-4}{5} = \frac{1}{5}$

$\therefore \sin\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$

যেহেতু $\sin\theta$ ধনাত্মক, $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$

অতএব, $\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \sqrt{5}$.

[Ref: পাঠ্যবই পৃষ্ঠা: ১৫৫]

২. কাজ:

১। $\sin^2\frac{\pi}{4}\cos^2\frac{\pi}{3} + \tan^2\frac{\pi}{6}\sec^2\frac{\pi}{3} + \cot^2\frac{\pi}{3}\operatorname{cosec}^2\frac{\pi}{4}$ এর মান নির্ণয় কর।

২। সরল কর: $\dfrac{\sin^2\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3} + \cos^2\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{3}} - \dfrac{\sin^2\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3} + \cos^2\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{3}}$

১নং এর সমাধান:

আমরা জানি,

$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \sec\frac{\pi}{3} = 2,$

$\cot\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\operatorname{cosec}\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$

$\therefore \sin^2\frac{\pi}{4}\cos^2\frac{\pi}{3} + \tan^2\frac{\pi}{6}\sec^2\frac{\pi}{3} + \cot^2\frac{\pi}{3}\operatorname{cosec}^2\frac{\pi}{4}$

$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot (2)^2 \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot (\sqrt{2})^2$

$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \times 4 + \frac{1}{3} \times 2$

$= \frac{1}{8} + \frac{4}{3} + \frac{2}{3}$

$= \frac{3+32+16}{24}$

$= \frac{51}{24}$

$= \frac{17}{8}$

Ans. $\frac{17}{8}$

২নং এর সমাধান:

আমরা জানি,

$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ এবং $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

$\therefore \dfrac{\sin^2\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3} + \cos^2\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{3}} - \dfrac{\sin^2\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3} + \cos^2\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{3}}$

$= \dfrac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}} - \dfrac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}}$

$= \dfrac{\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{3}+1}{2}} - \dfrac{\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}$

$= \frac{3+\sqrt{3}+1}{4} \times \frac{2}{\sqrt{3}+1} - \frac{3-\sqrt{3}+1}{4} \times \frac{2}{\sqrt{3}-1}$

$= \frac{4+\sqrt{3}}{2(\sqrt{3}+1)} - \frac{4-\sqrt{3}}{2(\sqrt{3}-1)}$

$= \frac{4(\sqrt{3}-1) + \sqrt{3}(\sqrt{3}-1) - 4(\sqrt{3}+1) + \sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{2(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}$

$= \frac{4(\sqrt{3}-1-\sqrt{3}-1) + \sqrt{3}(\sqrt{3}-1+\sqrt{3}+1)}{2\{(\sqrt{3})^2 - (1)^2}$

$= \frac{4(-2) + 2.\sqrt{3}.\sqrt{3}}{2(3-1)}$

$= \frac{-8+2.3}{4}$

$= \frac{-8+6}{4}$

$= \frac{-2}{4}$

$= -\frac{1}{2}$

Ans. $-\frac{1}{2}$

১৯ কাজ [Ref: পাঠ্যবই পৃষ্ঠা: ১৫৭]

$A = \frac{\pi}{3}$ ও $B = \frac{\pi}{6}$ এর জন্য নিম্নোক্ত অভেদসমূহ প্রমাণ কর:

(i) $\sin(A - B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$

(ii) $\cos(A + B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$

(iii) $\cos(A - B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$

(iv) $\tan(2B) = \frac{2\tan B}{1 - \tan^2 B}$

সমাধান:

দেওয়া আছে,

$$A = \frac{\pi}{3} \text{ ও } B = \frac{\pi}{6}$$

(i) বামপক্ষ $= \sin(A - B)$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \sin\left(\frac{2\pi - \pi}{6}\right)$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \quad \left[\because \sin\frac{\pi}{6} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}\right]$$

ডানপক্ষ $= \sin A\cos B - \cos A \sin B$

$$= \sin\frac{\pi}{3}.\cos\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{3}.\sin\frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$\left[\because \sin\frac{\pi}{3} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6} = \cos 30^\circ \right.$$

$$\left. \cos\frac{\pi}{3} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} = \sin 30^\circ \right]$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3 - 1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$\therefore \sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$ [প্রমাণিত]

(ii) বামপক্ষ $= \cos(A + B)$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{2\pi + \pi}{6}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{3\pi}{6}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 0 \quad \left[\because \cos\frac{\pi}{2} = \cos 90^\circ = 0\right]$$

ডানপক্ষ $= \cos A \cos B - \sin A \sin B$

$$= \cos\frac{\pi}{3}.\cos\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{3}.\sin\frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$= 0$$

$\therefore \cos(A - B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$. [প্রমাণিত]

(iii) বামপক্ষ $= \cos(A - B)$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{2\pi - \pi}{6}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ডানপক্ষ $= \cos A \cos B + \sin A \sin B$

$$= \cos\frac{\pi}{3}.\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{3}.\sin\frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{3} + \sqrt{3}}{4}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\therefore \cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$ [প্রমাণিত]

(iv) বামপক্ষ $= \tan(2B)$

$$= \tan\left(2 \times \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \tan\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \sqrt{3} \quad \left[\because \tan\frac{\pi}{3} = \tan 60^\circ = \sqrt{3}\right]$$

$$\text{ডানপক্ষ} = \frac{2\tan B}{1-\tan^2 B}$$

$$= \frac{2\tan\frac{\pi}{6}}{1-\left(\tan\frac{\pi}{6}\right)^2}$$

$$= \frac{2\times\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} \quad \left[\because \tan\frac{\pi}{6} = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$$

$$= \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{3-1}{3}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\times\frac{3}{2}$$

$$= \sqrt{3}$$

$$\therefore \tan 2B = \frac{2\tan B}{1-\tan^2 B} \text{ [প্রমাণিত]}$$

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী ৮.২

১। ক্যালকুলেটর ব্যবহার না করে মান নির্ণয় কর:

(i) $\dfrac{\cos\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{3}}$ (ii) $\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\pi}{6}.\tan\frac{\pi}{3}$

২। $\cos\theta = -\frac{4}{5}$ এবং $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ হলে $\tan\theta$ এবং $\sin\theta$ এর মান নির্ণয় কর।

৩। $\sin A = \frac{2}{\sqrt{5}}$ এবং $\frac{\pi}{2} < A < \pi$ এর ক্ষেত্রে $\cos A$ এবং $\tan A$ এর মান কত?

৪। দেওয়া আছে, $\cos A = \frac{1}{2}$ এবং $\cos A$ ও $\sin A$ একই চিহ্নবিশিষ্ট। $\sin A$ এবং $\tan A$ এর মান কত?

৫। দেওয়া আছে, $\tan A = -\frac{5}{12}$ এবং $\tan A$ ও $\cos A$ বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট। $\sin A$ এবং $\cos A$ এর মান নির্ণয় কর।

৬। নিম্নলিখিত অভেদসমূহ প্রমাণ কর:

(i) $\tan A + \cot A = \sec A \operatorname{cosec} A$

(ii) $\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}} = \operatorname{cosec}\theta + \cot\theta = \sqrt{\dfrac{\sec\theta+1}{\sec\theta-1}}$

(iii) $\sqrt{\dfrac{1-\sin A}{1+\sin A}} = \sec A - \tan A$

(iv) $\sec^4\theta - \sec^2\theta = \tan^4\theta + \tan^2\theta$

(v) $(\sec\theta - \cos\theta)(\operatorname{cosec}\theta - \sin\theta)(\tan\theta + \cot\theta) = 1$

(vi) $\dfrac{\tan\theta + \sec\theta - 1}{\tan\theta - \sec\theta + 1} = \tan\theta + \sec\theta$

৭। যদি $\operatorname{cosec} A = \frac{a}{b}$ হয়, যেখানে $a > b > 0$, তবে প্রমাণ কর যে, $\tan A = \dfrac{\pm b}{\sqrt{a^2-b^2}}$

৮। যদি $\cos\theta - \sin\theta = \sqrt{2}\sin\theta$ হয়, তবে দেখাও যে, $\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\cos\theta$

৯। $\tan\theta = \frac{x}{y} (x \neq y)$ হলে, $\dfrac{x\sin\theta + y\cos\theta}{x\sin\theta - y\cos\theta}$ এর মান নির্ণয় কর।

১০। $\tan\theta + \sec\theta = x$ হলে, দেখাও যে, $\sin\theta = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

১১। $a\cos\theta - b\sin\theta = c$ হলে, প্রমাণ কর যে, $a\sin\theta + b\cos\theta = \pm\sqrt{a^2+b^2-c^2}$

১২। মান নির্ণয় কর:

(i) $\sin^2\frac{\pi}{6} + \cos^2\frac{\pi}{4} + \tan^2\frac{\pi}{3} + \cot^2\frac{\pi}{6}$

(ii) $3\tan^2\frac{\pi}{4} - \sin^2\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\cot^2\frac{\pi}{6} + \frac{1}{3}\sec^2\frac{\pi}{4}$

(iii) $\tan^2\frac{\pi}{4} - \sin^2\frac{\pi}{3}\tan^2\frac{\pi}{6}\tan^2\frac{\pi}{3}.\cos^2\frac{\pi}{4}$

(iv) $\dfrac{\tan\frac{\pi}{3} - \tan\frac{\pi}{6}}{1 + \tan\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{6}} + \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{6}$

১৩। সরল কর: $\dfrac{1-\sin^2\frac{\pi}{6}}{1+\sin^2\frac{\pi}{4}} \times \dfrac{\cos^2\frac{\pi}{3} + \cos^2\frac{\pi}{6}}{\mathrm{cosec}^2\frac{\pi}{2} - \cot^2\frac{\pi}{2}} \div \left(\sin\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{6}\right) + \left(\sec^2\frac{\pi}{6} - \tan^2\frac{\pi}{6}\right)$

অনুশীলনী-৮.২ এর সমাধান

১। ক্যালকুলেটর ব্যবহার না করে মান নির্ণয় কর:

(i) $\dfrac{\cos\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{3}}$ (ii) $\tan\frac{\pi}{4} + \tan\frac{\pi}{6}.\tan\frac{\pi}{3}$

(i) এর সমাধান:

$$\frac{\cos\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}} \quad \left[\because \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ এবং } \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{2\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{2}{2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\times\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

(ii) এর সমাধান:

$$\tan\frac{\pi}{4} + \tan\frac{\pi}{6}.\tan\frac{\pi}{3}$$

$$= 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}.\sqrt{3} \quad \left[\because \tan\frac{\pi}{4} = 1, \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ এবং } \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}\right]$$

$$= 1 + 1 = 2$$

২। $\cos\theta = -\frac{4}{5}$ এবং $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ হলে $\tan\theta$ এবং $\sin\theta$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান:

দেওয়া আছে, $\cos\theta = -\frac{4}{5}$

এবং $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

এখানে, θ এর সীমা হলো $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ অর্থাৎ, $180° < \theta < 270°$

অর্থাৎ, θ তৃতীয় চতুর্ভাগে অবস্থিত। এই চতুর্ভাগে $\tan\theta$ এবং $\cot\theta$ ব্যতীত সকল ত্রিকোণমিতিক অনুপাত ঋণাত্মক।

এখন,

$$\cos\theta = -\frac{4}{5}$$

বা, $\cos^2\theta = \left(-\frac{4}{5}\right)^2$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $1 - \sin^2\theta = \frac{16}{25}$ [$\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$]

বা, $\sin^2\theta = 1 - \frac{16}{25}$

বা, $\sin^2\theta = \frac{25-16}{25}$

বা, $\sin^2\theta = \frac{9}{25}$

বা, $\sin\theta = \pm\frac{3}{5}$

কিন্তু θ তৃতীয় চতুর্ভাগে অবস্থিত; তাই এখানে $\sin\theta$ ঋণাত্মক।

$$\therefore \sin\theta = -\frac{3}{5}$$

আবার, $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}}$ $\left[\because \sin\theta = \frac{-3}{5} \text{ এবং } \cos\theta = \frac{-4}{5}\right]$

$$= -\frac{3}{5} \times \left(-\frac{5}{4}\right)$$

$$= \frac{3}{4}$$

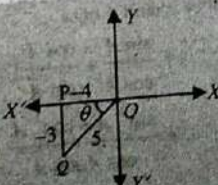
$$\therefore \tan\theta = \frac{3}{4}$$

বিকল্প পদ্ধতি:

দেয়া আছে,

$\cos\theta = -\frac{4}{5}$ এবং

$\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$



পিথাগোরাসের উপপাদ্য হতে পাই,

$PQ = \sqrt{OQ^2 - OP^2}$

$= \sqrt{5^2 - (-4)^2}$ $\left[\because \cos\theta = \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{-4}{5}\right]$

$= \sqrt{25-16}$

$= \sqrt{9}$

চিত্র অনুসারে, $PQ = -3$

[Ref: Pure Mathematics by Lee Peng Yee, Teh keng seng, Looi Chin Keong. Page: 170, Chapter-9]

$\therefore \tan\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \frac{PQ}{OP} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$

এবং $\sin\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{PQ}{OQ} = \frac{-3}{5} = -\frac{3}{5}$

৩। $\sin A = \frac{2}{\sqrt{5}}$ এবং $\frac{\pi}{2} < A < \pi$ এর ক্ষেত্রে $\cos A$ এবং $\tan A$ এর মান কত?

সমাধান:

দেওয়া আছে,

$$\sin A = \frac{2}{\sqrt{5}} \text{ এবং } \frac{\pi}{2} < A < \pi$$

এখানে, A এর সীমা হলো, $\frac{\pi}{2} < A < \pi$ অর্থাৎ, $90° < A < 180°$

অর্থাৎ, A দ্বিতীয় চতুর্ভাগে অবস্থিত। এই চতুর্ভাগে sin ও cosec ব্যতীত সকল ত্রিকোণমিতিক অনুপাত ঋণাত্মক।

এখন, $\sin A = \frac{2}{\sqrt{5}}$

বা, $\sin^2 A = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2$ [উভয়পক্ষে বর্গ করে]

বা, $\sin^2 A = \frac{4}{5}$

বা, $1 - \cos^2 A = \frac{4}{5}$ [$\because \sin^2 A + \cos^2 A = 1$]

বা, $\cos^2 A = 1 - \frac{4}{5}$

বা, $\cos^2 A = \frac{5-4}{5}$

বা, $\cos^2 A = \frac{1}{5}$

বা, $\cos A = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$

কিন্তু A দ্বিতীয় চতুর্ভাগে অবস্থিত। তাই এবং এখানে cosA ঋণাত্মক।

$$\therefore \cos A = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

এখন, $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\frac{2}{\sqrt{5}}}{-\frac{1}{\sqrt{5}}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{-\sqrt{5}}{1} = -2$

[$\sin A$ ও $\cos A$ এর মান বসিয়ে]

$$\therefore \tan A = -2$$

৪। দেওয়া আছে, $\cos A = \frac{1}{2}$ এবং $\cos A$ ও $\sin A$ একই চিহ্নবিশিষ্ট। $\sin A$ এবং $\tan A$ এর মান কত?

সমাধান:

এখানে, $\cos A = \frac{1}{2}$

বা, $\cos^2 A = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $1 - \sin^2 A = \frac{1}{4}$

বা, $1 - \frac{1}{4} = \sin^2 A$

বা, $\frac{3}{4} = \sin^2 A$

বা, $\sin A = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

যেহেতু, $\cos A$ ধনাত্মক
সুতরাং, $\sin A$ ধনাত্মক হবে।

$\therefore \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$

এবং $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$

$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

উত্তর: $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}, \tan A = \sqrt{3}$

[বি: দ্র: প্রশ্ন ৫, ৪, ৩ এর বিকল্প সমাধান ২ এর বিকল্প এর অনুরূপ]

৫। দেওয়া আছে, $\tan A = -\frac{5}{12}$ এবং $\tan A$ ও $\cos A$ বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট। $\sin A$ এবং $\cos A$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান:

এখানে, $\tan A = -\frac{5}{12}$

বা, $\tan^2 A = \left(\frac{-5}{12}\right)^2$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $\sec^2 A - 1 = \frac{25}{144}$

বা, $\sec^2 A = \frac{25}{144} + 1$

বা, $\sec^2 A = \frac{169}{144}$

$\therefore \sec A = \pm\frac{13}{12}$

$\therefore \cos A = \pm\frac{12}{13}$

$\because \tan A$ ও $\cos A$ বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট হতে হবে।
দেয়া আছে, $\tan A$ ঋণাত্মক, সুতরাং $\cos A$ ধনাত্মক হবে।

$\therefore \cos A = \frac{12}{13}$

আবার, $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$

বা, $\sin A = \tan A . \cos A$

$= \frac{-5}{12} \times \frac{12}{13}$ [$\tan A$ এবং $\cos A$ এর মান বসিয়ে]

$= \frac{-5}{13}$

উত্তর: $\sin A = -\frac{5}{13}, \cos A = \frac{12}{13}$

৬। নিম্নলিখিত অভেদসমূহ প্রমাণ কর:

(i) $\tan A + \cot A = \sec A \operatorname{cosec} A$

(ii) $\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}} = \operatorname{cosec}\theta + \cot\theta = \sqrt{\frac{\sec\theta+1}{\sec\theta-1}}$

(iii) $\sqrt{\frac{1-\sin A}{1+\sin A}} = \sec A - \tan A$

(iv) $\sec^4\theta - \sec^2\theta = \tan^4\theta + \tan^2\theta$

(v) $(\sec\theta - \cos\theta)(\operatorname{cosec}\theta - \sin\theta)(\tan\theta + \cot\theta) = 1$

(vi) $\frac{\tan\theta + \sec\theta - 1}{\tan\theta - \sec\theta + 1} = \tan\theta + \sec\theta$

(i) এর সমাধান:

$\tan A + \cot A = \sec A \operatorname{cosec} A$

বামপক্ষ $= \tan A + \cot A$

$= \frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\cos A}{\sin A}$ [$\because \tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$ এবং $\cot A = \frac{\cos A}{\sin A}$]

$= \frac{\sin^2 A + \cos^2 A}{\cos A . \sin A}$

$= \frac{1}{\cos A . \sin A}$ [$\because \sin^2 A + \cos^2 A = 1$]

$= \frac{1}{\cos A} . \frac{1}{\sin A}$

$= \sec A . \operatorname{cosec} A$ [$\because \sec A = \frac{1}{\cos A}$ এবং $\operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A}$]

= ডানপক্ষ

$\therefore \tan A + \cot A = \sec A \operatorname{cosec} A$ [প্রমাণিত]

(ii) এর সমাধান:

$$\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}} = \operatorname{cosec}\theta + \cot\theta = \sqrt{\frac{\sec\theta+1}{\sec\theta-1}}$$

বামপক্ষ $= \sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}}$

$= \sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}} \cdot \sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{1+\cos\theta}}$

[এখানে, হর ও লবকে $\sqrt{1+\cos\theta}$ দ্বারা গুণ করে]

$= \sqrt{\dfrac{(1+\cos\theta)(1+\cos\theta)}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}}$

$= \sqrt{\dfrac{(1+\cos\theta)^2}{1-\cos^2\theta}}$

$= \sqrt{\dfrac{(1+\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}}$

$= \dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$

$= \dfrac{1}{\sin\theta} + \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$= \operatorname{cosec}\theta + \cot\theta \quad [\because \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta]$

= মধ্যপক্ষ

আবার, ডানপক্ষ $= \sqrt{\dfrac{\sec\theta+1}{\sec\theta-1}}$

$= \sqrt{\dfrac{(\sec\theta+1)(\sec\theta+1)}{(\sec\theta-1)(\sec\theta+1)}}$

$= \sqrt{\dfrac{(\sec\theta+1)^2}{\sec^2\theta-1}}$

$= \dfrac{\sec\theta+1}{\sqrt{\tan^2\theta}} \quad [\because \sec^2\theta = 1+\tan^2\theta]$

$= \dfrac{\sec\theta+1}{\tan\theta}$

$= \dfrac{\sec\theta}{\tan\theta} + \dfrac{1}{\tan\theta}$

$= \dfrac{\dfrac{1}{\cos\theta}}{\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}} + \dfrac{1}{\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}$

$= \left(\dfrac{1}{\cos\theta} \times \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\right) + \left(1 \times \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)$

$= \dfrac{1}{\sin\theta} + \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$= \operatorname{cosec}\theta + \cot\theta$ = মধ্যপক্ষ

$\therefore$ বামপক্ষ = মধ্যপক্ষ = ডানপক্ষ [প্রমাণিত]

(iii) এর সমাধান:

$$\sqrt{\frac{1-\sin A}{1+\sin A}} = \sec A - \tan A$$

বামপক্ষ $= \sqrt{\dfrac{1-\sin A}{1+\sin A}}$

$= \sqrt{\dfrac{1-\sin A}{1+\sin A}} \cdot \sqrt{\dfrac{1-\sin A}{1-\sin A}}$

[এখানে, হর ও লবকে $\sqrt{1-\sin A}$ দ্বারা গুণ করে]

$= \sqrt{\dfrac{(1-\sin A)(1-\sin A)}{(1+\sin A)(1-\sin A)}}$

$= \sqrt{\dfrac{(1-\sin A)^2}{1-\sin^2 A}}$

$= \sqrt{\dfrac{(1-\sin A)^2}{\cos^2 A}} \quad \left[\begin{array}{l}\text{আমরা জানি, } \sin^2 A + \cos^2 A = 1 \\ \therefore \cos^2 A = 1 - \sin^2 A\end{array}\right]$

$= \dfrac{1-\sin A}{\cos A}$

$= \dfrac{1}{\cos A} - \dfrac{\sin A}{\cos A}$

$= \sec A - \tan A$

= ডানপক্ষ

$\sqrt{\dfrac{1-\sin A}{1+\sin A}} = \sec A - \tan A$ [প্রমাণিত]

(iv) এর সমাধান:

$\sec^4\theta - \sec^2\theta = \tan^4\theta + \tan^2\theta$

বামপক্ষ $= \sec^4\theta - \sec^2\theta$

$= \sec^2\theta\,(\sec^2\theta - 1)$

$= (1+\tan^2\theta)(1+\tan^2\theta - 1) \quad [\because \sec^2\theta = 1+\tan^2\theta]$

$= (1+\tan^2\theta)\tan^2\theta$

$= \tan^2\theta + \tan^4\theta$

$= \tan^4\theta + \tan^2\theta$

= ডানপক্ষ

$\sec^4\theta - \sec^2\theta = \tan^4\theta + \tan^2\theta$ [প্রমাণিত]

(v) এর সমাধান::

$(\sec\theta - \cos\theta)(\operatorname{cosec}\theta - \sin\theta)(\tan\theta + \cot\theta) = 1$

বামপক্ষ $= (\sec\theta - \cos\theta)(\operatorname{cosec}\theta - \sin\theta)(\tan\theta + \cot\theta)$

$= \left(\dfrac{1}{\cos\theta} - \cos\theta\right)\left(\dfrac{1}{\sin\theta} - \sin\theta\right)\left(\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} + \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)$

$= \left(\dfrac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta}\right)\left(\dfrac{1-\sin^2\theta}{\sin\theta}\right)\left(\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta\sin\theta}\right)$

$= \left(\dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\right)\left(\dfrac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\right)\left(\dfrac{1}{\cos\theta.\sin\theta}\right)$

$[\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1, \therefore \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ এবং $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta]$

$= \dfrac{\sin^2\theta.\cos^2\theta}{\cos^2\theta.\sin^2\theta}$

$= 1$ = ডানপক্ষ

$(\sec\theta - \cos\theta)(\operatorname{cosec}\theta - \sin\theta)(\tan\theta + \cot\theta) = 1$ [প্রমাণিত]

(vi) এর সমাধান:

$$\frac{\tan\theta + \sec\theta - 1}{\tan\theta - \sec\theta + 1} = \tan\theta + \sec\theta$$

বামপক্ষ $= \dfrac{\tan\theta + \sec\theta - 1}{\tan\theta - \sec\theta + 1}$

$= \dfrac{(\sec\theta + \tan\theta) - (\sec^2\theta - \tan^2\theta)}{\tan\theta - \sec\theta + 1}$ $[\because \sec^2\theta - \tan^2\theta = 1]$

$= \dfrac{(\sec\theta + \tan\theta) - (\sec\theta + \tan\theta)(\sec\theta - \tan\theta)}{\tan\theta - \sec\theta + 1}$

$= \dfrac{(\sec\theta + \tan\theta)(1 - \sec\theta + \tan\theta)}{(1 - \sec\theta + \tan\theta)}$

$= \sec\theta + \tan\theta$

$\therefore \dfrac{\tan\theta + \sec\theta - 1}{\tan\theta - \sec\theta + 1} = \tan\theta + \sec\theta$ [প্রমাণিত]

৭। যদি $\operatorname{cosec} A = \dfrac{a}{b}$ হয়, যেখানে $a > b > 0$, তবে প্রমাণ কর যে, $\tan A = \dfrac{\pm b}{\sqrt{a^2 - b^2}}$

সমাধান:
দেওয়া আছে,

$\operatorname{cosec} A = \dfrac{a}{b}$

বা, $\operatorname{cosec}^2 A = \dfrac{a^2}{b^2}$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $1 + \cot^2 A = \dfrac{a^2}{b^2}$ $[\because \operatorname{cosec}^2 A - \cot^2 A = 1]$

বা, $\cot^2 A = \dfrac{a^2}{b^2} - 1$

বা, $\dfrac{1}{\tan^2 A} = \dfrac{a^2 - b^2}{b^2}$ $\left[\because \cot^2 A = \dfrac{1}{\tan^2 A}\right]$

বা, $\tan^2 A = \dfrac{b^2}{a^2 - b^2}$

বা, $\tan A = \dfrac{\pm b}{\sqrt{a^2 - b^2}}$ [বর্গমূল করে]

৮। যদি $\cos\theta - \sin\theta = \sqrt{2}\sin\theta$ হয়, তবে দেখাও যে, $\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\cos\theta$

সমাধান:
দেওয়া আছে,

$\cos\theta - \sin\theta = \sqrt{2}\sin\theta$

বা, $\cos\theta = \sqrt{2}\sin\theta + \sin\theta$

বা, $\cos\theta = (\sqrt{2} + 1)\sin\theta$

বা, $(\sqrt{2} - 1)\cos\theta = (\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)\sin\theta$ [উভয়পক্ষকে $(\sqrt{2} - 1)$ দ্বারা গুণ করে]

বা, $(\sqrt{2} - 1)\cos\theta = (2 - 1)\sin\theta$

বা, $\sqrt{2}\cos\theta - \cos\theta = \sin\theta$

$\therefore \cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\cos\theta$ [দেখানো হলো]

৯। $\tan\theta = \dfrac{x}{y}\,(x \neq y)$ হলে, $\dfrac{x\sin\theta + y\cos\theta}{x\sin\theta - y\cos\theta}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান:
দেওয়া আছে,

$\tan\theta = \dfrac{x}{y}$

বা, $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{x}{y}$

বা, $\dfrac{x\sin\theta}{y\cos\theta} = \dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{x}{y}$ [উভয়পক্ষকে $\dfrac{x}{y}$ দ্বারা গুণ করে]

বা, $\dfrac{x\sin\theta}{y\cos\theta} = \dfrac{x^2}{y^2}$

$\therefore \dfrac{x\sin\theta + y\sin\theta}{x\sin\theta - y\sin\theta} = \dfrac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

$\therefore$ নির্ণেয় মান $= \dfrac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$

১০। $\tan\theta + \sec\theta = x$ হলে, দেখাও যে, $\sin\theta = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

সমাধান:
দেওয়া আছে,

$\tan\theta + \sec\theta = x$

বা, $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} + \dfrac{1}{\cos\theta} = x$ $\left[\because \tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} \text{ এবং } \sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}\right]$

বা, $\dfrac{1 + \sin\theta}{\cos\theta} = x$

বা, $\dfrac{(1 + \sin\theta)^2}{\cos^2\theta} = x^2$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $\dfrac{(1 + \sin\theta)^2}{1 - \sin^2\theta} = x^2$ $[\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ বা, $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta]$

বা, $\dfrac{(1 + \sin\theta)(1 + \sin\theta)}{(1 + \sin\theta)(1 - \sin\theta)} = x^2$

বা, $\dfrac{1 + \sin\theta}{1 - \sin\theta} = x^2$

বা, $\frac{1+\sin\theta+1-\sin\theta}{1+\sin\theta-1+\sin\theta}=\frac{x^2+1}{x^2-1}$ [যোজন বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2}{2\sin\theta}=\frac{x^2+1}{x^2-1}$

বা, $\frac{1}{\sin\theta}=\frac{x^2+1}{x^2-1}$

$\therefore \sin\theta=\frac{x^2-1}{x^2+1}$ [দেখানো হলো]

১১। $a\cos\theta-b\sin\theta=c$ হলে, প্রমাণ কর যে, $a\sin\theta+b\cos\theta=\pm\sqrt{a^2+b^2-c^2}$

সমাধান:

দেওয়া আছে,

$a\cos\theta-b\sin\theta=c$

বা, $(a\cos\theta-b\sin\theta)^2=c^2$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $a^2\cos^2\theta-2a\cos\theta.b\sin\theta+b^2\sin^2\theta=c^2$

বা, $a^2(1-\sin^2\theta)-2a\cos\theta.b\sin\theta+b^2(1-\cos^2\theta)=c^2$

[$\because \sin^2\theta+\cos^2\theta=1$]

বা, $a^2-a^2\sin^2\theta-2a\cos\theta.b\sin\theta+b^2-b^2\cos^2\theta=c^2$

বা, $-(a^2\sin^2\theta+2a\cos\theta.b\sin\theta+b^2\cos^2\theta)=-(a^2+b^2-c^2)$

বা, $a^2\sin^2\theta+2a\cos\theta.b\sin\theta+b^2\cos^2\theta=a^2+b^2-c^2$

বা, $(a\sin\theta)^2+2.a\sin\theta.b\cos\theta+(b\cos\theta)^2=a^2+b^2-c^2$

বা, $(a\sin\theta+b\cos\theta)^2=a^2+b^2-c^2$

$\therefore a\sin\theta+b\cos\theta=\pm\sqrt{a^2+b^2-c^2}$ [দেখানো হলো]

বিকল্প পদ্ধতি:

দেওয়া আছে, $a\cos\theta-b\sin\theta=c$ ……… (i)

ধরি, $a\sin\theta+b\cos\theta=y$ ……… (ii)

সমীকরণ (i) ও (ii) নং কে বর্গ করে যোগ করি,

$a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta-2ab\sin\theta\cos\theta+a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta+2ab\sin\theta\cos\theta=c^2+y^2$

বা, $a^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+b^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=c^2+y^2$

বা, $c^2+y^2=a^2+b^2$

বা, $y^2=a^2+b^2-c^2$

বা, $y=\pm\sqrt{a^2+b^2-c^2}$

$\therefore a\sin\theta+b\cos\theta=\pm\sqrt{a^2+b^2-c^2}$ [দেখানো হলো]

১২। মান নির্ণয় কর:

(i) $\sin^2\frac{\pi}{6}+\cos^2\frac{\pi}{4}+\tan^2\frac{\pi}{3}+\cot^2\frac{\pi}{6}$

(ii) $3\tan^2\frac{\pi}{4}-\sin^2\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\cot^2\frac{\pi}{6}+\frac{1}{3}\sec^2\frac{\pi}{4}$

(iii) $\tan^2\frac{\pi}{4}-\sin^2\frac{\pi}{3}\tan^2\frac{\pi}{6}\tan^2\frac{\pi}{3}.\cos^2\frac{\pi}{4}$

(iv) $\frac{\tan\frac{\pi}{3}-\tan\frac{\pi}{6}}{1+\tan\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{6}}+\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{6}$

(i) এর সমাধান:

$\sin^2\frac{\pi}{6}+\cos^2\frac{\pi}{4}+\tan^2\frac{\pi}{3}+\cot^2\frac{\pi}{6}$

$=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+(\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})^2$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+3+3$

$=\frac{1+2+12+12}{4}=\frac{27}{4}$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $=\frac{27}{4}$ [Ans.]

(ii) এর সমাধান:

$3\tan^2\frac{\pi}{4}-\sin^2\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\cot^2\frac{\pi}{6}+\frac{1}{3}\sec^2\frac{\pi}{4}$

$=3(1)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\frac{1}{2}(\sqrt{3})^2+\frac{1}{3}(\sqrt{2})^2$

$=3-\frac{3}{4}-\frac{3}{2}+\frac{2}{3}$

$=\frac{36-9-18+8}{12}$

$=\frac{17}{12}$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $=\frac{17}{12}$ [Ans.]

(iii) এর সমাধান:

$\tan^2\frac{\pi}{4}-\sin^2\frac{\pi}{3}\tan^2\frac{\pi}{6}\tan^2\frac{\pi}{3}.\cos^2\frac{\pi}{4}$

$=1^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2(\sqrt{3})^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$

$=1-\frac{3}{4}.\frac{1}{3}.3.\frac{1}{2}$

$=1-\frac{3}{8}$

$=\frac{8-3}{8}$

$=\frac{5}{8}$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $=\frac{5}{8}$ [Ans.]

(iv) এর সমাধান:

$$\frac{\tan\frac{\pi}{3}-\tan\frac{\pi}{6}}{1+\tan\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{6}}+\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{6}$$

$$=\frac{\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\sqrt{3}.\frac{1}{\sqrt{3}}}+\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{2}$$

$$=\frac{\frac{3-1}{\sqrt{3}}}{1+1}+\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{2}+2.\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\times\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{2+3}{2\sqrt{3}}=\frac{5}{2\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{3}.\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{6}\ \text{(Ans)}$$

∴ নির্ণেয় মান $=\frac{5\sqrt{3}}{6}$ **[Ans.]**

১৩। সরল কর: $\frac{1-\sin^2\frac{\pi}{6}}{1+\sin^2\frac{\pi}{4}}\times\frac{\cos^2\frac{\pi}{3}+\cos^2\frac{\pi}{6}}{\csc^2\frac{\pi}{2}-\cot^2\frac{\pi}{2}}+\left(\sin\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{6}\right)+\left(\sec^2\frac{\pi}{6}-\tan^2\frac{\pi}{6}\right)$

সমাধান:

$$\frac{1-\sin^2\frac{\pi}{6}}{1+\sin^2\frac{\pi}{4}}\times\frac{\cos^2\frac{\pi}{3}+\cos^2\frac{\pi}{6}}{\csc^2\frac{\pi}{2}-\cot^2\frac{\pi}{2}}+\left(\sin\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{6}\right)+\left(\sec^2\frac{\pi}{6}-\tan^2\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}\times\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{1-0}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\left\{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right\}$$

$$=\frac{1-\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{2}}\times\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{2}+\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\right)$$

$$=\frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{2}}\times\frac{4}{4}+\frac{1}{2}+\frac{3}{3}$$

$$=\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times2+\frac{3}{3}$$

$$=1+1$$

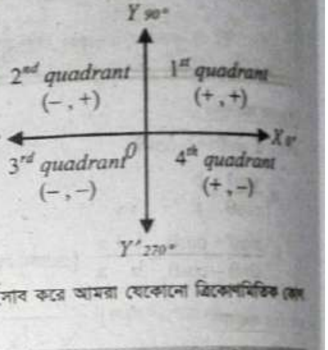
$$=2$$

∴ নির্ণেয় সরলমান = 2 **[Ans.]**

অনুশীলনী-৮.৩

প্রাথমিক আলোচনা

<u>কোয়াড্রেন্ট বা চতুর্ভাগ</u>: চিত্রে XOX' রেখা এবং YOY' রেখা পরস্পরকে ছেদ করায় যে চারটি ভাগের সৃষ্টি হয়েছে তাদেরকে কোয়াড্রেন্ট বা চতুর্ভাগ বলা হয়। ত্রিকোণমিতিতে এই কোয়াড্রেন্টের কাজ হচ্ছে ১ম কোয়াড্রেন্টের সীমা $0°$ থেকে $90°$ (0 থেকে $\frac{\pi}{2}$) পর্যন্ত, ২য় কোয়াড্রেন্টের সীমা $90°$ থেকে $180°$ $\left(\frac{\pi}{2}\text{ থেকে } \pi\right)$ পর্যন্ত, ৩য় কোয়াড্রেন্টের সীমা $180°$ থেকে $270°$ $\left(\pi \text{ থেকে } \frac{3\pi}{2}\right)$ পর্যন্ত এবং ৪র্থ কোয়াড্রেন্টের সীমা $270°$ থেকে $360°$ $\left(\frac{3\pi}{2}\text{ থেকে } 2\pi\right)$ পর্যন্ত।



এখন যদি $360°$ এর থেকে বড় হয় যেমন $361°$ হয় তবে $(360 + 1)°$ হবে অর্থাৎ 360 বাদ দিলে শুধুমাত্র $1°$ হয় যা 0 থেকে $90°$ এর মধ্যে পড়ে। একারণেই $361°$ ১ম চতুর্ভাগের একটি কোণ। অনুরূপভাবে $451°$ হবে ২য় চতুর্ভাগের কোণ কারণ $(360 + 91)°$ হওয়ায় 360 বাদ শুধু 91 থাকে যা ২য় চতুর্ভাগের অংশ। এরূপ হিসাব করে আমরা যেকোনো ত্রিকোণমিতিক কোণ কত নম্বর *quadrant*-এর অংশ তা বলে দিতে পারব।

<u>দৃষ্টি আকর্ষণ</u>: এখানে বিশেষভাবে লক্ষণীয় যে $360°$ কোণ বলতে বুঝায় OX রেখা (চিত্রে) চারটি *quadrant* অতিক্রম করে পুনরায় নিজের অবস্থানে ফিরে এসেছে কিন্তু $360°$ কে লেখা যায় $(4 \times 90°)$ এবং মজার ব্যাপার হল $(4 \times 90°)$ এর মধ্যে 4 সংখ্যাটি আমাদেরকে বলে দেয় যে OX রেখা কয়টি *quadrant* অতিক্রম করেছে যেমন– $360°$ এর ক্ষেত্রে $(4 \times 90°)$ অর্থাৎ OX রেখা 4 টি *quadrant* অতিক্রম করেছে। $540°$ এর ক্ষেত্রে $(6 \times 90°)$ অর্থাৎ OX রেখা 6 টি *quadrant* অতিক্রম করেছে। এজন্য যেসব কোণ $90°$ দ্বারা বিভাজ্য তাদেরকে $(n \times 90)$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

<u>কোয়াড্রেন্ট নির্ণয় করার নিয়ম:</u>

ধাপ-১: প্রথমে কোণকে $n\frac{\pi}{2} \pm \theta$ আকারে প্রকাশ করে চতুর্ভাগের অবস্থান থেকে চিহ্ন বসাতে হবে।

ধাপ-২: n জোড় সংখ্যা হলে অনুপাতের পরিবর্তন হবে না, কিন্তু n বিজোড় সংখ্যা হলে নিম্নোক্তভাবে পরিবর্তন হবে।
$\sin \leftrightarrow \cos$, $\tan \leftrightarrow \cot$, $\sec \leftrightarrow \text{cosec}$ অর্থাৎ sin থাকলে cos, cos থাকলে sin এরূপে পরিবর্তিত হবে।

ধাপ-৩: ধাপ-১ ও ধাপ-২ থেকে পাওয়া মানকে সূক্ষ্মকোণের অনুপাতে লিখতে হবে।

উদাহরণ-১: $\sin\left(\frac{9\pi}{2} + \theta\right)$

ধাপ-১: চিহ্ন ধনাত্মক (+) কারণ কোণটির অবস্থান দ্বিতীয় চতুর্ভাগে যেখানে sin অনুপাত ধনাত্মক

ধাপ-২: $n = 9$ বিজোড় সংখ্যা অতএব, sin, cos-এ পরিবর্তিত হবে

ধাপ-৩: $(+)\cos\theta$ [ধাপ-১ ও ধাপ-২ হতে]

$\therefore \sin\left(\frac{9\pi}{2} + \theta\right) = (+)\cos\theta = \cos\theta$

<u>একইভাবে $(-\theta)$ চতুর্থভাগে অবস্থিত।</u>

$\sin(-\theta) = -\sin\theta$
$\cos(-\theta) = \cos\theta$
$\tan(-\theta) = -\tan\theta$
$\text{cosec}(-\theta) = -\text{cosec}\theta$
$\sec(-\theta) = \sec\theta$
$\cot(-\theta) = -\cot\theta$

অনুপাত	মৌলিক পর্যায়
$\sin\theta$	2π
$\cos\theta$	2π
$\tan\theta$	π
$\cot\theta$	π
$\sec\theta$	2π
$\text{cosec}\theta$	2π
প্রয়োজনে মুখস্ত করো	

<u>পূরক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত</u>: θ ও $90° - \theta$ পরস্পরের পরিপূরক কোণ। দুইটি পরিপূরক কোণের জন্য একটি কোণের sine অপরটির cosine, একটির tangent অপরটির cotangent এবং একটির cosecant অপরটির sectant এর সমান।

সূত্র: একটি কোণের ত্রিকোণমিতিক ফাংশন = এর পরিপূরক সহফাংশন।

উদাহরণ: $\cos 30° = \sin 60°$; $\tan 25° = \cot 65°$; $\sec 60° = \text{cosec} 30°$; $\tan 45° = \cot 45°$

<u>সমাধান নির্ণয়ে মৌলিক পর্যায়ের ব্যবহার:</u>

(1) $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\sec\theta$, $\text{cosec}\theta$ অনুপাতগুলোর মৌলিক পর্যায় হলো 2π অর্থাৎ $360°$ পরপর এদের মানের পুনরাবৃত্তি হয়।

(2) আবার কোনো কোণ ও তার সম্পূরক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মান একই।

নিম্নে লেখচিত্রিক প্রশ্নের উত্তরের জন্য ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের ডোমেন, রেঞ্জ দেওয়া হলো

ত্রিকোণমিতিক ফাংশন	ডোমেন	রেঞ্জ
$\sin\theta$	R বা $(-\infty, \infty)$	$[-1, 1]$
$\cos\theta$	R বা $(-\infty, \infty)$	$[-1, 1]$
$\tan\theta$	$R - \left\{\pm(2n+1)\frac{\pi}{2} : n \in N\right\}$	R
$\sec\theta$	$R - \left\{\pm(2n+1)\frac{\pi}{2} : n \in N\right\}$	$R - (-1, 1)$
$\operatorname{cosec}\theta$	$R - \{\pm(n-1)\pi : n \in N\}$	$R - (-1, 1)$
$\cot\theta$	$R - \{\pm(n-1)\pi : n \in N\}$	R

ত্রিকোণমিতিক সমীকরণের অবাস্তবিক মূল (*Extraneous root of trigonometrical equation*): ত্রিকোণমিতিক সমীকরণ একাধিক পদ্ধতিতে সমাধান করা যায়। কিন্তু কোনো কোনো ক্ষেত্রে ত্রুটিপূর্ণ পদ্ধতির কারণে সমাধান হিসেবে সঠিক সমাধানের সাথে এমন কতগুলো সমাধান পাওয়া যায় যেগুলো প্রদত্ত সমীকরণের মূল নয়। এই মূলগুলোকে অবাস্তবিক মূল বলা হয়।

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনমূলক কাজের সমাধান

১. কাজ: [Ref: পাঠ্যবই পৃষ্ঠা: ১৬৩]
$\sec\left(\frac{3\pi}{4}\right), \operatorname{cosec}\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ এবং $\cot\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান:

☐ $\sec\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sec\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{cosec}\frac{\pi}{4} = -\sqrt{2}$

$\left[\because \sec\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -\operatorname{cosec}\theta\right]$

$\therefore \sec\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$ **[Ans.]**

☐ $\operatorname{cosec}\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right) = \sec\frac{\pi}{3} = -\sqrt{2}$

$\left[\because \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \sec\theta\right]$

$\therefore \operatorname{cosec}\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{2}$ $\operatorname{cosec}\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 2$ **[Ans.]**

☐ $\cot\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cot\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right) = -\tan\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\left[\because \cot\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -\tan\theta\right]$

$\therefore \cot\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ **[Ans.]**

২. কাজ: [Ref: পাঠ্যবই পৃষ্ঠা: ১৬৩]
$\sec\left(\frac{4\pi}{3}\right), \operatorname{cosec}\left(\frac{5\pi}{4}\right)$ এবং $\cot\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান:

☐ $\sec\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \sec\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right) = -\sec\frac{\pi}{3} = -2$

$[\because \sec(\pi+\theta) = -\sec\theta]$

$\therefore \sec\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -2$ **[Ans.]**

☐ $\operatorname{cosec}\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \operatorname{cosec}\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{cosec}\frac{\pi}{4} = -2$

$[\because \operatorname{cosec}(\pi+\theta) = -\operatorname{cosec}\theta]$

$\therefore \operatorname{cos}ec\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -2$ **[Ans.]**

☐ $\cot\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \cot\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right) = \cot\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$

$[\because \cot(\pi+\theta) = \cot\theta]$

$\therefore \cot\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$ **[Ans.]**

৩. কাজ: [Ref: পাঠ্যবই পৃষ্ঠা: ১৬৩]
$\operatorname{cosec}\left(\frac{3\pi}{4}\right), \sec\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ এবং $\cot\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান:

☐ $\operatorname{cosec}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \operatorname{cosec}\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{cosec}\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$

$\therefore \operatorname{cos}ec\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$ **[Ans.]**

☐ $\sec\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \sec\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right) = -\sec\frac{\pi}{6} = -\frac{2}{\sqrt{3}}$

$[\because \sec(\pi-\theta) = \sec\theta]$

$\therefore \sec\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ [Ans.]

☐ $\cot\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cot\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cot\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$[\because \cot(\pi - \theta) = -\cot\theta]$

$\therefore \cot\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ [Ans.]

৯. প্রশ্ন: [Ref: পাঠ্যবই পৃষ্ঠা: ১৬৭]

$\sin\left(\frac{11\pi}{2} \pm \theta\right), \cos(11\pi \pm \theta), \tan\left(17\frac{\pi}{2} \pm \theta\right), \cot(18\pi \pm \theta),$ এবং $\operatorname{cosec}(8\pi \pm \theta)$ অনুপাতসমূহকে θ কোণের অনুপাতে প্রকাশ কর।

সমাধান:

☐ $\sin\left(\frac{11\pi}{2} \pm \theta\right)$ এর ক্ষেত্রে,

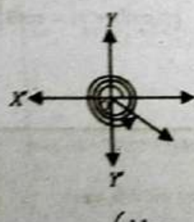
$n = 11$ বিজোড় সংখ্যা। তাই sin পরিবর্তিত হয়ে cos হবে।

আবার, $\left(11.\frac{\pi}{2} + \theta\right)$ চতুর্থ চতুর্ভাগে থাকে ফলে sin এর চিহ্ন ঋণাত্মক হবে।

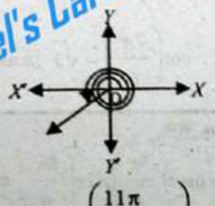
$\therefore \sin\left(11.\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\cos\theta$

আবার, $\left(11.\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ তৃতীয় চতুর্ভাগে থাকে ফলে sin এর চিহ্ন ঋণাত্মক হবে।

$\therefore \sin\left(11.\frac{\pi}{2} - \theta\right) = -\cos\theta$



চিত্র: $\sin\left(\frac{11\pi}{2} + \theta\right)$



চিত্র: $\sin\left(\frac{11\pi}{2} - \theta\right)$

☐ $\cos\left(22.\frac{\pi}{2} \pm \theta\right)$ এর ক্ষেত্রে $n = 22$ জোড় সংখ্যা। তাই cos অপরিবর্তিত থাকবে।

$\left(22.\frac{\pi}{2} + \theta\right)$ তৃতীয় চতুর্ভাগে থাকে ফলে cos এর চিহ্ন ঋণাত্মক হবে।

$\therefore \cos\left(22.\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\cos\theta$

আবার, $\left(22.\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ দ্বিতীয় চতুর্ভাগে থাকে ফলে cos এর চিহ্ন ঋণাত্মক হবে।

$\therefore \cos\left(22.\frac{\pi}{2} - \theta\right) = -\cos\theta$

☐ $\tan\left(17.\frac{\pi}{2} \pm \theta\right)$ এর ক্ষেত্রে $n = 17$ বিজোড় সংখ্যা। তাই tan পরিবর্তিত হয়ে cot হবে।

এখানে, $\left(17.\frac{\pi}{2} + \theta\right)$ দ্বিতীয় চতুর্ভাগে থাকে ফলে tan ঋণাত্মক হবে।

$\therefore \tan\left(17.\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\cot\theta$

এবং $\left(17.\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ প্রথম চতুর্ভাগে থাকে ফলে tan ধনাত্মক হবে।

$\therefore \tan\left(17.\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta$

☐ $\cot(18\pi \pm \theta) = \cot\left(36.\frac{\pi}{2} \pm \theta\right)$ এর ক্ষেত্রে $n = 36$ জোড় সংখ্যা। তাই cot অপরিবর্তিত থাকবে। এখানে, $\left(36.\frac{\pi}{2} + \theta\right)$ প্রথম চতুর্ভাগে থাকে ফলে cot ধনাত্মক হবে।

$\therefore \cot\left(36.\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cot\theta$

আবার, $\left(36.\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ চতুর্থ চতুর্ভাগে থাকে বলে cot ঋণাত্মক হবে।

$\therefore \cot\left(36.\frac{\pi}{2} - \theta\right) = -\cot\theta$

☐ $\sec\left(\frac{19\pi}{2} \pm \theta\right) = \sec\left(19.\frac{\pi}{2} \pm \theta\right)$ এর ক্ষেত্রে,

n = 19 বিজোড় সংখ্যা। তাই sec পরিবর্তিত হয়ে cosec হবে।

এখানে, $\left(19.\frac{\pi}{2} + \theta\right)$ চতুর্থ চতুর্ভাগে থাকে ফলে sec ধনাত্মক হবে।

$\therefore \sec\left(19.\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \operatorname{cosec}\theta$

আবার, $\left(19.\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ তৃতীয় চতুর্ভাগে থাকে ফলে sec ঋণাত্মক হবে।

$\therefore \sec\left(19.\frac{\pi}{2} - \theta\right) = -\operatorname{cosec}\theta$

☐ $\operatorname{cosec}(8\pi \pm \theta) = \operatorname{cosec}\left(16.\frac{\pi}{2} \pm \theta\right)$ এর ক্ষেত্রে,

$n = 16$, জোড় সংখ্যা। তাই cosec অপরিবর্তিত থাকবে।

এখানে, $\left(16.\frac{\pi}{2}+\theta\right)$ প্রথম চতুর্ভাগে থাকে বলে cosec ধনাত্মক হবে।

$\therefore \operatorname{cosec}\left(16.\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \operatorname{cosec}\theta$

আবার, $\left(16.\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ চতুর্থ চতুর্ভাগে থাকে বলে cosec ঋণাত্মক হবে।

$\therefore \operatorname{cosec}\left(16.\frac{\pi}{2}-\theta\right) = -\operatorname{cosec}\theta$

ঝ কাজ: [Ref: পাঠ্যবই পৃষ্ঠা: ১৬৯]

মান নির্ণয় কর:

$\cos^2\frac{\pi}{15}+\cos^2\frac{13\pi}{30}+\cos^2\frac{16\pi}{15}+\cos^2\frac{47\pi}{30}$

সমাধান:

$\cos^2\frac{\pi}{15}+\cos^2\frac{13\pi}{30}+\cos^2\frac{16\pi}{15}+\cos^2\frac{47\pi}{30}$

$=\cos^2\frac{2\pi}{30}+\cos^2\frac{13\pi}{30}+\cos^2\frac{32\pi}{30}+\cos^2\frac{47\pi}{30}$

$=\cos^2\frac{2\pi}{30}+\cos^2\frac{13\pi}{30}+\left\{\cos\left(3\frac{\pi}{2}-\frac{13\pi}{30}\right)\right\}^2+\left\{\cos\left(3.\frac{\pi}{2}+\frac{2}{30}\pi\right)\right\}^2$

$=\cos^2\frac{2\pi}{30}+\cos^2\frac{13}{30}\pi+\left(-\sin\frac{13\pi}{30}\right)^2+\left(-\sin\frac{2\pi}{30}\right)^2$

$=\cos^2\frac{2\pi}{30}+\cos^2\frac{13\pi}{30}+\sin^2\frac{13\pi}{30}+\sin^2\frac{2\pi}{30}$

$=\left(\cos^2\frac{2\pi}{30}+\sin^2\frac{2\pi}{30}\right)+\left(\cos^2\frac{13\pi}{30}+\sin^2\frac{13}{30}\pi\right)$

$=1+1=2$

ঞ কাজ: [Ref: পাঠ্যবই পৃষ্ঠা: ১৭১]

$2(\sin\theta\cos\theta+\sqrt{3})=\sqrt{3}\cos\theta+4\sin\theta$ সমীকরণটি সমাধান কর। যেখানে, $0<\theta<2\pi$

সমাধান:

$2(\sin\theta\cos\theta+\sqrt{3})=\sqrt{3}\cos\theta+4\sin\theta$

বা, $4(\sin^2\theta\cos^2\theta+2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta+3)=3\cos^2\theta+8\sqrt{3}\cos\theta\sin\theta+16\sin^2\theta$ [বর্গ করে]

বা, $4\sin^2\theta\cos^2\theta+8\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta+12=3\cos^2\theta+8\sqrt{3}\cos\theta\sin\theta+16\sin^2\theta$

বা, $4\sin^2\theta\cos^2\theta+12=3\cos^2\theta+16\sin^2\theta$

বা, $4\sin^2\theta(1-\sin^2\theta)+12=3(1-\sin^2\theta)+16\sin^2\theta$

বা, $4\sin^2\theta-4\sin^4\theta+12=3-3\sin^2\theta+16\sin^2\theta$

বা, $4\sin^4\theta+9\sin^2\theta-9=0$

বা, $4\sin^4\theta+12\sin^2\theta-3\sin^2\theta-9=0$

বা, $(4\sin^2\theta-3)(\sin^2\theta+3)=0$

$\therefore 4\sin^2\theta-3=0$ বা, $\sin^2\theta+3=0$

অর্থাৎ, $4\sin^2\theta=3$ বা, $\sin^2\theta=-3$

$\therefore \sin^2\theta=\frac{3}{4}$ [$\sin^2\theta=-3$ হতে পারে না বলে গ্রহণযোগ্য নয়, কারণ $-1\le\sin\theta\le 1$]

বা, $\sin\theta=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ এবং $\sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

অর্থাৎ, $\sin\theta=\sin\frac{\pi}{3}$ এবং $\sin\theta=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)$

$\therefore \theta=\frac{\pi}{3}$ এবং $\frac{4\pi}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $\theta=\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}$

এখানে, $\frac{4\pi}{3}$ সমীকরণকে সিদ্ধ করে না। এটা একটা প্রাসঙ্গিক মূল। দ্বিতীয় লাইনে বর্গ করার কারণে এটার আবির্ভাব হয়েছে।

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৮.৩

১। $\sin A=\frac{1}{\sqrt{2}}$ হলে $\sin 2A$ এর মান কত?

(ক) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (খ) $\frac{1}{2}$ (গ) 1 (ঘ) $\sqrt{2}$

২। $-300°$ কোণটি কোন চতুর্থভাগে থাকবে?

(ক) প্রথম (খ) দ্বিতীয়

(গ) তৃতীয় (ঘ) চতুর্থ

৩। $\sin\theta+\cos\theta=1$ হলে θ এর মান হবে –

i. $0°$

ii. $30°$

iii. $90°$

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i (খ) ii

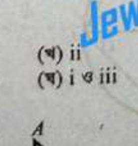
(গ) i ও ii (ঘ) i ও iii

৪। পাশের চিত্র অনুসারে-

(i) $\tan\theta=\frac{4}{3}$

(ii) $\sin\theta=\frac{5}{3}$

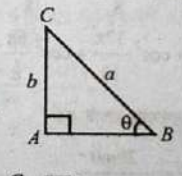
(iii) $\cos^2\theta=\frac{9}{25}$



নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

নিচের চিত্রের আলোকে ৫নং ও ৬নং প্রশ্নের উত্তর দাও:



৫। $\sin B+\cos C=$ কত?

(ক) $\frac{2b}{a}$ (খ) $\frac{2a}{b}$

(গ) $\frac{a^2+b^2}{ab}$ (ঘ) $\frac{ab}{a^2+b^2}$

৬। $\tan B$ এর মান কোনটি?

(ক) $\frac{a}{a^2-b^2}$ (খ) $\frac{b}{a^2-b^2}$

(গ) $\frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}$ (ঘ) $\frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}$

৭। মান নির্ণয় কর:

(i) $\sin 7\pi$ (ii) $\cos\frac{11\pi}{2}$ (iii) $\cot 11\pi$

(iv) $\tan\left(-\frac{23\pi}{6}\right)$ (v) $\text{cosec}\frac{19\pi}{3}$ (vi) $\sec\left(-\frac{25\pi}{2}\right)$

(vii) $\sin\frac{31\pi}{6}$ (viii) $\cos\left(-\frac{25\pi}{6}\right)$

৮। প্রমাণ কর যে,

(i) $\cos\frac{17\pi}{10}+\cos\frac{13\pi}{10}+\cos\frac{9\pi}{10}+\cos\frac{\pi}{10}=0$

(ii) $\tan\frac{\pi}{12}\tan\frac{5\pi}{12}\tan\frac{7\pi}{12}\tan\frac{11\pi}{12}=1$

(iii) $\sin^2\frac{\pi}{7}+\sin^2\frac{5\pi}{14}+\sin^2\frac{8\pi}{7}+\sin^2\frac{9\pi}{14}=2$

(iv) $\sin\frac{7\pi}{3}\cos\frac{13\pi}{6}-\cos\frac{5\pi}{3}\sin\frac{11\pi}{6}=1$

(v) $\sin\frac{13\pi}{3}\cos\frac{13}{6}\pi-\sin\frac{11\pi}{6}\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right)=1$

(vi) $\tan\theta\frac{3}{4}$ এবং $\sin\theta$ ঋণাত্মক হলে দেখাও যে, $\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sec\theta+\tan\theta}=\frac{14}{5}$

৯। মান নির্ণয় কর:

(i) $\cos\frac{9\pi}{4}+\cos\frac{5\pi}{4}+\sin\frac{31\pi}{36}-\sin\frac{5\pi}{36}$

(ii) $\cot\frac{\pi}{20}\cot\frac{3\pi}{20}\cot\frac{5\pi}{20}\cot\frac{7\pi}{20}\cot\frac{9\pi}{20}$

(iii) $\sin^2\frac{\pi}{4}+\sin^2\frac{3\pi}{4}+\sin^2\frac{5\pi}{4}+\sin^2\frac{7\pi}{4}$

(iv) $\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{5\pi}{8}+\cos^2\frac{7\pi}{8}$

(v) $\sin^2\frac{17\pi}{18}+\sin^2\frac{5\pi}{8}+\cos^2\frac{37\pi}{18}+\cos^2\frac{5\pi}{8}$

১০। $\theta=\frac{\pi}{3}$ হলে নিম্নোক্ত অভেদসমূহ যাচাই কর:

(i) $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$

(ii) $\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$

(iii) $\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$

(iv) $\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

১১। প্রদত্ত শর্ত পূরণ করে α (আলফা) এর মান নির্ণয় কর:

(i) $\cot\alpha=-\sqrt{3};\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$

(ii) $\cos\alpha=-\frac{1}{2};\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{3\pi}{2}$

(iii) $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{3\pi}{2}$

(iv) $\cot\alpha=-1;\pi<\alpha<2\pi$

১২। প্রদত্ত শর্ত পূরণ করে α (আলফা) এর মান নির্ণয় কর:

(i) $\cot\alpha=-\sqrt{3};\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$

(ii) $\cos\alpha=-\frac{1}{2};\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{3\pi}{2}$

(iii) $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{3\pi}{2}$

(iv) $\cot\alpha=-1;\pi<\alpha<2\pi$

১৩। সমাধান কর: (যখন $0<\theta<\frac{\pi}{2}$)

(i) $2\cos^2\theta=1+2\sin^2\theta$ (ii) $2\sin^2\theta-3\cos\theta=0$

(iii) $6\sin^2\theta-11\sin\theta+4=0$ (iv) $\tan\theta+\cot\theta=\frac{4}{\sqrt{3}}$

(v) $2\sin^2\theta+3\cos\theta=3$

১৪। সমাধান কর: (যখন $0<\theta<2\pi$)

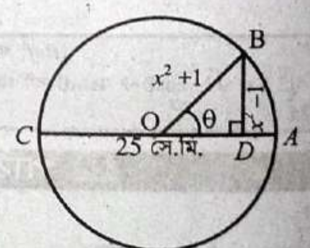
(i) $2\sin^2\theta+3\cos\theta=0$ (ii) $4(\cos^2\theta+\sin\theta)=5$

(iii) $\cot^2\theta+\text{cosec}^2\theta=3$ (iv) $\tan^2\theta+\cot^2\theta=2$

(v) $\sec^2\theta+\tan^2\theta=\frac{5}{3}$ (vi) $5\text{cosec}^2\theta-7\cot\theta\,\text{cosec}\theta-2=0$

(vii) $2\sin x\cos x=\sin x(0\le x\le 2\pi)$.

১৫।

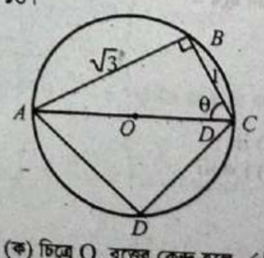


(ক) চিত্রে ABC একটি বৃত্তাকার চাকা এবং চাকাটির AB চাপের দৈর্ঘ্য 25 সে.মি. হলে $\theta=$ কত? চাকাটি 1 বার ঘুরে কত মিটার দূরত্ব অতিক্রম করবে?

(খ) ABC চাকাটি প্রতি সেকেন্ডে 5 বার আবর্তিত হলে চাকাটির গতিবেগ ঘণ্টায় কত হবে?

(গ) চিত্রে ΔBOD হলে $\sin\theta$ এর মান ব্যবহার করে প্রমাণ কর যে, $\tan\theta+\sec\theta=x$.

১৬।



(ক) চিত্রে O, বৃত্তের কেন্দ্র হলে $\angle B$ এর বৃত্তীয়মান এবং AC নির্ণয় কর।

(খ) প্রমাণ কর যে, $\tan A+\tan B+\tan C+\tan D=0$

(গ) $\sec\theta+\cos\theta=P$ হলে, P এর মান নির্ণয় কর এবং সমীকরণটি সমাধান কর।

অনুশীলনী-৮.৩ এর সমাধান

১। $\sin A = \frac{1}{\sqrt{2}}$ হলে, $\sin 2A$ এর মান কত?

(ক) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (খ) $\frac{1}{2}$ (গ) 1 (ঘ) $\sqrt{2}$

উত্তর: (গ) 1

ব্যাখ্যা:

$\sin A = \frac{1}{\sqrt{2}}$

বা, $\sin A = \sin\frac{\pi}{4}$

$\therefore A = \frac{\pi}{4}$

সুতরাং $\sin 2A = \sin 2\times\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{2} = 1$

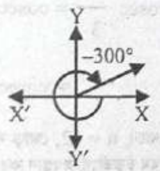
২। $-300°$ কোণটি কোন চতুর্ভাগে থাকবে?

(ক) প্রথম (খ) দ্বিতীয় (গ) তৃতীয় (ঘ) চতুর্থ

উত্তর: (ক) প্রথম

ব্যাখ্যা:

$-300° = -(3\times 90° + 60°)$। $-300°$ কোণটি ঋণাত্মক কোণ। তাই এটি ঘড়ির কাঁটার দিকে ঘুরবে এবং এ ঘূর্ণনের পরিমাণ 3 সমকোণ অপেক্ষা $60°$ বেশি হবে। তাই ঘড়ির কাঁটার দিকে 3 সমকোণ অপেক্ষা $60°$ আরও বেশি ঘুরে এটি প্রথম চতুর্ভাগে অবস্থান করবে।



৩। $\sin\theta + \cos\theta = 1$ হলে θ এর মান হবে –

i. $0°$

ii. $30°$

iii. $90°$

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i (খ) ii

(গ) i ও ii (ঘ) i ও iii

উত্তর: (ঘ) i ও iii

ব্যাখ্যা:

$\theta = 0°$ হলে-

বামপক্ষ $= \sin\theta + \cos\theta = 0 + 1 = 1 =$ ডানপক্ষ

অর্থাৎ, সমীকরণটি সিদ্ধ হয়।

আবার, $\theta = 30°$ হলে-

বামপক্ষ $= \sin 30° + \cos 30° = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$

অর্থাৎ সমীকরণটি সিদ্ধ হয় না।

আবার, $\theta = 90°$ হলে-

বামপক্ষ $= \sin 90° + \cos 90°$
$= 1 + 0$
$= 1$
$=$ ডানপক্ষ

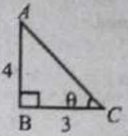
অর্থাৎ, সমীকরণটি সিদ্ধ হয়।

৪। পাশের চিত্র অনুসারে-

i. $\tan\theta = \frac{4}{3}$

ii. $\sin\theta = \frac{5}{3}$

iii. $\cos^2\theta = \frac{9}{25}$



নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

উত্তর: (খ) i ও iii

ব্যাখ্যা:

θ কোণের সাপেক্ষে ABC ত্রিভুজের BC ভূমি এবং লম্ব AB এবং AC অতিভুজ। পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুযায়ী, $AC^2 = BC^2 + AB^2$

বা, $AC = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

i. নং সঠিক; কারণ $\tan\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{3}$; $\therefore \tan\theta = \frac{4}{3}$

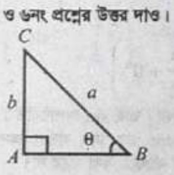
ii. নং ভুল; কারণ $\sin\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{5}$; $\therefore \sin\theta = \frac{4}{5}$

iii. নং সঠিক; কারণ $\cos\theta = \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{5}$

$\therefore \cos\theta = \frac{3}{5}$; বা $\cos^2\theta = \frac{9}{25}$

সুতরাং i ও iii নং সঠিক।

নিচের চিত্রটি লক্ষ কর ৫ ও ৬নং প্রশ্নের উত্তর দাও।



৫। $\sin B + \cos C =$ কত?

(ক) $\frac{2b}{a}$ (খ) $\frac{2a}{b}$ (গ) $\frac{a^2+b^2}{ab}$ (ঘ) $\frac{ab}{a^2+b^2}$

উত্তর: (ক) $\frac{2b}{a}$

ব্যাখ্যা:

প্রদত্ত চিত্রে $\angle B = \theta$ কোণের সাপেক্ষে ভূমি AB, লম্ব AC ও অতিভুজ BC

এখানে, $AC = b$, $BC = a$

$\therefore \sin B = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a}$

আবার, C কোণের সাপেক্ষে ভূমি $AC = b$ ও অতিভুজ $BC = a$

$\therefore \cos C = \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a}$

$\therefore \sin B + \cos C = \frac{b}{a} + \frac{b}{a} = \frac{2b}{a}$

৬। $\tan B$ এর মান কোনটি?

(ক) $\frac{a}{a^2-b^2}$ (খ) $\frac{b}{a^2-b^2}$ (গ) $\frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}$ (ঘ) $\frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}$

উত্তর: (ঘ) $\frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}$

ব্যাখ্যা:

B কোণের সাপেক্ষে লম্ব AC, ভূমি AB এবং অতিভুজ BC

এখানে $AC = b$, $BC = a$

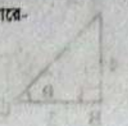
∴ পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে-

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

বা, $AB^2 = BC^2 - AC^2$

বা, $AB = \sqrt{BC^2 - AC^2}$

$= \sqrt{a^2 - b^2}$



$\therefore \tan B = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}}$

$= \frac{AC}{AB} = \frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2}}$

$\therefore \tan B = \frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2}}$

৭। মান নির্ণয় কর:

(i) $\sin 7\pi$ (ii) $\cos \frac{11\pi}{2}$ (iii) $\cot 11\pi$

(iv) $\tan\left(-\frac{23\pi}{6}\right)$ (v) $\operatorname{cosec}\frac{19\pi}{3}$ (vi) $\sec\left(-\frac{25\pi}{2}\right)$

(vii) $\sin\frac{31\pi}{6}$ (viii) $\cos\left(-\frac{25\pi}{6}\right)$

(i) $\sin 7\pi$

সমাধান:

$$\sin 7\pi = \sin\left(14 \times \frac{\pi}{2} + 0^\circ\right)$$

এখানে, $n = 14$ জোড় সংখ্যা। তাই sin অপরিবর্তিত থাকবে।
আবার, x-অক্ষের উপর cot এর মান সর্বদা অসংজ্ঞায়িত তাই এর চিহ্ন ও অসংজ্ঞায়িত। cot এর চিহ্ন এক্ষেত্রে বলা যাবে না।

$$\therefore \sin\left(14 \times \frac{\pi}{2} + 0^\circ\right) = \sin 0^\circ = 0$$

(ii) $\cos\frac{11\pi}{2}$

সমাধান:

$$\cos\frac{11\pi}{2} = \cos\left(11 \times \frac{\pi}{2} + 0^\circ\right)$$

এখানে, $n = 11$ বিজোড় সংখ্যা। তাই cos পরিবর্তিত হয়ে sin হবে। আবার কোনটি y-অক্ষের উপর অবস্থিত বলে cos এর চিহ্ন হবে ধনাত্মক।

$$\therefore \cos\frac{11\pi}{2} = \cos\left(11 \times \frac{\pi}{2} + 0^\circ\right) = \sin 0^\circ = 0$$

(iii) $\cot 11\pi$

সমাধান:

$$\cot 11\pi = \cot\left(22 \times \frac{\pi}{2} + 0^\circ\right)$$

এখানে, $n = 22$ জোড় সংখ্যা। তাই cot অপরিবর্তিত থাকবে।
আবার কোনটি x-অক্ষের উপর অবস্থিত বলে cot এর চিহ্ন ধনাত্মক হবে।

$$\cot 11\pi = \cot\left(22 \times \frac{\pi}{2} + 0^\circ\right) = \cot 0^\circ = \text{অসংজ্ঞায়িত।}$$

(iv) $\tan\left(-\frac{23\pi}{6}\right)$

সমাধান:

$$\tan\left(-\frac{23\pi}{6}\right) = -\tan\frac{23\pi}{6} \quad [\because \tan(-\theta) = -\tan\theta]$$

$$= -\tan\left(4\pi - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= -\tan\left(8 \times \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$$

এখানে, n = 8 জোড় সংখ্যা। তাই tan অপরিবর্তিত থাকবে। [illegible] $\left(8 \times \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$ কোণটি চতুর্থ চতুর্ভাগে অবস্থিত। তাই tan [illegible]

$$-\tan\left(8 \times \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = -\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

(v) $\operatorname{cosec}\frac{19\pi}{3}$

সমাধান:

$$\operatorname{cosec}\frac{19\pi}{3} = \operatorname{cosec}\left(6\pi + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \operatorname{cosec}\left(12 \times \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$$

এখানে, n = 12, জোড় সংখ্যা, অতএব cosec অপরিবর্তিত থাকবে এবং কোণটি প্রথম চতুর্ভাগে অবস্থান করছে বলে cosec এর চিহ্ন ধনাত্মক হবে।

$$\therefore \operatorname{cosec}\frac{19\pi}{3} = \operatorname{cosec}\left(12 \times \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{cosec}\frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}$$

(vi) $\sec\left(-\frac{25\pi}{2}\right)$

সমাধান:

$$\sec\left(-\frac{25\pi}{2}\right) = \sec\left(\frac{25\pi}{2}\right) \quad [\because \sec(-\theta) = \sec\theta]$$

$$= \sec\left(12\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \sec\left(24 \times \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$$

এখানে, $n = 24$ জোড় সংখ্যা অতএব sec অপরিবর্তিত [illegible] $\left(24 \times \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$ কোণটি প্রথম চতুর্ভাগে অবস্থিত।

$$\therefore \sec\left(-\frac{25\pi}{2}\right) = \sec\frac{\pi}{2} = \text{অসংজ্ঞায়িত।}$$

(vii) $\sin\frac{31\pi}{6}$

সমাধান:

$\sin\frac{31\pi}{6} = \sin\left(5\pi + \frac{\pi}{6}\right)$

$= \sin\left(10\times\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$

এখানে, $n = 10$, জোড় সংখ্যা। তাই sin অপরিবর্তিত থাকবে।

আবার, $\left(10\times\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$ কোণটি তৃতীয় চতুর্ভাগে অবস্থান করছে বলে sin এর চিহ্ন ঋণাত্মক হবে।

$\therefore \sin\frac{31\pi}{6} = -\sin\frac{\pi}{6}$

$= -\frac{1}{2}$

(viii) $\cos\left(-\frac{25\pi}{6}\right)$

সমাধান:

$\cos\left(-\frac{25\pi}{6}\right) = \cos\frac{25\pi}{6}$ $[\because \cos(-\theta) = \cos\theta]$

$= \cos\left(4\pi + \frac{\pi}{6}\right)$

$= \cos\left(8\times\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$

এখানে, $n = 8$, জোড় সংখ্যা। তাই cos অপরিবর্তিত থাকবে।

আবার, $\left(8\times\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$ কোণটি প্রথম চতুর্ভাগে অবস্থিত বলে cos এর চিহ্ন ধনাত্মক হবে।

$\therefore \cos\left(-\frac{25\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

৮। প্রমাণ কর যে,

(i) $\cos\frac{17\pi}{10} + \cos\frac{13\pi}{10} + \cos\frac{9\pi}{10} + \cos\frac{\pi}{10} = 0$

(ii) $\tan\frac{\pi}{12}\tan\frac{5\pi}{12}\tan\frac{7\pi}{12}\tan\frac{11\pi}{12} = 1$

(iii) $\sin^2\frac{\pi}{7} + \sin^2\frac{5\pi}{14} + \sin^2\frac{8\pi}{7} + \sin^2\frac{9\pi}{14} = 2$

(iv) $\sin\frac{7\pi}{3}\cos\frac{13\pi}{6} - \cos\frac{5\pi}{3}\sin\frac{11\pi}{6} = 1$

(v) $\sin\frac{13\pi}{3}\cos\frac{13}{6}\pi - \sin\frac{11\pi}{6}\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right) = 1$

[illegible] $\frac{\sin\theta + \cos\theta}{[illegible]} = \frac{14}{5}$

(i) $\cos\frac{17\pi}{10} + \cos\frac{13\pi}{10} + \cos\frac{9\pi}{10} + \cos\frac{\pi}{10} = 0$

সমাধান:

বামপক্ষ $= \cos\frac{17\pi}{10} + \cos\frac{13\pi}{10} + \cos\frac{9\pi}{10} + \cos\frac{\pi}{10}$

$= \cos\left(2\pi - \frac{3\pi}{10}\right) + \cos\left(\pi + \frac{3\pi}{10}\right) + \cos\left(\pi - \frac{\pi}{10}\right) + \cos\frac{\pi}{10}$

$= \cos\frac{3\pi}{10} - \cos\frac{3\pi}{10} - \cos\frac{\pi}{10} + \cos\frac{\pi}{10}$

$= 0$

= ডানপক্ষ

$\therefore \cos\frac{17\pi}{10} + \cos\frac{13\pi}{10} + \cos\frac{9\pi}{10} + \cos\frac{\pi}{10} = 0$ (প্রমাণিত)

(ii) $\tan\frac{\pi}{12}\tan\frac{5\pi}{12}\tan\frac{7\pi}{12}\tan\frac{11\pi}{12} = 1$

সমাধান:

বামপক্ষ $= \tan\frac{\pi}{12}\tan\frac{5\pi}{12}\tan\frac{7\pi}{12}\tan\frac{11\pi}{12}$

$= \tan\frac{\pi}{12}\times\tan\frac{5\pi}{12}\left\{\tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12}\right)\right\}\times\left\{\tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{12}\right)\right\}$

$= \tan\frac{\pi}{12}\times\tan\frac{5\pi}{12}\left\{-\cot\frac{\pi}{12}\right\}\times\left\{-\cot\frac{5\pi}{12}\right\}$

$= \tan\frac{\pi}{12}\times\tan\frac{5\pi}{12}\times\frac{1}{\tan\frac{\pi}{12}}\times\frac{1}{\tan\frac{5\pi}{12}}$ $[\because \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}]$

$= 1 =$ ডানপক্ষ

$\therefore \tan\frac{\pi}{12}\tan\frac{5\pi}{12}\tan\frac{7\pi}{12}\tan\frac{11\pi}{12} = 1$ (প্রমাণিত)

(iii) $\sin^2\frac{\pi}{7} + \sin^2\frac{5\pi}{14} + \sin^2\frac{8\pi}{7} + \sin^2\frac{9\pi}{14} = 2$

সমাধান:

বামপক্ষ $= \sin^2\frac{\pi}{7} + \sin^2\frac{5\pi}{14} + \sin^2\frac{8\pi}{7} + \sin^2\frac{9\pi}{14}$

$= \sin^2\frac{\pi}{7} + \sin^2\frac{5\pi}{14} + \left\{\sin\left(\pi + \frac{\pi}{7}\right)\right\}^2 + \left\{\sin\left(\pi - \frac{5\pi}{14}\right)\right\}^2$

$= \sin^2\frac{\pi}{7} + \sin^2\frac{5\pi}{14} + \left(-\sin\frac{\pi}{7}\right)^2 + \left(\sin\frac{5\pi}{14}\right)^2$

$= \sin^2\frac{\pi}{7} + \sin^2\frac{5\pi}{14} + \sin^2\frac{\pi}{7} + \sin^2\frac{5\pi}{14}$

$= 2\sin^2\frac{\pi}{7} + 2\sin^2\frac{5\pi}{14}$

$= 2\left(\sin^2\frac{\pi}{7} + \sin^2\frac{5\pi}{14}\right)$

$$= 2\left[\sin^2\frac{\pi}{7} + \left\{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7}\right)\right\}^2\right]$$

$$= 2\left(\sin^2\frac{\pi}{7} + \cos^2\frac{\pi}{7}\right)$$

$= 2 \times 1 = 2 =$ ডানপক্ষ

$\therefore \sin^2\frac{\pi}{7} + \sin^2\frac{5\pi}{14} + \sin^2\frac{8\pi}{7} + \sin^2\frac{9\pi}{14} = 2$ (প্রমাণিত)

(iv) $\sin\frac{7\pi}{3}\cos\frac{13\pi}{6} - \cos\frac{5\pi}{3}\sin\frac{11\pi}{6} = 1$

<u>সমাধান:</u>

বামপক্ষ $= \sin\frac{7\pi}{3}\cos\frac{13\pi}{6} - \cos\frac{5\pi}{3}\sin\frac{11\pi}{6}$

$$= \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right)\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \sin\left(4\times\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(4\times\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(4\times\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right)\sin\left(4\times\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{3}\left(-\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3+1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

= ডানপক্ষ

$\therefore \sin\frac{7\pi}{3}\cos\frac{13\pi}{6} - \cos\frac{5\pi}{3}\sin\frac{11\pi}{6} = 1$ (প্রমাণিত)

(v) $\sin\frac{13\pi}{3}\cos\frac{13}{6}\pi - \sin\frac{11\pi}{6}\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right) = 1$

<u>সমাধান:</u>

বামপক্ষ $= \sin\frac{13\pi}{3}\cos\frac{13}{6}\pi - \sin\frac{11\pi}{6}\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$

$$= \sin\left(4\pi + \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6} - \left(-\sin\frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{3}$$

$$= \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

$= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3+1}{4} = \frac{4}{4} = 1 =$ ডানপক্ষ

$\therefore \sin\frac{13\pi}{3}\cos\frac{13}{6}\pi - \sin\frac{11\pi}{6}\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right) = 1$ (প্রমাণিত)

(vi) $\tan\theta = \frac{3}{4}$ এবং $\sin\theta$ ঋণাত্মক হলে দেখাও যে, $\frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sec\theta + \tan\theta} = \frac{14}{5}$

<u>সমাধান:</u>

দেওয়া আছে,

$\tan\theta = \frac{3}{4}$

বা, $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{3}{4}$

বা, $3\cos\theta = 4\sin\theta$

বা, $9\cos^2\theta = 16\sin^2\theta$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $9(1 - \sin^2\theta) = 16\sin^2\theta$

বা, $9 - 9\sin^2\theta - 16\sin^2\theta = 0$

বা, $-25\sin^2\theta = -9$

বা, $\sin^2\theta = \frac{9}{25}$

বা, $\sin\theta = \pm\frac{3}{5}$

$\therefore \sin\theta = -\frac{3}{5}$ [$\because \sin\theta$ ঋণাত্মক]

আবার, $\tan\theta = \frac{3}{4}$

বা, $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{3}{4}$

বা, $3\cos\theta = 4\sin\theta$

বা, $\cos\theta = \frac{4}{3}\times\left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{4}{5}$, $\left[\because \sin\theta = \frac{-3}{5}\right]$

আবার, $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{-\frac{4}{5}} = -\frac{5}{4}$

$\therefore$ বামপক্ষ $= \frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sec\theta + \tan\theta}$

$$= \frac{-\frac{3}{5} - \frac{4}{5}}{-\frac{5}{4} + \frac{3}{4}}$$

$$= \frac{\frac{-3-4}{5}}{\frac{-5+3}{4}} = \frac{-\frac{7}{5}}{-\frac{2}{4}}$$

$= \frac{-7}{5}\times\frac{4}{-2} = \frac{14}{5} =$ ডানপক্ষ

$\therefore \frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sec\theta + \tan\theta} = \frac{14}{5}$ (দেখানো হলো)

মান নির্ণয় কর:

(i) $\cos\frac{9\pi}{4}+\cos\frac{5\pi}{4}+\sin\frac{31\pi}{36}-\sin\frac{5\pi}{36}$

(ii) $\cot\frac{\pi}{20}\cot\frac{3\pi}{20}\cot\frac{5\pi}{20}\cot\frac{7\pi}{20}\cot\frac{9\pi}{20}$

(iii) $\sin^2\frac{\pi}{4}+\sin^2\frac{3\pi}{4}+\sin^2\frac{5\pi}{4}+\sin^2\frac{7\pi}{4}$

(iv) $\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{5\pi}{8}+\cos^2\frac{7\pi}{8}$

(v) $\sin^2\frac{17\pi}{18}+\sin^2\frac{5\pi}{8}+\cos^2\frac{37\pi}{18}+\cos^2\frac{5\pi}{8}$

(i) $\cos\frac{9\pi}{4}+\cos\frac{5\pi}{4}+\sin\frac{31\pi}{36}-\sin\frac{5\pi}{36}$

সমাধান:

$\cos\frac{9\pi}{4}+\cos\frac{5\pi}{4}+\cos\frac{31\pi}{36}-\sin\frac{5\pi}{36}$

$=\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\pi-\frac{5\pi}{36}\right)-\sin\frac{5\pi}{36}$

$=\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{5\pi}{36}-\sin\frac{5\pi}{36}$

$=0$

(ii) $\cot\frac{\pi}{20}\cot\frac{3\pi}{20}\cot\frac{5\pi}{20}\cot\frac{7\pi}{20}\cot\frac{9\pi}{20}$

সমাধান:

$\cot\frac{\pi}{20}\cot\frac{3\pi}{20}\cot\frac{5\pi}{20}\cot\frac{7\pi}{20}\cot\frac{9\pi}{20}$

$=\cot\frac{\pi}{20}\cot\left(\frac{\pi}{2}-\frac{7\pi}{20}\right)\cot\frac{\pi}{4}\cot\left(\frac{7\pi}{20}\right)\cot\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{20}\right)$

$=\cot\left(\frac{\pi}{20}\right)\tan\left(\frac{7\pi}{20}\right).1.\cot\left(\frac{7\pi}{20}\right)\tan\left(\frac{\pi}{20}\right)$

$=\cot\left(\frac{\pi}{20}\right)\cdot\frac{1}{\cot\left(\frac{7\pi}{20}\right)}.\cot\left(\frac{7\pi}{20}\right)\cdot\frac{1}{\cot\left(\frac{\pi}{20}\right)}=1$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $=1$

(iii) $\sin^2\frac{\pi}{4}+\sin^2\frac{3\pi}{4}+\sin^2\frac{5\pi}{4}+\sin^2\frac{7\pi}{4}$

সমাধান:

প্রদত্ত রাশি $=\sin^2\frac{\pi}{4}+\sin^2\frac{3\pi}{4}+\sin^2\frac{5\pi}{4}+\sin^2\frac{7\pi}{4}$

$=\sin^2\frac{\pi}{4}+\left[\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)\right]^2+\left[\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)\right]^2+\left[\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right)\right]^2$

$=\sin^2\frac{\pi}{4}+\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^2+\left(-\sin\frac{\pi}{4}\right)^2+\left(-\sin\frac{\pi}{4}\right)^2$

$=\sin^2\frac{\pi}{4}+\sin^2\frac{\pi}{4}+\sin^2\frac{\pi}{4}+\sin^2\frac{\pi}{4}$

$=4\sin^2\frac{\pi}{4}$

$=4\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^2$

$=4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \quad \left[\because \sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$

$=4\times\frac{1}{2}$

$=2$ [Ans.]

(iv) $\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{5\pi}{8}+\cos^2\frac{7\pi}{8}$

সমাধান:

প্রদত্ত রাশি

$=\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{5\pi}{8}+\cos^2\frac{7\pi}{8}$

$=\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\left[\cos\left(\pi-\frac{3\pi}{8}\right)\right]^2+\left[\cos\left(\pi-\frac{\pi}{8}\right)\right]^2$

$=\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\left(-\cos\frac{3\pi}{8}\right)^2+\left(-\cos\frac{\pi}{8}\right)^2$

$=\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{\pi}{8}$

$=2\cos^2\frac{\pi}{8}+2\cos^2\frac{3\pi}{8}$

$=2\cos^2\frac{\pi}{8}+2\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)\right]^2$

$=2\cos^2\frac{\pi}{8}+2\left(\sin\frac{\pi}{8}\right)^2$

$=2\cos^2\frac{\pi}{8}+2\sin^2\frac{\pi}{8}$

$=2\left(\cos^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\frac{\pi}{8}\right)$

$=2\times1 \quad \left[\because \sin^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{\pi}{8}=1\right]$

$=2$ [Ans.]

(v) $\sin^2\frac{17\pi}{18}+\sin^2\frac{5\pi}{8}+\cos^2\frac{37\pi}{18}+\cos^2\frac{5\pi}{8}$.

সমাধান:

প্রদত্ত রাশি

$= \sin^2\frac{17\pi}{18}+\sin^2\frac{5\pi}{8}+\cos^2\frac{37\pi}{18}+\cos^2\frac{5\pi}{8}$

$= \left[\sin\left(\pi-\frac{\pi}{18}\right)\right]^2+\left[\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{18}\right)\right]^2+\sin^2\frac{5\pi}{8}+\cos^2\frac{5\pi}{8}$

$= \left(\sin^2\frac{\pi}{18}+\cos^2\frac{\pi}{18}\right)+\left(\sin^2\frac{5\pi}{8}+\cos^2\frac{5\pi}{8}\right)$

$= 1+1 \quad [\because \sin^2\theta+\cos^2\theta=1]$

$= 2$ **[Ans.]**

১০। $\theta=\frac{\pi}{3}$ হলে নিম্নোক্ত অভেদসমূহ যাচাই কর:

(i) $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$

(ii) $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

(iii) $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

(iv) $\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

(i) $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$

সমাধান:

বামপক্ষ $= \sin 2\theta$

$= \sin\left(2\times\frac{\pi}{3}\right)$

$= \sin\frac{2\pi}{3}$

$= \sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)$

$= \sin\frac{\pi}{3}$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}$

মধ্যপক্ষ $= 2\sin\theta\cos\theta$

$= 2\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}$

$= 2.\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}$

ডানপক্ষ $= \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$

$= \frac{2\tan\frac{\pi}{3}}{1+\left(\tan\frac{\pi}{3}\right)^2}$

$= \frac{2\times\sqrt{3}}{1+\left(\sqrt{3}\right)^2}$

$= \frac{2\sqrt{3}}{4}$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$ **(যাচাই করা হলো)**

(ii) $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$.

সমাধান:

বামপক্ষ $= \sin 3\theta$

$= \sin 3\times\frac{\pi}{3}$

$= \sin\pi$

$= \sin\left(2\times\frac{\pi}{2}+0\right)$

$= \sin 0^\circ = 0$

ডানপক্ষ $= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

$= 3\sin\frac{\pi}{3} - 4\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)^3$

$= 3\times\frac{\sqrt{3}}{2} - 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$

$= \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{4\times3\sqrt{3}}{8}$

$= \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$= 0$

$\therefore \sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$. **(যাচাই করা হলো)**

(iii) $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

সমাধান:

বামপক্ষ $= \cos 3\theta = \cos 3\times\frac{\pi}{3} = \cos\pi$

$= \cos\left(2\times\frac{\pi}{2}+0\right)$

$= -\cos 0^\circ = -1$

ডানপক্ষ $= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

$= 4\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)^3 - 3\cos\frac{\pi}{3}$

$= 4\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{1}{2}\right)$

$= \frac{4}{8} - \frac{3}{2}$

$= \frac{1}{2} - \frac{3}{2}$

$= -1.$

$\therefore \cos3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ (যাচাই করা হলো)

(iv) $\tan2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

সমাধান:

বামপক্ষ $= \tan2\theta$

$= \tan 2\times\frac{\pi}{3}$

$= \tan\frac{2\pi}{3}$

$= \tan\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$

$= -\tan\frac{\pi}{3}$

$= -\sqrt{3}$

ডানপক্ষ $= \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

$= \frac{2\tan\frac{\pi}{3}}{1-\left(\tan\frac{\pi}{3}\right)^2}$

$= \frac{2\times\sqrt{3}}{1-(\sqrt{3})^2}$

$= \frac{2\sqrt{3}}{1-3}$

$= -\sqrt{3}$

$\therefore \tan2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$ (যাচাই করা হলো)

১। প্রদত্ত শর্ত পূরণ করে α (আলফা) এর মান নির্ণয় কর:

(i) $\cot\alpha = -\sqrt{3}; \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

(ii) $\cos\alpha = -\frac{1}{2}; \frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

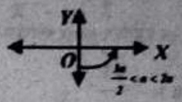
(iii) [illegible] $= -\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

[illegible]

(i) $\cot\alpha = -\sqrt{3}; \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

সমাধান:

α এর ব্যবধি $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$; সুতরাং α এর অবস্থান ৪র্থ চতুর্ভাগে।



$\cot\alpha = -\sqrt{3}$

বা, $\cot\alpha = -\cot\frac{\pi}{6}$

বা, $\cot\alpha = \cot\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right)$ [∵ ৪র্থ চতুর্ভাগে cot ঋণাত্মক]

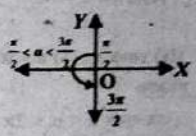
বা, $\alpha = 2\pi - \frac{\pi}{6}$

$\therefore \alpha = \frac{11\pi}{6}$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $= \frac{11\pi}{6}$

(ii) $\cos\alpha = -\frac{1}{2}; \frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

সমাধান:



α এর ব্যবধি $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

সুতরাং α, ২য় বা ৩য় চতুর্ভাগে অবস্থান করবে এবং উভয় চতুর্ভাগে cosα এর মানই ঋণাত্মক।

এখন, α ২য় চতুর্ভাগে অবস্থান করলে:

$\cos\alpha = -\frac{1}{2}$

বা, $\cos\alpha = -\cos\frac{\pi}{3}$

বা, $\cos\alpha = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$ [∵ দ্বিতীয় চতুর্ভাগে cos ঋণাত্মক]

বা, $\alpha = \pi - \frac{\pi}{3}$

$\therefore \alpha = \frac{2\pi}{3}$

আবার, α ৩য় চতুর্ভাগে অবস্থান করলে:

$\cos\alpha = -\frac{1}{2} = -\cos\frac{\pi}{3}$

বা, $\cos\alpha = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)$

বা, $\cos\alpha = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)$

$\therefore \alpha = \frac{4\pi}{3}$

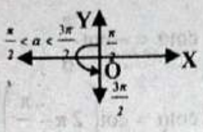
$\therefore$ নির্ণেয় মান $= \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$

(iii) $\sin\alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}; \dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$

<u>সমাধান:</u>

α এর ব্যবধি $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$, সুতরাং α, ২য় বা ৩য় চতুর্ভাগে থাকতে পারে। কিন্তু ২য় চতুর্ভাগে $\sin\alpha$ ধনাত্মক সুতরাং α কোণটি ৩য় চতুর্ভাগে অবস্থিত।

$\sin\alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$



বা, $\sin\alpha = -\sin\dfrac{\pi}{3}$

বা, $\sin\alpha = \sin\left(\pi + \dfrac{\pi}{3}\right)$ [$\because$ তৃতীয় চতুর্ভাগে sin ঋণাত্মক]

বা, $\alpha = \pi + \dfrac{\pi}{3}$

$\therefore \alpha = \dfrac{4\pi}{3}$

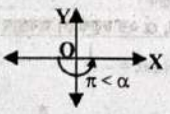
$\therefore$ নির্ণেয় মান $= \dfrac{4\pi}{3}$

(iv) $\cot\alpha = -1; \pi < \alpha < 2\pi$.

<u>সমাধান:</u>

α এর ব্যবধি $\pi < \alpha < 2\pi$ সুতরাং α, ৩য় বা ৪র্থ চতুর্ভাগে থাকতে পারে। কিন্তু ৩য় চতুর্ভাগে $\cot\alpha$ ধনাত্মক; সুতরাং কোণটি চতুর্থ চতুর্ভাগে অবস্থিত।

$\cot\alpha = -1$



বা, $\cot\alpha = -\cot\dfrac{\pi}{4}$

বা, $\cot\alpha = \cot\left(2\pi - \dfrac{\pi}{4}\right)$ [$\because$ চতুর্থ চতুর্ভাগে cot ঋণাত্মক]

বা, $\alpha = 2\pi - \dfrac{\pi}{4}$

$\therefore \alpha = \dfrac{7\pi}{4}$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $= \dfrac{7\pi}{4}$

১২। সমাধান কর: (যখন $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$)
(i) $2\cos^2\theta = 1 + 2\sin^2\theta$ **(ii)** $2\sin^2\theta - 3\cos\theta = 0$
(iii) $6\sin^2\theta - 11\sin\theta + 4 = 0$ **(iv)** $\tan\theta + \cot\theta = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$
(v) $2\sin^2\theta + 3\cos\theta = 3$

(i) $2\cos^2\theta = 1 + 2\sin^2\theta$

<u>সমাধান:</u>

$2\cos^2\theta = 1 + 2\sin^2\theta$
বা, $2\cos^2\theta - 2\sin^2\theta = 1$
বা, $2(1 - \sin^2\theta) - 2\sin^2\theta = 1$ [$\because \cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$]
বা, $2 - 2\sin^2\theta - 2\sin^2\theta = 1$
বা, $2 - 4\sin^2\theta = 1$
বা, $-4\sin^2\theta = -1$

বা, $\sin^2\theta = \dfrac{1}{4}$

বা, $\sin\theta = \pm\dfrac{1}{2}$

যেহেতু $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$, সুতরাং $\sin\theta = -\dfrac{1}{2}$ গ্রহণযোগ্য নয়,

কারণ $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ ব্যবধিতে $\sin\theta$ সর্বদাই ধনাত্মক।

$\therefore \sin\theta = \dfrac{1}{2}$

বা, $\sin\theta = \sin\dfrac{\pi}{6}$ $\left[\because \sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}\right]$

$\therefore \theta = \dfrac{\pi}{6}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $\theta = \dfrac{\pi}{6}$

(ii) $2\sin^2\theta - 3\cos\theta = 0$

<u>সমাধান:</u>

$2\sin^2\theta - 3\cos\theta = 0$
বা, $2(1 - \cos^2\theta) - 3\cos\theta = 0$ [$\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ বা, $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$]
বা, $2 - 2\cos^2\theta - 3\cos\theta = 0$
বা, $-(2\cos^2\theta + 3\cos\theta - 2) = 0$
বা, $2\cos^2\theta + 3\cos\theta - 2 = 0$
বা, $2\cos^2\theta + 4\cos\theta - \cos\theta - 2 = 0$
বা, $2\cos\theta(\cos\theta + 2) - 1(\cos\theta + 2) = 0$
বা, $(2\cos\theta - 1)(\cos\theta + 2) = 0$

এখানে $\cos\theta + 2 \neq 0$ কারণ, $\cos\theta + 2 = 0$ হলে $\cos\theta = -2$ হয় যা গ্রহণযোগ্য নয়, কারণ $\cos\theta$ এর মান 1 অপেক্ষা বৃহত্তর এবং -1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হতে পারে না।

$\therefore 2\cos\theta - 1 = 0$

বা, $2\cos\theta = 1$ বা, $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$

বা, $\cos\theta = \cos\dfrac{\pi}{3}$ $\therefore \theta = \dfrac{\pi}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $\theta = \dfrac{\pi}{3}$

(iii) $6\sin^2\theta - 11\sin\theta + 4 = 0$

<u>সমাধান:</u>

$6\sin^2\theta - 11\sin\theta + 4 = 0$
বা, $6\sin^2\theta - 8\sin\theta - 3\sin\theta + 4 = 0$
বা, $2\sin\theta(3\sin\theta - 4) - 1(3\sin\theta - 4) = 0$
বা, $(3\sin\theta - 4)(2\sin\theta - 1) = 0$

আবার, $3\sin\theta - 4 \neq 0$ কেননা $3\sin\theta - 4 = 0$ হলে $\sin\theta = \frac{4}{3}$ যা অসম্ভব, কারণ $\sin\theta$ এর মান 1 অপেক্ষা বৃহত্তর এবং −1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হতে পারে না।

অথবা, $2\sin\theta - 1 = 0$

বা, $\sin\theta = \frac{1}{2}$

বা, $\sin\theta = \sin\frac{\pi}{6}$

বা, $\theta = \frac{\pi}{6}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $\theta = \frac{\pi}{6}$

(iv) $\tan\theta + \cot\theta = \frac{4}{\sqrt{3}}$

সমাধান:

$\tan\theta + \cot\theta = \frac{4}{\sqrt{3}}$

বা, $\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta} = \frac{4}{\sqrt{3}}$

বা, $\frac{\tan^2\theta + 1}{\tan\theta} = \frac{4}{\sqrt{3}}$

বা, $\sqrt{3}\tan^2\theta + \sqrt{3} = 4\tan\theta$

বা, $\sqrt{3}\tan^2\theta - 4\tan\theta + \sqrt{3} = 0$

বা, $\sqrt{3}\tan^2\theta - 3\tan\theta - \tan\theta + \sqrt{3} = 0$

বা, $\sqrt{3}\tan\theta(\tan\theta - \sqrt{3}) - 1(\tan\theta - \sqrt{3}) = 0$

বা, $(\tan\theta - \sqrt{3})(\sqrt{3}\tan\theta - 1) = 0$

হয় $\tan\theta - \sqrt{3} = 0$

বা, $\tan\theta = \sqrt{3}$

বা, $\tan\theta = \tan\frac{\pi}{3}$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{3}$

[$\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ এর মধ্যে অবস্থিত]

অথবা, $\sqrt{3}\tan\theta - 1 = 0$

বা, $\sqrt{3}\tan\theta = 1$

বা, $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\tan\theta = \tan\frac{\pi}{6}$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}$

[$\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ এর মধ্যে অবস্থিত]

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}$

(v) $2\sin^2\theta + 3\cos\theta = 3$

সমাধান:

$2\sin^2\theta + 3\cos\theta = 3$

বা, $2(1 - \cos^2\theta) + 3\cos\theta - 3 = 0$

[$\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ বা, $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$]

বা, $2 - 2\cos^2\theta + 3\cos\theta - 3 = 0$

বা, $-2\cos^2\theta + 3\cos\theta - 1 = 0$

বা, $-(2\cos^2\theta - 3\cos\theta + 1) = 0$

বা, $2\cos^2\theta - 3\cos\theta + 1 = 0$

বা, $2\cos^2\theta - 2\cos\theta - \cos\theta + 1 = 0$

বা, $2\cos\theta(\cos\theta - 1) - 1(\cos\theta - 1) = 0$

বা, $(2\cos\theta - 1)(\cos\theta - 1) = 0$

হয় $2\cos\theta - 1 = 0$

বা, $\cos\theta = \frac{1}{2}$

বা, $\cos\theta = \cos\frac{\pi}{3}$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{3}$

অথবা, $\cos\theta - 1 = 0$

বা, $\cos\theta = 1$

বা, $\cos\theta = \cos 0^\circ$

কিন্তু $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

$\therefore \theta \neq 0^\circ$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $\theta = \frac{\pi}{3}$

১৫। সমাধান কর (যখন $0 < \theta < 2\pi$)

(i) $2\sin^2\theta + 3\cos\theta = 0$

(ii) $4(\cos^2\theta + \sin\theta) = 5$

(iii) $\cot^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta = 3$

(iv) $\tan^2\theta + \cot^2\theta = 2$

(v) $\sec^2\theta + \tan^2\theta = \frac{5}{3}$

(vi) $5\operatorname{cosec}^2\theta - 7\cot\theta\operatorname{cosec}\theta - 2 = 0$

(vii) $2\sin x\cos x = \sin x (0 \leq x \leq 2\pi)$

(i) $2\sin^2\theta + 3\cos\theta = 0$

সমাধান:

দেওয়া আছে,

$2\sin^2\theta + 3\cos\theta = 0$

বা, $2(1 - \cos^2\theta) + 3\cos\theta = 0$

বা, $2 - 2\cos^2\theta + 3\cos\theta = 0$

বা, $2\cos^2\theta - 3\cos\theta - 2 = 0$

বা, $2\cos^2\theta - 4\cos\theta + \cos\theta - 2 = 0$

বা, $2\cos\theta(\cos\theta - 2) + 1(\cos\theta - 2) = 0$

বা, $(\cos\theta - 2)(2\cos\theta + 1) = 0$

কিন্তু, $\cos\theta - 2 \neq 0$ কেননা $\cos\theta - 2 = 0$ হলে $\cos\theta = 2$, যা অসম্ভব। কারণ, $\cos\theta$ এর মান 1 অপেক্ষা বৃহত্তর এবং −1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হতে পারে না। যেহেতু $\cos\theta$ এর মান ঋণাত্মক এবং $0 < \theta < 2\pi$, সেহেতু θ এর মান হবে দ্বিতীয় চতুর্ভাগে অথবা তৃতীয় চতুর্ভাগে।

θ এর মান দ্বিতীয় চতুর্ভাগে হলে,

$\cos\theta = -\frac{1}{2}$

$\cos\theta = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$

বা, $\cos\theta = \cos\left(\frac{3\pi - \pi}{3}\right)$

বা, $\cos\theta = \cos\frac{2\pi}{3}$

$\therefore \theta = \frac{2\pi}{3}$

θ এর অবস্থান তৃতীয় চতুর্ভাগে হলে,

বা, $\cos\theta = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)$

বা, $\cos\theta = \cos\left(\frac{3\pi + \pi}{3}\right)$

বা, $\cos\theta = \cos\frac{4\pi}{3}$

$\therefore \theta = \frac{4\pi}{3}$

$\therefore$ প্রদত্ত শর্তানুসারে θ এর নির্ণেয় মান $= \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$

(ii) $4(\cos^2\theta + \sin\theta) = 5$

সমাধান:

দেওয়া আছে,

$4(\cos^2\theta + \sin\theta) = 5$

বা, $4(1 - \sin^2\theta + \sin\theta) = 5$

বা, $4 - 4\sin^2\theta + 4\sin\theta = 5$

বা, $4\sin^2\theta - 4\sin\theta + 1 = 0$

বা, $(2\sin\theta - 1)^2 = 0$

বা, $2\sin\theta - 1 = 0$ [বর্গমূল করে]

বা, $\sin\theta = \frac{1}{2}$

যেহেতু $\sin\theta$ এর মান ধনাত্মক এবং $0 < \theta < 2\pi$ সেহেতু θ এর অবস্থান হবে প্রথম চতুর্ভাগে অথবা দ্বিতীয় চতুর্ভাগে।

θ-এর অবস্থান প্রথম চতুর্ভাগে হলে-

$\sin\theta = \sin\frac{\pi}{6}$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}$

θ-এর অবস্থান দ্বিতীয় চতুর্ভাগে হলে-

$\sin\theta = \sin\left(2 \times \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$

বা, $\sin\theta = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$

বা, $\sin\theta = \sin\left(\frac{6\pi - \pi}{6}\right)$

বা, $\sin\theta = \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

$\therefore \theta = \frac{5\pi}{6}$

$\therefore$ প্রদত্ত শর্তানুসারে θ এর নির্ণেয় মান $= \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

(iii) $\cot^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta = 3$

সমাধান:

$\cot^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta = 3$

বা, $\cot^2\theta + 1 + \cot^2\theta = 3$

বা, $2\cot^2\theta = 2$

বা, $\cot^2\theta = 1$

বা, $\cot\theta = \pm 1$

$\cot\theta = 1$ হলে,

প্রথম চতুর্ভাগে $\cot\theta = 1 = \cot\frac{\pi}{4}$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{4}$; যা গ্রহণ যোগ্য কারণ, $0 < \theta < 2\pi$

তৃতীয় চতুর্ভাগে $\cot\theta = 1 = \cot\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)$

$\therefore \theta = \frac{5\pi}{4}$; যা গ্রহণযোগ্য কারণ, $0 < \theta < 2\pi$

আবার, $\cot\theta = -1$ হলে,

দ্বিতীয় চতুর্ভাগে $\cot\theta = -1 = \cot\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)$

$\therefore \theta = \frac{3\pi}{4}$ যা গ্রহণযোগ্য কারণ $0 < \theta < 2\pi$

চতুর্থ চতুর্ভাগে $\cot\theta = -1 = \cot\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right)$

$\therefore \theta = \frac{7\pi}{4}$; যা গ্রহণযোগ্য কারণ $0 < \theta < 2\pi$

নির্ণেয় সমাধান: $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

(iv) $\tan^2\theta + \cot^2\theta = 2$

সমাধান:

দেওয়া আছে,

$\tan^2\theta + \cot^2\theta = 2$

বা, $\tan^2\theta + \frac{1}{\tan^2\theta} = 2$

বা, $\tan^4\theta + 1 = 2\tan^2\theta$ [উভয় পক্ষকে $\tan^2\theta$ দ্বারা গুণ করে]

বা, $\tan^4\theta - 2\tan^2\theta + 1 = 0$

বা, $(\tan^2\theta - 1)^2 = 0$

বা, $\tan^2\theta - 1 = 0$

বা, $\tan^2\theta = 1$

বা, $\tan\theta = \pm 1$

ধনাত্মক মান নিয়ে পাই,

$\tan\theta = 1$

যেহেতু $\tan\theta$ এর মান ধনাত্মক এবং $0 < \theta < 2\pi$, সেহেতু θ এর অবস্থান প্রথম চতুর্ভাগে অথবা তৃতীয় চতুর্ভাগে।

θ-এর অবস্থান প্রথম চতুর্ভাগে হলে,

$\tan\theta = \tan\frac{\pi}{4}$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{4}$

θ-এর অবস্থান তৃতীয় চতুর্ভাগে হলে,

$\tan\theta = \tan\left(2 \times \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$

বা, $\tan\theta = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)$

বা, $\tan\theta = \tan\dfrac{5\pi}{4}$

$\therefore \theta = \dfrac{5\pi}{4}$

আবার, ঋণাত্মক মান নিয়ে পাই,

$\tan\theta = -1$

বা, $\tan\theta = -\tan\dfrac{\pi}{4}$

যেহেতু $\tan\theta$ এর মান ঋণাত্মক এবং $0 < \theta < 2\pi$, সেহেতু θ এর অবস্থান হবে দ্বিতীয় চতুর্ভাগে অথবা চতুর্থ চতুর্ভাগে।

θ-এর অবস্থান দ্বিতীয় চতুর্ভাগে হলে,

$\tan\theta = \tan\left(2\times\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right)$

বা, $\tan\theta = \tan\left(\pi - \dfrac{\pi}{4}\right)$

বা, $\tan\theta = \tan\dfrac{3\pi}{4}$

$\therefore \theta = \dfrac{3\pi}{4}$

θ-এর অবস্থান চতুর্থ চতুর্ভাগে হলে,

$\tan\theta = \tan\left(4\times\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right)$

বা, $\tan\theta = \tan\left(2\pi - \dfrac{\pi}{4}\right)$

বা, $\tan\theta = \tan\dfrac{7\pi}{4}$

$\therefore \theta = \dfrac{7\pi}{4}$

$\therefore$ প্রদত্ত শর্তানুসারে θ এর নির্ণেয় মান $= \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}$

(v) $\sec^2\theta + \tan^2\theta = \dfrac{5}{3}$

সমাধান:

দেওয়া আছে,

$\sec^2\theta + \tan^2\theta = \dfrac{5}{3}$

বা, $3(1 + \tan^2\theta + \tan^2\theta) = 5$

বা, $3 + 6\tan^2\theta - 5 = 0$

বা, $6\tan^2\theta = 2$

বা, $\tan^2\theta = \dfrac{1}{3}$

বা, $\tan\theta = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

এখন, $\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ নিয়ে পাই,

$\tan\theta = \tan\dfrac{\pi}{6} = \tan\left(\pi + \dfrac{\pi}{6}\right)$

বা, $\tan\theta = \tan\dfrac{\pi}{6} = \tan\dfrac{7\pi}{6}$

$\therefore \theta = \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{7\pi}{6}$

আবার, $\tan\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ নিয়ে পাই,

বা, $\tan\theta = -\tan\dfrac{\pi}{6}$

বা, $\tan\theta = \tan\left(\pi - \dfrac{\pi}{6}\right) = \tan\left(2\pi - \dfrac{\pi}{6}\right)$

বা, $\tan\theta = \tan\dfrac{5\pi}{6} = \tan\dfrac{11\pi}{6}$

$\therefore \theta = \dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{11\pi}{6}$

$\therefore$ নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে θ এর সম্ভাব্য সকল মানসমূহ $= \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{11\pi}{6}$

(vi) $5\operatorname{cosec}^2\theta - 7\cot\theta\operatorname{cosec}\theta - 2 = 0$

সমাধান:

দেওয়া আছে,

$5\operatorname{cosec}^2\theta - 7\cot\theta\operatorname{cosec}\theta - 2 = 0$

বা, $\dfrac{5}{\sin^2\theta} - \dfrac{7\cos\theta}{\sin^2\theta} - 2 = 0$

বা, $5 - 7\cos\theta - 2\sin^2\theta = 0$

বা, $5 - 7\cos\theta - 2(1 - \cos^2\theta) = 0$

বা, $5 - 7\cos\theta - 2 + 2\cos^2\theta = 0$

বা, $2\cos^2\theta - 7\cos\theta + 3 = 0$

বা, $2\cos^2\theta - 6\cos\theta - \cos\theta + 3 = 0$

বা, $2\cos\theta(\cos\theta - 3) - 1(\cos\theta - 3) = 0$

বা, $(2\cos\theta - 1)(\cos\theta - 3) = 0$

হয়, $2\cos\theta - 1 = 0$ অথবা, $\cos\theta - 3 = 0$

বা, $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$ $\quad\therefore \cos\theta = 3$

$\therefore \cos\theta = \dfrac{1}{2}$

কিন্তু $\cos\theta$ এর মান 1 অপেক্ষা বৃহত্তর হতে পারে না।

$\therefore \cos\theta = \dfrac{1}{2} = \cos\dfrac{\pi}{3} = \cos\left(2\pi - \dfrac{\pi}{3}\right)$

$\therefore \theta = \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}$

$\therefore$ নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে θ এর সম্ভাব্য সকল মানসমূহ $\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}$

(vii) $2\sin x\cos x = \sin x (0 \le x \le 2\pi)$

সমাধান:

$2\sin x\cos x = \sin x (0 \le x \le 2\pi)$

বা, $(2\sin x\cos x)^2 = (\sin x)^2$ [বর্গ করে]

বা, $4\sin^2 x\cos^2 x = \sin^2 x$

বা, $4\sin^2 x(1 - \sin^2 x) = \sin^2 x$

বা, $4\sin^2 x - 4\sin^4 x - \sin^2 x = 0$

বা, $-4\sin^4 x + 3\sin^2 x = 0$

বা, $-\sin^2 x(4\sin^2 x - 3) = 0$

বা, $\sin^2 x(4\sin^2 x - 3) = 0$

$\therefore 4\sin^2 x - 3 = 0$ অথবা $\sin^2 x = 0$

বা, $4\sin^2 x = 3$ বা, $\sin x = 0$

বা, $\sin^2 x = \frac{3}{4}$ বা, $\sin x = \sin 0°$

বা, $\sin x = \pm\sqrt{\frac{3}{4}}$ | বা, $\sin x = \sin(\pi - 0°)$

বা, $\sin x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ | বা, $\sin x = \sin(2\pi - 0°)$

বা, $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ | $x = 0°, \pi, 2\pi$

বা, $\sin x = \sin\frac{\pi}{3}$

বা, $\sin x = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$

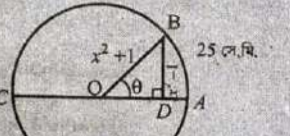
বা, $\sin x = \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right)$

$\therefore \sin x = \sin\frac{\pi}{3} = \sin\frac{2\pi}{3} = \sin\frac{5\pi}{3}$

$\therefore x = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সীমার মধ্যে x এর সম্ভাব্য মানসমূহ: $0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}, 2\pi$

১৪।



(ক) চিত্রে ABC একটি বৃত্তাকার চাকা এবং চাকাটির AB চাপের দৈর্ঘ্য 25 সে.মি. হলে θ = কত? চাকাটি 1 বার ঘুরে কত মিটার দূরত্ব অতিক্রম করবে?

(খ) ABC চাকাটি প্রতি সেকেন্ডে 5 বার আবর্তিত হলে চাকাটির গতিবেগ ঘণ্টায় কত হবে?

(গ) চিত্রে ΔBOD হলে $\sin\theta$ এর মান ব্যবহার করে প্রমাণ কর যে, $\tan\theta + \sec\theta = x$.

(ক) এর সমাধান:

দেওয়া আছে,

ABC বৃত্তাকার চাকার AB চাপের দৈর্ঘ্য $S = 25$ সে.মি. এবং ব্যাসার্ধ $OB = r = x^2 + 1$।

AB চাপটি কেন্দ্রে θ কোণ ধারণ করে।

$\therefore S = r\theta$

বা, $\theta = \frac{S}{r}$

$\therefore \theta = \frac{25}{x^2+1}$ রেডিয়ান **[Ans.]**

আবার, চাকাটির পরিধি $= 2\pi r = 2\pi(x^2+1)$ সে.মি.

চাকাটি 1 বার ঘুরলে এর পরিধির সমান দূরত্ব অতিক্রম করে।

$\therefore$ চাকাটি 1 বার ঘুরলে $2\pi(x^2+1)$ সে.মি. দূরত্ব অতিক্রম করে। **[Ans.]**

[চিত্র থেকে 25 সে.মি. ব্যাস কিংবা ব্যাসার্ধ তা অস্পষ্ট]

(খ) এর সমাধান:

দেওয়া আছে,

চাকাটি প্রতি সেকেন্ডে 5 বার ঘুরে

1 বার ঘুরে চাকাটি $2\pi(x^2+1)$ সে.মি. দূরত্ব অতিক্রম করে

$\therefore$ 5 বার ঘুরে চাকাটি $5 \times 2\pi(x^2+1)$ সে.মি. দূরত্ব অতিক্রম করে $= 10\pi(x^2+1)$ সে.মি. দূরত্ব অতিক্রম করে।

$\therefore$ চাকাটি 1 সেকেন্ডে অতিক্রম করে $10\pi(x^2+1)$ সে.মি.

$\therefore$ চাকাটি 1 ঘণ্টায় বা 3600 সেকেন্ডে অতিক্রম করে

$3600 \times 10\pi(x^2+1)$ সে.মি.

$= 36000\pi(x^2+1)$ সে.মি.

$\therefore$ চাকাটির ঘণ্টায় গতিবেগ $36000\pi(x^2+1)$ সে.মি.

$= \frac{36000 \times \pi(x^2+1)}{100}$ মিটার

$= 360\pi(x^2+1)$ মিটার

$\therefore$ চাকাটির গতিবেগ $360\pi(x^2+1)$ মিটার/ঘণ্টা। **[Ans.]**

(গ) এর সমাধান:

θ কোণের সাপেক্ষে ভূমি OD, লম্ব BD এবং অতিভুজ OB.

চিত্র হতে পাই, $\sin\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{BD}{BO}$

বা, $\sin\theta = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

$\therefore \cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta}$

$= \sqrt{1-\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2}$

$= \sqrt{1-\frac{(x^2-1)^2}{(x^2+1)^2}}$

$= \sqrt{\frac{(x^2+1)^2-(x^2-1)^2}{(x^2+1)^2}}$

$= \sqrt{\frac{4x^2}{(x^2+1)^2}}$

$= \frac{2x}{x^2+1}$

এখন, $\tan\theta + \sec\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{\cos\theta}$

$= \frac{\frac{x^2-1}{x^2+1}}{\frac{2x}{x^2+1}} + \frac{1}{\frac{2x}{x^2+1}}$

$= \left(\frac{x^2-1}{x^2+1} \times \frac{x^2+1}{2x}\right) + \left(1 \times \frac{x^2+1}{2x}\right)$

$= \frac{x^2-1}{2x} + \frac{x^2+1}{2x}$

$= \frac{x^2-1+x^2+1}{2x}$

$= \frac{2x^2}{2x} = x$

$\therefore \tan\theta + \sec\theta = x$ (প্রমাণিত)

ΔBOD সমকোণী ত্রিভুজ যার অতিভুজ, BO এবং θ কোণের সাপেক্ষে ভূমি OD, লম্ব BD.

$\therefore OB^2 = OD^2 + BD^2$

বা, $OD = \sqrt{OB^2 - BD^2}$

$= \sqrt{(x^2+1)^2 - (x^2-1)^2}$

$= \sqrt{x^4 + 2x^2 + 1 - x^4 + 2x^2 - 1}$

$= \sqrt{4x^2} \quad = 2x$

বামপক্ষ $= \tan\theta + \sec\theta$

$= \dfrac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} + \dfrac{\text{অতিভুজ}}{\text{ভূমি}}$

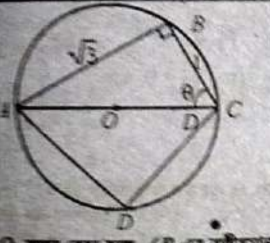
$= \dfrac{x^2-1}{2x} + \dfrac{x^2+1}{2x}$

$= \dfrac{x^2-1+x^2+1}{2x}$

$= \dfrac{2x^2}{2x} = x =$ ডানপক্ষ

$\therefore \tan\theta + \sec\theta = x$ (প্রমাণিত)

১২।



(ক) চিত্রে O, বৃত্তের কেন্দ্র হলে $\angle B$ এর বৃত্তীয়মান এবং AC নির্ণয় কর।

(খ) প্রমাণ কর যে, $\tan A + \tan B + \tan C + \tan D = 0$

(গ) $\sec\theta + \cos\theta = P$ হলে P এর মান নির্ণয় কর এবং সমীকরণটি সমাধান কর।

(ক) এর সমাধান:

চিত্রে $\angle ABC$ কোণটি অর্ধবৃত্তস্থ কোণ এবং

আমরা জানি, অর্ধবৃত্তস্থ কোণ 1 সমকোণ বা, 90°

অর্থাৎ $\angle B = 90°$

আমরা জানি, $1° = \dfrac{\pi}{180}$ রেডিয়ান।

$\therefore 90° = \left(\dfrac{\pi}{180} \times 90\right)$ রেডিয়ান [অর্ধবৃত্তস্থকোণ এক সমকোণ এখানে, $\angle B$ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ]

$= \dfrac{\pi}{2}$ রেডিয়ান

$\therefore \angle B$ এর বৃত্তীয়মান $\dfrac{\pi}{2}$ রেডিয়ান। [Ans.]

আমরা জানি, ΔABC-এ $\angle B = 90°$

$\therefore \Delta ABC$ সমকোণী ত্রিভুজ

$\therefore$ পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে,

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

বা, $AC^2 = (\sqrt{3})^2 + 1^2$

বা, $AC^2 = 3 + 1$

বা, $AC^2 = 4$

$\therefore AC = 2$ একক [Ans.]

(খ) এর সমাধান:

আমরা জানি,

বৃত্তে অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টি 2 সমকোণ বা 180°

$\therefore \angle A + \angle C = 180°$

এবং $\angle B + \angle D = 180°$

এখন, বামপক্ষ $= \tan A + \tan B + \tan C + \tan D$

$= \tan A + \tan(180° - D) + \tan(180° - A) + \tan D$

$= \tan A + \tan(2 \times 90° - D) + \tan(2 \times 90° - A) + \tan D$

$= \tan A - \tan D - \tan A + \tan D$

[$\because \tan(\pi - \theta) = -\tan\theta$]

$= 0$

$=$ ডানপক্ষ

$\therefore \tan A + \tan B + \tan C + \tan D = 0$ (প্রমাণিত)

(গ) এর সমাধান:

দেওয়া আছে,

$\sec\theta + \cos\theta = P$ ……… (i)

ΔABC সমকোণী ত্রিভুজ এর অতিভুজ, AC এবং θ কোণের সাপেক্ষে ভূমি BC ও লম্ব AB.

এখানে, $\sec\theta = \dfrac{\text{অতিভুজ}}{\text{ভূমি}} = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{2}{1} = 2$ ['ক' হতে]

আবার, $\cos\theta = \dfrac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}} = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{1}{2}$

$\sec\theta$ এবং $\cos\theta$ এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$2 + \dfrac{1}{2} = P$

বা, $\dfrac{4+1}{2} = P$

বা, $P = \dfrac{5}{2}$

$\therefore P$ এর নির্ণেয় মান $\dfrac{5}{2}$ [Ans.]

এখন, (i) নং থেকে,

$\sec\theta + \cos\theta = \dfrac{5}{2}$

বা, $\dfrac{1}{\cos\theta} + \cos\theta = \dfrac{5}{2}$

বা, $\dfrac{1 + \cos^2\theta}{\cos\theta} = \dfrac{5}{2}$

বা, $2 + 2\cos^2\theta = 5\cos\theta$

বা, $2\cos^2\theta - 5\cos\theta + 2 = 0$

বা, $2\cos^2\theta - 4\cos\theta - \cos\theta + 2 = 0$

বা, $2\cos\theta(\cos\theta - 2) - 1(\cos\theta - 2) = 0$

বা, $(2\cos\theta - 1)(\cos\theta - 2) = 0$

হয়, $2\cos\theta - 1 = 0$ অথবা, $\cos\theta - 2 = 0$

বা, $2\cos\theta = 1$ $\therefore \cos\theta = 2$

বা, $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$

কিন্তু $\cos\theta \neq 2$ কারণ, $\cos\theta$ এর মান 1 অপেক্ষা বৃহত্তর হতে পারে না।

$\therefore \cos\theta = \dfrac{1}{2}$

বা, $\cos\theta = \cos\dfrac{\pi}{3}$ $\left[\because \cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}\right]$

$\therefore \theta = \dfrac{\pi}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $\theta = \dfrac{\pi}{3}$