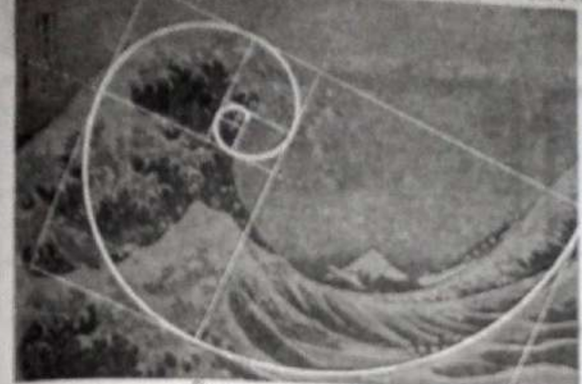
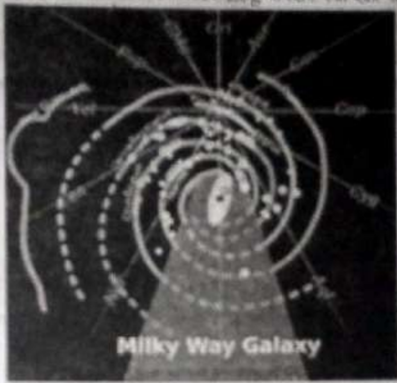
৯ বাস্তব জীবনে এ অধ্যায়ের প্রয়োগ

প্রকৃতির প্রায় সবকিছুই লগারিদমিক সূত্র মেনে চলে। কোনো নির্দিষ্ট রাশির বৃদ্ধির হার, তেজস্ক্রিয় মৌলের অর্ধায়ু, ভূমিকম্পের তীব্রতা ইত্যাদি লগারিদমিক ফাংশনের সাহায্যে নির্ণয় করতে হয়। যেমন কোন পুরাকৃতি বা ঐতিহাসিক নিদর্শনের ক্ষেত্রে তার অর্ধায়ু বা অর্ধজীবন নির্ণয় করতে Log ব্যবহার করা হয়ে থাকে।



চিত্র- ১: সমুদ্রের ঢেউ এ স্পাইরাল



চিত্র- ২: মহাকাশের গ্যালাক্সিতে স্পাইরাল

আবার, লগারিদমিক স্পাইরাল একটি চমৎকার জিনিস। যেমন: $a \log r = b\theta$ এই ফাংশনটি পোলার কাগজে অঙ্কন করলে উপরের ১নং চিত্রের ন্যায় প্যাঁচানো রেখা পাওয়া যায়। সমুদ্রে ঢেউ যখন তীরে আছড়ে পড়ে, মহাকাশের গ্যালাক্সিতে, ঘূর্ণিঝড়, উদ্ভিদের বৃদ্ধি, ফুলের পুষ্পিকা, তারা মাছ, প্রজাপতির পাখা শামুকের খোলসসমূহ, বিভিন্ন বিল্ডিংয়ের গঠন প্রকৃতির প্রায় সবক্ষেত্রেই এটি দেখা যায়।

চিত্র- ৩: [illegible] স্পাইরাল

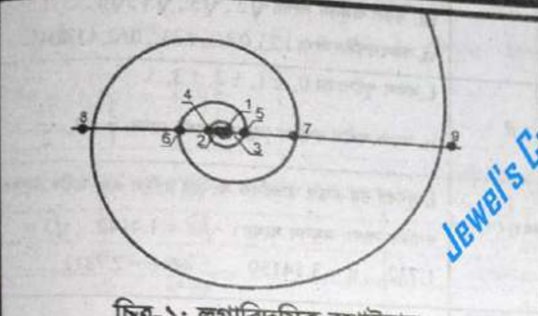
অনুরূপ এই লগারিদমের সাহায্যে সংখ্যা বা রাশির গুণ, ভাগ করা সহজ হয়েছে। সবচেয়ে আশ্চর্যের বিষয় হলো বৈজ্ঞানিকে একমাত্র সরল সমীকরণ বা ক্ষমতার বিশিষ্ট সমীকরণ ব্যতীত এমন কোন বৈজ্ঞানিক রাশি নেই যেখানে সূচকের ব্যবহার হয় না। বর্তমানে ক্যালকুলেটর ও কম্পিউটার এর ব্যবহার প্রচলনের পূর্ব পর্যন্ত বৈজ্ঞানিক হিসেবে গণনায় লগারিদমের ব্যবহার ছিল একমাত্র উপায়।

"Our greatest weakness lies in giving up. The most certain way to succeed is always to try just one more time".

-Thomas Alva Edison

৯ সূচকীয় ও লগারিদমীয় ফাংশন [Logarithmic Function]

অনুশীলনী-৯.১



চিত্র-১: লগারিদমিক স্পাইরাল

Index = Logarithm

$$N = a^x \qquad \log_a N = x$$

Index form   Logarithm form

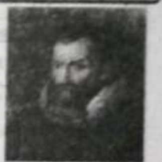
চিত্র-২: লগারিদমের রূপভেদ

ভূমিকা [Introduction]

অনেক বড় বা অনেক ছোট সংখ্যা বা রাশিকে সূচকের সাহায্যে অতি সহজে লিখে প্রকাশ করা যায়। ফলে হিসাব গণনা ও গাণিতিক সমস্যা সমাধান সহজতর হয়। সূচকের মাধ্যমেই সংখ্যার বৈজ্ঞানিক বা আদর্শরূপ প্রকাশ করা হয়।

সূচক থেকেই লগারিদমের সৃষ্টি। আর এই লগারিদমের সাহায্যে সংখ্যা বা রাশির গুণ, ভাগ ও সূচক সম্পর্কিত গণনার পূর্বে বৈজ্ঞানিক হিসেব গণনায় লগারিদমের ব্যবহার ছিল একমাত্র উপায়।

জন নেপিয়ার (John Napier) একজন স্কটিশ গণিতবিদ। তিনি তাঁর উদ্ভাবিত লগারিদমের জন্য বিখ্যাত হয়েছিলেন। তিনি 1614 সালে Canonis Descriptio গ্রন্থে লাগরিদমের ব্যাপারে ব্যাখ্যা করেন।



John Napier

বোর্ড প্রশ্নাবলির বিশ্লেষণ [Board Questions Analysis]

এই অধ্যায় থেকে বিভিন্ন বোর্ডে বিগত দু'বছরের এসএসসি পরীক্ষায় মোট ৩টি সৃজনশীল প্রশ্ন ও ২২টি বহুনির্বাচনি প্রশ্ন এসেছে। নিচের 'Board Analysis' অংশে এই অধ্যায় থেকে কোন সালে কোন বোর্ডে কতটি প্রশ্ন হয়েছে তা দেওয়া আছে।

☑ সৃজনশীল প্রশ্ন:

বোর্ড / সাল	ঢাকা	রাজশাহী	কুমিল্লা	যশোর	চট্টগ্রাম	বরিশাল	সিলেট	দিনাজপুর
২০১৬	–	–	–	–	–	–	১	–
২০১৫	–	–	–	১	–	১	–	–

☑ বহুনির্বাচনি প্রশ্ন:

বোর্ড / সাল	ঢাকা	রাজশাহী	কুমিল্লা	যশোর	চট্টগ্রাম	বরিশাল	সিলেট	দিনাজপুর
২০১৬	১	২	১	২	২	১	১	২
২০১৫	২	২	১	–	১	১	২	১

মূল শব্দাবলি [Key Words]

সূচক (*Exponents or indices*), সূচক বিধি (*Index Law*), ঘাত (*Degree/Order*), মূল (*Root*), ঘনমূল (*Cubic Root*), লগারিদম (*Logarithm*), ভিত্তি (*Base*), বৈজ্ঞানিক রূপ (*Scientific Form*), স্বাভাবিক লগারিদম (*Natural Logarithm*), সাধারণ লগারিদম (*Common Logarithm*), পূর্ণক (*Characteristic*), অংশক (*Mantissa*)।

এ অধ্যায়ের আলোচ্যসূচি

- মূলদ সূচক
- ধনাত্মক পূর্ণ-সাংখ্যিক সূচক, শূন্য ও ঋণাত্মক
- পূর্ণ-সাংখ্যিক সূচক ও প্রয়োগ
- সূচকের নিয়মাবলি বর্ণনা ও তা প্রয়োগ করে সমস্যার সমাধান
- n-তম মূল ও মূলদ ভগ্নাংশ সূচক
- n-তম মূলকে সূচক আকারে প্রকাশ
- লগারিদম
- লগারিদমের সূত্রাবলি প্রমাণ ও প্রয়োগ
- সাধারণ লগারিদম ও স্বাভাবিক লগারিদম
- সংখ্যার বৈজ্ঞানিক রূপ ও ভার
- সাধারণ লগারিদমের পূর্ণক ও অংশক
- ক্যালকুলেটরের সাহায্যে সাধারণ ও স্বাভাবিক লগারিদম নির্ণয়

প্রাথমিক আলোচনা

সংজ্ঞা	প্রকাশক	সেট	উদাহরণ
বাস্তব সংখ্যা (*Real Number*): সকল মূলদ সংখ্যা এবং অমূলদ সংখ্যাকে বাস্তব সংখ্যা বলা হয়।	R		i. সকল পূর্ণ সংখ্যা $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \dots$ ii. সকল ভগ্নাংশ সংখ্যা $\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{4}{3}, \dots \dots$ iii. সকল অমূলদ সংখ্যা $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \dots \dots$ vi. সকল দশমিক সংখ্যা $1.23, 0.415, 1.33\dots, 0.62, 4.120345\dots$
মূলদ সংখ্যা (*Rational Number*): p ও q পূর্ণসংখ্যা এবং $q \neq 0$ হলে, $\frac{p}{q}$ আকারের সংখ্যাকে মূলদ সংখ্যা বলা হয়।	Q	$Q \subset R$	i. সকল পূর্ণসংখ্যা $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \dots$ ii. সকল সসীম দশমিক ভগ্নাংশ সংখ্যা যেমন: $\frac{3}{1} = 3, \frac{11}{2}$
অমূলদ সংখ্যা (*Irrational Number*): যে সংখ্যাকে $\frac{p}{q}$ আকারে প্রকাশ করা যায় না, যেখানে p, q পূর্ণসংখ্যা এবং $q \neq 0$, সে সংখ্যাকে অমূলদ সংখ্যা বলা হয়।	Q^c	$Q^c \subset R$ এবং $Q \cup Q^c = R$	i. পূর্ণবর্গ নয় এরূপ স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গমূল এবং অসীম অনাবৃত্ত দশমিক সংখ্যা অমূলদ সংখ্যা। $\sqrt{2} = 1.4142\dots, \sqrt{3} = 1.732\dots, \pi = 3.14159 \dots\dots$ এবং $e = 2.7812 \dots$
পূর্ণসংখ্যা (*Integers*): শূন্যসহ সকল ধনাত্মক ও ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যাসমূহকে পূর্ণসংখ্যা বলা হয়।	Z		$Z = \{\dots \dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots \dots\}$
স্বাভাবিক সংখ্যা (*Natural Number*): $1, 2, 3, 4, \dots \dots$ ইত্যাদি সাধারণত গণনামূলক সংখ্যাগুলোকে স্বাভাবিক সংখ্যা বলা হয়।	N	$N \subset Z \subset Q \subset R$	i. স্বাভাবিক সংখ্যাকে ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা বলা হয়। $N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ ii. শূন্য (0) স্বাভাবিক সংখ্যার অন্তর্ভুক্ত নয় অর্থাৎ $0 \notin N$.
সূচকীয় রাশি (*Exponential Expression*): সূচক ও ভিত্তি সংবলিত রাশিকে সূচকীয় রাশি বলা হয়।			$a \times a \times a \times \dots \dots \times a$ (n সংখ্যক বার a) $= a^n$; এখানে n — সূচক বা ঘাত (*Exponent or Indices*), a — ভিত্তি (*Base*)
অমূলদ সূচক: অমূলদ সূচকের জন্য a^x $(a > 0)$ এর মান এমনভাবে নির্দিষ্ট করা হয় যে, x এর মূলদ আসন্ন মান p ধরে a^p নির্ণয় করা হয়। এক্ষেত্রে a^p এর মান a^x এর মানের আসন্ন হয়।			$3^{\sqrt{5}} = 11.6647533 \dots \dots$

সূচক সম্পর্কিত সূত্রাবলি:

[সকল ক্ষেত্রে $a, b \in R, m, n \in N$ এবং $a \neq 0, b \neq 0$]

$a^{n+1} = a^n . a$	$a^m . a^n = a^{m+n}$	$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$	$\frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n} \text{ যখন } m > n \\ \frac{1}{a^{n-m}} \text{ যখন } m < n \end{cases}$	$(a^m)^n = a^{mn}$	$(a.b)^n = a^n . b^n$	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

0^0 অসংজ্ঞায়িত কারণ সূচক রাশির, সূচক ও ভিত্তি কখনও এক সাথে শূন্য হতে পারে না।

মূল এর ব্যাখ্যা: $n \in N, n > 1$ এবং $a \in R$ হলে, যদি এমন $x \in R$ থাকে যেন $x^n = a$ হয়, তবে সেই x কে a এর একটি n তম মূল বলা হয়।	(i) 2 এবং -2 উভয় 16 এর 4 তম মূল, কারণ $(2)^4 = 16$ এবং $(-2)^4 = 16$ (ii) -27 এর ঘনমূল 3, কারণ $(-3)^3 = -27$ (iii) 0 এর n তম মূল 0, কারণ সকল $0^n = 0$ (iv) -9 এর কোনো বর্গমূল নেই, কারণ যেকোনো বাস্তব সংখ্যার বর্গমূল অঋণাত্মক।
লক্ষণীয়: (i) যদি $a > 0$ এবং $n \in N, n > 1$ হয়, তবে a এর একটি অনন্য ধনাত্মক n তম মূল আছে। এই ধনাত্মক মূলকে $\sqrt[n]{a}$ দ্বারা সূচিত করা হয় এবং একে a এর মুখ্য n তম মূল বলা হয়। n জোড় সংখ্যা হলে এরূপ a-এর অপর একটি n তম মূল আছে এবং তা হলো $-\sqrt[n]{a}$ (ii) যদি $a < 0$ এবং $n \in N, n > 1$ এবং n বিজোড় সংখ্যা হয়, তবে a এর একটি মাত্র n তম মূল আছে যা ঋণাত্মক এই মূলকে $-\sqrt[n]{a}$ দ্বারা সূচিত করা হয়। (iii) n জোড় হলে এবং a ঋণাত্মক হলে a এর কোনো n তম মূল নেই। (iv) $a > 0$ হলে $\sqrt[n]{a} > 0$	$\sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3} = \left(5^3\right)^{\frac{1}{3}} = 5$ $\sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = \left(3^4\right)^{\frac{1}{4}} = 3$ $\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{\lvert a \rvert}$; $\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{\lvert 8 \rvert} = -\sqrt[3]{8} = -\sqrt[3]{2^3} = -\left(2^3\right)^{\frac{1}{3}} = -2$ $\sqrt[4]{-81} \neq \sqrt[4]{(-3)^4} \neq \sqrt[4]{3^4} \neq \left(3^4\right)^{\frac{1}{4}} \neq 3$

(v) $a<0$ এবং n বিজোড় হলে, $\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{|a|} < 0$ [যেখানে $|a|$ হচ্ছে a এর পরমমান]

(vi) যদি $a>0$ এবং $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ হয় যেখানে $m, p \in Z$ এবং $n, q \in N, n>1, q>1$ তবে $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[q]{a^p}$

(vii) যদি $a>0$ এবং $n, k \in N, n>1$ হয় তবে $\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}$

(viii) $a<0$ এবং $n \in N$, $n>1$ বিজোড় হলে $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{|a|} = -|a|^{\frac{1}{n}}$

$\sqrt[4]{2^{-8}} = \left(2^{-8}\right)^{\frac{1}{4}} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

$\sqrt[6]{5^3} = \left(5^3\right)^{\frac{1}{6}} = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$

$(-5)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{(-5)} = -\sqrt[3]{|5|} = -|5|^{\frac{1}{3}};$

যদি $a^x = 1$ হয়	কয়েকটি প্রয়োজনীয় তথ্য:	
যদি $a^x = 1$ হয়	যেখানে $a>0$ এবং $a \neq 1$	তাহলে $x = 0$
যদি $a^x = a^y$ হয়	যেখানে $a>0$ এবং $x \neq 0$	তাহলে $a = 1$
যদি $a^x = b^x$ হয়	যেখানে $a>0$ এবং $a \neq 1$	তাহলে $x = y$
	যেখানে $\frac{a}{b} > 0$ এবং $x \neq 0$	তাহলে $a = b$

গাণিতিক আরোহ পদ্ধতি (*Principle of Mathematical Induction*): গাণিতিক আরোহ পদ্ধতি স্বাভাবিক সংখ্যা চলক n সম্বলিত কোনো উক্তি বা সূত্র $P(n)$ প্রমাণের একটি শক্তিশালী প্রক্রিয়া। এ পদ্ধতিতে স্বাভাবিক সংখ্যা চলক n সম্বলিত কোনো খোলা বাক্য সকল $n \in N$ এর জন্য সত্য হবে, যদি-

(১) বাক্যটি $n = 1$ এর জন্য সত্য হয় এবং

(২) $n = m$ এর জন্য সত্য হলে তা $n = m + 1$ এর জন্য সত্য হয়, যেখানে $m \in N$

গাণিতিকভাবে যদি $S \subset N$ এমন হয় যে-

(i) $1 \in S$

(ii) $n \in S$ হলে সর্বদা $n + 1 \in S$ হয় তবে $S = N$

এ স্বীকার্যকে গাণিতিক আরোহ পদ্ধতি বলা হয়।

গাণিতিক আরোহ পদ্ধতিতে খোলা বাক্যের সত্যতা ধাপে ধাপে যাচাই করা হয়। এ পদ্ধতির প্রথম ধাপকে আরোহ আরম্ভ (*Induction beginning*) এবং দ্বিতীয় ধাপকে আরোহ স্তর (*Induction step*) বলা হয়।

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনমূলক কাজের সমাধান

৯ কাজ: [পাঠ্যবই পৃষ্ঠা: ১৯২]

১। গাণিতিক আরোহ পদ্ধতিতে দেখাও যে, $(a^m)^n = a^{mn}$, যেখানে $a \in R$ এবং $n \in N$.

২। গাণিতিক আরোহ পদ্ধতিতে দেখাও যে, $(a.b)^n = a^n.b^n$, যেখানে $a, b \in R$ এবং $n \in N$.

৩। গাণিতিক আরোহ পদ্ধতিতে দেখাও যে, $\left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}$, যেখানে $a>0$ এবং $n \in N$। অতঃপর $(ab)^n = a^n b^n$ সূত্র ব্যবহার করে দেখাও যে, $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ যেখানে, $a, b \in R$, $b>0$, এবং $n \in N$।

৪। মনে কর, $a \neq 0$, এবং $m, n \in Z$ ধনাত্মক পূর্ণ সাংখ্যিক সূচকের জন্য $a^m.a^n = a^{m+n}$, সূত্রটির সত্যতা স্বীকার করে দেখাও যে, $a^m.a^n = a^{m+n}$ যখন (i) $m>0$ এবং $n<0$, (ii) $m<0$ এবং $n<0$।

(১) এর সমাধান:

যেকোনো $m \in N$ নির্দিষ্ট করে এবং n কে চলক ধরে খোলা বাক্য $\left(a^m\right)^n = a^{mn}$ ……… (i) বিবেচনা করি

১ম ধাপ (প্রথম ধাপ):

$n = 1$ হলে (i) নং এর বামপক্ষ $= \left(a^m\right)^1 = a^m$

এবং ডানপক্ষ $= a^{m.1} = a^m$

$\therefore n = 1$ এর জন্য (i) নং সত্য।

দ্বিতীয় ধাপ: ধরি, $n = k$ এর জন্য (i) নং সত্য।

অর্থাৎ $\left(a^m\right)^k = a^{mk}$ ……… (ii)

আবার (i) বাক্যটি $n = k + 1$ এর জন্য সত্য হবে যদি

$$\left(a^m\right)^{k+1} = \left(a^m\right)^k . \left(a^m\right)^1 \quad [\because a^{n+1} = a^n.a]$$
$$= a^{mk}.a^m \quad [\text{(ii) নং হতে}]$$
$$= a^{mk+m} \quad [\because a^m.a^n = a^{m+n}]$$
$$= a^{m(k+1)} \text{ ………… (iii)}$$

এখন, (i) নং এর উভয়পক্ষে $n = k + 1$ বসালে (i) এর বামপক্ষ ও ডানপক্ষ যথাক্রমে (iii) এর বামপক্ষ ও ডানপক্ষের সাথে মিলে যায়। সুতরাং সূত্রটি $n = k$ এর জন্য সত্য হলে তা $n = k + 1$ এর জন্য সত্য।

সুতরাং, গাণিতিক আরোহ পদ্ধতি অনুসারে, সকল $n \in N$ এর জন্য (i) নং সত্য।

[দেখানো হলো]

(২) এর সমাধান:

এখানে n কে চলক ধরে খোলা বাক্য $(a.b)^n = a^n.b^n$ ... ... (i) বিবেচনা করি।

প্রমাণ (প্রথম ধাপ): $n = 1$ হলে (i) বাক্যটি সত্য। কারণ সেক্ষেত্রে,

(i) এর বামপক্ষ $= (a.b)^1 = a^1.b^1 = a.b$ $[\because a^1 = a]$

(i) এর ডানপক্ষ $= a^n.b^n = a^1.b^1 = a.b$ $[\because a^1 = a]$

দ্বিতীয় ধাপ: ধরা যাক (i) বাক্যটি $n = k$ এর জন্য সত্য।

তাহলে $(a.b)^k = a^k.b^k$ ... ... (ii)

আবার (i) বাক্যটি $n = k + 1$ এর জন্য সত্য হবে যদি,

$$\begin{aligned}(a.b)^{k+1} &= (a.b)^k\,(a.b) \quad [\because a^{n+1} = a^n.a]\\ &= a^k.b^k.a.b \quad \text{[আরোহ কল্পনা]}\\ &= a^k.a.b^k.b \quad \text{[গুণের বিনিময় নিয়ম } (a.b = b.a)]\\ &= a^{k+1}.b^{k+1} \quad [\because a^{n+1} = a^n.a]\end{aligned}$$

$\therefore$ খোলা বাক্যটি $n = k + 1$ এর জন্যও সত্য।

$\therefore$ গাণিতিক আরোহ পদ্ধতি অনুসারে সকল $n \in N$ এর জন্য (i) সত্য।

[দেখানো হলো]

(৩) এর সমাধান:

দেওয়া আছে $n \in N$

এখানে n কে চলক ধরে খোলা বাক্য $\left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}$ ... ... (i)

প্রমাণ (প্রথম ধাপ): $n = 1$ হলে (i) সত্য। কারণ সেক্ষেত্রে,

(i) এর বামপক্ষ $= \left(\frac{1}{a}\right)^n = \left(\frac{1}{a}\right)^1 = \frac{1}{a}$ $[\because a^1 = a]$

(i) এর ডানপক্ষ $= \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^1} = \frac{1}{a}$ $[\because a^1 = a]$

দ্বিতীয় ধাপ: ধরা যাক, $n = k$ এর জন্য (i) সত্য। তাহলে,

$\left(\frac{1}{a}\right)^k = \frac{1}{a^k}$ ... ... (ii)

আবার (i) বাক্যটি $n = k + 1$ এর জন্য সত্য হবে যদি

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{a}\right)^{k+1} &= \left(\frac{1}{a}\right)^k\left(\frac{1}{a}\right) \quad [\because a^{n+1} = a^n.a]\\ &= \frac{1}{a^k}.\frac{1}{a} \quad \text{[আরোহ কল্পনা]}\\ &= \frac{1}{a^k.a} = \frac{1}{a^{k+1}} \quad [\because a^{n+1} = a^n.a]\end{aligned}$$

$\therefore n = k + 1$ এর জন্যও (i) বাক্যটি সত্য। সুতরাং গাণিতিক আরোহ অনুসারে সকল $n \in \boldsymbol{N}$ এর জন্য (i) সত্য।

এখন, $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(a.\frac{1}{b}\right)^n = a^n\left(\frac{1}{b}\right)^n$ $[\because (ab)^n = a^n b^n]$

$= a^n.\frac{1}{b^n}$ $\left[\because \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}\right]$

$\therefore \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ [দেখানো হলো]

(৪) এর সমাধান:

এখানে $a^m.a^n = a^{m+n}$ যেখানে $a \neq 0, m,n \in Z$

(i) $m > 0$ এবং $n < 0$

ধরি, $n = -k$ যেখানে $k \in N$ এবং $m \in N$

$a^m.a^n = a^m.a^{-k}$ [প্রতিস্থাপন]

$= a^m.\frac{1}{a^k}$ $\left[\because \left(a^{-n} = \frac{1}{a^n}\right)\right]$

$= \frac{a^m}{a^k} = a^{m-k}$ $\left[\because \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}\right]$

কিন্তু $\frac{1}{a^{k-m}} = a^{-(k-m)} = a^{m-k}$ $\left[\because \left(a^{-n} = \frac{1}{a^n}\right)\right]$

সকল ক্ষেত্রে $a^m.a^n = a^{m-k} = a^{m+(-k)} = a^{m+n}$ [প্রতিস্থাপন]

(ii) $m < 0, n < 0$

ধরা যাক, $m = -p; n = -q$ যেখানে $p, q \in \boldsymbol{N}$

$a^m.a^n = a^{-p}.a^{-q}$

$= \frac{1}{a^p}.\frac{1}{a^q}$ $\left[\because \left(a^{-n} = \frac{1}{a^n}\right)\right]$

$= \frac{1}{a^{p+q}} = a^{-(p+q)} = a^{-p-q}$

$= a^{(-p)+(-q)}$

$= a^{m+n}$ [প্রতিস্থাপন] [দেখানো হলো]

কাজ:

১। মান নির্ণয় কর: (i) $\frac{5^{n+2} + 35\times 5^{n-1}}{4\times 5^n}$ (ii) $\frac{3^4.3^8}{3^{14}}$.

২। দেখাও যে, $\left(\frac{p^a}{p^b}\right)^{a^2+ab+b^2} \times \left(\frac{p^b}{p^c}\right)^{b^2+bc+c^2} \times \left(\frac{p^c}{p^a}\right)^{c^2+ca+a^2} = 1.$ (VVI)

৩। যদি $a = xy^{p-1}, b = xy^{q-1}$ এবং $c = xy^{r-1}$ হয় তবে দেখাও যে, $a^{q-r}\,b^{r-p}\,c^{p-q} = 1.$

৪। সমাধান কর: (i) $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$ (ii) $9^{2x} = 3^{x+1}$ (iii) $2^{x+3} + 2^{x+1} = 320.$

৫। সরল কর: (i) $\sqrt[12]{(a^8)\sqrt{(a^6)\sqrt{a^4}}}$ (ii) $[1 - 1\{1 - (1 - x^3)^{-1}\}^{-1}]^{-1}.$

৬। যদি $\sqrt[x]{a} = \sqrt[y]{b} = \sqrt[z]{c}$ এবং $abc = 1$ হয়, তবে প্রমাণ কর $x + y + z = 0.$

৭। যদি $a^m.a^n = (a^m)^n$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $m(n-2) + n(m-2) = 0.$

(১) এর সমাধান:

(i) প্রদত্ত রাশি $= \dfrac{5^{n+2}+35\times 5^{n-1}}{4\times 5^n}$

$= \dfrac{5^n.5^2+35\times\dfrac{5^n}{5}}{4\times 5^n}$ $\left[\because \dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n} \text{ এবং } a^{m+n}=a^m.a^n\right]$

$= \dfrac{5^n.25+7.5^n}{4\times 5^n}$

$= \dfrac{5^n(25+7)}{4\times 5^n}$

$= \dfrac{32}{4} = 8$ **[Ans.]**

(ii) প্রদত্ত রাশি $= \dfrac{3^4.3^8}{3^{14}}$

$= \dfrac{3^{4+8}}{3^{14}}$ $[\because a^m.a^n = a^{m+n}]$

$= \dfrac{3^{12}}{3^{14}}$

$= 3^{12-14}$ $[\because \dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}]$

$= 3^{-2}$

$= \dfrac{1}{3^2}$ $[\because a^{-m}=\dfrac{1}{a^m}]$

$= \dfrac{1}{9}$ **Ans.**

(২) এর সমাধান:

বামপক্ষ $= \left(\dfrac{p^a}{p^b}\right)^{a^2+ab+b^2}\times\left(\dfrac{p^b}{p^c}\right)^{b^2+bc+c^2}\times\left(\dfrac{p^c}{p^a}\right)^{c^2+ca+a^2}$

$= (p^{a-b})^{a^2+ab+b^2}\times(p^{b-c})^{b^2+bc+c^2}\times(p^{c-a})^{c^2+ca+a^2}$

$= \left\{p^{(a-b)(a^2+ab+b^2)}\right\}\times\left\{p^{(b-c)(b^2+bc+c^2)}\right\}\times\left\{p^{(c-a)(c^2+ca+a^2)}\right\}$

$[\because (a^m)^n = a^{mn}]$

$= p^{a^3-b^3}\times p^{b^3-c^3}\times p^{c^3-a^3}$

$= p^{a^3-b^3+b^3-c^3+c^3-a^3}$ $[\because a^x\times a^y\times a^z = a^{x+y+z}]$

$= p^0 = 1$ $[\because a^0 = 1]$

= ডানপক্ষ

$\left(\dfrac{p^a}{p^b}\right)^{a^2+ab+b^2}\times\left(\dfrac{p^b}{p^c}\right)^{b^2+bc+c^2}\times\left(\dfrac{p^c}{p^a}\right)^{c^2+ca+a^2} = 1.$

[দেখানো হলো]

(৩) এর সমাধান:

দেওয়া আছে, $a = xy^{p-1}$, $b = xy^{q-1}$ এবং $c = xy^{r-1}$

বামপক্ষ $= a^{q-r}.a^{r-p}.a^{p-q}$

$= (xy^{p-1})^{q-r}.(xy^{q-1})^{r-p}.(xy^{r-1})^{p-q}$

$= \{x^{q-r}.y^{(p-1)(q-r)}\}\{x^{r-p}.y^{(q-1)(r-p)}\}\{x^{p-q}.y^{(r-1)(p-q)}\}$

$= (x^{q-r}.x^{r-p}.x^{p-q}).\{y^{(p-1)(q-r)}.y^{(q-1)(r-p)}.y^{(r-1)(p-q)}\}$

$= (x^{q-r+r-p+p-q}).(y^{pq-pr-q+r+qr-pq-r+p+pr-qr-p+q})$

$[\because a^x.a^y.a^z = a^{x+y+z}]$

$= x^0y^0 = 1.1 = 1 =$ ডানপক্ষ

$\therefore a^{q-r}.a^{r-p}.a^{p-q} = 1$ [দেখানো হলো]

(৪) এর সমাধান:

(i) $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$,

বা, $(2^2)^x + 2^{2x-1} = 3^x.3^{\frac{1}{2}} + 3^{x-\frac{1}{2}}$

বা, $2^{2x} + \dfrac{2^{2x}}{2} = 3^x.3^{\frac{1}{2}} + \dfrac{3^x}{3^{\frac{1}{2}}}$ $\left[a^{m-n} = \dfrac{a^m}{a^n}\right]$

বা, $\dfrac{2.2^{2x}+2^{2x}}{2} = \sqrt{3}.3^x + \dfrac{3^x}{\sqrt{3}}$

বা, $\dfrac{3.2^{2x}}{2} = \dfrac{3.3^x+3^x}{\sqrt{3}}$

বা, $\dfrac{3}{2}.2^{2x} = \dfrac{4}{\sqrt{3}}.3^x$

বা, $\dfrac{2^{2x}}{8} = \dfrac{3^x}{3\sqrt{3}}$

বা, $\dfrac{2^{2x}}{2^3} = \dfrac{3^x}{3^{\frac{3}{2}}}$ $[\because 3\sqrt{3} = 3^1.3^{1/2} = 3^{1+1/2} = 3^{3/2}]$

বা, $2^{2x-3} = 3^{x-\frac{3}{2}}$

বা, $2^{2x-3} = 3^{\frac{2x-3}{2}}$

বা, $2^{2x-3} = \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{2x-3}$

বা, $(2)^{2x-3} = (\sqrt{3})^{2x-3}$

বা, $\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2x-3} = 1$

বা, $\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2x-3} = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^0$

বা, $2x-3 = 0$ $\therefore x = \dfrac{3}{2}$ $\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = \dfrac{3}{2}$

বিকল্প সমাধান:

$4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$

বা, $(2^2)^x + 2^{2x-1} = 3^x.3^{\frac{1}{2}} + 3^{x-\frac{1}{2}}$

বা, $2^{2x} + \dfrac{2^{2x}}{2} = 3^x.3^{\frac{1}{2}} + \dfrac{3^x}{3^{\frac{1}{2}}}$

বা, $2^{2x}\left(1+\dfrac{1}{2}\right) = 3^x\left(\sqrt{3}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$

বা, $(2^2)^x.\dfrac{3}{2} = 3^x\left(\dfrac{(\sqrt{3})^2+1}{\sqrt{3}}\right) = 3^x\left(\dfrac{3+1}{\sqrt{3}}\right) = 3^x.\dfrac{4}{\sqrt{3}}$

বা, $\frac{4^x}{3^x} = \frac{4}{\sqrt{3}} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{3\sqrt{3}}$

বা, $\left(\frac{4}{3}\right)^x = \frac{4^{\frac{3}{2}}}{3^{\frac{3}{2}}}$

বা, $\left(\frac{4}{3}\right)^x = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$

$\therefore x = \frac{3}{2}$

$\because 8 = 2 \times 4$
$= (4)^{\frac{1}{2}} \times 4$
$= 4^{\frac{1}{2}+1}$
$= 4^{\frac{3}{2}}$
এবং, $3\sqrt{3} = 3^1.3^{1/2} = 3^{1+1/2} = 3^{3/2}$

(ii) $9^{2x} = 3^{x+1}$
বা, $(3^2)^{2x} = 3^{x+1}$
বা, $3^{4x} = 3^{x+1}$
বা, $4x = x + 1$ [$\because$ $a^m = a^n$ হলে, $m = n$]
বা, $3x = 1$
$\therefore x = \frac{1}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = \frac{1}{3}$

(iii) $2^{x+3} + 2^{x+1} = 320$
বা, $2^x.2^3 + 2^x.2 = 320$ [$\because$ $a^{m+n} = a^m.a^n$]
বা, $8.2^x + 2.2^x = 320$
বা, $10.2^x = 320$ বা, $2^x = 32$ বা, $2^x = 2^5$ $\therefore x = 5$
$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x = 5$

(৫) এর সমাধান:

i) প্রদত্ত রাশি $= \sqrt[12]{(a^8)\sqrt{(a^6)\sqrt{a^4}}}$
$= \sqrt[12]{a^8\sqrt{a^6.a^2}}$
$= \sqrt[12]{a^8\sqrt{a^8}}$ $[a^m.a^n = a^{m+n}]$
$= \sqrt[12]{a^8.(a^8)^{\frac{1}{2}}}$
$= \sqrt[12]{a^8.a^4} = \sqrt[12]{a^{12}} = \left(a^{12}\right)^{\frac{1}{12}} = a$ [Ans.]

ii) প্রদত্ত রাশি $= \left[1 - 1\left\{1 - (1 - x^3)^{-1}\right\}^{-1}\right]^{-1}$
$= \left[1 - 1\left\{1 - \frac{1}{1 - x^3}\right\}^{-1}\right]^{-1}$
$= \left[1 - \left\{\frac{1 - x^3 - 1}{1 - x^3}\right\}^{-1}\right]^{-1}$
$= \left[1 - \left\{\frac{-x^3}{1 - x^3}\right\}^{-1}\right]^{-1}$
$= \left[1 + \frac{1 - x^3}{x^3}\right]^{-1}$ $\left[\because a^{-1} = \frac{1}{a}\right]$
$= \left[\frac{x^3 + 1 - x^3}{x^3}\right]^{-1}$
$= \left[\frac{1}{x^3}\right]^{-1} = x^3$ **[Ans.]**

(৬) এর সমাধান:

দেওয়া আছে, $\sqrt[x]{a} = \sqrt[y]{b} = \sqrt[z]{c}$ এবং $abc = 1$
ধরি, $\sqrt[x]{a} = \sqrt[y]{b} = \sqrt[z]{c} = k$
$\therefore \sqrt[x]{a} = k$ বা, $a^{\frac{1}{x}} = k$ $\therefore a = k^x$
একই ভাবে, $b = k^y$ এবং $c = k^z$
এখন, $abc = 1$
বা, $k^x.k^y.k^z = 1$ বা, $k^{x+y+z} = 1$ বা, $k^{x+y+z} = k^0$
$\therefore x + y + z = 0$ **(প্রমাণিত)**

(৭) এর সমাধান:

দেওয়া আছে $a^m.a^n = \left(a^m\right)^n$ বা, $a^{m+n} = a^{mn}$
$\therefore m + n = mn$ ... ... (i)
বামপক্ষ $= m(n - 2) + n(m - 2)$
$= mn - 2m + mn - 2n$
$= 2mn - 2(m + n) = 2mn - 2mn$ [(i) নং হতে পাই]
$= 0 =$ ডানপক্ষ
$\therefore m(n - 2) + n(m - 2) = 0$ **(প্রমাণিত)**

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৯.১

১। প্রমাণ কর যে, $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^p = a^{\frac{mp}{n}}$, যেখানে $m, p \in Z$ এবং $n \in N$.

২। প্রমাণ কর যে, $\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{mn}}$, যেখানে $m, n \in N, m \neq 0, n \neq 0$.

৩। প্রমাণ কর যে, $(ab)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}}b^{\frac{m}{n}}$, যেখানে $m \in Z, n \in N$.

৪। দেখাও যে, (ক) $\left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right) = a - b$ (খ) $\frac{a^3 + a^{-3} + 1}{a^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{-3}{2}} + 1} = \left(a^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{-3}{2}} - 1\right)$

৫। সরল কর:

(ক) $\left\{\left(x^{\frac{1}{a}}\right)^{\frac{a^2-b^2}{a-b}}\right\}^{\frac{a}{a+b}}$ (খ) $\frac{a^{\frac{3}{2}}+ab}{ab-b^3}-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-b}$ (গ) $\frac{\left(\frac{a+b}{b}\right)^{\frac{a}{a-b}}\times\left(\frac{a-b}{a}\right)^{\frac{a}{a-b}}}{\left(\frac{a+b}{b}\right)^{\frac{b}{a-b}}\times\left(\frac{a-b}{a}\right)^{\frac{b}{a-b}}}$

(ঘ) $\frac{1}{1+a^{-m}b^{n}+a^{-m}c^{p}}+\frac{1}{1+b^{-n}c^{p}+b^{-n}a^{m}}+\frac{1}{1+c^{-p}a^{m}+c^{-p}b^{n}}$

(ঙ) $\sqrt[b]{\frac{x^{\frac{b}{c}}}{x^{\frac{c}{b}}}}\times\sqrt[c]{\frac{x^{\frac{c}{a}}}{x^{\frac{a}{c}}}}\times\sqrt[a]{\frac{x^{\frac{a}{b}}}{x^{\frac{b}{a}}}}$ (চ) $\frac{(a^2-b^{-2})^a(a-b^{-1})^{b-a}}{(b^2-a^{-2})^b(b+a^{-1})^{a-b}}$

৬। দেখাও যে,

(ক) যদি $x=a^{q+r}b^p,\ y=a^{r+p}b^q,\ z=a^{p+q}b^r$ হয়, তবে $x^{q-r}y^{r-p}z^{p-q}=1$.

(খ) যদি $a^p=b,\ b^q=c$ এবং $c^r=a$ হয়, তবে $pqr=1$.

(গ) যদি $a^x=p,\ a^y=q$ এবং $a^2=(p^yq^x)^z$ হয়, তবে $xyz=1$.

৭। (ক) যদি $x\sqrt[3]{a}+y\sqrt[3]{b}+z\sqrt[3]{c}=0$ এবং $a^2=bc$ হয়, তবে দেখাও যে, $ax^3+by^3+cz^3=3axyz$.

(খ) যদি $x=(a+b)^{\frac{1}{3}}+(a-b)^{\frac{1}{3}}$ এবং $a^2-b^2=c^3$ হয়, তবে দেখাও যে, $x^3-3cx-2a=0$

(গ) যদি $a=2^{-\frac{1}{3}}+2^{\frac{1}{3}}$ হয়, তবে দেখাও যে, $2a^3-6a=5$

(ঘ) যদি $a^2+2=3^{\frac{2}{3}}+3^{-\frac{2}{3}}$ এবং $a\geq 0$ হয়, তবে দেখাও যে, $3a^3+9a=8$

(ঙ) যদি $a^2=b^3$ হয়, তবে দেখাও যে, $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{3}{2}}+\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{3}}$.

(চ) যদি $b=1+3^{\frac{2}{3}}+3^{\frac{1}{3}}$ হয়, তবে দেখাও যে, $b^3-3b^2-6b-4=0$

(ছ) যদি $a+b+c=0$ হয়, তবে দেখাও যে, $\frac{1}{x^b+x^{-c}+1}+\frac{1}{x^c+x^{-a}+1}+\frac{1}{x^a+x^{-b}+1}=1$.

৮। (ক) যদি $a^x=b,\ b^y=c$ এবং $c^z=1$ হয়, তবে $xyz=$ কত?

(খ) যদি $x^a=y^b=z^c$ এবং $xyz=1$ হয়, তবে $ab+bc+ca=$ কত?

(গ) যদি $9^x=(27)^y$ হয়, তা হলে $\frac{x}{y}$ এর মান কত?

৯। সমাধান কর:

(ক) $3^{2x+2}+27^{x+1}=36$ (খ) $\begin{matrix}5^x+3^y=8\\5^{x-1}+3^{y-1}=2\end{matrix}$ (গ) $\begin{matrix}4^{3y-2}=16^{x+y}\\3^{x+2y}=9^{2x+1}\end{matrix}$ (ঘ) $\begin{matrix}2^{2x+1}.2^{3y+1}=8\\2^{x+2}.2^{y+2}=16\end{matrix}$

অনুশীলনী- ৯.১ এর সমাধান

১। প্রমাণ কর যে, $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^p=a^{\frac{mp}{n}}$ যেখানে $m, p\in Z$ এবং $n\in N$.

সমাধান:

$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^p=\left\{\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m\right\}^p$ $\left[\because a^{\frac{m}{n}}=\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m\right]$

$=\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{mp}$ $\left[\because \left\{(a^m)^n=a^{mn}\right\}\right]$

$=a^{\frac{mp}{n}}$ $\left[\because a^{\frac{m}{n}}=\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m\right]$ [প্রমাণিত]

২। প্রমাণ কর যে, $\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{1}{mn}}$ যেখানে $m, n\in N, m\neq 0, n\neq 0$.

সমাধান:

মনে করি, $\frac{1}{m}=x$ বা, $mx=1$ | এবং $\frac{1}{n}=y$ বা, $ny=1$

এখন, $\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}}=(a^x)^y=a^{xy}$ $\left[\because (a^m)^n=a^{mn}\right]$

$=a^{\frac{mxny}{mn}}$

$=a^{\frac{1.1}{mn}}$

$=a^{\frac{1}{mn}}$

$\therefore \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{1}{mn}}$ (প্রমাণিত)

বিকল্প সমাধান

ধরি, $\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} = x$

$\therefore$ মূলের সংজ্ঞানুসারে, $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ থেকে পাই,

$a^{\frac{1}{m}} = x^n$

একই যুক্তিতে পাই, $a = \left(x^n\right)^m$

বা, $a = x^{mn}$ $\quad [\because (a^m)^n = a^{mn}]$

$\therefore$ মূলের সংজ্ঞানুসারে, $x = a^{\frac{1}{mn}}$

অর্থাৎ, $\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{mn}}$ $\quad [\because x = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}}]$ (প্রমাণিত)

৩। প্রমাণ কর যে, $(ab)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{m}{n}}$, যেখানে $m \in Z, n \in N$.

সমাধান:

ধরি, $\frac{m}{n} = x$

এখন, $(ab)^{\frac{m}{n}} = (ab)^x = a^x . b^x$

আবার, $a^{\frac{m}{n}} . b^{\frac{m}{n}} = a^x . b^x$

$\therefore (ab)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{m}{n}}$ (প্রমাণিত)

৪। দেখাও যে,

(ক) $\left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right) = a - b$

(খ) $\dfrac{a^3 + a^{-3} + 1}{a^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{-3}{2}} + 1} = \left(a^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{-3}{2}} - 1\right)$

(ক) এর সমাধান:

$$\text{বামপক্ষ} = \left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)$$

$$= \left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}\right)\left\{\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^2 + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + \left(b^{\frac{1}{3}}\right)^2\right\}$$

$$= \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3 - \left(b^{\frac{1}{3}}\right)^3 \quad [\because (x-y)(x^2+xy+y^2) = (x^3-y^3)]$$

$$= a^{\frac{3}{3}} - b^{\frac{3}{3}} = a^1 - b^1 = a - b = \text{ডানপক্ষ}$$

$\left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right) = a - b$ (দেখানো হলো)

(খ) এর সমাধান:

$$\text{বামপক্ষ} = \frac{a^3 + a^{-3} + 1}{a^{\frac{3}{2}} + a^{-\frac{3}{2}} + 1}$$

$$= \frac{\left(a^{\frac{3}{2}}\right)^2 + \left(a^{-\frac{3}{2}}\right)^2 + 1}{a^{\frac{3}{2}} + a^{-\frac{3}{2}} + 1}$$

$$= \frac{\left(a^{\frac{3}{2}} + a^{-\frac{3}{2}}\right)^2 - 2.a^{\frac{3}{2}}.a^{-\frac{3}{2}} + 1}{a^{\frac{3}{2}} + a^{-\frac{3}{2}} + 1} \quad [\because (x^2+y^2) = (x+y)^2 - 2xy]$$

$$= \frac{\left(a^{\frac{3}{2}} + a^{-\frac{3}{2}}\right)^2 - 2.a^0 + 1}{a^{\frac{3}{2}} + a^{-\frac{3}{2}} + 1} \quad [\because a^{\frac{3}{2}}.a^{-\frac{3}{2}} = a^{\frac{3}{2}-\frac{3}{2}} = a^0]$$

$$= \frac{\left(a^{\frac{3}{2}} + a^{-\frac{3}{2}}\right)^2 - 1}{a^{\frac{3}{2}} + a^{-\frac{3}{2}} + 1} \quad [\because a^0 = 1]$$

$$= \frac{\left(a^{\frac{3}{2}} + a^{-\frac{3}{2}}\right)^2 - (1)^2}{a^{\frac{3}{2}} + a^{-\frac{3}{2}} + 1}$$

$$= \frac{\left(a^{\frac{3}{2}} + a^{-\frac{3}{2}} + 1\right)\left(a^{\frac{3}{2}} + a^{-\frac{3}{2}} - 1\right)}{a^{\frac{3}{2}} + a^{-\frac{3}{2}} + 1} \quad [\because a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)]$$

$$= a^{\frac{3}{2}} + a^{-\frac{3}{2}} - 1 = \text{ডানপক্ষ}$$

$\dfrac{a^3 + a^{-3} + 1}{a^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{-3}{2}} + 1} = \left(a^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{-3}{2}} - 1\right)$ (দেখানো হলো)

বিকল্প পদ্ধতি:

$$\text{বামপক্ষ} = \frac{a^3 + a^{-3} + 1}{a^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{3}{2}} + 1}$$

$$= \frac{a^3 + 2 + a^{-3} - 1}{a^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{3}{2}} + 1}$$

$$= \frac{\left(a^{\frac{3}{2}}\right)^2 + 2.a^{\frac{3}{2}}.a^{-\frac{3}{2}} + \left(a^{-\frac{3}{2}}\right)^2 - 1}{a^{\frac{3}{2}} + a^{-\frac{3}{2}} + 1}$$

$$= \frac{\left(a^{\frac{3}{2}} + a^{-\frac{3}{2}}\right)^2 - 1}{a^{\frac{3}{2}} + a^{-\frac{3}{2}} + 1}$$

$$= \frac{\left(a^{\frac{3}{2}} + a^{-\frac{3}{2}} + 1\right)\left(a^{\frac{3}{2}} + a^{-\frac{3}{2}} - 1\right)}{\left(a^{\frac{3}{2}} + a^{-\frac{3}{2}} + 1\right)}$$

$= a^{\frac{3}{2}} + a^{-\frac{3}{2}} - 1 =$ ডানপক্ষ (দেখানো হলো)

২। সরল কর:

(ক) $\left\{\left(x^{\frac{1}{a}}\right)^{\frac{a^2-b^2}{a-b}}\right\}^{\frac{a}{a+b}}$ (খ) $\dfrac{a^{\frac{3}{2}} + ab}{ab - b^3} - \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} - b}$

(গ) $\dfrac{\left(\frac{a+b}{b}\right)^{\frac{a}{a-b}} \times \left(\frac{a-b}{a}\right)^{\frac{a}{a-b}}}{\left(\frac{a+b}{b}\right)^{\frac{b}{a-b}} \times \left(\frac{a-b}{a}\right)^{\frac{b}{a-b}}}$

(ঘ) $\dfrac{1}{1+a^{-m}b^n+a^{-m}c^p} + \dfrac{1}{1+b^{-n}c^p+b^{-n}a^m} + \dfrac{1}{1+c^{-p}a^m+c^{-p}b^n}$

(ঙ) $\sqrt[bc]{\dfrac{x^{\frac{b}{c}}}{x^{\frac{c}{b}}}} \times \sqrt[ca]{\dfrac{x^{\frac{c}{a}}}{x^{\frac{a}{c}}}} \times \sqrt[ab]{\dfrac{x^{\frac{a}{b}}}{x^{\frac{b}{a}}}}$ (চ) $\dfrac{(a^2 - b^{-2})^a (a - b^{-1})^{b-a}}{(b^2 - a^{-2})^b (b + a^{-1})^{a-b}}$

(ক) এর সমাধান:

$\left\{\left(x^{\frac{1}{a}}\right)^{\frac{a^2-b^2}{a-b}}\right\}^{\frac{a}{a+b}}$

$= \left(x^{\frac{1}{a}}\right)^{\frac{a^2-b^2}{a-b} \cdot \frac{a}{a+b}}$ $[\because (a^r)^s = a^{rs}]$

$= x^{\frac{1}{a} \cdot \frac{a^2-b^2}{a-b} \cdot \frac{a}{a+b}} = x^{\frac{1}{a} \cdot \frac{(a+b)(a-b)}{(a-b)} \cdot \frac{a}{(a+b)}} = x^1 = x$ (**Ans.**)

(খ) এর সমাধান:

$\dfrac{a^{\frac{3}{2}} + ab}{ab - b^3} - \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} - b}$

$= \dfrac{a(\sqrt{a} + b)}{b(a - b^2)} - \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} - b}$ $[\because a^{\frac{3}{2}} = a.a^{\frac{1}{2}} = a\sqrt{a}]$

$= \dfrac{a(\sqrt{a} + b)}{b\{(\sqrt{a})^2 - (b)^2\}} - \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} - b}$

$= \dfrac{a(\sqrt{a} + b)}{b(\sqrt{a} + b)(\sqrt{a} - b)} - \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} - b}$ $[\because \sqrt{a}.\sqrt{a} = (\sqrt{a})^2 = a]$

$= \dfrac{a}{b(\sqrt{a} - b)} - \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} - b}$

$= \dfrac{a - b\sqrt{a}}{b(\sqrt{a} - b)}$

$= \dfrac{\sqrt{a}(\sqrt{a} - b)}{b(\sqrt{a} - b)}$ $[\because a = a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}.\sqrt{a}]$

$= \dfrac{\sqrt{a}}{b}$ (**Ans.**)

(গ) এর সমাধান:

$$\frac{\left(\frac{a+b}{b}\right)^{\frac{a}{a-b}} \times \left(\frac{a-b}{a}\right)^{\frac{a}{a-b}}}{\left(\frac{a+b}{b}\right)^{\frac{b}{a-b}} \times \left(\frac{a-b}{a}\right)^{\frac{b}{a-b}}}$$

$$= \frac{\left(\frac{a+b}{b}\right)^{\frac{a}{a-b}}}{\left(\frac{a+b}{b}\right)^{\frac{b}{a-b}}} \times \frac{\left(\frac{a-b}{a}\right)^{\frac{a}{a-b}}}{\left(\frac{a-b}{a}\right)^{\frac{b}{a-b}}}$$

$$= \left(\frac{a+b}{b}\right)^{\frac{a}{a-b} - \frac{b}{a-b}} \times \left(\frac{a-b}{a}\right)^{\frac{a}{a-b} - \frac{b}{a-b}} \quad \left[\because \left(\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}\right)\right]$$

$$= \left(\frac{a+b}{b}\right)^{\frac{a-b}{a-b}} \times \left(\frac{a-b}{a}\right)^{\frac{a-b}{a-b}}$$

$$= \left(\frac{a+b}{b}\right)^1 \times \left(\frac{a-b}{a}\right)^1$$

$$= \frac{a+b}{b} \times \frac{a-b}{a}$$

$= \dfrac{a^2 - b^2}{ab}$ (**Ans.**)

বিকল্প সমাধান:

$$\frac{\left(\frac{a+b}{b}\right)^{\frac{a}{a-b}} \times \left(\frac{a-b}{a}\right)^{\frac{a}{a-b}}}{\left(\frac{a+b}{b}\right)^{\frac{b}{a-b}} \times \left(\frac{a-b}{a}\right)^{\frac{b}{a-b}}}$$

$$= \frac{\left(\frac{a+b}{b} \times \frac{a-b}{a}\right)^{\frac{a}{a-b}}}{\left(\frac{a+b}{b} \times \frac{a-b}{a}\right)^{\frac{b}{a-b}}}$$

$$= \frac{\left(\frac{a^2-b^2}{ab}\right)^{\frac{a}{a-b}}}{\left(\frac{a^2-b^2}{ab}\right)^{\frac{b}{a-b}}}$$

$$= \left(\frac{a^2-b^2}{ab}\right)^{\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a-b}}$$

$$= \left(\frac{a^2-b^2}{ab}\right)^{\frac{a-b}{a-b}}$$

$$= \frac{a^2-b^2}{ab}$$ **(Ans.)**

(ঘ) এর সমাধান:

প্রদত্ত রাশির প্রথম অংশ $= \dfrac{1}{1+a^{-m}b^n+a^{-m}c^p}$

$$= \frac{a^m}{a^m(1+a^{-m}b^n+a^{-m}c^p)}$$

[লব ও হরকে a^m দ্বারা গুণ করে]

$$= \frac{a^m}{a^m+a^{-m+m}b^n+a^{-m+m}c^p}$$

$$= \frac{a^m}{a^m+a^0b^n+a^0c^p}$$

$$= \frac{a^m}{a^m+b^n+c^p} \quad [\because a^0=1]$$

অনুরূপভাবে দ্বিতীয় অংশ $= \dfrac{b^n}{a^m+b^n+c^p}$

এবং, তৃতীয় অংশ $= \dfrac{c^p}{a^m+b^n+c^p}$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি

$$= \frac{1}{1+a^{-m}b^n+a^{-m}c^p}+\frac{1}{1+b^{-n}c^p+b^{-n}a^m}+\frac{1}{a+c^{-p}a^m+c^{-p}b^n}$$

$$= \frac{a^m}{a^m+b^n+c^p}+\frac{b^n}{a^m+b^n+c^p}+\frac{c^p}{a^m+b^n+c^p}$$

$$= \frac{a^m+b^n+c^p}{a^m+b^n+c^p}$$

$= 1$ **(Ans.)**

বিকল্প সমাধান:

$$\frac{1}{1+a^{-m}.b^n+a^{-m}c^p}+\frac{1}{1+a^{-n}.c^p+b^{-n}a^m}+\frac{1}{1+c^{-p}.a^m+c^{-p}b^n}$$

$$= \frac{1}{1+\frac{b^n}{a^m}+\frac{c^p}{a^m}}+\frac{1}{1+\frac{c^p}{b^n}+\frac{a^m}{b^n}}+\frac{1}{1+\frac{a^m}{c^p}+\frac{b^n}{c^p}}\left[\because a^{-m}=\frac{1}{a^m}\right]$$

$$= \frac{1}{\frac{a^m+b^n+c^p}{a^m}}+\frac{1}{\frac{b^n+c^p+a^m}{b^n}}+\frac{1}{\frac{c^p+a^m+b^n}{c^p}}$$

$$= 1\times\frac{a^m}{a^m+b^n+c^p}+1\times\frac{b^n}{b^n+c^p+a^m}+1\times\frac{c^p}{c^p+a^m+b^n}$$

$$= \frac{a^m+b^n+c^p}{a^m+b^n+c^p}$$

$= 1$ **[Ans.]**

(ঙ) এর সমাধান:

$$\sqrt[bc]{\frac{x^{\frac{b}{c}}}{x^{\frac{c}{b}}}}\times\sqrt[ca]{\frac{x^{\frac{c}{a}}}{x^{\frac{a}{c}}}}\times\sqrt[ab]{\frac{x^{\frac{a}{b}}}{x^{\frac{b}{a}}}}$$

$$= \left(\frac{x^{\frac{b}{c}}}{x^{\frac{c}{b}}}\right)^{\frac{1}{bc}}\times\left(\frac{x^{\frac{c}{a}}}{x^{\frac{a}{c}}}\right)^{\frac{1}{ca}}\times\left(\frac{x^{\frac{a}{b}}}{x^{\frac{b}{a}}}\right)^{\frac{1}{ab}}$$

$$= \left(x^{\frac{b}{c}-\frac{c}{b}}\right)^{\frac{1}{bc}}\times\left(x^{\frac{c}{a}-\frac{a}{c}}\right)^{\frac{1}{ca}}\times\left(x^{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}\right)^{\frac{1}{ab}}\left[\because\left(\frac{x^r}{x^s}=x^{r-s}\right)\right]$$

$$= \left(x^{\frac{b^2-c^2}{bc}}\right)^{\frac{1}{bc}}\times\left(x^{\frac{c^2-a^2}{ca}}\right)^{\frac{1}{ca}}\times\left(x^{\frac{a^2-b^2}{ab}}\right)^{\frac{1}{ab}}$$

$$= x^{\frac{b^2-c^2}{b^2c^2}}\times x^{\frac{c^2-a^2}{c^2a^2}}\times x^{\frac{a^2-b^2}{a^2b^2}} \quad [\because \{(x^r)^s=x^{rs}\}]$$

$$= x^{\frac{b^2-c^2}{b^2c^2}+\frac{c^2-a^2}{c^2a^2}+\frac{a^2-b^2}{a^2b^2}} \quad [\because a^x.a^y.a^z=a^{x+y+z}]$$

$$= x^{\frac{a^2(b^2-c^2)+b^2(c^2-a^2)+c^2(a^2-b^2)}{a^2b^2c^2}}$$

$$= x^{\frac{a^2b^2-c^2a^2+b^2c^2-a^2b^2+c^2a^2-b^2c^2}{a^2b^2c^2}}$$

$$= x^{\frac{0}{a^2b^2c^2}} = x^0 = 1$$ **(Ans.)**

বিকল্প সমাধান:

$$\sqrt[bc]{\frac{x^{\frac{b}{c}}}{x^{\frac{c}{b}}}}\times\sqrt[ca]{\frac{x^{\frac{c}{a}}}{x^{\frac{a}{c}}}}\times\sqrt[ab]{\frac{x^{\frac{a}{b}}}{x^{\frac{b}{a}}}}$$

$$= \left(\frac{x^{\frac{b}{c}}}{x^{\frac{c}{b}}}\right)^{\frac{1}{bc}}\times\left(\frac{x^{\frac{c}{a}}}{x^{\frac{a}{c}}}\right)^{\frac{1}{ca}}\times\left(\frac{x^{\frac{a}{b}}}{x^{\frac{b}{a}}}\right)^{\frac{1}{ab}}$$

$$= \frac{x^{\frac{b}{c}\times\frac{1}{bc}}}{x^{\frac{c}{b}\times\frac{1}{bc}}}\times\frac{x^{\frac{c}{a}\times\frac{1}{ca}}}{x^{\frac{a}{c}\times\frac{1}{ca}}}\times\frac{x^{\frac{a}{b}\times\frac{1}{ab}}}{x^{\frac{b}{a}\times\frac{1}{ab}}}$$

$$= \frac{x^{\frac{1}{c^2}}}{x^{\frac{1}{b^2}}}\times\frac{x^{\frac{1}{a^2}}}{x^{\frac{1}{c^2}}}\times\frac{x^{\frac{1}{b^2}}}{x^{\frac{1}{a^2}}} = 1$$ **(Ans)**

(চ) এর সমাধান:

$$\frac{(a^2-b^{-2})^a(a-b^{-1})^{b-a}}{(b^2-a^{-2})^b(b+a^{-1})^{a-b}}$$

$$= \frac{\left(a^2-\frac{1}{b^2}\right)^a\left(a-\frac{1}{b}\right)^{b-a}}{\left(b^2-\frac{1}{a^2}\right)^b\left(b+\frac{1}{a}\right)^{a-b}}$$

$$=\frac{\left\{\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(a-\frac{1}{b}\right)\right\}^{a}\left(a-\frac{1}{b}\right)^{b-a}}{\left\{\left(b+\frac{1}{a}\right)\left(b-\frac{1}{a}\right)\right\}^{b}\left(b+\frac{1}{a}\right)^{a-b}}$$

$$=\frac{\left(a+\frac{1}{b}\right)^{a}\left(a-\frac{1}{b}\right)^{a}\left(a-\frac{1}{b}\right)^{b-a}}{\left(b+\frac{1}{a}\right)^{b}\left(b-\frac{1}{a}\right)^{b}\left(b+\frac{1}{a}\right)^{a-b}}$$

$$=\frac{\left(a+\frac{1}{b}\right)^{a}\left(a-\frac{1}{b}\right)^{a+b-a}}{\left(b-\frac{1}{a}\right)^{b}\left(b+\frac{1}{a}\right)^{b+a-b}}$$

$$=\frac{\left(a+\frac{1}{b}\right)^{a}\left(a-\frac{1}{b}\right)^{b}}{\left(b-\frac{1}{a}\right)^{b}\left(b+\frac{1}{a}\right)^{a}}$$

$$=\frac{\left(\frac{ab+1}{b}\right)^{a}\left(\frac{ab-1}{b}\right)^{b}}{\left(\frac{ab-1}{a}\right)^{b}\left(\frac{ab+1}{a}\right)^{a}}$$

$$=\left(\frac{\frac{ab+1}{b}}{\frac{ab+1}{a}}\right)^{a}\times\left(\frac{\frac{ab-1}{b}}{\frac{ab-1}{a}}\right)^{b}$$

$$=\left(\frac{ab+1}{b}\times\frac{a}{ab+1}\right)^{a}\times\left(\frac{ab-1}{b}\times\frac{a}{ab-1}\right)^{b}$$

$$=\left(\frac{a}{b}\right)^{a}\times\left(\frac{a}{b}\right)^{b}=\left(\frac{a}{b}\right)^{a+b}$$ (Ans.)

৮। দেখাও যে,
(ক) যদি $x=a^{q+r}b^{p}, y=a^{r+p}b^{q}, z=a^{p+q}b^{r}$ হয়, তবে $x^{q-r}.y^{r-p}.z^{p-q}=1.$
(খ) যদি $a^{p}=b, b^{q}=c$ এবং $c^{r}=a$ হয়, তবে $pqr=1.$
(গ) যদি $a^{x}=p, a^{y}=q$ এবং $a^{2}=(p^{y}q^{x})^{z}$ হয়, তবে $xyz=1.$

(ক) এর সমাধান:
দেওয়া আছে, $x=a^{q+r}b^{p}, y=a^{r+p}b^{q}, z=a^{p+q}b^{r}$
বামপক্ষ $=x^{q-r}y^{r-p}z^{p-q}$
$=(a^{q+r}b^{p})^{q-r}(a^{r+p}b^{q})^{r-p}(a^{p+q}b^{r})^{p-q}$ [মান বসিয়ে পাই]
$=a^{(q+r)(q-r)}b^{p(q-r)}a^{(r+p)(r-p)}b^{q(r-p)}a^{(p+q)(p-q)}b^{r(p-q)}$
$=a^{q^{2}-r^{2}+r^{2}-p^{2}+p^{2}-q^{2}}b^{pq-rp+qr-qp+rp-qr}$
$=a^{0}b^{0}=1.1=1=$ ডানপক্ষ
$x^{q-r}.y^{r-p}.z^{p-q}=1$ (দেখানো হলো)

(খ) এর সমাধান:
দেওয়া আছে, $a^{p}=b, b^{q}=c, c^{r}=a$
এখানে, $c^{r}=a$
বা, $(b^{q})^{r}=a$ $[\because b^{q}=c]$
বা, $b^{qr}=a$
বা, $(a^{p})^{qr}=a$ $[\because a^{p}=b]$
বা, $a^{pqr}=a^{1}$
বা, $a^{pqr}=a^{1}$
$\therefore pqr=1$ (দেখানো হলো)

(গ) এর সমাধান:
দেওয়া আছে, $a^{x}=p, a^{y}=q$ এবং $a^{2}=(p^{y}q^{x})^{z}$
এখানে, $(p^{y}q^{x})^{z}=a^{2}$
বা, $\left\{(a^{x})^{y}(a^{y})^{x}\right\}^{z}=a^{2}$ $[\because p=a^{x}, q=a^{y}]$
বা, $\left\{(a^{xy})(a^{xy})\right\}^{z}=a^{2}$
বা, $(a^{2xy})^{z}=a^{2}$
বা, $a^{2xyz}=a^{2}$
$\therefore 2xyz=2$
$\therefore xyz=1.$ (দেখানো হলো)

৭। (ক) যদি $x\sqrt[3]{a}+y\sqrt[3]{b}+z\sqrt[3]{c}=0$ এবং $a^{2}=bc$ হয়, তবে দেখাও যে, $ax^{3}+by^{3}+cz^{3}=3axyz.$
(খ) যদি $x=(a+b)^{\frac{1}{3}}+(a-b)^{\frac{1}{3}}$ এবং $a^{2}-b^{2}=c^{3}$ হয়, তবে দেখাও যে, $x^{3}-3cx-2a=0$
(গ) যদি $a=2^{-\frac{1}{3}}+2^{\frac{1}{3}}$ হয়, তবে দেখাও যে, $2a^{3}-6a=5$
(ঘ) যদি $a^{2}+2=3^{\frac{2}{3}}+3^{-\frac{2}{3}}$ এবং $a\geq0$ হয়, তবে দেখাও যে, $3a^{3}+9a=8$
(ঙ) যদি $a^{2}=b^{3}$ হয়, তবে দেখাও যে, $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{3}{2}}+\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{3}}$
(চ) যদি $b=1+3^{\frac{2}{3}}+3^{\frac{1}{3}}$ হয়, তবে দেখাও যে, $b^{3}-3b^{2}-6b-4=0$
(ছ) যদি $a+b+c=0$ হয়, তবে দেখাও যে,
$$\frac{1}{x^{b}+x^{-c}+1}+\frac{1}{x^{c}+x^{-a}+1}+\frac{1}{x^{a}+x^{-b}+1}=1.$$

(ক) এর সমাধান:
দেওয়া আছে, $x\sqrt[3]{a}+y\sqrt[3]{b}+z\sqrt[3]{c}=0$ এবং $a^{2}=bc$
এখানে, $x\sqrt[3]{a}+y\sqrt[3]{b}+z\sqrt[3]{c}=0$
বা, $x\sqrt[3]{a}=-\left(y\sqrt[3]{b}+z\sqrt[3]{c}\right)$
বা, $\left(x\sqrt[3]{a}\right)^{3}=\left\{-\left(y\sqrt[3]{b}+z\sqrt[3]{c}\right)\right\}^{3}$ [উভয় পক্ষকে ঘন করে]
বা, $x^{3}\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^{3}=-y^{3}\left(b^{\frac{1}{3}}\right)^{3}-z^{3}\left(c^{\frac{1}{3}}\right)^{3}-3y\sqrt[3]{b}.z\sqrt[3]{c}\left(y\sqrt[3]{b}+z\sqrt[3]{c}\right)$
$[\because x\sqrt[3]{a}=-\left(y\sqrt[3]{a}+z\sqrt[3]{c}\right)]$
বা, $ax^{3}+by^{3}+cz^{3}=3x\sqrt[3]{a}.y\sqrt[3]{c}.z\sqrt[3]{c}$
বা, $ax^{3}+by^{3}+cz^{3}=3xyz\,(bc)^{\frac{1}{3}}.a^{\frac{1}{3}}$
বা, $ax^{3}+by^{3}+cz^{3}=3xyz\,(a^{2})^{\frac{1}{3}}(a)^{\frac{1}{3}}$ $[\because a^{2}=bc]$
বা, $ax^{3}+by^{3}+cz^{3}=3xyza^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}$
$\therefore ax^{3}+by^{3}+cz^{3}=3axyz$ (দেখানো হলো)

(খ) এর সমাধান:
দেওয়া আছে, $x=(a+b)^{\frac{1}{3}}+(a-b)^{\frac{1}{3}}$ এবং $a^{2}-b^{2}=c^{3}.$
এখানে, $x=(a+b)^{\frac{1}{3}}+(a-b)^{\frac{1}{3}}$
বা, $x^{3}=\left\{(a+b)^{\frac{1}{3}}+(a-b)^{\frac{1}{3}}\right\}^{3}$ [উভয় পক্ষকে ঘন করে]

বা, $x^3=\left\{(a+b)^{\frac{1}{3}}\right\}^3+\left\{(a-b)^{\frac{1}{3}}\right\}^3+3(a+b)^{\frac{1}{3}}(a-b)^{\frac{1}{3}}\left\{(a+b)^{\frac{1}{3}}+(a-b)^{\frac{1}{3}}\right\}$

[∵ $(x+y)^3=x^3+y^3+3xy(x+y)$]

বা, $x^3=a+b+a-b+3\left(a^2-b^2\right)^{\frac{1}{3}}x$

[∵ $(a+b)^{\frac{1}{3}}+(a-b)^{\frac{1}{3}}=x$]

বা, $x^3=2a+3.\left(c^3\right)^{\frac{1}{3}}x$ বা, $x^3=2a+3cx$

∴ $x^3-3cx-2a=0$ (দেখানো হলো)

(গ) এর সমাধান:

দেওয়া আছে, $a=2^{\frac{1}{3}}+2^{-\frac{1}{3}}$

বা, $a^3=\left(2^{\frac{1}{3}}+2^{-\frac{1}{3}}\right)^3$ [উভয় পক্ষকে ঘন করে]

বা, $a^3=\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^3+\left(2^{-\frac{1}{3}}\right)^3+3.2^{\frac{1}{3}}.2^{-\frac{1}{3}}\left(2^{\frac{1}{3}}+2^{-\frac{1}{3}}\right)$

[∵ $(x+y)^3=x^3+y^3+3xy(x+y)$]

বা, $a^3=2^1+2^{-1}+3.2^0.a$

[∵ $2^{\frac{1}{3}}.2^{-\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{3}-\frac{1}{3}}=2^0$ এবং $2^{\frac{1}{3}}+2^{-\frac{1}{3}}=a$]

বা, $a^3=2+\frac{1}{2}+3a$ [∵ $a^0=1$ এবং $a^{-1}=\frac{1}{a}$]

বা, $a^3=\frac{4+1+6a}{2}$ বা, $2a^3=4+1+6a$

∴ $2a^3-6a=5$ (দেখানো হলো)

(ঘ) এর সমাধান:

দেওয়া আছে, $a^2+2=3^{\frac{2}{3}}+3^{-\frac{2}{3}}$

বা, $a^2=\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^2+\left(3^{-\frac{1}{3}}\right)^2-2.3^{\frac{1}{3}}.3^{-\frac{1}{3}}$ [∵ $3^{\frac{1}{3}}.3^{-\frac{1}{3}}=3^0=1$]

বা, $a^2=\left(3^{\frac{1}{3}}-3^{-\frac{1}{3}}\right)^2$

বা, $a=3^{\frac{1}{3}}-3^{-\frac{1}{3}}$ [উভয় পক্ষকে বর্গমূল করে]

বা, $a^3=\left(3^{\frac{1}{3}}-3^{-\frac{1}{3}}\right)^3$ [উভয় পক্ষকে ঘন করে]

বা, $a^3=\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^3-\left(3^{-\frac{1}{3}}\right)^3-3.3^{\frac{1}{3}}.3^{-\frac{1}{3}}\left(3^{\frac{1}{3}}-3^{-\frac{1}{3}}\right)$

[∵ $(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$]

বা, $a^3=3-3^{-1}-3.3^0.a$ [∵ $3^{\frac{1}{3}}3^{-\frac{1}{3}}=3^0$ এবং $3^{\frac{1}{3}}-3^{-\frac{1}{3}}=a$]

বা, $a^3=3-\frac{1}{3}-3a$ বা, $3a^3=9-1-9a$

∴ $3a^3+9a=8$ [দেখানো হলো]

(ঙ) এর সমাধান:

এখানে, $a^2=b^3$ ∴ $a=b^{\frac{3}{2}}$

আবার, $a^2=b^3$ বা, $b^3=a^2$ ∴ $b=a^{\frac{2}{3}}$

এখন, বামপক্ষ $=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{3}{2}}+\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}}$

$=\frac{a^{\frac{3}{2}}}{b^{\frac{3}{2}}}+\frac{b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}}$

$=\frac{a^{\frac{3}{2}}}{a}+\frac{b^{\frac{2}{3}}}{b}$ [∵ $a=b^{\frac{3}{2}}, b=a^{\frac{2}{3}}$]

$=a^{\frac{3}{2}-1}+b^{\frac{2}{3}-1}$

$=a^{\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{3}}$ = ডানপক্ষ

$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{3}{2}}+\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{3}}$ (দেখানো হলো)

(চ) এর সমাধান:

এখানে, $b=1+3^{\frac{2}{3}}+3^{\frac{1}{3}}$

বা, $b-1=3^{\frac{2}{3}}+3^{\frac{1}{3}}$

বা, $(b-1)^3=\left(3^{\frac{2}{3}}+3^{\frac{1}{3}}\right)^3$ [উভয় পক্ষকে ঘন করে]

বা, $b^3-3b^2+3b-1=\left(3^{\frac{2}{3}}\right)^3+\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^3+3.3^{\frac{2}{3}}.3^{\frac{1}{3}}\left(3^{\frac{2}{3}}+3^{\frac{1}{3}}\right)$

[∵ $(x+y)^3=x^3+y^3+3xy(x+y)$]

বা, $b^3-3b^2+3b-1=3^2+3+3.3^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}(b-1)$.

[∵ $3^{\frac{2}{3}}+3^{\frac{1}{3}}=b-1$]

বা, $b^3-3b^2+3b-1=9+3+3.3^1(b-1)$

বা, $b^3-3b^2+3b-1=12+9b-9$

বা, $b^3-3b^2+3b-1-12-9b+9=0$

∴ $b^3-3b^2-6b-4=0$ (দেখানো হলো)

[বিঃদ্রঃ পাঠ্যবইয়ের প্রশ্নের $3^{-1/3}$ এর স্থলে $3^{1/3}$ হবে।]

(ছ) এর সমাধান:

দেওয়া আছে,

$$a+b+c=0\ \dots\dots\dots\text{(i)}$$

বামপক্ষ $=\frac{1}{x^b+x^{-c}+1}+\frac{1}{x^c+x^{-a}+1}+\frac{1}{x^a+x^{-b}+1}$

$=\frac{1}{x^b+\frac{1}{x^c}+1}+\frac{1}{x^c+x^{b+c}+1}+\frac{1}{x^a+\frac{1}{x^b}+1}$

[(i) হতে ...]

$=\frac{x^c}{1+x^c+x^{b+c}}+\frac{1}{1+x^c+x^{b+c}}+\frac{x^b}{1+x^b+x^{\dots}}$

$=\frac{x^c}{1+x^c+x^{b+c}}+\frac{1}{1+x^c+x^{b+c}}+\frac{x^b}{1+x^b+x^{\dots}}$

$$=\frac{x^c}{1+x^c+x^{b+c}}+\frac{1}{1+x^c+x^{b+c}}+\frac{x^b}{\dfrac{x^c+x^{b+c}+1}{x^c}}\quad\left[a^{-n}=\frac{1}{a^n}\right]$$

$$=\frac{x^c}{1+x^c+x^{b+c}}+\frac{1}{1+x^c+x^{b+c}}+\frac{x^{b+c}}{1+x^c+x^{b+c}}$$

$$=\frac{1+x^c+x^{b+c}}{1+x^c+x^{b+c}}$$

$= 1 =$ ডানপক্ষ

$$\therefore \frac{1}{x^b+x^{-c}+1}+\frac{1}{x^c+x^{-a}+1}+\frac{1}{x^a+x^{-b}+1}=1.$$ [দেখানো হলো]

৮। (ক) যদি $a^x = b$, $b^y = c$ এবং $c^z = 1$ হয়, তবে $xyz =$ কত?
(খ) যদি $x^a = y^b = z^c$ এবং $xyz = 1$ হয়, তবে $ab + bc + ca =$ কত?
(গ) যদি $9^x = (27)^y$ হয়, তা হলে $\frac{x}{y}$ এর মান কত?

(ক) এর সমাধান:

দেওয়া আছে, $a^x = b$

$b^y = c$

এখন $c^z = 1$

বা, $(b^y)^z = 1$ বা, $b^{yz} = 1$ বা, $(a^x)^{yz} = 1$ বা, $a^{xyz} = a^0$

$\therefore xyz = 0$ [$\because a^x = a^m$ হলে $x = m$] **(Ans.)**

(খ) এর সমাধান:

দেওয়া আছে, $x^a = y^b = z^c$ এবং $xyz = 1$

ধরি, $x^a = y^b = z^c = k$

$\therefore x = k^{\frac{1}{a}},\quad y = k^{\frac{1}{b}},\quad c = k^{\frac{1}{c}}$

এখন, $xyz = 1$

বা, $k^{\frac{1}{a}} \times k^{\frac{1}{b}} \times k^{\frac{1}{c}} = 1$

বা, $k^{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} = k^0$ $\quad[\because a^x \times a^y \times a^z = a^{x+y+z}]$

বা, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} = 0$ [$\because a^x = a^m$ হলে $x = m$]

বা, $\frac{ab+bc+ca}{abc} = 0$ $\quad[\because a^m = a^n$ হলে, $m = n]$

$\therefore ab + bc + ca = 0$ **(Ans.)**

(গ) এর সমাধান:

দেওয়া আছে,

$9^x = (27)^y$

বা, $(3^2)^x = (3^3)^y$

বা, $3^{2x} = 3^{3y}$

বা, $2x = 3y$

$\therefore \frac{x}{y} = \frac{3}{2}$ **(Ans.)**

৯। সমাধান কর:
(ক) $3^{2x+2} + 27^{x+1} = 36$
(খ) $5^x + 3^y = 8$
$5^{x-1} + 3^{y-1} = 2$
(গ) $4^{3y-2} = 16^{x+y}$
$3^{x+2y} = 9^{2x+1}$
(ঘ) $2^{2x+1}.2^{3y+1} = 8$
$2^{x+2}.2^{y+2} = 16$

(ক) এর সমাধান:

$3^{2x+2} + 27^{x+1} = 36$

বা, $(3^{2x}.3^2) + (3^3)^{x+1} = 36$ [$\because a^{m+n} = a^m.a^n$]

বা, $9.3^{2x} + (3^3)^x.3^3 = 36$

বা, $9.3^{2x} + 27.3^{3x} = 36$

বা, $27.(3^x)^3 + 9.(3^x)^2 - 36 = 0$

বা, $27a^3 + 9a^2 - 36 = 0$ [$3^x = a$ ধরে]

বা, $3a^3 + a^2 - 4 = 0$ [উভয়পক্ষকে 9 দ্বারা ভাগ করে]

বা, $3a^3 - 3a^2 + 4a^2 - 4a + 4a - 4 = 0$

বা, $3a^2(a-1) + 4a(a-1) + 4(a-1) = 0$

বা, $(a-1)(3a^2 + 4a + 4) = 0$

বা, $(a-1)(3a^2 + 4a + 4) = 0$ অথবা

$\therefore a - 1 = 0$

বা, $a = 1$

বা, $3^x = 3^0$

$\therefore x = 0$

অথবা, $3a^2 + 4a + 4 = 0$

বা, $a = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4.3.4}}{2.3}$

বা, $a = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 48}}{6}$

বা $a = \frac{-4 \pm \sqrt{-32}}{6}$

এখানে, $\sqrt{-32}$ অবাস্তব। সুতরাং ইহা গ্রহণযোগ্য নয়।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = 0$

(খ) এর সমাধান:

দেওয়া আছে,

$5^x + 3^y = 8$ ……… (i)

$5^{x-1} + 3^{y-1} = 2$ ……… (ii)

(ii) নং হতে পাই,

$\frac{5^x}{5} + \frac{3^y}{3} = 2$

বা, $\frac{3.5^x + 5.3^y}{15} = 2$

বা, $3.5^x + 5.3^y = 30$ ……… (iii)

(i) × 3 − (iii)

$3.3^y - 5.3^y = 24 - 30$

বা, $-2.3^y = -6$

বা, $3^y = 3^1$

$\therefore y = 1$ [$\because a^m = a^n$ হলে, $m = n$]

$\therefore$ (i) নং হতে পাই, $5^x + 3^1 = 8$

বা, $5^x = 5$

$\therefore x = 1$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $(x, y) = (1,1)$

বি.দ্র.: পাঠ্যবইয়ের প্রশ্নে $5^x + 3^y = 9$ …

(গ) এর সমাধান:

দেওয়া আছে,

$4^{3y-2} = 16^{x+y}$ ……… (i)

$3^{x+2y} = 9^{2x+1}$ ……… (ii)

(i) নং হতে পাই,

$4^{3y-2} = (4^2)^{x+y}$

বা, $(4)^{3y-2} = (4)^{2x+2y}$

বা, $3y - 2 = 2x + 2y$

$\therefore 2x - y = -2 \ldots\ldots\ldots$ (iii)

(ii) নং হতে পাই,

$3^{x+2y} = (3^2)^{2x+1}$

বা, $(3)^{x+2y} = (3)^{4x+2}$

বা, $x + 2y = 4x + 2$

$\therefore 3x - 2y = -2 \ldots\ldots\ldots$ (iv)

(iii) $\times$ 2 – (iv)

$4x - 2y - 3x + 2y = -4 + 2$

বা, $x = -2$

$\therefore x = -2$

(iii) নং হতে পাই,

$2(-2) - y = -2$

বা, $-4 - y = -2$

$\therefore y = -2$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $(x, y) = (-2, -2)$

(ঘ) এর সমাধানঃ

দেওয়া আছে,

$2^{2x+1}.2^{3y+1} = 8 \ldots\ldots\ldots$ (i)

$2^{x+2}.2^{y+2} = 16 \ldots\ldots\ldots$ (ii)

(i) নং হতে পাই,

$2^{2x+1+3y+1} = (2)^3$

বা, $2^{2x+3y+2} = 2^3$ [$\because a^m = a^n$ হলে, $m = n$]

বা, $2x + 3y + 2 = 3$

$\therefore 2x + 3y = 1 \ldots\ldots\ldots$ (iii)

(ii) নং হতে পাই,

$2^{x+2+y+2} = 2^4$

বা, $x + y + 4 = 4$

বা, $x + y = 0$

$\therefore x = -y \ldots\ldots\ldots$ (iv)

$\therefore$ (iii) নং হতে পাই,

$2(-y) + 3y = 1$

বা, $-2y + 3y = 1 \therefore y = 1$

$\therefore$ (iv) নং হতে পাই,

$x = -(1)$

বা, $x = -1$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $(x, y) = (-1, 1)$.

অনুশীলনী-৯.২

প্রাথমিক আলোচনা

Logos এবং *arithmas* নামক দুটি গ্রিক শব্দ হতে লগারিদম শব্দটির উৎপত্তি। *Logos* অর্থ আলোচনা এবং *arithmas* অর্থ সংখ্যা অর্থাৎ বিশেষ সংখ্যা নিয়ে আলোচনা অনেক সূক্ষ্ম ও জটিল হিসেব সহজে সমাধানের জন্য সূচক ও লগারিদম ব্যবহার করা হয়।

লগারিদম (*Logarithm*): যদি $a^x = b$ হয়, যেখানে $a > 0, b > 0$ এবং $a \neq 1$. তবে x কে বলা হয় b এর a ভিত্তিক লগারিদম, অর্থাৎ $x = \log_a b$ অতএব $a^x = b \Rightarrow x = \log_a b$	$3^4 = 81$ হলে লগের সংজ্ঞানুসারে $\log_3 81 = 4$
প্রতিলগ (*Anti-logarithm*): যদি $x = \log_a b \Rightarrow a^x = b$ হবে। এক্ষেত্রে b সংখ্যাটিকে ভিত্তি a এর সাপেক্ষে x এর প্রতিলগ (*anti-logarithm*) বলে এবং আমরা লিখি $b = anti \log_a x$	$\log_2 8 = 3$ হলে সংজ্ঞানুসারে $2^3 = 8$
i. উপরের সংজ্ঞায় $a > 0$ এবং $a \neq 1$ ধরা হয়েছে লগারিদমের বর্ণনায় সবসময় 1থেকে ভিন্ন কোনো ধনাত্মক সংখ্যাকে ভিত্তি হিসেবে ধরা হবে। সেজন্য ভিত্তি a সম্পর্কে কোনো কিছু উল্লেখ না থাকলে $a > 0$ এবং $a \neq 1$ বিবেচ্য। ii. $a > 0$ হওয়ায় সকল $x \in R$ এর জন্য $a^x > 0$ অর্থাৎ y এর মান ঋণাত্মক হতে পারে না। সুতরাং $y \leq 0$ হলে y এর a ভিত্তিক কোনো লগারিদম নেই। অর্থাৎ শুধু ধনাত্মক রাশিরই লগারিদম বিবেচ্য।	$y = 3^x, y = 4^x, y = a^x$ ইত্যাদি ক্ষেত্রে x এর যেকোনো একটি বাস্তব মানের জন্য y এর কেবলমাত্র একটি ধনাত্মক মান পাওয়া যায়। i. x ধনাত্মক বা ঋণাত্মক যাই হোক না কেন a^x সর্বদা ধনাত্মক। ii. তাই শুধু সকল ধনাত্মক সংখ্যার একটি অনন্য লগের মান আছে যা বাস্তব। iii. শূন্য (0) বা ঋণাত্মক সংখ্যার লগের বাস্তব মান নেই।

লগারিদমের সূত্রাবলী:

[সব ক্ষেত্রে a, M, N > 0; a ≠ 1]

$\log_a(a^x) = x$	$a^{\log_a b} = b$	$\log_a 1 = 0$ [কারণ $a^0 = 1$ হলে লগের সংজ্ঞানুসারে $\log_a 1 = 0$]	$\log_a a = 1$
$\log_a(M \times N) = \log_a M + \log_a N$	$\log_a\left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$	$\log_a(M)^N = N\log_a M$	$\log_a M = \log_b M \times \log_a b$
$\log_a(P + Q) \neq \log_a P + \log_a Q \therefore \log_a(PQ) \neq \log_a P.\log_a Q$		$\log_a(P - Q) \neq \log_a P - \log_a Q \therefore \log_a\left(\frac{P}{Q}\right) \neq \frac{\log_a P}{\log_a Q}$	

10 ভিত্তিক লগারিদমকে সাধারণ লগারিদম (*common logarithm*) এবং e ভিত্তিক লগারিদমকে স্বাভাবিক লগারিদম (*Natural logarithm*) বলা হয় ব্যবহারিক ক্ষেত্রে সাধারণত 10 ভিত্তিক লগারিদম ব্যবহার করা হয়।

জেনে রাখা ভালো:

(i) যদি $x > 0, y > 0$ এবং $a \neq 1$ হয় তবে $x = y$ যদি এবং কেবল যদি $\log_a x = \log_a y$

উদাহরণ: $\log_{10} 100 = \log_{10} a$ হলে $a = 100$

কারণ $\log_{10} 100 = 2 \therefore \log_{10} a = 2 \therefore a = 10^2 = 100$

(ii) যদি $a > 1$ এবং $x > 1$ হয় তবে $\log_a x > 0$

উদাহরণ: $\log_5 25 = \log_5 5^2 = 2\log_5 5 = 2 > 0$

(iii) যদি $0 < a < 1$ এবং $0 < x < 1$হয় তবে $\log_a x > 0$

উদাহরণ: $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right) = 2 > 0$

(iv) যদি $a > 1$ এবং $0 < x < 1$ হয়, তবে $\log_a x < 0$

উদাহরণ: $\log_2 \frac{1}{4} = \log_2 \frac{1}{2^2}$

$= \log_2 2^{-2} = (-2)\log_2 2 = -2 < 0$

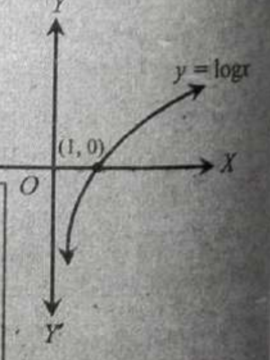
$y = \log x$ ফাংশনটি-

(i) $x = 1$ বিন্দুতে $\log x \log 1 = 0$

(ii) (0, 1) ব্যবধিতে $\log x < 0$

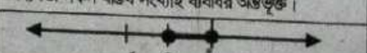
(iii) $(1, \infty)$ ব্যবধিতে $\log x > 0$

(vi) $(-\infty, 0]$ ব্যবধিতে $\log x$ এর বাস্তব মান পাওয়া যায় না



বন্ধনীর ব্যবহার:

কোনো ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জকে সাধারণত ব্যবধি আকারে প্রকাশ করা হয়। ব্যবধিতে প্রথম বন্ধনী '( )' এবং তৃতীয় বন্ধনী '[ ]' কিংবা উভয়টি যুগপৎভাবে ব্যবহার করা হয়। এক্ষেত্রে তৃতীয় বন্ধনী দ্বারা অন্তর্ভূক্ত এবং প্রথম বন্ধনী দ্বারা অন্তর্ভূক্ত নয় এমন সংখ্যা নির্দেশ করে।

প্রথম বন্ধনী	তৃতীয় বন্ধনী	প্রথম ও তৃতীয় বন্ধনী
১ম বন্ধনী দ্বারা '( )' কোনো ব্যবধি আবদ্ধ হলে শুধু ব্যবধির ১ম ও শেষ অর্থাৎ দুই প্রান্তের সংখ্যাটি ব্যবধির অন্তর্ভূক্ত নয়।	সুতরাং (ক) ৩য় বন্ধনী [ ] দ্বারা কোনো ব্যবধি আবদ্ধ হলে ব্যবধির সবগুলো সংখ্যাই এর অন্তর্ভূক্ত।	(i) ১ম বন্ধনীর চিহ্ন দ্বারা আবদ্ধ সংখ্যাটি ব্যবধির অন্তর্ভূক্ত নয়। (ii) ৩য় বন্ধনীর চিহ্ন দ্বারা আবদ্ধ সংখ্যাটি ব্যবধির অন্তর্ভূক্ত।
(i) (0, 1) এর অর্থ হলো ব্যবধিতে ১ম ও শেষ সংখ্যা অর্থাৎ 0 ও 1 বিন্দু ছাড়া সকল বিন্দু ব্যবধির অন্তর্ভূক্ত।	(i) [0, 1] এর অর্থ হলো ব্যবধিতে 0 ও 1 সহ এর মধ্যবর্তী সকল বাস্তব সংখ্যাই ব্যবধির অন্তর্ভূক্ত।	[0, 1) ব্যবধিতে 0 অন্তর্ভূক্ত কিন্তু 1 নয়।
 −1 0 1	 −1 0 1	 −1 0 1

অসীম নির্দেশক প্রতীক '∞' সর্বদা প্রথম বন্ধনী দ্বারা আবদ্ধ হয়, কখনোই '∞' প্রতীককে তৃতীয় বন্ধনী দ্বারা আবদ্ধ করা যাবে না। প্রথম বন্ধনীকে খোলা ব্যবধি এবং তৃতীয় বন্ধনীকে বদ্ধ ব্যবধি বলা হয়।

অনুশীলনী-৯.২ (প্রাথমিক আলোচনা)

অসংজ্ঞায়িত রূপ:

(i) কোনো ঋণাত্মক সংখ্যার বর্গমূলের বাস্তব মান পাওয়া যায় না। যেমন: $\sqrt{-2}, \sqrt{-3}, \sqrt{-5}, \sqrt{-9}, \sqrt{-16}$ ইত্যাদির বাস্তব মান পাওয়া যায় না। সুতরাং বর্গমূলের ভেতরে অবস্থানকারী সংখ্যা বা রাশিকে অবশ্যই অঋণাত্মক হতে হবে।

(ii) কোনো সংখ্যা বা রাশিকে শূন্য দ্বারা ভাগ করলে বাস্তব মান পাওয়া যায় না। যেমন: $\frac{1}{0} = \infty, \frac{2}{0} = \infty, \frac{x}{0} = \infty, \frac{-1}{0} = \infty, \frac{2x+3}{0} = \infty$

ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয়:

যেহেতু প্রত্যেক ফাংশন একটি অন্বয় সুতরাং ফাংশনের ডোমেন এবং রেঞ্জ বলতে অন্বয়ের ডোমেন এবং রেঞ্জকেই বোঝাবে। অতএব, $y = f(x)$ ফাংশনের (x, y) ক্রমজোড়গুলোর x এর মানকে ডোমেন এবং y এর মানকে রেঞ্জ বলে। সহজভাবে বলতে, $y = f(x)$ ফাংশনটি

(i) x এর যে সকল বাস্তব মানের জন্য সংজ্ঞায়িত তাই ফাংশনের ডোমেন।

(ii) আর x এর সকল মানের জন্য y বা $f(x)$ এর যে বাস্তব মান পাওয়া যায় তাই ফাংশনের রেঞ্জ।

বহুনির্বাচনীর জন্য মনে রাখা উচিৎ:

$f(x) = x$	i. ফাংশনটি x এর সকল বাস্তবের জন্য সংজ্ঞায়িত ii. x এর সকল বাস্তব মানের জন্য $f(x)$ এর বাস্তব মান পাওয়া যায়	i. ফাংশনের ডোমেন = R ii. ফাংশনের রেঞ্জ = R
$f(x) = x^2$	i. ফাংশনটি x এর সকল বাস্তব মানের জন্য সংজ্ঞায়িত ii. এর সকল বাস্তব মানের (ধনাত্মক, ঋণাত্মক) জন্য $f(x)$ এর মান অঋণাত্মক সংখ্যা অর্থাৎ কখনোই শূন্য থেকে ছোট হবে না।	i. ফাংশনের ডোমেন = R ii. ফাংশনের রেঞ্জ = $[0, \infty)$
$f(x) = \sqrt{x}$	i. ঋণাত্মক সংখ্যার বর্গমূলের বাস্তব মান পাওয়া যায় না। অতএব, $f(x) = \sqrt{x}$ ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত হবে যদি $x \geq 0$ হয় ii. ফাংশনের ডোমেন অর্থাৎ $x \in [0, \infty)$ এর জন্য $f(x)$ অর্থাৎ $\sqrt{x}$ এর মান কখনোই ঋণাত্মক হবে না। অর্থাৎ $f(x) \geq 0$।	i. ফাংশনের ডোমেন = $[0, \infty)$ ii. ফাংশনের রেঞ্জ = $[0, \infty)$
$y = a^x, 2^x, 10^x, e^x$	i. সূচকীয় ফাংশন সাধারণত x এর সকল বাস্তব মানের জন্য শর্ত ii. x এর মান ধনাত্মক বা ঋণাত্মক যাই হোকনা কেন $y > 0$	i. ফাংশনের ডোমেন R বা $(-\infty, \infty)$ ii. ফাংশনের রেঞ্জ $(0, \infty)$

লেখচিত্র অঙ্কন: সূচকীয় ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কনে নিম্নোক্ত বিষয়গুলো মনে রাখা জরুরি-

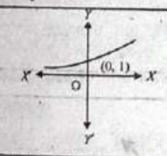
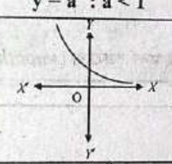
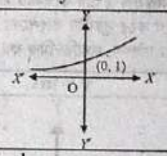
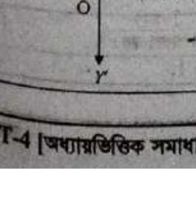
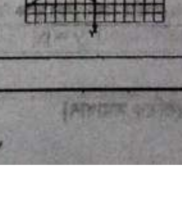
(i) ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ অর্থাৎ বিস্তৃতির দিকে লক্ষ করতে হবে।

(ii) $x = 0$ বসিয়ে y অক্ষের ছেদবিন্দু কিংবা $y = 0$ বসিয়ে x অক্ষের ছেদবিন্দু নির্ণয়ের চেষ্টা করতে হবে।

(iii) লেখের উপরস্থ কয়েকটি ডোমেনের অন্তর্ভুক্ত বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করতে হবে।

(iv) x এর মান ক্রমাগত হ্রাস বা বৃদ্ধির (অর্থাৎ $x \to \infty, x \to -\infty$) জন্য y এর মান কিরূপে পরিবর্তিত হয় তা নির্ণয় করতে হবে।

(v) অতঃপর বিন্দুগুলো যোগ করে সূচকীয় ফাংশনের লেখ পাওয়া যায়। এ আলোকে নিম্নোক্ত লেখচিত্রের উপর দৃষ্টি দেই।

$y = a^x : a > 1$	$y = a^x : a < 1$	$y = 2^x$
		
(i) $x = 0$ হলে $y = a^0 = 1$ (ii) x এর ঋণাত্মক মানের জন্য x এর মান ক্রমাগত বৃদ্ধির সাথে সাথে y এর মান ক্রমাগত হ্রাস পায়। অর্থাৎ, $x \to -\infty$ হলে $y \to 0$ যেমন: $2^{-1} = \frac{1}{2} = 0.5$, $2^{-2} = \frac{1}{4} = 0.25$, $2^{-3} = \frac{1}{8} = 0.125$ (iii) x এর ধনাত্মক মানের জন্য x এর মান বৃদ্ধির সাথে সাথে y এর মান ক্রমান্বয়ে বৃদ্ধি পায়। অর্থাৎ, $x \to \infty$ হলে $y \to \infty$ যেমন: $2^1 = 2, 2^2 = 4, 2^3 = 8$ অর্থাৎ x এর ধনাত্মক মান। $\therefore x \in (-\infty, \infty)$ এবং $y \in (0, \infty)$ যেহেতু x এর মান হলো ডোমেন এবং y এর মান হলো রেঞ্জ। $\therefore$ ডোমেন $= (-\infty, \infty)$ এবং রেঞ্জ $= (0, \infty)$	(i) $x = 0$ হলে $y = a^0 = 1$ (ii) x এর ধনাত্মক মানের জন্য x এর মান বৃদ্ধির সাথে সাথে y এর মান ক্রমান্বয়ে হ্রাস পায়। অর্থাৎ, $x \to \infty$ হলে $y \to 0$ যেমন: $(0.5)^2 = 0.25$, $(0.5)^3 = 0.125$ অর্থাৎ $a < 1$ হলে $y = ax$ এর ক্ষেত্রে x বৃদ্ধি পেলে y এর মান হ্রাস পায়। (iii) x এর ঋণাত্মক মানের জন্য x এর মান ক্রমাগত বৃদ্ধির সাথে সাথে y এর মান ক্রমাগত বৃদ্ধি পায়। অর্থাৎ, $x \to -\infty$ হলে $y \to \infty$ যেমন: $(0.5)^{-1} = 2$, $(0.5)^{-2} = 4$, $(0.5)^{-3} = 8$ $\therefore x \in (-\infty, \infty)$ এবং $y \in (0, \infty)$ $\therefore$ ডোমেন $= (-\infty, \infty)$ এবং রেঞ্জ $= (0, \infty)$	(i) $x = 0$ হলে $y = 2^0 = 1$ (ii) x এর ঋণাত্মক মানের জন্য x এর মান ক্রমাগত বৃদ্ধির সাথে সাথে y এর মান ক্রমাগত হ্রাস পায়। অর্থাৎ, $x \to -\infty$ হলে $y \to 0$ যেমন: $2^{-1} = 0, 2^{-2} = 0.25, 2^{-3} = 0.125$ ইত্যাদি (iii) x এর ধনাত্মক মানের জন্য x এর মান বৃদ্ধির সাথে সাথে y এর মান ক্রমান্বয়ে বৃদ্ধি পায়। অর্থাৎ, $x \to \infty$ হলে $y \to \infty$ যেমন: $2^1 = 2, 2^2 = 4, 2^3 = 8, 2^4 = 16$ $\therefore x \in (-\infty, \infty)$ এবং $y \in (0, \infty)$ $\therefore$ ডোমেন $= (-\infty, \infty)$ এবং রেঞ্জ $= (0, \infty)$
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	$f(x) = e^x$	সূচকীয় ফাংশনে বিপরীত ফাংশন
		

(i) $x = 0$ হলে $y = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$

(ii) $x \to -\infty$ হলে $y \to \infty$

যথা: $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2, \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4, \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$ অর্থাৎ x এর মান ক্রমে হ্রাস পেলে y এর মান বৃদ্ধি পায়।

(iii) $x \to \infty$ হলে $y \to 0$

যথা: $\left(\frac{1}{2}\right)^1 = 0.5, \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0.25, \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0.125$ অর্থাৎ x এর মান বৃদ্ধি পেলে y এর হ্রাস পায়।

$\therefore x \in (-\infty, \infty)$ এবং $y \in (0, \infty)$

(i) $x = 0$ হলে $y = e^0 = 1$

(ii) $x \to -\infty$ হলে $y \to 0$

যথা: $e^{-1} = 1.718, e^{-2} = 0.718, e^{-3} = 0.281$ (calculator ব্যবহার করে)

অর্থাৎ, x এর মান হ্রাস পেলে e^x এর মানও হ্রাস পায়।

(iii) $x \to \infty$ হলে $y \to \infty$

যথা: $e^1 = 2.718, e^2 = 7.389, e^3 = 20.08$ অর্থাৎ, x এর মান বৃদ্ধি পেলে e^x এর মানও বৃদ্ধি পায়।

$\therefore x \in (-\infty, \infty)$ এবং $y \in (0, \infty)$

$\therefore$ ডোমেন $= (-\infty, \infty)$ এবং রেঞ্জ $= (0, \infty)$

$y = f(x) = a^x$ সূচকীয় হলে $\therefore y = f(x) \Rightarrow x = f^{-1}(y)$

আবার, $y = a^x$

$\Rightarrow x = \log_a y$

$\Rightarrow f^{-1}(y) = \log_a y$

$\therefore f^{-1}(x) = \log_a x$

$\therefore f(x) = a^x$ ফাংশনের বিপরীত ফাংশন হলো $f^{-1}(x) = \log_a x$

$y = 2^x$ ফাংশনের বিপরীত ফাংশন হলো $y = \log_2 x$

মূল ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ যথাক্রমে বিপরীত ফাংশনের রেঞ্জ ও ডোমেন অর্থাৎ মূল ফাংশনের রেঞ্জ = বিপরীত ফাংশনের ডোমেন। নিম্নে উদাহরণের সাহায্যে লক্ষ করি।

উদাহরণ: $y = 2^x$ এর বিপরীত ফাংশন $y = \log_2 x$ এবং $y = \log_2 x$ ফাংশনের ডোমেন $(0, \infty)$

$\therefore y = 2^x$ ফাংশনের রেঞ্জ $= (0, \infty)$।

(i) সূচকীয় ফাংশন, লগারিদমিক ফাংশন ও বিস্তার সমীকরণের লেখ সর্বদাই মসৃণ বক্ররেখা (*smooth curve*)
(ii) সূচক ফাংশন সর্বদা এক-এক ফাংশন।

লগারিদমিক ফাংশন:

সংজ্ঞা: লগারিদমিক ফাংশন $f(x) = \log_a x$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত যেখানে $a > 0, a \neq 1$.

ডোমেন ও রেঞ্জ: যেহেতু লগারিদম শুধুমাত্র ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার জন্য সংজ্ঞায়িত। তাই লগারিদমিক ফাংশনের ($\log_2 x, \ln x, \log_{10}, \log_a x$) ডোমেন সাধারণত শূন্য থেকে বড় সকল ধনাত্মক সংখ্যা অর্থাৎ $(0, \infty)$

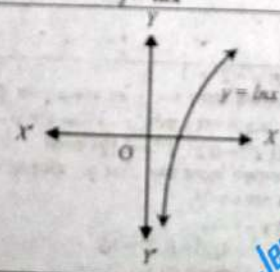
x এর সকল ধনাত্মক মানের জন্য লগারিদমিক ফাংশনের মান ধনাত্মক, ঋণাত্মক কিংবা শূন্য হতে পারে। তাই রেঞ্জ $= (-\infty, \infty)$

লেখচিত্র অঙ্কন: লগারিদমিক ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কনে যা জরুরি।

(i) ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ অর্থাৎ বিস্তৃতির দিকে লক্ষ করতে হবে।
(ii) $x = 0$ এবং $y = 0$ বসিয়ে অক্ষদ্বয়ের ছেদবিন্দু নির্ণয়ের চেষ্টা করতে হবে। (এক্ষেত্রে অধিকাংশ সময় শুধু y অক্ষের ছেদবিন্দু পাওয়া যাবে)
(iii) x এর মান ক্রমাগত হ্রাস বা বৃদ্ধির সাথে সাথে y এর মান কিভাবে পরিবর্তিত হয় তা নির্ণয় করতে হবে।
(iv) ফাংশনের ডোমেনের অন্তর্ভুক্ত x এর কয়েকটি মানের জন্য y এর মান নির্ণয় করি।
(v) অতঃপর বিন্দুগুলো যোগ করে সূচকীয় ফাংশনের লেখ পাওয়া যায়।

মনে রাখতে হবে যে, সূচকীয় ফাংশন, লগারিদমিক ফাংশন ও বিস্তার সমীকরণের লেখ সর্বদাই মসৃণ বক্ররেখা (*smooth curve*)।

$y = \ln x$



(i) $x = 1$ হলে $y = \ln 1 = 0$

(ii) $x \to 0$ হলে $y \to -\infty$

যথা: $\ln(0.5) = -0.69, \ln(0.4) = -0.91, \ln(0.3) = -1.20$ অর্থাৎ x এর মান 1 থেকে ক্রমান্বয়ে হ্রাস পেলে y এর মানও হ্রাস পায়।

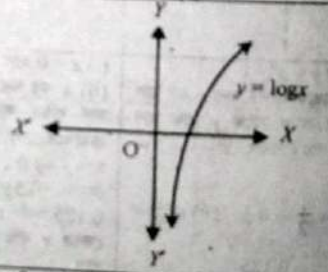
(iii) $x > 1$ বা, $x \to \infty$ হলে $y \to \infty$

যথা: $\ln 1.1 = 0.09, \ln 2 = 0.69, \ln 3 = 1.09$ অর্থাৎ x এর মান 1 থেকে ক্রমান্বয়ে বৃদ্ধি পেলে y এর মানও বৃদ্ধি পায়।

$\therefore x \in (0, \infty)$ এবং $y \in (-\infty, \infty)$

$\therefore$ ডোমেন $= (0, \infty)$ এবং রেঞ্জ $= (-\infty, \infty)$

$y = \log_{10} x$



(i) $x = 1$ হলে $y = 0$

(ii) $x \to 0$ হলে $y \to -\infty$

যথা: $\log(0.5) = -0.30, \log(0.4) = -0.39, \log(0.3) = -0.52$ অর্থাৎ x এর মান 1 থেকে ক্রমান্বয়ে হ্রাস পেলে y এর মানও হ্রাস পায়।

(iii) $x > 1$ বা, $x \to \infty$ হলে $y \to \infty$

যথা: $\log(1.1) = 0.04, \log(1.5) = 0.17, \log(2) = 0.30, \log(3) = 0.47$ অর্থাৎ x এর মান 1 থেকে ক্রমান্বয়ে বৃদ্ধি পেলে $\log x$ এর মানও বৃদ্ধি পায়।

$\therefore x \in (0, \infty)$ এবং $y \in (-\infty, \infty)$

$\therefore$ ডোমেন $= (0, \infty)$ এবং রেঞ্জ $= (-\infty, \infty)$

পরমমান (*Absolute Value*):

যেকোনো বাস্তব সংখ্যা x এর মান শূন্য, ধনাত্মক বা ঋণাত্মক কিন্তু x এর পরমমান ($|x|$) সবসময়ই শূন্য বা শূন্য থেকে বড় ধনাত্মক সংখ্যা।

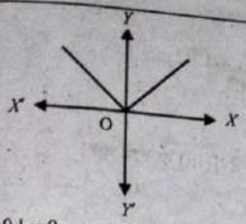
যদি $x \in R$ হয়, তবে $y = f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{যখন } x \geq 0 \\ -x & \text{যখন } x < 0 \end{cases}$ কে পরমমান ফাংশন বলা হয়।

$\therefore$ ডোমেন $= R$ এবং রেঞ্জ $R_f = [0, \infty)$

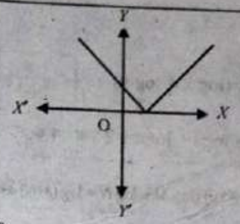
লেখ চিত্র: পরমমান ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন তুলনা মূলক সহজ। ফাংশনের কয়েকটি ক্রমজোড় (x, y) নির্ণয় করে বিন্দুগুলো যোগ করলেই ফাংশনের লেখ পাওয়া যায়।

$y = \lvert x \rvert$	$y = \lvert x - 1 \rvert$

PART-4 [অধ্যায়ভিত্তিক সমাধান]



(i) $x = 0$ হলে $y = |0| = 0$
(ii) $x \to \infty$ হলে $y \to \infty$
যথা: $|1| = 1, |2| = 2, |3| = 3, |4| = 4$
(iii) $x \to -\infty$ হলে $y \to \infty$
যথা: $|-1| = 1, |-2| = 2, |-3| = 3$
$\therefore x \in (-\infty, \infty)$ এবং $y \in [0, \infty)$
$\therefore$ ডোম $= (-\infty, \infty)$ এবং রেঞ্জ $= [0, \infty)$



(i) $x = 1$ হলে $y = 0$
(ii) $x \to \infty$ হলে $y \to \infty$
(iii) $x \to -\infty$ হলে $y \to \infty$
$\therefore x \in (-\infty, \infty)$ এবং $y \in [0, \infty)$
$\therefore$ ডোম $= (-\infty, \infty)$ এবং রেঞ্জ $= [0, \infty)$

পরমমান ফাংশন এক এক নয় বলে এর বিপরীত ফাংশন পাওয়া যায় না।

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনমূলক কাজের সমাধান

৯ কাজ: [Ref: পাঠ্যবই পৃষ্ঠা: ১৯৩]

১। যদি $\dfrac{\log a}{b-c} = \dfrac{\log b}{c-a} = \dfrac{\log c}{a-b}$ হয়, তাহলে $a^a.b^b.c^c$ এর মান নির্ণয় কর।
২। যদি a, b, c পরপর তিনটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\log(1 + ac) = 2\log b$.
৩। যদি $a^2 + b^2 = 7ab$ হয়, তবে দেখাও যে, $\log\left(\dfrac{a+b}{3}\right) = \dfrac{1}{2}\log(ab) = \dfrac{1}{2}(\log a + \log b)$.
৪। যদি $\log\left(\dfrac{x+y}{3}\right) = \dfrac{1}{2}(\log x + \log y)$ তবে দেখাও যে, $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = 7$.
৫। যদি $x = 1 + \log_a bc, y = 1 + \log_b ca$ এবং $z = 1 + \log_c ab$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $xyz = xy + yz + zx$.
৬। (ক) যদি $2\log_8 A = p, 2\log_2 2A = q$ এবং $q - p = 4$ হয়, তবে A এর মান নির্ণয় কর।
(খ) যদি $\log x^y = 6$ এবং $\log 14x^{8y} = 3$ হয়, তবে x এর মান নির্ণয় কর।

(১) এর সমাধান:

ধরি, $\dfrac{\log a}{b-c} = \dfrac{\log b}{c-a} = \dfrac{\log c}{a-b} = m$

$\therefore \log a = m(b-c)$
বা, $a\log a = ma(b-c)$; [উভয়পক্ষকে a দ্বারা গুণ করে]
$\therefore \log a^a = ma(b-c)$ ……… (i) [$\because \log(M)^N = N\log M$]
এখন, $\log b = m(c-a)$
বা, $b\log b = mb(c-a)$; [উভয়পক্ষকে b দ্বারা গুণ করে]
$\therefore \log b^b = mb(c-a)$ ……… (ii)
এবং $\log c = m(a-b)$
বা, $c\log c = mc(a-b)$; [উভয়পক্ষকে c দ্বারা গুণ করে]
$\therefore \log c^c = mc(a-b)$ ……… (iii)
এখন, (i) + (ii) + (iii) যোগ করে পাই,
$\log a^a + \log b^b + \log c^c = m(ab - ac + bc - ab + ac - bc)$
বা, $\log(a^ab^bc^c) = 0$ [$\because \log(M \times N) = \log M + \log N$]
বা, $\log(a^ab^bc^c) = \log 1$
$\therefore a^ab^bc^c = 1$ **(Ans.)**

(২) এর সমাধান:

a, b, c পরপর তিনটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা।
ধরি, $a < b < c$ তাহলে b এর মান a থেকে 1 বেশি এবং c থেকে 1 কম
$\therefore a = b - 1$ এবং $c = b + 1$
$\dfrac{a}{b-1} = 1$ এবং $\dfrac{b+1}{c} = 1$
$\therefore \dfrac{a}{b-1} = \dfrac{b+1}{c}$, $\left[\because \dfrac{a}{b-1} = \dfrac{a}{a} = \dfrac{b+1}{c} = \dfrac{c}{c} = 1\right]$
বা, $ac = (b+1)(b-1)$
বা, $ac = b^2 - 1$
বা, $1 + ac = b^2$
বা, $\log(1 + ac) = \log(b^2)$
বা, $\log(ac + 1) = 2\log b$ [$\because \log(M)^N = N\log M$]

(৩) এর সমাধান:

দেওয়া আছে, $a^2 + b^2 = 7ab$
বা, $a^2 + b^2 + 2ab = 7ab + 2ab$ [উভয়পক্ষে $2ab$ যোগ করে]
বা, $(a+b)^2 = 9ab$
বা, $\dfrac{(a+b)^2}{9} = ab$
বা, $\left(\dfrac{a+b}{3}\right)^2 = ab$
বা, $\log\left(\dfrac{a+b}{3}\right)^2 = \log(ab)$
বা, $2\log\left(\dfrac{a+b}{3}\right) = \log(ab)$ [$\because \log a^b = b\log a$]
$\therefore \log\left(\dfrac{a+b}{3}\right) = \dfrac{1}{2}\log(ab) = \dfrac{1}{2}(\log a + \log b)$
[$\because \log(M \times N) = \log M + \log N$]
$\therefore \log\left(\dfrac{a+b}{3}\right) = \dfrac{1}{2}\log(ab) = \dfrac{1}{2}(\log a + \log b)$ (দেখানো হলো)

(৪) এর সমাধান:

দেওয়া আছে,

$\log\left(\frac{x+y}{3}\right) = \frac{1}{2}(\log x + \log y)$

বা, $2\log\left(\frac{x+y}{3}\right) = \log x + \log y$ [2 দ্বারা গুণ করে]

বা, $\log\left(\frac{x+y}{3}\right)^2 = \log(xy)$ [$\log M + \log N = \log(MN)$ এবং $\log a^b = b\log a$]

বা, $\left(\frac{x+y}{3}\right)^2 = xy$

বা, $\frac{(x+y)^2}{9} = xy$

বা, $x^2 + y^2 + 2xy = 9xy$

বা, $x^2 + y^2 = 9xy - 2xy$

বা, $x^2 + y^2 = 7xy$

বা, $\frac{x^2+y^2}{xy} = 7$ [উভয়পক্ষকে xy দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\frac{x^2}{xy} + \frac{y^2}{xy} = 7$

$\therefore \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 7$ (দেখানো হলো)

(৫) এর সমাধান:

দেওয়া আছে, $x = 1 + \log_a bc$

বা, $x = \log_a a + \log_a bc$ [$\because \log_a a = 1$]

বা, $x = \log_a abc$ [$\because \log M + \log N = \log(MN)$]

বা, $a^x = abc$ [$\because x = \log_a b$ হলে, $a^x = b$]

$\therefore a = (abc)^{\frac{1}{x}}$ ... ... (i)

অনুরূপভাবে, $a = (abc)^{\frac{1}{y}}$ ... ... (ii)

এবং, $c = (abc)^{\frac{1}{z}}$ ... ... (iii)

(i) × (ii) × (iii) থেকে পাই,

$abc = (abc)^{\frac{1}{x}}.(abc)^{\frac{1}{y}}.(abc)^{\frac{1}{z}}$

বা, $(abc)^1 = (abc)^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$

বা, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ [$\because a^x = a^m$ হলে $x = m$]

বা, $\frac{yz + zx + xy}{xyz} = 1$

$\therefore xyz = xy + yz + zx$ (প্রমাণিত)

(৬) ক -এর সমাধান:

দেওয়া আছে,

$2\log_8 A = p$

বা, $\log_8 A^2 = p$ [$\because \log a^b = b \log a$]

বা, $A^2 = 8^p$ [$x = \log_a b$ হলে, $a^x = b$]

$\therefore A^2 = 2^{3p}$ ... ... (i)

আবার,

$2\log_2 2A = q$

বা, $\log_2(2A)^2 = q$

বা, $(2A)^2 = 2^q$

বা, $A^2 = \frac{2^q}{2^2}$

$\therefore A^2 = 2^{q-2}$ ... ... (ii)

এবং $q - p = 4$

$\therefore q = 4 + p$ ... ... (iii)

(i) ও (ii) নং হতে পাই,

$2^{3p} = 2^{q-2}$

বা, $3p = q - 2$

বা, $3p = 4 + p - 2$ [(iii) নং হতে পাই]

বা, $2p = 2$

$\therefore p = 1$

$\therefore q = 4 + 1 = 5$ [(iii) নং হতে]

(i) নং এ p এর মান বসাই

$A^2 = 2^{3.1}$

বা, $A^2 = 2^3$

$\therefore A = 2^{\frac{3}{2}}$

উত্তর: $A = 2^{\frac{3}{2}}$

(৬) খ -এর সমাধান:

দেওয়া আছে,

$\log x^y = 6$ ... ... (i)

$\log 14x^{8y} = 3$ ... ... (ii)

(i)নং হতে, $\log x^y = 6$

বা, $y\log x = 6$ [$\because \log a^b = b\log a$]

বা, $y = \frac{6}{\log x}$ ... ... (iii)

(ii) নং হতে, $\log 14x^{8y} = 3$

বা, $\log(14) + \log x^{8y} = 3$ [$\because \log(MN) = \log M + \log N$]

বা, $\log x^{8y} = 3 - \log 14$

বা, $8y\log x = 3 - \log 14$ [$\because \log a^b = b\log a$]

$y = \frac{3 - \log 14}{8\log x}$ ... ... (iv)

(iii) ও (iv) হতে,

$\frac{6}{\log x} = \frac{3 - \log 14}{8\log x}$

বা, $48\log x = (3 - \log 14)\log x$

বা, $\log x\{48 - (3 - \log 14)\} = 0$

$\therefore \log x = 0$ [$\because 48 - (3 - \log 14) \neq 0$]

বা, $\log x = \log 1$

$\therefore x = 1$

কিন্তু $x = 1$ হলে (iii) নং সমীকরণ অসংজ্ঞায়িত। তাই প্রশ্নটির সঠিক ... করে সমাধান করা হলো।

প্রশ্ন: যদি $\log_x y = 6$ এবং $\log_{14x} 8y = 3$ হয়, তবে x এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান:

দেওয়া আছে, $\log_x y = 6$

$\therefore x^6 = y$ ... ... (i)

আবার, $\log_{14x} 8y = 3$

বা, $(14x)^3 = 8y$

বা, $(14)^3x^3 = 8x^6$

বা, $(14)^3 = 8x^3$

বা, $x^3 = \left(\frac{14}{2}\right)^3$

বা, $x^3 = 7^3$

$\therefore x = 7$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $x = 7$

অনুশীলনী-৯.২ (অনুশীলনমূলক কাজ)

প্রশ্ন:
নিচের ছকে বর্ণিত সূচক ফাংশন লেখ: [Ref: পাঠ্যবই পৃষ্ঠা ১৮৪]

১।	x	-2	-1	0	1	2
	y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4

২।	x	-1	0	1	2	3
	y	-3	0	3	6	9

৩।	x	1	2	3	4	5
	y	4	16	64	256	1024

৪।	x	-3	-2	-1	0	1
	y	0	1	2	3	4

৫।	x	-2	-1	0	1	2
	y	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{5}$	1	5	25

৬।	x	1	2	3	4	5
	y	5	10	15	20	25

নিচের কোনটি সূচক ফাংশন নির্দেশ করে:

৭। $y = -3^x$ ৮। $y = 3x$ ৯। $y = -2x - 3$ ১০। $y = 5 - x$ ১১। $y = x^2 + 1$ ১২। $y = 3x^2$

সমাধান:

১।	x	-2	-1	0	1
	y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2

২।	x	-1	0	1	2	3
	y	-3	0	3	6	9

৩।	x	1	2	3	4	5
	y	4	16	64	256	1024

৪।	x	-3	-2	-1	0	1
	y	0	1	2	3	4

৫।	x	-2	-1	0	1	2
	y	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{5}$	1	5	25

৬।	x	1	2	3	4	5
	y	5	10	15	20	25

ছক-১ এ বর্ণিত (x, y) ক্রমজোড়ের মানগুলো পর্যালোচনা করে পাই-

$x = -2$ হলে $y = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

$x = -1$ হলে $y = 2^{-1} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$

$x = 0$ হলে $y = 2^0 = 1$

$x = 1$ হলে $y = 2^1 = 2$

$\therefore$ ছক-১ এ বর্ণিত (x, y) ক্রমজোড়ের মানগুলো $y = 2^x$ সম্পর্ক দ্বারা বর্ণনা করা যায়, যেখানে x বাস্তব সংখ্যা।

ছক-২ এ বর্ণিত (x, y) ক্রমজোড়ের মানগুলো পর্যালোচনা করে পাই-

$x = -1$ হলে $y = 3 \times (-1) = -3$

$x = 0$ হলে $y = 3 \times 0 = 0$

$x = 1$ হলে $y = 3 \times 1 = 3$

$x = 2$ হলে $y = 3 \times 2 = 6$

$x = 3$ হলে $y = 3 \times 3 = 9$

$\therefore$ ছক-২ এ বর্ণিত (x, y) ক্রমজোড়ের মানগুলো $y = 3x$ সম্পর্ক দ্বারা বর্ণনা করা যায়, যেখানে x বাস্তব সংখ্যা।

ছক-৩ এ বর্ণিত (x, y) ক্রমজোড়ের মানগুলো পর্যালোচনা করে পাই-

$x = 1$ হলে $y = 4^1 = 4$

$x = 2$ হলে $y = 4^2 = 16$

$x = 3$ হলে $y = 4^3 = 64$

$x = 4$ হলে $y = 4^4 = 256$,

$x = 5$ হলে $y = 4^5 = 1024$

$\therefore$ ছক-৩ এ বর্ণিত (x, y) ক্রমজোড়ের মানগুলো $y = 4^x$ দ্বারা বর্ণনা করা যায়, যেখানে x বাস্তব সংখ্যা।

ছক-৪ এ বর্ণিত (x, y) ক্রমজোড়ের মানগুলো পর্যালোচনা করে পাই-

$x = -3$ হলে $y = 3 + (-3) = 0$

$x = -2$ হলে $y = 3 + (-2) = 1$

$x = -1$ হলে $y = 3 + (-1) = 2$

$x = 0$ হলে $y = 3 + 0 = 3$

$x = 1$ হলে $y = 3 + 1 = 4$

$\therefore$ ছক-৪ এ বর্ণিত (x, y) ক্রমজোড়ের মানগুলো $y = x + 3$ দ্বারা বর্ণনা করা যায়, যেখানে x বাস্তব সংখ্যা।

ছক-৫ এ বর্ণিত (x, y) ক্রমজোড়ের মানগুলো পর্যালোচনা করে পাই-

$x = -2$ হলে $y = 5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$

$x = -1$ হলে $y = 5^{-1} = \frac{1}{5^1} = \frac{1}{5}$

$x = 0$ হলে $y = 5^0 = 1$

$x = 1$ হলে $y = 5^1 = 5$

$x = 2$ হলে $y = 5^2 = 25$

$\therefore$ ছক-৫ এ বর্ণিত (x, y) ক্রমজোড়ের মানগুলো $y = 5^x$ দ্বারা বর্ণনা করা যায়, যেখানে x বাস্তব সংখ্যা।

ছক-৬ এ বর্ণিত (x, y) ক্রমজোড়ের মানগুলো পর্যালোচনা করে পাই-

$x = 1$ হলে $y = 5 \times 1 = 5$

$x = 2$ হলে $y = 5 \times 2 = 10$

$x = 3$ হলে $y = 5 \times 3 = 15$

$x = 4$ হলে $y = 5 \times 4 = 20$

$x = 5$ হলে $y = 5 \times 5 = 25$

$\therefore$ ছক-৬ এ বর্ণিত (x, y) ক্রমজোড়ের মানগুলো $y = 5x$ দ্বারা বর্ণনা করা যায়, যেখানে x বাস্তব সংখ্যা।

এখন, সূচক ফাংশনের সংজ্ঞা হতে আমরা জানি, সূচক ফাংশন হলো $f(x) = a^x$ আকারের ফাংশন যা সকল বাস্তব সংখ্যা x এর জন্য সংজ্ঞায়িত, যেখানে $a > 0$ এবং $a \neq 1$.

এখানে দেখা যাচ্ছে যে, শুধুমাত্র ছক-১, ছক-৩ ও ছক-৫ এ বর্ণিত ক্রমজোড়গুলোই $f(x) = a^x$ আকারের। ছক-১, ছক-৩ ও ছক-৫ এর ক্রমজোড়গুলো যথাক্রমে সূচক ফাংশন $f(x) = 2^x$

$f(x) = 4^x$ ও $f(x) = 5^x$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত।

নিচের কোনটি সূচক ফাংশন নির্দেশ করে:

৭। $y = -3^x$ ৮। $y = 3x$ ৯। $y = -2x - 3$

১০। $y = 5 - x$ ১১। $y = x^2 + 1$ ১২। $y = 3x^2$

সমাধান:

সূচক ফাংশনের সংজ্ঞা হতে আমরা জানি, সূচক ফাংশন হলো $f(x) = a^x$ আকারের ফাংশন, যা সকল বাস্তব সংখ্যা x এর জন্য সংজ্ঞায়িত, যেখানে $a > 0$ এবং $a \neq 1$.

তাহলে, আমরা বলতে পারি প্রশ্নে প্রদত্ত ফাংশনগুলোর মধ্যে ৭ নং ফাংশন $y = f(x) = -3^x$ হলো একমাত্র সূচক ফাংশন।

জেনে রাখো: ৮, ৯ ও ১০নং প্রশ্নে বর্ণিত ফাংশনগুলো একঘাত বিশিষ্ট সরলরৈখিক ফাংশন এবং ১১ ও ১২ নং প্রশ্নে বর্ণিত ফাংশন দ্বিঘাত ফাংশন যার লেখচিত্র পরাবৃত্তাকার।

৯ কাজ: [Ref: পাঠ্যবই পৃষ্ঠা: ১৯৫]

লেখচিত্র অঙ্কন কর যেখানে $-3 \le x \le 3$.

১। $y = 2^{-x}$ ২। $y = 4^x$ ৩। $y = 2^{\frac{x}{2}}$ ৪। $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$

(১) এর সমাধান:

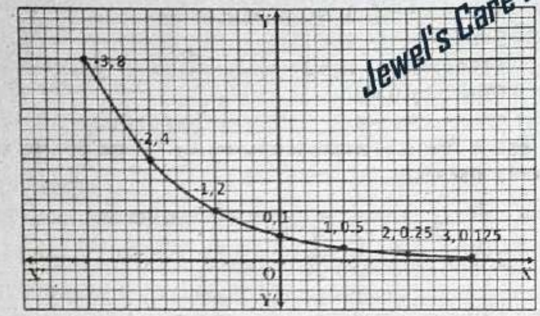
ধরি, $y = f(x) = 2^{-x}$; $-3 \le x \le 3$

প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য -3 থেকে 3 এর মধ্যে x এবং y এর অনুরূপ মানগুলোর তালিকা প্রস্তুত করি:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	8	4	2	1	0.5	0.25	0.125

এখন, ছক কাগজে সুবিধামত x-অক্ষ XOX' এবং y-অক্ষ YOY' আঁকি। X-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 5 বর্গ ঘর = 1 একক এবং Y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 5 বর্গ ঘর = 1 একক ধরে (x, y) বিন্দুগুলো স্থাপন করি। বিন্দুগুলোকে সহজভাবে বক্ররেখায় যুক্ত করলে $y = f(x)$ এর লেখ পাওয়া যায়।

যা চিত্রে দেখানো হলো-



(২) এর সমাধান:

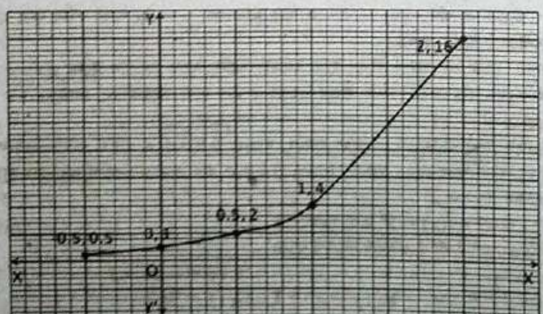
ধরি, $y = f(x) = 4^x$; $-3 \le x \le 3$

প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য -3 থেকে 3 এর মধ্যে x এবং y এর অনুরূপ মানগুলোর তালিকা প্রস্তুত করি:

x	-0.5	0	0.5	1	2
y	0.5	1	2	4	16

এখন ছক কাগজে সুবিধামত x-অক্ষ XOX' এবং y-অক্ষ YOY' আঁকি। X-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 5 বর্গ ঘর = 1 একক এবং Y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 1 বর্গ ঘর = 1 একক ধরে (x, y) বিন্দুগুলো স্থাপন করি। বিন্দুগুলোকে সহজভাবে বক্ররেখায় যুক্ত করলে $y = f(x)$ এর লেখ পাওয়া যায়।

যা নিম্নে দেখানো হলো-



(৩) এর সমাধান:

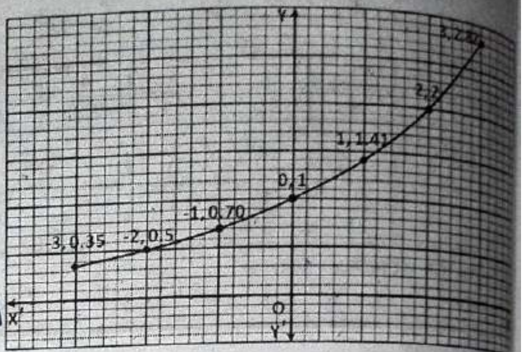
ধরি, $y = f(x) = 2^{\frac{x}{2}}$; $-3 \le x \le 3$

প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য -3 থেকে 3 এর মধ্যে x এবং y এর অনুরূপ মানগুলোর তালিকা প্রস্তুত করি:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	0.35	0.5	0.70	1	1.41	2	2.82

এখন, ছক কাগজে সুবিধামত x-অক্ষ XOX' এবং y-অক্ষ YOY' আঁকি। X-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 5 বর্গ ঘর = 1 একক এবং Y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 5 বর্গ ঘর = 1 একক ধরে, (x, y) বিন্দুগুলো স্থাপন করি। বিন্দুগুলোকে সহজভাবে বক্ররেখায় যুক্ত করলে $y = f(x)$ এর লেখ পাওয়া যায়।

যা নিম্নে দেখানো হলো-



(৪) এর সমাধান:

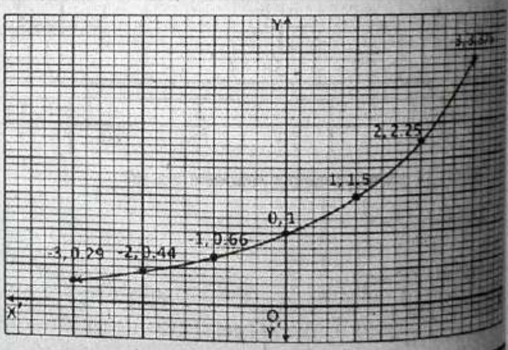
ধরি, $y = f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$

প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য -3 থেকে 3 এর মধ্যে x এবং y এর অনুরূপ মানগুলোর তালিকা প্রস্তুত করি:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	0.29	0.44	0.66	1	1.5	2.25	3.3

এখন, ছক কাগজে সুবিধামত X-অক্ষ XOX' এবং Y-অক্ষ YOY' আঁকি। X-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 5 বর্গ ঘর = 1 একক এবং Y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 5 বর্গ ঘর = 1 একক ধরে (x, y) বিন্দুগুলো স্থাপন করি। বিন্দুগুলোকে সহজভাবে বক্ররেখায় যুক্ত করলে $y = f(x)$ এর লেখ পাওয়া যায়।

যা নিম্নে দেখানো হলো-



৯ কাজ: [Ref: পাঠ্যবই

নিচের ফাংশনগুলোর লেখচিত্র অঙ্কন কর এবং এদের বিপরীত ফাংশন নির্ণয় কর

১। $y = 3x + 2$ ২। $y = x^2 + 3, x \ge 0$ ৩। $y = x^3 - 1$

৪। $y = \frac{4}{x}$ ৫। $y = 3x$ ৬। $y = \frac{2x+1}{x-1}$

৭। $y = 2^{-x}$ ৮। $y = 4^x$

(১) এর সমাধান:

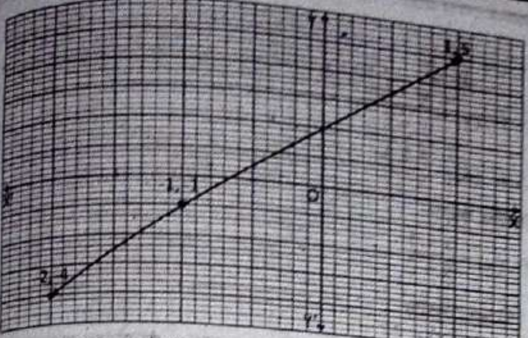
ধরি, $y = f(x) = 3x + 2$

প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x এবং y এর অনুরূপ মানগুলোর তালিকা প্রস্তুত করি:

x	-2	-1	1
y	-4	-1	5

এখন, ছক কাগজে সুবিধামত x-অক্ষ XOX' এবং y-অক্ষ YOY' আঁকি। X-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 5 বর্গ ঘর = 1 একক এবং Y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 5 বর্গ ঘর = 1 একক ধরে (x, y) বিন্দুগুলো স্থাপন করি। বিন্দুগুলোকে সহজভাবে বক্ররেখায় যুক্ত করলে $y = f(x)$ এর লেখ পাওয়া যায়।

যা নিম্নে দেখানো হলো-



বিপরীত ফাংশন নির্ণয়:

দেওয়া আছে,

$y = 3x + 2$

বা, $3x = y - 2$

$\therefore x = \frac{1}{3}(y-3)$

ধরি,

$y = f(x)$

বা, $x = f^{-1}(y)$

$\therefore f^{-1}(y) = \frac{y-2}{3}$

$\therefore f^{-1}(x) = \frac{x-2}{3}$

(২) এর সমাধান:

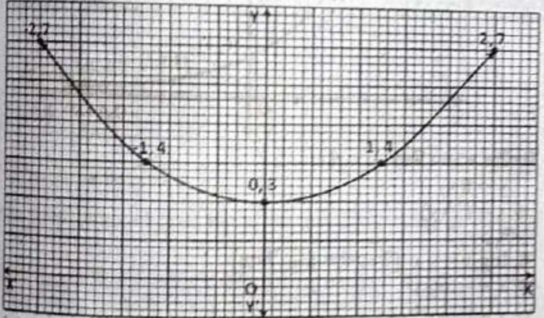
ধরি, $y = f(x) = x^2 + 3, x \geq 0$

প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x এবং y এর অনুরূপ মানগুলোর তালিকা প্রস্তুত করি:

x	-2	-1	0	1	2
y	7	4	3	4	7

এখন, ছক কাগজে সুবিধামত x-অক্ষ XOX' এবং y-অক্ষ YOY' আঁকি। X-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 5 বর্গ ঘর = 1 একক এবং Y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 5 বর্গ ঘর = 1 একক ধরে, (x, y) বিন্দুগুলো স্থাপন করি। বিন্দুগুলোকে সহজভাবে বক্ররেখায় যুক্ত করলে $y = f(x)$ এর লেখ পাওয়া যায়।

যা নিম্নে দেখানো হলো-



বিপরীত ফাংশন নির্ণয়:

$y = f(x) = x^2 + 3$

এখন, $y = x^2 + 3$ বা, $x^2 = y - 3$ বা, $x = \sqrt{y-3}$

বিপরীত ফাংশন $f^{1} : y \to x$ যেখানে $x = \sqrt{y-3}$

বা, $f^{1} : y \to \sqrt{y-3}$

y এর স্থলে x স্থাপন করে পাই,

$f^{1} : x \to \sqrt{y-3} \quad \therefore f^{1}(x) = \sqrt{y-3}$

(৩) এর সমাধান:

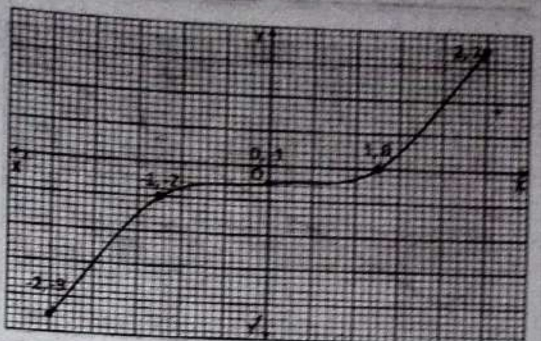
ধরি, $y = f(x) = x^3 - 1$

প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x এবং y এর অনুরূপ মানগুলোর তালিকা প্রস্তুত করি:

x	-2	-1	0	1	2
y	-9	-2	-1	0	7

এখন, ছক কাগজে সুবিধামত x-অক্ষ XOX' এবং y-অক্ষ YOY' আঁকি। X-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 5 বর্গ ঘর = 1 একক এবং Y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 5 বর্গ ঘর = 1 একক ধরে (x, y) বিন্দুগুলো স্থাপন করি। বিন্দুগুলোকে সহজভাবে বক্ররেখায় যুক্ত করলে $y = f(x)$ এর লেখ পাওয়া যায়।

যা নিম্নে দেখানো হলো-



(৪) এর সমাধান:

ধরি, $y = f(x) = \frac{4}{x}$

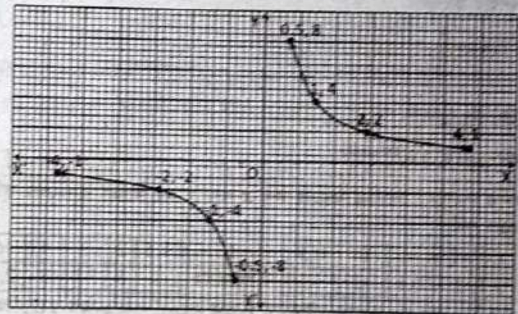
প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x এবং y এর অনুরূপ মানগুলোর তালিকা প্রস্তুত করি:

x	-4	-2	-1	-0.5	0	0.5	1	2	4
y	-1	-2	-4	-8	অসংজ্ঞায়িত	8	4	2	1

ছক কাগজে মানগুলো স্থাপন করলে নিম্নরূপ লেখচিত্র পাওয়া যায়-

প্রাপ্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে সুবিধামত x-অক্ষ XOX' এবং y-অক্ষ YOY' আঁকি। X-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 5 বর্গ ঘর = 1 একক এবং Y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 5 বর্গ ঘর = 1 একক ধরে (x, y) বিন্দুগুলো স্থাপন করি। বিন্দুগুলোকে বক্ররেখায় যুক্ত করলে $y = f(x)$ এর লেখ পাওয়া যায়।

যা নিম্নে দেখানো হলো-



বিপরীত ফাংশন নির্ণয়:

ধরি, $y = f(x)$

বা, $x = f^{-1}(y)$

দেওয়া আছে,

$y = \frac{4}{x}$

$\Rightarrow x = \frac{4}{y}$

$\Rightarrow f^{-1}(y) = \frac{4}{y}$

$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{4}{x}$

$\therefore$ নির্ণেয় বিপরীত ফাংশন, $f^{-1}(x) = \frac{4}{x}$

(৫) এর সমাধান:

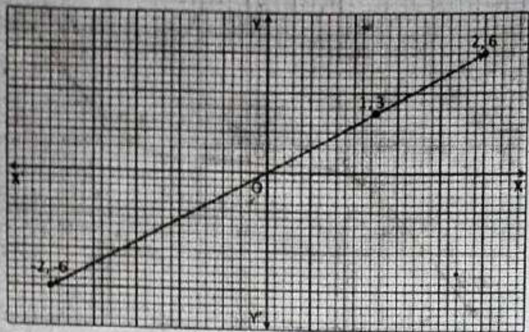
ধরি, $y = f(x) = 3x$

প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x এবং y এর অনুরূপ মানগুলোর তালিকা প্রস্তুত করি

x	-2	1	2
y	-6	3	6

এখন, ছক কাগজে সুবিধামত x-অক্ষ XOX' এবং y-অক্ষ YOY' আঁকি। X-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 5 বর্গ ঘর = 1 একক এবং Y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 5 বর্গ ঘর = 1 একক ধরে, (x, y) বিন্দুগুলো স্থাপন করি। বিন্দুগুলোকে সহজভাবে সরলরেখায় যুক্ত করলে $y = f(x)$ এর লেখ পাওয়া যায়।

যা নিম্নে দেখানো হলো-



ধরি, $y = f(x)$

$\Rightarrow x = f^{-1}(y)$

দেওয়া আছে,

$y = 3x$

$\Rightarrow x = \frac{y}{3}$

$\Rightarrow f^{-1}(y) = \frac{y}{3}$

$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{3}$

বিপরীত ফাংশন:

$f^{-1}(x) = \frac{x}{3}$

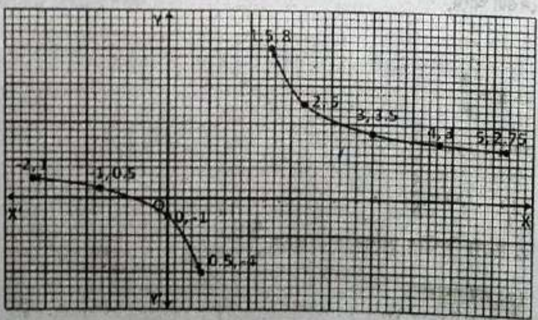
(৬) এর সমাধান:

ধরি, $y = f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$

প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x এবং y এর অনুরূপ মানগুলোর তালিকা প্রস্তুত করি:

x	-2	-1	0	0.5	1	1.5	2	3	4	5
y	1	0.5	-1	-4	অসংজ্ঞায়িত	8	5	3.5	3	2.75

প্রাপ্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে সুবিধামত x-অক্ষ XOX' এবং y-অক্ষ YOY' আঁকি। উভয় অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 5 বর্গ ঘর = 1 একক ধরে (x, y) বিন্দুগুলো স্থাপন করি। বিন্দুগুলোকে সহজভাবে বক্ররেখায় যুক্ত করে $y = f(x)$ এর লেখ পাওয়া যায়।
যা নিম্নে দেখানো হলো-



ধরি, $y = f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$

$y = f(x)$

$\Rightarrow x = f^{-1}(y)$

এখন, $y = \frac{2x+1}{x-1}$

বা, $y(x-1) = 2x+1$

বা, $yx - 2x = y + 1$ বা, $x(y-2) = y+1$

$\therefore x = \frac{y+1}{y-2}$

$\therefore f^{-1}(y) = \frac{y+1}{y-2}$

$\therefore f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-2}$

বিপরীত ফাংশন:

$f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-2}$

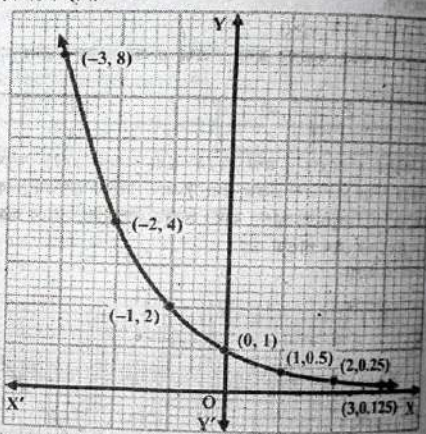
(৭) এর সমাধান:

ধরি, $y = f(x) = 2^{-x}$

প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x এবং y এর অনুরূপ মানগুলোর তালিকা প্রস্তুত করি:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	[illegible]
y	16	8	4	2	1	0.5	0.25	[illegible]

প্রাপ্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে সুবিধামত x-অক্ষ XOX' এবং y-অক্ষ YOY' আঁকি। উভয় অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 5 বর্গ ঘর = 1 একক ধরে (x, y) বিন্দুগুলো স্থাপন করি। বিন্দুগুলোকে সহজভাবে বক্ররেখায় যুক্ত করলে $y = f(x)$ এর লেখ পাওয়া যায়।
যা নিম্নে দেখানো হলো-



বিপরীত ফাংশন নির্ণয়: $y = f(x) = 2^{-x}$

$y = f(x)$

$\Rightarrow x = f^{-1}(y)$

এখন, $y = 2^{-x}$

বা, $\log_2 y = -x$ [উভয়পক্ষে $\log_2$ নিয়ে]

বা, $x = -\log_2 y$

বা, $x = \log_2 y^{-1}$ [$\because \log_a p^r = r \log_a p$]

$\therefore x = \log_2\left(\frac{1}{y}\right)$

$\therefore f^{-1}(y) = \log_2\left(\frac{1}{y}\right)$

$\therefore f^{-1}(x) = \log_2\left(\frac{1}{x}\right)$

$\therefore$ নির্ণেয় বিপরীত ফাংশন, $f^{-1}(x) = \log_2\left(\frac{1}{x}\right)$

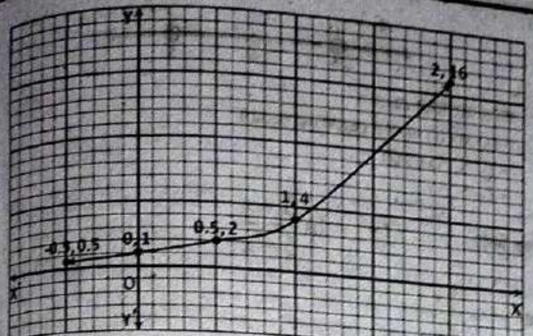
(৮) এর সমাধান:

ধরি, $y = f(x) = 4^x$

প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x এবং y এর অনুরূপ মানগুলোর তালিকা প্রস্তুত করি:

x	-0.5	0	0.5	1	2
y	0.5	1	2	4	16

প্রাপ্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে সুবিধামত x-অক্ষ XOX' এবং y-অক্ষ YOY' আঁকি। X-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 5 বর্গ ঘর = 1 একক এবং Y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম ... ঘর = 1 একক ধরে (x, y) বিন্দুগুলো স্থাপন করি। বিন্দুগুলোকে বক্ররেখায় যুক্ত করলে $y = f(x)$ এর লেখ পাওয়া যায়।
যা নিম্নে দেখানো হলো-



ধরি, $y = f(x) = 4^x$

$y = f(x)$

$\Rightarrow x = f^{-1}(y)$

এখন, $y = 4^x$

বা, $\log_4 y = x$

$\therefore x = \log_4 y$

$\therefore f^{-1}(y) = \log_4 y$

$\Rightarrow f^{-1}(x) = \log_4 x$

বিপরীত ফাংশন: $f^{-1}(x) = \log_4 x$.

৯ কাজ: [Ref: পাঠ্যবই পৃষ্ঠা: ১৯৬]

নিচের ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর:

১। $y = \ln\dfrac{2+x}{2-x}$ ২। $y = \ln\dfrac{3+x}{3-x}$

৩। $y = \ln\dfrac{4+x}{4-x}$ ৪। $y = \ln\dfrac{5+x}{5-x}$

১। $y = \ln\dfrac{2+x}{2-x}$

সমাধান:

ধরি, $y = f(x) = \ln\dfrac{2+x}{2-x}$

ডোমেন নির্ণয়: যেহেতু লগারিদম শুধুমাত্র ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার জন্য সংজ্ঞায়িত হয়। $\therefore f(x)$ এর বাস্তব মান পাওয়া যাবে যদি $\dfrac{2+x}{2-x} > 0$ হয়।

$\therefore \dfrac{2+x}{2-x} > 0$ যদি (i) $2 + x > 0$ এবং $2 - x > 0$ হয়

অথবা, (ii) $2 + x < 0$ এবং $2 - x < 0$ হয়।

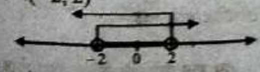
(i) নং হতে পাই, $x > -2$ এবং $-x > -2$

বা, $x > -2$ এবং $x < 2$

$\therefore$ ডোমেন $= \{x : -2 < x\} \cap \{x : x < 2\}$

$= (-2, \infty) \cap (-\infty, 2)$

$= (-2, 2)$



(ii) নং হতে পাই, $x < -2$ এবং $-x < -2$

বা, $x < -2$ এবং $x > 2$

$\therefore$ ডোমেন $= \{x : x < -2\} \cap \{x : x > 2\}$

$= \varnothing$

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেন

$D_f =$ (i) ও (ii) এ প্রাপ্ত ডোমেনের সংযোগ

$= (-2, 2) \cup \varnothing = (-2, 2)$

রেঞ্জ নির্ণয়: $y = f(x) = \ln\dfrac{2+x}{2-x}$

বা, $e^y = \dfrac{2+x}{2-x}$

বা, $2 + x = 2e^y - xe^y$

বা, $x(1 + e^y) = 2(e^y - 1)$

বা, $x = \dfrac{2(e^y - 1)}{e^y + 1}$

y-এর সকল বাস্তব মানের জন্য x-এর মান বাস্তব হয়।

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের রেঞ্জ $R_f = R$

প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেন $D_f = (-2, 2)$, রেঞ্জ $R_f = R$ **(Ans.)**

৯ জেনে রাখা ভালো: কোনো অসমতাকে ঋণাত্মক সংখ্যা দ্বারা গুণ বা ভাগ করলে অসমতার দিক বিপরীত হয়।

i. $a > b$ হলে, $-a < -b$.

ii. $a > b$ হলে, $\dfrac{a}{-1} < \dfrac{b}{-1}$.

২। $y = \ln\dfrac{3+x}{3-x}$

সমাধান:

ধরি, $y = f(x) = \ln\dfrac{3+x}{3-x}$

ডোমেন নির্ণয়: যেহেতু লগারিদম শুধুমাত্র ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার জন্য সংজ্ঞায়িত হয়।

$\therefore f(x)$ এর বাস্তব মান পাওয়া যাবে যদি $\dfrac{3+x}{3-x} > 0$ হয়।

$\therefore \dfrac{3+x}{3-x} > 0$ যদি (i) $3 + x > 0$ এবং $3 - x > 0$ হয়

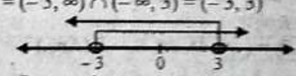
অথবা (ii) $3 + x < 0$ এবং $3 - x < 0$ হয়,

(i) নং হতে পাই, $x > -3$ এবং $-x > -3$,

বা, $x > -3$ এবং $x < 3$

$\therefore$ ডোমেন $= \{x : -3 < x\} \cap \{x : x < 3\}$

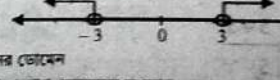
$= (-3, \infty) \cap (-\infty, 3) = (-3, 3)$



(ii) নং হতে পাই, $x < -3$ এবং $-x < -3$

বা, $x < -3$ এবং $x > 3$

$\therefore$ ডোমেন $= \{x : x < -3\} \cap \{x : x > 3\} = \varnothing$



$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেন

$D_f =$ (i) ও (ii) এ প্রাপ্ত ডোমেনের সংযোগ

$= (-3, 3) \cup \varnothing = (-3, 3)$

রেঞ্জ নির্ণয়: $y = f(x) = \ln\dfrac{3+x}{3-x}$

বা, $e^y = \dfrac{3+x}{3-x}$

বা, $3 + x = 3e^y - xe^y$

বা, $x(1 + e^y) = 3(e^y - 1)$

বা, $x = \dfrac{3(e^y - 1)}{e^y + 1}$

y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বাস্তব হয়।

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের রেঞ্জ $R_f = R$

প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেন $D_f = (-3, 3)$, রেঞ্জ $R_f = R$ **(Ans.)**

৩। $y = \ln \dfrac{4+x}{4-x}$

সমাধান:

ধরি, $y = f(x) = \ln \dfrac{4+x}{4-x}$

ডোমেন নির্ণয়: যেহেতু লগারিদম শুধুমাত্র ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার জন্য সংজ্ঞায়িত হয়।

$\therefore \dfrac{4+x}{4-x} > 0$ যদি (i) $4 + x > 0$ এবং $4 - x > 0$ হয়

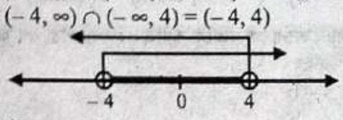
অথবা (ii) $4 + x < 0$ এবং $4 - x < 0$ হয়,

(i) নং হতে পাই, $x > -4$ এবং $-x > -4$

বা, $x > -4$ এবং $x < 4$

$\therefore$ ডোমেন $= \{x : -4 < x\} \cap \{x : x < 4\}$

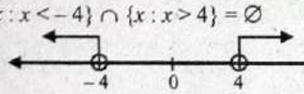
$= (-4, \infty) \cap (-\infty, 4) = (-4, 4)$



(ii) নং হতে পাই, $x < -4$ এবং $-x < -4$

বা, $x < -4$ এবং $x > 4$

$\therefore$ ডোমেন $= \{x : x < -4\} \cap \{x : x > 4\} = \varnothing$



$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেন

$D_f =$ (i) ও (ii) এ প্রাপ্ত ডোমেনের সংযোগ

$= (-4, 4) \cup \varnothing = (-4, 4)$

রেঞ্জ নির্ণয়: $y = f(x) = \ln \dfrac{4+x}{4-x}$

বা, $e^y = \dfrac{4+x}{4-x}$

বা, $4 + x = 4e^y - xe^y$

বা, $x(1 + e^y) = 4(e^y - 1)$ বা, $x = \dfrac{4(e^y - 1)}{e^y + 1}$

y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বাস্তব হয়।

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের রেঞ্জ $R_f = R$

প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেন $D_f = (-4, 4)$, রেঞ্জ $R_f = R$ **(Ans.)**

৪। $y = \ln \dfrac{5+x}{5-x}$

সমাধান:

ধরি, $y = f(x) = \ln \dfrac{5+x}{5-x}$

ডোমেন নির্ণয়: যেহেতু লগারিদম শুধুমাত্র ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার জন্য সংজ্ঞায়িত হয়।

$\therefore \dfrac{5+x}{5-x} > 0$ যদি (i) $5 + x > 0$ এবং $5 - x > 0$ হয়,

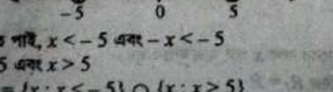
অথবা (ii) $5 + x < 0$ এবং $5 - x < 0$ হয়,

(i) নং হতে পাই, $x > -5$ এবং $-x > -5$

বা, $x > -5$ এবং $x < 5$

$\therefore$ ডোমেন $= \{x : -5 < x\} \cap \{x : x < 5\}$

$= (-5, \infty) \cap (-\infty, 5) = (-5, 5)$

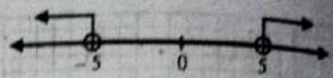


(ii) নং হতে পাই, $x < -5$ এবং $-x < -5$

বা, $x < -5$ এবং $x > 5$

$\therefore$ ডোমেন $= \{x : x < -5\} \cap \{x : x > 5\}$

$= \varnothing$



$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেন

$D_f =$ (i) ও (ii) এ প্রাপ্ত ডোমেনের সংযোগ

$= (-5, 5) \cup \varnothing$

$= (-5, 5)$

রেঞ্জ নির্ণয়: $y = f(x) = \ln \dfrac{5+x}{5-x}$

বা, $e^y = \dfrac{5+x}{5-x}$

বা, $5 + x = 5e^y - xe^y$

বা, $x(1 + e^y) = 5(e^y - 1)$

বা, $x = \dfrac{5(e^y - 1)}{e^y + 1}$

y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বাস্তব হয়।

প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেন $D_f = (-5, 5)$

রেঞ্জ $R_f = R$ **(Ans.)**

কাজ: **[Ref: পাঠ্যবই পৃষ্ঠা: ১৯৮]**

নিচের ফাংশনগুলোর লেখচিত্র অঙ্কন কর এবং ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর:

(i) $f(x) = 2^x$ (ii) $f(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ (iii) $f(x) = e^x, 2 < e < 3$

(iv) $f(x) = e^{-x}, 2 < e < 3$ (v) $f(x) = 3^x$

(i) $f(x) = 2^x$

সমাধান:

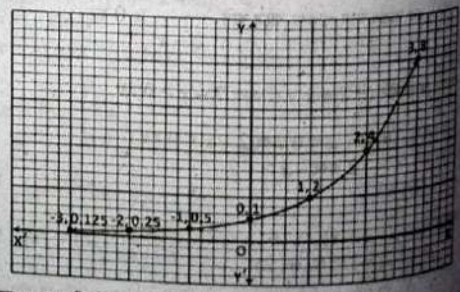
ধরি, $y = f(x) = 2^x$

প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x এবং y এর অনুরূপ মানগুলোর তালিকা প্রস্তুত করি:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	0.125	0.25	0.5	1	2	4	[illegible]

এখন, ছক কাগজে সুবিধামত x-অক্ষ XOX' এবং Y-অক্ষ YOY' আঁকি। X-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 5 বর্গ ঘর = 1 একক এবং y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 5 বর্গ ঘর = 1 একক ধরে (x, y) বিন্দুগুলো স্থাপন করি। বিন্দুগুলোকে সহজভাবে বক্ররেখায় যুক্ত করলে $y = f(x)$ এর লেখ পাওয়া যায়।

যা নিম্নে দেখানো হলো-



ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয়: ফাংশনের লেখচিত্র হতে পাই,

(i) $x = 0$ হলে $y = 2^0 = 1$

(ii) x এর ঋণাত্মক মানের জন্য x এর মান ক্রমাগত বৃদ্ধির সাথে সাথে y এর মান ক্রমাগত হ্রাস পায়। অর্থাৎ,

$x \to -\infty$ হলে $y \to 0$

(iii) x এর ধনাত্মক মানের জন্য x এর মান বৃদ্ধির সাথে সাথে y এর মান ক্রমান্বয়ে বৃদ্ধি পায়। অর্থাৎ,

$x \to \infty$ হলে $y \to \infty$

$\therefore x \in (-\infty, \infty)$ এবং $y \in (0, \infty)$

ডোমেন, $\mathrm{Df} = (-\infty, \infty)$

রেঞ্জ, $\mathrm{Rf} = (0, \infty)$

(ii) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

সমাধান:

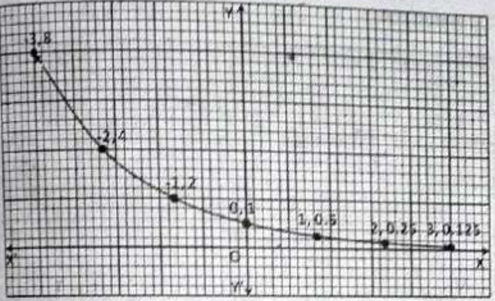
ধরি, $y = f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x এবং y এর অনুরূপ মানগুলোর তালিকা প্রস্তুত করি:

x	3	2	1	0	−1	−2	−3
y	0.125	0.25	0.5	1	2	4	8

এখন, ছক কাগজে সুবিধামত X-অক্ষ XOX' এবং Y-অক্ষ YOY' আঁকি। X-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 5 বর্গ ঘর = 1 একক এবং Y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 5 বর্গ ঘর = 1 একক ধরে (x, y) বিন্দুগুলো স্থাপন করি। বিন্দুগুলোকে সহজভাবে বক্ররেখায় যুক্ত করলে $y = f(x)$ এর লেখ পাওয়া যায়।

যা নিম্নে দেখানো হলো-



ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয়: ফাংশনের লেখচিত্র হতে পাই,

(i) $x = 0$ হলে $y = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$

(ii) $x \to -\infty$ হলে $y \to \infty$

অর্থাৎ x এর মান ক্রমাগত হ্রাস পেলে y এর মান বৃদ্ধি পায়।

(iii) $x \to \infty$ হলে $y \to 0$

অর্থাৎ x এর মান বৃদ্ধি পেলে y এর হ্রাস পায়।

$\therefore x \in (-\infty, \infty)$ এবং $y \in (0, \infty)$

$\therefore$ ডোমেন, $Df = (-\infty, \infty)$ এবং রেঞ্জ, $Rf = (0, \infty)$

(iii) $f(x) = e^x, 2 < e < 3$

সমাধান:

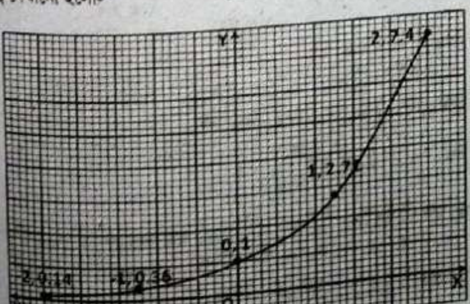
ধরি, $y = f(x) = e^x$,

প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x এবং y এর অনুরূপ মানগুলোর তালিকা প্রস্তুত করি:

x	−2	−1	0	1	2
y	0.14	0.36	1	2.71	7.4

এখন, প্রাপ্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে সুবিধামত X-অক্ষ XOX' এবং Y-অক্ষ YOY' আঁকি। x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 5 বর্গ ঘর = 1 একক এবং Y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 5 বর্গ ঘর = 1 একক ধরে (x, y) বিন্দুগুলো স্থাপন করি। বিন্দুগুলোকে সহজভাবে বক্ররেখায় যুক্ত করলে $y = f(x)$-এর লেখ পাওয়া যায়।

যা নিম্নে দেখানো হলো-



ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয়: ফাংশনের লেখচিত্র হতে পাই,

(i) $x = 0$ হলে $y = e^0 = 1$

(ii) $x \to -\infty$ হলে $y \to 0$

অর্থাৎ, x এর মান হ্রাস পেলে e^x এর মানও হ্রাস পায়।

(iii) $x \to \infty$ হলে $y \to \infty$

অর্থাৎ, x এর মান বৃদ্ধি পেলে e^x এর মানও বৃদ্ধি পায়।

$\therefore x \in (-\infty, \infty)$ এবং $y \in (0, \infty)$

$\therefore$ ডোমেন, $Df = (-\infty, \infty)$ এবং রেঞ্জ, $Rf = (0, \infty)$

(iv) $f(x) = e^{-x}, 2 < e < 3$

সমাধান:

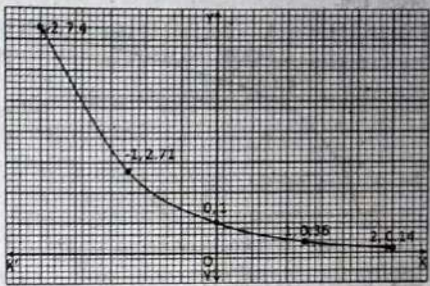
ধরি, $y = f(x) = e^{-x}$

প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x এবং y এর অনুরূপ মানগুলোর তালিকা প্রস্তুত করি:

x	2	1	0	−1	−2
y	0.14	0.36	1	2.71	7.4

এখন, প্রাপ্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে সুবিধামত X-অক্ষ XOX' এবং Y-অক্ষ YOY' আঁকি। x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 5 বর্গ ঘর = 1 একক এবং Y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 5 বর্গ ঘর = 1 একক ধরে (x, y) বিন্দুগুলো স্থাপন করি। বিন্দুগুলোকে সহজভাবে বক্ররেখায় যুক্ত করলে $y = f(x)$ এর লেখ পাওয়া যায়।

যা নিম্নে দেখানো হলো-



এখন, x এর সকল বাস্তব মানের জন্য প্রদত্ত ফাংশন $f(x)$ সংজ্ঞায়িত।

$\therefore$ ফাংশনটির ডোমেন $D_f = R$

এবং x যখন $+\infty$ এর কাছাকাছি হয় তখন $f(x)$ এর মান শূন্যের কাছাকাছি হয় এবং x এর মান হ্রাসের সাথে সাথে $f(x)$ এর মান অসীমের দিকে বৃদ্ধি পায়।

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের রেঞ্জ $R_f = (0, \infty)$

(v) $f(x) = 3^x$

সমাধান:

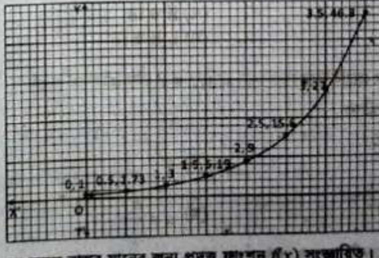
ধরি, $y = f(x) = 3^x$

প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x এবং y এর অনুরূপ মানগুলোর তালিকা প্রস্তুত করি:

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5
y	1	1.73	3	5.19	9	15.6	27	46.8

এখন, ছক কাগজে সুবিধামত X-অক্ষ XOX' এবং Y-অক্ষ YOY' আঁকি। X-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 5 বর্গ ঘর = 1 একক এবং y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 1 বর্গ ঘর = 2 একক ধরে (x, y) বিন্দুগুলো স্থাপন করি। বিন্দুগুলোকে সহজভাবে বক্ররেখায় যুক্ত করলে $y = f(x)$ এর লেখ পাওয়া যায়।

যা নিম্নে দেখানো হলো-



এখন, x এর সকল বাস্তব মানের জন্য প্রদত্ত ফাংশন $f(x)$ সংজ্ঞায়িত।

$\therefore$ ফাংশনটির ডোমেন $D_f = R$

আবার, x এর মান যখন $-\infty$ এর কাছাকাছি হয় তখন $f(x)$ এর মান শূন্যের কাছাকাছি হয় এবং x এর মান বৃদ্ধির সাথে সাথে $f(x)$ এর মান অসীমের $(+\infty)$ দিকে বৃদ্ধি পায়।

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের রেঞ্জ $R_f = (0, \infty)$

কাজ: [Ref: পাঠ্যবই পৃষ্ঠা: ২০০]

১। টেবিলে উল্লেখিত x ও y এর মান নিয়ে $y = \log_{10} x$ এর লেখচিত্র অঙ্কন কর।

x	.5	1	2	3	4	5	10	12
y	–.3	0	0.3	0.5	0.6	.7	1	1.07

২। $y = \log_e x$ এর লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য ১ এর ন্যায় x ও y এর মান নিয়ে টেবিল তৈরি কর এবং লেখচিত্র আঁক।

১নং এর সমাধান:

$y = \log_{10} x$ এর লেখচিত্র অঙ্কন:

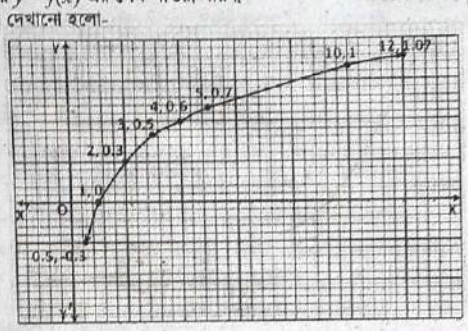
ধরি, $y = f(x) = \log_{10} x$

প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য 0.5 থেকে 12 এর মধ্যে x এবং y এর অনুরূপ মানগুলোর তালিকা প্রস্তুত করি:

x	0.5	1	2	3	4	5	10	12
y	– 0.3	0	0.3	0.5	0.60	0.70	1	1.07

এখন, ছক কাগজে সুবিধামত X-অক্ষ XOX' এবং Y-অক্ষ YOY' আঁকি। X-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 2.5 বর্গ ঘর = 1 একক এবং y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 10 বর্গ ঘর = 1 একক ধরে (x, y) বিন্দুগুলো পাতন করি। বিন্দুগুলোকে সহজভাবে বক্ররেখায় যুক্ত করে $y = f(x)$ এর লেখ পাওয়া যায়।

যা নিম্নে দেখানো হলো-



২নং এর সমাধান:

$y = \log_e x$ এর লেখচিত্র অঙ্কন:

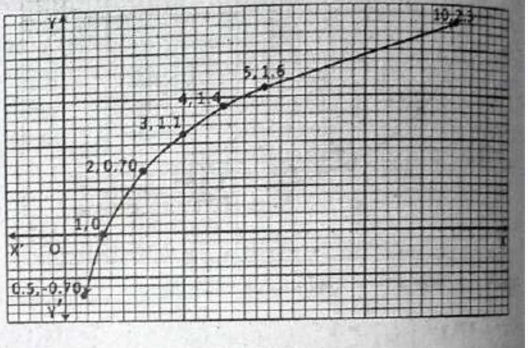
ধরি, $y = f(x) = \log_e x$

প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য 0.5 থেকে 12 এর মধ্যে x এবং y এর অনুরূপ মানগুলোর তালিকা প্রস্তুত করি:

x	0.5	1	2	3	4	5	10
y	– 0.70	0	0.70	1.1	1.4	1.6	2.3

এখন, ছক কাগজে সুবিধামত X-অক্ষ XOX' এবং Y-অক্ষ YOY' আঁকি। X-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 2.5 বর্গ ঘর = 1 একক এবং y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 10 বর্গ ঘর = 1 একক ধরে (x, y) বিন্দুগুলো স্থাপন করি। বিন্দুগুলোকে সহজভাবে বক্ররেখায় যুক্ত করলে $y = f(x)$ এর লেখ পাওয়া যায়।

যা নিম্নে দেখানো হলো-



পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-৯.২

১। $\left\{\left(x^{\frac{1}{a}}\right)^{\frac{a^2-b^2}{a+b}}\right\}^{\frac{a}{a-b}}$ এর সরলমান কোনটি?

(ক) 0 (খ) 1
(গ) a (ঘ) x

২। যদি $a, b, p > 0$ এবং $a \neq 1, b \neq 1$ হয়, তবে

i. $\log_a P = \log_b P \times \log_a b$

ii. $\log_a \sqrt{a} \times \log_b \sqrt{b} \times \log_c \sqrt{c}$ এর মান 2

iii. $X^{\log_a y} = Y^{\log_a x}$

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii (খ) ii ও iii
(গ) i ও iii (ঘ) i, ii ও iii

৩ - ৫ নং প্রশ্নের উত্তর দাও যখন $x, y, z \neq 0$ এবং $a^x = b^y = c^z$

৩। কোনটি সঠিক?

(ক) $a = b^{\frac{y}{z}}$ (খ) $c^{\frac{z}{y}}$

(গ) $a = c^{\frac{z}{x}}$ (ঘ) $a \neq \frac{b^2}{c}$

৪। নিচের কোনটি ac এর সমান।

(ক) $b^{\frac{y}{x}} . b^{\frac{y}{z}}$ (খ) $b^{\frac{y}{x}} . b^{\frac{z}{y}}$

(গ) $b^{\frac{y}{x}+\frac{z}{y}}$ (ঘ) $b^{\frac{x}{y}+\frac{y}{z}}$

৫। $b^2 = ac$ হলে নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) $\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{2}{y}$ (খ) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z}$

(গ) $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{2}{x}$ (ঘ) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{z}{2}$

৬। দেখাও যে,

(ক) $\log_k\left(\frac{a^n}{b^n}\right) + \log_k\left(\frac{b^n}{c^n}\right) + \log_k\left(\frac{c^n}{a^n}\right) = 0$

(খ) $\log_k (ab) \log_k\left(\frac{a}{b}\right) + \log_k (bc) \log_k\left(\frac{b}{c}\right) + \log_k (ca) \log_k\left(\frac{c}{a}\right) = 0$

(গ) $\log_{\sqrt{a}} b \times \log_{\sqrt{b}} c \times \log_{\sqrt{c}} a = 8$

(ঘ) $\log_a \log_a \log_a \left(a^{a^{a^b}}\right) = b$

৭। (ক) যদি $\frac{\log_k a}{b-c} = \frac{\log_k b}{c-a} = \frac{\log_k c}{a-b}$ হয়, তবে দেখাও যে, $a^a b^b c^c = 1$

(খ) যদি $\frac{\log_k a}{y-z} = \frac{\log_k b}{z-x} = \frac{\log_k c}{x-y}$ হয়, তবে দেখাও যে,

(১) $a^{y+z} b^{z+x} c^{x+y} = 1$

(২) $a^{y^2+yz+z^2} . b^{z^2+zx+x^2} . c^{x^2+xy+y^2} = 1$

(গ) যদি $\frac{\log_k (1+x)}{\log_k x} = 2$ হয়, তবে দেখাও যে, $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

(ঘ) দেখাও যে, $\log \frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}} = 2\log\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)$

(ঙ) যদি $a^{3-x}\ b^{5x} = a^{5+x}\ b^{3x}$ হয়, তবে দেখাও যে, $x\log_k\left(\frac{b}{a}\right) = \log_k a$

(চ) যদি $xy^{a-1} = p, xy^{b-1} = q, xy^{c-1} = r$ হয়, তবে দেখাও যে, $(b-c)\log_k p + (c-a)\log_k q + (a-b)\log_k r = 0$

(ছ) যদি $\frac{ab\log_k (ab)}{a+b} = \frac{bc\log_k (bc)}{b+c} = \frac{ca\log_k (ca)}{c+a}$ হয়, তবে দেখাও যে, $a^a = b^b = c^c$

(জ) যদি $\frac{x(y+z-x)}{\log_k x} = \frac{y(z+x-y)}{\log_k y} = \frac{z(x+y-z)}{\log_k z}$ হয়, তবে দেখাও যে, $x^y y^x = y^z z^y = z^x x^z$

৮। লেখচিত্র অঙ্কন কর:
(ক) $y = 3^x$ (খ) $y = -3^x$ (গ) $y = 3^{x+1}$ (ঘ) $y = -3^{x+1}$
(ঙ) $y = 3^{-x+1}$ (চ) $y = 3^{x-1}$

৯। নিচের ফাংশনের বিপরীত ফাংশন লিখ এবং লেখচিত্র অঙ্কন করে ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর।
(ক) $y = 1-2^x$ (খ) $y = \log_{10}x$ (গ) $y = x^2, x > 0$

১০। $f(x) = \ln(x-2)$ ফাংশনটির D_f ও R_f নির্ণয় কর:

১১। $f(x) = \ln\frac{1-x}{1+x}$ ফাংশনটির ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর।

১২। ডোমেন, রেঞ্জ উল্লেখসহ লেখচিত্র অঙ্কন কর।
(ক) $f(x) = |x|$ যখন $-5 \le x \le 5$ (খ) $f(x) = x + |x|$ যখন $-2 \le x \le 2$

(গ) $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & \text{যখন } x \neq 0 \\ 0 & \text{যখন } x = 0 \end{cases}$

১৩। দেওয়া আছে,
$2^{2x}.2^{y-1} = 64$ ……… (i)
এবং $6x.\frac{6^{y-2}}{3} = 72$ ……… (ii)
(ক) (i) ও (ii) কে x ও y চলকবিশিষ্ট সরল সমীকরণে পরিণত কর।
(খ) সমীকরণদ্বয় সমাধান করে শুদ্ধতা যাচাই কর।
(গ) x ও y মান যদি কোনো চতুর্ভুজের সন্নিহিত বাহুর দৈর্ঘ্য হয় যেখানে বাহুদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ $90°$, তবে চতুর্ভুজটি আয়ত না বর্গ উল্লেখ কর এবং এর ক্ষেত্রফল ও কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

১৪। দেওয়া আছে, $y = 2^x$
(ক) প্রদত্ত ফাংশনটির ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর।
(খ) ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন কর এবং এর বৈশিষ্ট্যগুলি লিখ।
(গ) ফাংশনটির বিপরীত ফাংশন নির্ণয় করে এটি এক-এক কিনা তা নির্ধারণ কর এবং বিপরীত ফাংশনটির লেখচিত্র আঁক।

১৫। $f(x) = 3^{2x+2}$ এবং $g(x) = 27^{x+1}$
(ক) f(x) এর ডোমেন নির্ণয় কর।
(খ) $f(x) + g(x) = 36$ হলে, x এর মান নির্ণয় কর।
(গ) $Q(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$ হলে, Q(x) এর লেখচিত্র অঙ্কন করে লেখচিত্র থেকে ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর।

অনুশীলনী-৯.২ এর সমাধান

১। $\left\{\left(x^{\frac{1}{a}}\right)^{\frac{a^2-b^2}{a+b}}\right\}^{\frac{a}{a-b}}$ এর সরলমান কোনটি?
(ক) 0 (খ) 1 (গ) a (ঘ) x
উত্তর: (ঘ) x
ব্যাখ্যা:
$$\left\{\left(x^{\frac{1}{a}}\right)^{\frac{a^2-b^2}{a+b}}\right\}^{\frac{a}{a-b}} = \left(x^{\frac{1}{a}}\right)^{\frac{a^2-b^2}{a+b}\times\frac{a}{a-b}}$$
$$= \left(x^{\frac{1}{a}}\right)^{\frac{(a+b)(a-b)}{a+b}\times\frac{a}{a-b}}$$
$$= \left(x^{\frac{1}{a}}\right)^{a} = x$$

২। যদি $a, b, p > 0$ এবং $a \neq 1, b \neq 1$ হয়, তবে
i. $\log_a P = \log_b P \times \log_a b$
ii. $\log_a \sqrt{a} \times \log_b \sqrt{b} \times \log_c \sqrt{c}$ এর মান 2
iii. $X^{\log_a y} = Y^{\log_a x}$
নিচের কোনটি সঠিক?
(ক) i ও ii (খ) ii ও iii
(গ) i ও iii (ঘ) i, ii ও iii
উত্তর: (গ) i ও iii
ব্যাখ্যা:
i) সূত্রমতে, $\log_a P = \log_b P \times \log_a b$ [পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-১৯৬ সূত্র নং-৫]
ii) $\log_a \sqrt{a} \times \log_b \sqrt{b} \times \log_c \sqrt{c}$
$= \log_a a^{\frac{1}{2}} \times \log_b b^{\frac{1}{2}} \times \log_c c^{\frac{1}{2}}$
$= \frac{1}{2}\log_a a \times \frac{1}{2}\log_b b \times \frac{1}{2}\log_c c$
$= \frac{1}{2}(1) \times \frac{1}{2}(1) \times \frac{1}{2}(1) = \frac{1}{8}$
(ii) নং সত্য নয়।
(iii) ধরি,
$\log_a y = m, \log_a x = n$
$\therefore a^m = y, a^n = x$
$\therefore \left(a^m\right)^n = y^n$ এবং $\left(a^n\right)^m = x^m$
$\Rightarrow a^{mn} = y^n \quad \Rightarrow a^{mn} = x^m$
$\therefore x^m = y^n \Rightarrow x^{\log_a y} = y^{\log_a x}$ $\therefore$ (iii) নং সঠিক।

৩ - ৫ নং প্রশ্নের উত্তর দাও যখন $x, y, z \neq 0$ এবং $a^x = b^y = c^z$
৩। কোনটি সঠিক? [মির্জাপুর ক্যাডেট কলেজ, টাঙ্গাইল]
(ক) $a = b^{\frac{y}{z}}$ (খ) $c^{\frac{z}{y}}$
(গ) $a = c^{\frac{z}{x}}$ (ঘ) $a \neq \frac{b^2}{c}$
উত্তর: (গ) $a = c^{\frac{z}{x}}$

ব্যাখ্যা:

এখানে, $a^x = c^z \therefore a = c^{\frac{z}{x}}$

বি.দ্র.: $a \neq \frac{b^2}{c}$ সম্পর্কটিও সত্য কারণ, a, $\frac{b^2}{c}$ এর সমান নয়।

৪। নিচের কোনটি ac এর সমান।

(ক) $b^{\frac{y}{x}}.b^{\frac{y}{z}}$ (খ) $b^{\frac{y}{x}}.b^{\frac{z}{y}}$ (গ) $b^{\frac{y}{x}+\frac{z}{y}}$ (ঘ) $b^{\frac{x}{y}+\frac{y}{z}}$

উত্তর: (ক)

ব্যাখ্যা:

$a^x = b^y \quad \therefore a = \left(b^y\right)^{\frac{1}{x}} = b^{\frac{y}{x}}$

$c^z = b^y \quad \therefore c = \left(b^y\right)^{\frac{1}{z}} = b^{\frac{y}{z}}$

$\therefore ac = b^{\frac{y}{x}}.b^{\frac{y}{z}}$.

৫। $b^2 = ac$ হলে নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) $\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{2}{y}$ (খ) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{z}$

(গ) $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{2}{x}$ (ঘ) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{z}{2}$

উত্তর: (ক) $\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{2}{y}$

ব্যাখ্যা:

৪ নং MCQ হতে পাই, $ac = b^{\frac{y}{x}}.b^{\frac{y}{z}}$

এখন, $b^2 = ac = b^{\frac{y}{x}}.b^{\frac{y}{z}} = b^{\frac{y}{x}+\frac{y}{z}}$

$\Rightarrow 2 = \frac{y}{x}+\frac{y}{z}$ [$\because a^x = a^m$ হলে $x = m$]

$\therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{2}{y}$

৬। দেখাও যে,

(ক) $\log_k\left(\frac{a^n}{b^n}\right)+\log_k\left(\frac{b^n}{c^n}\right)+\log_k\left(\frac{c^n}{a^n}\right)=0$

(খ) $\log_k(ab)\log_k\left(\frac{a}{b}\right)+\log_k(bc)\log_k\left(\frac{b}{c}\right)+\log_k(ca)\log_k\left(\frac{c}{a}\right)=0$

(গ) $\log_{\sqrt{a}}b\times\log_{\sqrt{b}}c\times\log_{\sqrt{c}}a=8$

(ঘ) $\log_a\log_a\log_a\left(a^{a^{a^b}}\right)=b$

(ক) এর সমাধান:

বামপক্ষ $=\log_k\left(\frac{a^n}{b^n}\right)+\log_k\left(\frac{b^n}{c^n}\right)+\log_k\left(\frac{c^n}{a^n}\right)$

$=\log_k\left(\frac{a^n}{b^n}.\frac{b^n}{c^n}.\frac{c^n}{a^n}\right)$ [$\because$ loga + logb = log (ab)]

$=\log_k 1$

$= 0 =$ ডানপক্ষ [দেখানো হলো]

(খ) এর সমাধান:

বামপক্ষ $=\log_k(ab)\log_k\frac{a}{b}+\log_k(bc)\log_k\frac{b}{c}+\log_k(ca)\log_k\frac{c}{a}$

$=(\log_k a+\log_k b)(\log_k a-\log_k b)+(\log_k b+\log_k c)(\log_k b-\log_k c)+(\log_k c+\log_k a)(\log_k c-\log_k a)$

[$\because \log(MN)=\log M+\log N$ এবং $\log\frac{M}{N}=\log M-\log N$]

$=(\log_k a)^2-(\log_k b)^2+(\log_k b)^2-(\log_k c)^2+(\log_k c)^2-(\log_k a)^2$

$= 0 =$ ডানপক্ষ

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ. [দেখানো হলো]

(গ) এর সমাধান:

বামপক্ষ $=\log_{\sqrt{a}}b\times\log_{\sqrt{b}}c\times\log_{\sqrt{c}}a$

$=\log_{\sqrt{a}}\left(\sqrt{b}\right)^2\times\log_{\sqrt{b}}\left(\sqrt{c}\right)^2\times\log_{\sqrt{c}}\left(\sqrt{a}\right)^2$

$=2\log_{\sqrt{a}}\sqrt{b}\times2\log_{\sqrt{b}}\sqrt{c}\times2\log_{\sqrt{c}}\sqrt{a}$ [প্রতিজ্ঞা-৪: $(\log_a P^r = r\log_a P)$]

$=8\log_{\sqrt{a}}\sqrt{b}\times\log_{\sqrt{b}}\sqrt{c}\times\log_{\sqrt{c}}\sqrt{a}$

$=8\log_{\sqrt{a}}\sqrt{b}\times\log_{\sqrt{b}}\sqrt{a}$

$=8\log_{\sqrt{a}}\sqrt{a}$ [প্রতিজ্ঞা-৫: $(\log_a P = \log_a b\times\log_b P)$]

$=8\times1$ [প্রতিজ্ঞা-১: (২) $(\log_a a = 1)$]

$= 8 =$ ডানপক্ষ [দেখানো হলো]

(ঘ) এর সমাধান:

বামপক্ষ $=\log_a\log_a\log_a\left(a^{a^{a^b}}\right)$

$=\log_a\log_a a^{a^b}\log_a a$ [প্রতিজ্ঞা-৪: $(\log_a P^r = r\log_a P)$]

$=\log_a\log_a\left(a^{a^b}\right).1$ [$\log_a a = 1$]

$=\log_a a^b\log_a a$

$=\log_a a^b$ [$\therefore \log_a a = 1$ {প্রতিজ্ঞা-১ (২)}]

$=b\log_a a$ [প্রতিজ্ঞা-৪]

$=b.1=b=$ ডানপক্ষ [দেখানো হলো]

৭।

(ক) যদি $\frac{\log_k a}{b-c}=\frac{\log_k b}{c-a}=\frac{\log_k c}{a-b}$ হয়, তবে দেখাও যে, $a^a b^b c^c = 1$

(খ) যদি $\frac{\log_k a}{y-z}=\frac{\log_k b}{z-x}=\frac{\log_k c}{x-y}$ হয়, তবে দেখাও যে,

(১) $a^{y+z}b^{z+x}c^{x+y}=1$

(২) $a^{y^2+yz+z^2}.b^{z^2+zx+x^2}.c^{x^2+xy+y^2}=1$

(গ) যদি $\frac{\log_k(1+x)}{\log_k x}=2$ হয়, তবে দেখাও যে, $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

(ঘ) দেখাও যে, $\log\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}=2\log\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)$

(ঙ) যদি $a^{3-x}b^{5x}=a^{5+x}b^{3x}$ হয়, তবে দেখাও যে, $x\log_k\left(\frac{b}{a}\right)=\log_k a$

(চ) যদি $xy^{a-1}=p, xy^{b-1}=q, xy^{c-1}=r$ হয়, তবে দেখাও যে, $(b-c)\log_k p+(c-a)\log_k q+(a-b)\log_k r=0$

(ছ) যদি $\frac{ab\log_k(ab)}{a+b}=\frac{bc\log_k(bc)}{b+c}=\frac{ca\log_k(ca)}{c+a}$ হয়, তবে দেখাও যে, $a^a=b^b=c^c$

(জ) যদি $\frac{x(y+z-x)}{\log_k x}=\frac{y(z+x-y)}{\log_k y}=\frac{z(x+y-z)}{\log_k z}$ হয়, তবে দেখাও যে, $x^y y^x=y^z z^y=z^x x^z$

(ক) এর সমাধান:

এখানে, $\dfrac{\log_k a}{b-c} = \dfrac{\log_k b}{c-a} = \dfrac{\log_k c}{a-b} = m$

$\therefore \log_k a = m(b-c)$

বা, $a\log_k a = ma(b-c)$ ..... (i) [উভয়পক্ষকে a দ্বারা গুণ করে]

আবার, $\log_k b = m(c-a)$

বা, $b\log_k b = mb(c-a)$ ..... (ii) [উভয়পক্ষকে b দ্বারা গুণ করে]

এবং $\log_k c = m(a-b)$

বা, $c\log_k c = mc(a-b)$ ..... (iii) [উভয়পক্ষকে c দ্বারা গুণ করে]

এখন (i), (ii) ও (iii) নং যোগ করে পাই,

$a\log_k a + b\log_k b + c\log_k c = ma(b-c) + mb(c-a) + mc(a-b)$

বা, $\log_k a^a + \log_k b^b + \log_k c^c = m$ $[ab-ca+bc-ab+ca-bc]$

বা, $\log_k a^a b^b c^c = 0 = \log_k 1$ [প্রতিজ্ঞা-৪: $(\log_a P^r = r\log_a P)$]

$\therefore$ লগের সংজ্ঞানুসারে $a^a b^b c^c = 1$ [দেখানো হলো]

(খ) এর সমাধান:

(১) ধরি, $\dfrac{\log_k a}{y-z} = \dfrac{\log_k b}{z-x} = \dfrac{\log_k c}{x-y} = m$

$\therefore \log_k a = m(y-z)$

$\log_k b = m(z-x)$

$\log_k c = m(x-y)$

$\therefore (y+z)\log_k a + (z+x)\log_k b + (x+y)\log_k c$
$= m(y+z)(y-z) + m(z+x)(z-x) + m(x+y)(x-y)$

বা, $\log_k a^{y+z} + \log_k b^{z+x} + \log_k c^{x+y} = m(y^2-z^2+z^2-x^2+x^2-y^2)$

[প্রতিজ্ঞা-৪: $\log_a P^r = r\log_a P$]

বা, $\log_k (a^{y+z} b^{z+x} c^{x+y}) = 0 = \log_k 1$ $[\log(MN) = \log M + \log N]$

লগের সংজ্ঞানুসারে $a^{y+z} b^{z+x} c^{x+y} = 1$ [দেখানো হলো]

(২) ধরি, $\dfrac{\log_k a}{y-z} = \dfrac{\log_k b}{z-x} = \dfrac{\log_k c}{x-y} = m$

$\therefore \log_k a = m(y-z)$

$\log_k b = m(z-x)$

$\log_k c = m(x-y)$

$\therefore (y^2+yz+z^2)\log_k a + (z^2+zx+x^2)\log_k b + (x^2+xy+y^2)\log_k c$
$= (y-z)(y^2+yz+z^2) + m(z-x)(z^2+zx+x^2) + m(x-y)(x^2+xy+y^2)$

$[\because a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)]$

বা, $\log_k (a^{y^2+yz+z^2} b^{z^2+zx+x^2} c^{x^2+xy+y^2}) = m[y^3-z^3+z^3-x^3+x^3-y^3]$

[প্রতিজ্ঞা-৪: $(\log_a P^r = r\log_a P)$]

বা, $\log_k a^{y^2+yz+z^2} b^{z^2+zx+x^2} c^{x^2+xy+y^2} = 0$
$= \log_k 1$

$\therefore$ লগের সংজ্ঞানুসারে, $a^{y^2+yz+z^2} b^{z^2+zx+x^2} c^{x^2+xy+y^2} = 1$ [দেখানো হলো]

(গ) এর সমাধান:

দেওয়া আছে, $\dfrac{\log_k(1+x)}{\log_k x} = 2$

বা, $\log_k(1+x) = 2\log_k x$

বা, $\log_k(1+x) = \log_k x^2$ $[\because \log_a p^r = r\log_a p]$

$\therefore 1+x = x^2$

বা, $x^2-x-1 = 0$

বা, $x^2 - 2.x.\dfrac{1}{2} + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = 1 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2$ [উভয়পক্ষে $\frac{1}{4}$ যোগ করে]

বা, $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2 = 1 + \dfrac{1}{4}$

বা, $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{4+1}{4}$

বা, $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{5}{4}$

বা, $\left(x-\dfrac{1}{b}\right)^2 = \left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$

বা, $x - \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ [$\therefore$ বর্গমূল করে]

বা, $x = \dfrac{\sqrt{5}}{2} + \dfrac{1}{2}$

বা, $x = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

$\therefore x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ [দেখানো হলো]

(ঘ) এর সমাধান:

বামপক্ষ $= \log \dfrac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}$

$= \log \dfrac{(x-\sqrt{x^2-1})^2}{(x+\sqrt{x^2-1})(x-1\sqrt{x^2-1})}$

[লগের ভিতরের রাশির লব ও হরকে $\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)$ দ্বারা গুণ করে]

$= \log \dfrac{(x-\sqrt{x^2-1})^2}{x^2-(\sqrt{x^2-})^2}$

$= \log \dfrac{(x-\sqrt{x^2-1})^2}{x^2-x^2+1}$

$= \log (x-\sqrt{x^2-1})^2$

$= 2\log\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)$ [প্রতিজ্ঞা-৪: $(\log_a P^r = r\log_a P)$]

$=$ ডানপক্ষ [দেখানো হলো]

(ঙ) এর সমাধান:

দেওয়া আছে, $a^{3-x}b^{5x} = a^{5+x}b^{3x}$

বা, $\dfrac{b^{5x}}{b^{3x}} = \dfrac{a^{5+x}}{a^{3-x}}$

বা, $b^{5x-3x} = a^{5+x-3+x}$ $\left[\because \dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}\right]$

বা, $b^{2x} = a^{2+2x}$

বা, $b^{2x} = a^2.a^{2x}$ $[\because a^{m+n} = a^m.a^n]$

বা, $\dfrac{b^{2x}}{a^{2x}} = a^2$

বা, $\log_k\left(\dfrac{b^{2x}}{a^{2x}}\right) = \log_k a^2$ [উভয় পক্ষে $\log_k$ নিয়ে]

বা, $\log_k\left(\dfrac{b}{a}\right)^{2x} = \log_k a^2 \log_k$

বা, $2x\log_k\left(\dfrac{b}{a}\right) = 2\log_k a$ $[\because \log_a p^r = r\log_a p]$

$\therefore x\log_k\left(\dfrac{b}{a}\right) = \log_k a$ [দেখানো হলো]

(চ) এর সমাধান:

বামপক্ষ $= (b-c)\log_k p + (c-a)\log_k q + (a-b)\log_k r$

$= (b-c)\log_k xy^{a-1} + (c-a)\log_k xy^{b-1} + (a-b)\log xy^{c-1}$ [মান বসিয়ে]

$= (b-c)(\log_k x + \log_k y^{a-1}) + (c-a)$
$(\log_k x + \log_k y^{b-1}) + (a-b)(\log_k x + \log_k y^{c-1})$

$= (b-c)\log_k x + (c-a)\log_k x + (a-b)\log_k x + (b-c)$
$\quad \log_k y^{a-1} + (c-a)\log_k y^{b-1} + (a-b)(\log_k y^{c-1})$
$= (b-c+c-a+a-b)\log_k x + (b-c)(a-1)\log_k y +$
$\quad (c-a)(b-1)\log_k y + (a-b)(c-1)\log_k y$
$= 0 + \log_k y(ab - ca - b + c + bc - ab - c + a + ca -$
$\quad bc - a + b)$
$= 0 + 0 = 0$
= ডানপক্ষ [দেখানো হলো]

(খ) এর সমাধান:

ধরি, $\frac{ab\log_k(ab)}{a+b} = \frac{bc\log_k(bc)}{b+c} = \frac{ca\log_k(ca)}{c+a} = m$

$\therefore \log_k(ab) = \frac{m(a+b)}{ab}$ .... (i)

$\log_k(bc) = \frac{m(b+c)}{bc}$ .... (ii)

$\log_k(ca) = \frac{m(c+a)}{ca}$ .... (iii)

(i), (ii) ও (iii) নং যোগ করে পাই,

$\log_k(ab) + \log_k(bc) + \log_k(ca) = \frac{m(a+b)}{ab} + \frac{m(b+c)}{bc} + \frac{m(c+a)}{ca}$

বা, $\log_k(ab.\ bc.\ ca) = m\left[\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right]$

বা, $\log_k(abc)^2 = 2m\left[\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right]$

বা, $2\log_k(abc) = 2m\left[\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right]$

বা, $\log_k(abc) = m\left[\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right]$ ....(iv)

(iv) নং থেকে (i) নং বিয়োগ করে পাই,

$\log_k(abc) - \log_k(ab) = m\left[\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right] - \frac{m(a+b)}{ab}$

$= m\left[\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right]$

বা, $\log_k \frac{abc}{ab} = \frac{m}{c}$

বা, $\log_k c = \frac{m}{c}$

বা, $c\log_k c = m$

বা, $\log_k c^c = m$

$\therefore c^c = k^m$ ....(v)

আবার, (iv) নং থেকে (ii) নং বিয়োগ করে পাই,

$\log_k(abc) - \log_k(bc) = m\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} - \frac{m(b+c)}{bc}$

বা, $\log_k \frac{abc}{bc} = m\left[\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right]$

বা, $\log_k a = \frac{m}{a}$

বা, $\log_k{}^a = m$

বা, $\log_k a^a = m$

$\therefore a^a = k^m$ ....(iv)

পুনরায় (iv) নং থেকে (iii) নং বিয়োগ করে পাই,

$\log_k(abc) - \log_k(ca) = m\left[\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right] - \frac{m(c+a)}{ca}$

$\log_k(abc) - \log_k(ca) = m\left[\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right]$

বা, $\log_k \frac{abc}{ca} = m\left[\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right]$

বা, $\log_k b = \frac{m}{b}$

বা, $b\log_k b = m$

বা, $\log_k b^b = m$

$\therefore b^b = k^m$ ....(vii)

(v), (vi) ও (vii) নং থেকে লেখা যায়,

সুতরাং, $a^a = b^b = c^c$

$\therefore a^a = b^b = c^c$ [দেখানো হলো]

(গ) এর সমাধান:

ধরি, $\frac{x(y+z-x)}{\log_k x} = \frac{y(z+x-y)}{\log_k y} = \frac{z(x+y-z)}{\log_k z} = m$

$\therefore \log_k x = \frac{x(y+z-x)}{m}$ ....(i)

বা, $\log_k y = \frac{y(z+x-y)}{m}$ ....(ii)

বা, $\log_k z = \frac{z(x+y-z)}{m}$ ....(iii)

এখন, $\{y\times(i) + x\times(ii)\}$ করে পাই,

$y\log_k x + x\log_k y = \frac{xy(y+z-x)}{m} + \frac{xy(z+x-y)}{m}$

$= \frac{xy}{m}(y+z-x+z+x-y)$

$= \frac{2xyz}{m}$

বা, $\log_k x^y + \log_k y^x = \frac{2xyz}{m}$

বা, $\log_k x^y y^x = \frac{2xyz}{m}$

$\therefore x^y y^x = k^{\frac{2xyz}{m}}$ ....(iv)

আবার, $\{z\times(ii) + y\times(iii)\}$ পাই,

$z\log_k y + y\log_k z = \frac{yz(z+x-y)}{m} + \frac{yz(x+y-z)}{m}$

বা, $\log_k y^z + \log_k z^y = \frac{yz}{m}[z+x-y+x+y-z]$

বা, $\log_k y^z z^y = \frac{2xyz}{m}$

$\therefore y^z z^y = k^{\frac{2xyz}{m}}$ ....(v)

আবার, $\{(iii)\times x + (i)\times z\}$ পাই,

$x\log_k z + z\log_k x = \frac{zx(x+y-z)}{m} + \frac{zx(y+z-x)}{m}$

বা, $\log_k z^x + \log_k x^z = \frac{zx}{m}[x+y-z+y+z-x]$

বা, $\log_k z^x x^z = \frac{2xyz}{m}$

$\therefore z^x x^z = k^{\frac{2xyz}{m}}$ ....(vi)

সুতরাং, (iv), (v) ও (vi) নং থেকে পাই,

$x^y y^x = y^z z^y = z^x x^z$ [দেখানো হলো]

৮। লেখচিত্র অঙ্কন কর:
(ক) $y = 3^x$ (খ) $y = -3^x$ (গ) $y = 3^{x+1}$ (ঘ) [illegible]
(ঙ) $y = 3^{-x+1}$ (চ) $y = 3^{x-1}$

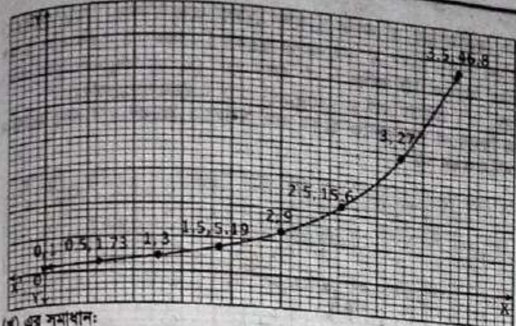
(ক) এর সমাধান:

ধরি, $y = f(x) = 3^x$

প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x এবং y এর অনুরূপ [illegible] প্রস্তুত করি:

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	[illegible]
y	1	1.73	3	5.19	9	15.6	27	[illegible]

এখন, ছক কাগজে সুবিধামত X অক্ষ XOX' এবং Y অক্ষ YOY' [illegible] বরাবর ক্ষুদ্রতম 5 বর্গ ঘর = 1 একক এবং Y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম [illegible] একক ধরে (x, y) বিন্দুগুলো স্থাপন করি। বিন্দুগুলোকে সরলরেখা [illegible] করলে $y = f(x)$ এর লেখ পাওয়া যায়। যা চিত্রে দেখানো হলো।



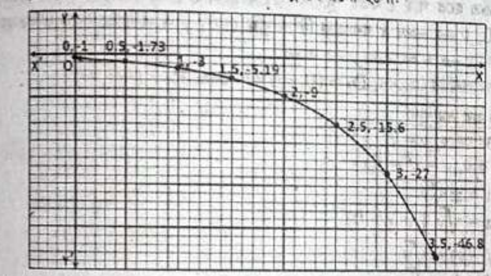
(খ) এর সমাধান:

ধরি, $y = f(x) = -3^x$

প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x এবং y এর অনুরূপ মানগুলোর তালিকা প্রস্তুত করি:

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5
y	−1	−1.73	−3	−5.19	−9	−15.6	−27	−46.8

এখন, ছক কাগজে সুবিধামত X অক্ষ XOX' এবং Y অক্ষ YOY' আঁকি। X-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 10 বর্গ ঘর = 1 একক এবং Y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 1 বর্গঘর = 2 একক ধরে (x,y) বিন্দুগুলো স্থাপন করি। বিন্দুগুলোকে সহজভাবে বক্ররেখায় যুক্ত করলে $y = f(x)$ এর লেখ পাওয়া যায়। যা নিম্নে দেখানো হলো:



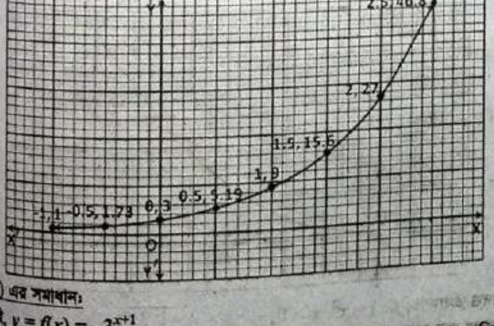
(গ) এর সমাধান:

ধরি, $y = f(x) = 3^{x+1}$

প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x এবং y এর অনুরূপ মানগুলোর তালিকা প্রস্তুত করি:

x	−1	−0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5
y	1	1.73	3	5.19	9	15.6	27	46.8

এখন, ছক কাগজে সুবিধামত X-অক্ষ XOX' এবং Y অক্ষ YOY' আঁকি। X-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 10 বর্গ ঘর = 1 একক এবং Y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 1 বর্গঘর = 2 একক ধরে (x,y) বিন্দুগুলো স্থাপন করি। বিন্দুগুলোকে সহজভাবে বক্ররেখায় যুক্ত করলে $y = f(x)$ এর লেখ পাওয়া যায়।। যা নিম্নে দেখানো হলো:



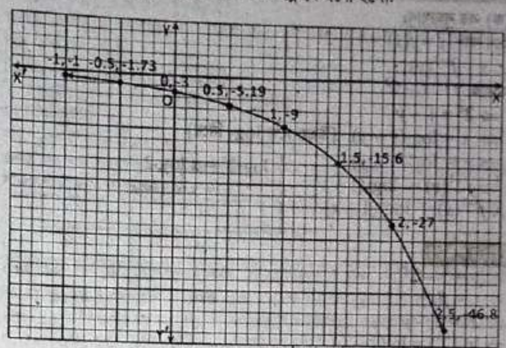
(ঘ) এর সমাধান:

ধরি, $y = f(x) = -3^{x+1}$

প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x এবং y এর অনুরূপ মানগুলোর তালিকা প্রস্তুত করি:

x	−1	−0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5
y	−1	−1.73	−3	−5.19	−9	−15.6	−27	−46.8

এখন, ছক কাগজে সুবিধামত X-অক্ষ XOX' এবং Y অক্ষ YOY' আঁকি। X-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 10 বর্গ ঘর = 1 একক এবং Y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 1 বর্গঘর = 2 একক ধরে (x,y) বিন্দুগুলো স্থাপন করি। বিন্দুগুলোকে সহজভাবে বক্ররেখায় যুক্ত করলে $y = f(x)$ এর লেখ পাওয়া যায়। যা নিম্নে দেখানো হলো:



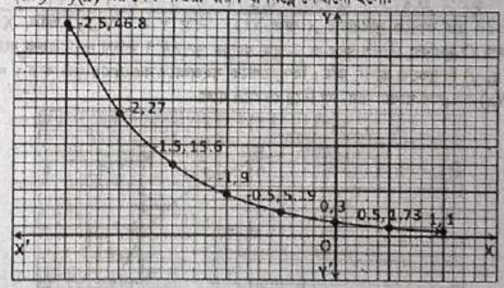
(ঙ) এর সমাধান:

ধরি, $y = f(x) = 3^{-x+1}$

প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x এবং y এর অনুরূপ মানগুলোর তালিকা প্রস্তুত করি:

x	1	0.5	0	−0.5	−1	−1.5	−2	−2.5
y	1	1.73	3	5.19	9	15.6	27	46.8

এখন, ছক কাগজে সুবিধামত X-অক্ষ XOX' এবং Y অক্ষ YOY' আঁকি। X-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 10 বর্গ ঘর = 1 একক এবং Y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 1 বর্গঘর = 2 একক ধরে (x,y) বিন্দুগুলো স্থাপন করি। বিন্দুগুলোকে সহজভাবে বক্ররেখায় যুক্ত করলে $y = f(x)$ এর লেখ পাওয়া যায়। যা নিম্নে দেখানো হলো:



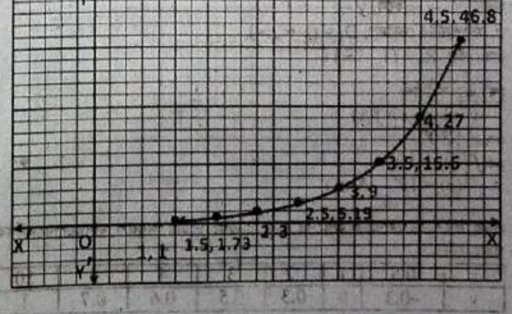
(চ) এর সমাধান:

ধরি, $y = f(x) = 3^{x-1}$

প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x এবং y এর অনুরূপ মানগুলোর তালিকা প্রস্তুত করি:

x	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5
y	1	1.73	3	5.19	9	15.6	27	46.8

এখন, ছক কাগজে সুবিধামত X-অক্ষ XOX' এবং Y অক্ষ YOY' আঁকি। X-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 5 বর্গ ঘর = 1 একক এবং Y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 1 বর্গঘর = 2 একক ধরে (x,y) বিন্দুগুলো পাতন করি। বিন্দুগুলোকে সহজভাবে বক্ররেখায় যুক্ত করে $y = f(x)$ এর লেখ পাওয়া যায়। যা নিম্নে দেখানো হলো:



। নিচের ফাংশনের বিপরীত ফাংশন নির্ণয় কর এবং লেখচিত্র অঙ্কন করে ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর।

(ক) $y = 1 - 2^x$ (খ) $y = \log_{10} x$ (গ) $y = x^2, x > 0$

(ক) এর সমাধান:
মনে করি, $y = f(x) = 1 - 2^x$
$\therefore x = f^{-1}(y)$
আবার, $y = 1 - 2^x$
$\Rightarrow 2^x = 1 - y$
$\Rightarrow x = \log_2(1 - y)$ [উভয়পক্ষে $\log_2$ নিয়ে]
$\Rightarrow x = \log_2(1 - y)$
$\Rightarrow f^{-1}(y) = \log_2(1 - y)$
$\therefore f^{-1}(x) = \log_2(1 - x)$

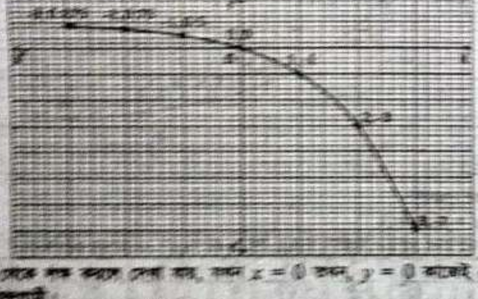
$\log_2 2^x = x\log_2 2$
$= x \times 1 = x$

বিকল্প পদ্ধতি:
$y = 1 - 2^x$
$= f(x)$
$\Rightarrow 2^x = 1 - y$
$\Rightarrow \ln(2^x) = \ln(1 - y)$
$\Rightarrow x\ln(2) = \ln(1 - y)$
$\Rightarrow x = \dfrac{\ln(1 - y)}{0.695}$
$= f^{-1}(y)$
$\therefore f^{-1}(x) = \dfrac{\ln(1 - x)}{0.695}$ (Ans.)

প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x এবং y এর অনুরূপ মানগুলোর তালিকা প্রস্তুত করি:

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	0.875	0.75	0.5	0	−1	−3	−7

এখন, ছক কাগজে সুবিধামত X-অক্ষ XOX′ এবং Y-অক্ষ YOY′ আঁকি। X-অক্ষ O মূলবিন্দু নির্দেশ করে ও y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 5 বর্গঘর = 1 একক ধরে (x, y) বিন্দুগুলো স্থাপন করি। বিন্দুগুলোকে সরলভাবে বক্ররেখায় যুক্ত করে $y = f(x)$ এর লেখ পাওয়া যায় যা নিচে দেখানো হলো:



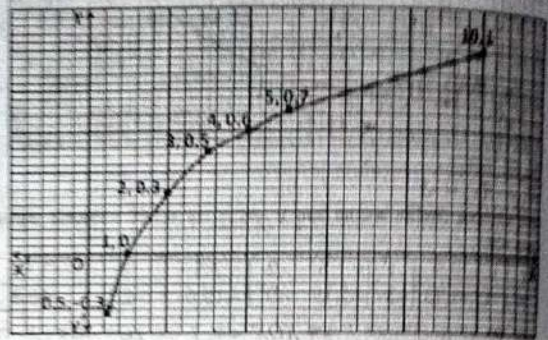
চিত্র থেকে লক্ষ করলে দেখা যায়, যখন $x = 0$ তখন, $y = 0$ কাজেই লেখটি মূলবিন্দুগামী।
এখানে, x এর মান যতই হ্রাস পায় y এর মান ততই 1 এর কাছাকাছি হয় এবং ক্রমাগত 1 এর দিকে ধাবিত হয়। অর্থাৎ, $x \to -\infty$ হলে, $y \to 1$।
আবার, x এর মান যতই বৃদ্ধি পায় y এর মান ততই হ্রাস পেতে থাকে এবং ক্রমাগত $-\infty$ এর দিকে ধাবিত হয়।
অর্থাৎ, $x \to \infty$ হলে, $y \to -\infty$।
$\therefore$ ফাংশনটির ডোমেন, $D_f = (-\infty, \infty)$
এবং রেঞ্জ, $R_f = (1, -\infty)$।

(খ) এর সমাধান:
$y = \log_{10} x = f(x)$
$\Rightarrow x = 10^y$
$\Rightarrow f^{-1}(y) = 10^y$
$\therefore f^{-1}(x) = 10^x$ (Ans.)

প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x এবং y এর অনুরূপ মানগুলোর তালিকা প্রস্তুত করি:

x	0.5	1	2	3	4	5	10
y	−0.3	0	0.3	0.5	0.6	0.7	1

এখন, ছক কাগজে সুবিধামত X-অক্ষ XOX′ এবং Y-অক্ষ YOY′ আঁকি, O মূলবিন্দু নির্দেশ করে। X-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 5 বর্গঘর = 1 একক এবং Y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 10 বর্গঘর = 1 একক ধরে (x, y) বিন্দুগুলো স্থাপন করি, বিন্দুগুলোকে সংযোগ করে $y = \log_{10}x$ এর লেখ অঙ্কন সম্পন্ন করি।
প্রাপ্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করে বিন্দুগুলো সংযোগ করে প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন করি।



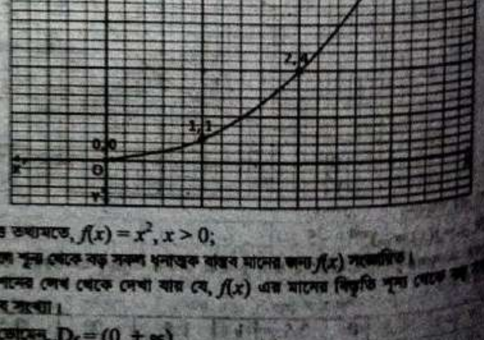
যেহেতু লগারিদম শুধুমাত্র ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার জন্য সংজ্ঞায়িত হয় এবং শূন্যের (0) অসংজ্ঞায়িত।
লেখচিত্র হতে পাই x যতই শূন্যের (0) কাছাকাছি হয় y ততই হ্রাস পায়, অর্থাৎ $x \to 0, y \to -\infty$; x ধনাত্মক দিকে বৃদ্ধি পেলে y ও অসীমের দিকে ধাবিত হয়।
অর্থাৎ, $x \to +\infty$, হলে $y \to +\infty$
$\therefore$ ফাংশনটির ডোমেন, $D_f = (0, \infty)$ এবং রেঞ্জ, $R_f = (-\infty, \infty)$।

(গ) এর সমাধান:
দেওয়া আছে, $y = x^2, x > 0$
মনে করি, $y = x^2 = f(x)$
$\Rightarrow x = \pm\sqrt{y}$
$\Rightarrow x = \sqrt{y}$ [$\because x > 0$]
$\Rightarrow f^{-1}(y) = \sqrt{y}$
$\therefore f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x এবং y এর অনুরূপ মানগুলোর তালিকা প্রস্তুত করি:

x	0	1	2	3
y	0	1	4	9

এখন, ছক কাগজে সুবিধামত X-অক্ষ XOX′ এবং Y-অক্ষ YOY′ আঁকি, O মূলবিন্দু নির্দেশ করে। x-অক্ষ ও y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 5 বর্গঘর = 1 একক ধরে (x, y) বিন্দুগুলো স্থাপন করি। বিন্দুগুলো সংযোগ করে, $y = x^2$ এর লেখ অঙ্কন সম্পন্ন করি।
প্রাপ্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করে বিন্দুগুলো সংযোগ করে প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন করি।



প্রদত্ত তথ্যমতে, $f(x) = x^2, x > 0$;
অতএব শূন্য থেকে বড় সকল ধনাত্মক বাস্তব মানের জন্য $f(x)$ সংজ্ঞায়িত।
ফাংশনের লেখ থেকে দেখা যায় যে, $f(x)$ এর মানের বিস্তৃতি শূন্য থেকে বড় সকল বাস্তব সংখ্যা।
$\therefore$ ডোমেন, $D_f = (0, +\infty)$
এবং রেঞ্জ, $R_f = (0, +\infty)$।

১০। $f(x) = \ln(x-2)$ ফাংশনটির D_f ও R_f নির্ণয় কর:

সমাধান:

$f(x) = ln(x-2)$

ডোমেন নির্ণয়: যেহেতু লগারিদম শুধুমাত্র ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার জন্য সংজ্ঞায়িত হয়। $\ln(x-2)$ সংজ্ঞায়িত হবে যদি $x-2>0$ হয়।

এখন $x-2>0$

$\therefore x>2$

$\therefore$ ডোমেন $D_f = \{x : x>2\} = (2, \infty)$

রেঞ্জ নির্ণয়: $y = ln(x-2)$ [ধরি, $y = f(x)$]

$\Rightarrow e^y = x-2$

$\therefore x = e^y + 2$

y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বাস্তব হয়।

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের রেঞ্জ $R_f = R$

উত্তর: ডোমেন $D_f = (2,\infty)$ ও রেঞ্জ $R_f = R$

১১। $f(x) = \ln\dfrac{1-x}{1+x}$ ফাংশনটির ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর।

সমাধান:

যেহেতু লগারিদম শুধুমাত্র ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার জন্য সংজ্ঞায়িত হয়।

$\therefore \dfrac{1-x}{1+x} > 0$ যদি (i) $1-x>0$ এবং $1+x>0$ হয়

অথবা, (ii) $1-x<0$ এবং $1+x<0$ হয়।

(i) $-x>-1$ এবং $x>-1$

$\Rightarrow x<1$ এবং $x>-1$

$\therefore$ ডোমেন $D_f = \{x : -1<x\} \cap \{x : x<1\}$
$= (-1,\infty) \cap (-\infty,1)$
$= (-1,1)$

(ii) $-x<-1$ এবং $x<-1$

$\Rightarrow x>1$ এবং $x<-1$

$\therefore$ ডোমেন $D_f = \{x : x<-1\} \cap \{x : x>1\} = \varnothing$

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেন

D_f = (i) ও (ii) এর ক্ষেত্রে প্রাপ্ত ডোমেনের সংযোগ সেট

$= (-1,1) \cup \varnothing = (-1,1)$

ধরি, রেঞ্জ: $y = f(x) = ln\dfrac{1-x}{1+x}$

$\Rightarrow e^y = \dfrac{1-x}{1+x}$

$\Rightarrow 1-x = (1+x)e^y$

$\Rightarrow 1-x = e^y + xe^y$

$\Rightarrow 1-e^y = x(1+e^y)$

$\Rightarrow x = \dfrac{1-e^y}{1+e^y}$

y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বাস্তব হয়।

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের রেঞ্জ $R_f = R$

উত্তর: প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেন $D_f = (-1,1)$
প্রদত্ত ফাংশনের রেঞ্জ $R_f = R$.

জেনে রাখা ভালো:

(a) কোনো অসমতাকে ঋণাত্মক সংখ্যা দ্বারা গুণ বা, ভাগ করলে অসমতার দিক বিপরীত হয়।

অর্থাৎ, (i) $a>b$ হলে, $(-1)a<(-1)b$। যেমন- $3>2 \Rightarrow -3<-2$.

(ii) $a>b$ হলে, $\dfrac{a}{-1}<\dfrac{b}{-1}$। যেমন- $3>2 \Rightarrow \dfrac{3}{-1}<\dfrac{2}{-1} \Rightarrow -3<-2$.

(b) a, b অশূন্য বাস্তব সংখ্যা এবং $a>b$ হলে, $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$। যেমন- $3>2 \Rightarrow \dfrac{1}{3}<\dfrac{1}{2}$

১২। ডোমেন, রেঞ্জ উল্লেখসহ লেখচিত্র অঙ্কন কর।

(ক) $f(x) = |x|$, যখন $-5\le x\le 5$

(খ) $f(x) = x+|x|$, যখন $-2\le x\le 2$

(গ) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x}, & \text{যখন } x\neq 0 \\ 0, & \text{যখন } x=0 \end{cases}$

(ক) $f(x) = |x|$ যখন $-5\le x\le 5$

সমাধান:

দেওয়া আছে, $f(x) = |x|$, যখন $-5\le x\le 5$

x এর প্রদত্ত সীমার মধ্যে $f(x)$ এর সর্বদা বাস্তব মান পাওয়া যায়।

$\therefore D_f = -5\le x\le 5 = [-5, 5]$

আবার যেহেতু $f(x)$ পরমমান ফাংশন তাই $-5\le x\le 5$ ব্যবধিতে $f(x)$ এর মান হবে $0\le f(x)\le 5$.

$\therefore R_f = 0\le f(x)\le 5 = [0, 5]$

$\therefore$ ডোমেন $D_f = [-5, 5]$, রেঞ্জ $R_f = [0, 5]$

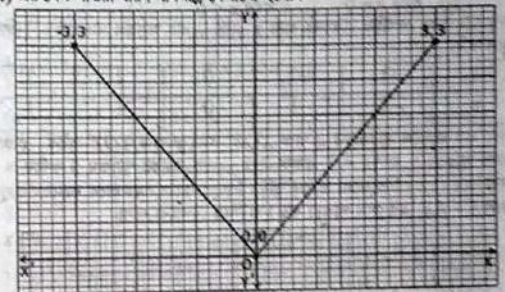
লেখচিত্র অঙ্কন:

ধরি, $y = f(x) = |x|$

প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য -5 থেকে 5 এর মধ্যে x এবং y এর অনুরূপ মানগুলোর তালিকা প্রস্তুত করি:

x	-3	0	3
y	3	0	3

এখন, ছক কাগজে সুবিধামত X-অক্ষ XOX' এবং Y-অক্ষ YOY' আঁকি। X-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতর 3 বর্গঘর = 1 একক এবং Y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 5 বর্গঘর = 1 একক ধরে (x,y) বিন্দুগুলো স্থাপন করি। বিন্দুগুলোকে সহজভাবে বক্ররেখায় যুক্ত করলে $y = f(x)$ এর লেখ পাওয়া যায়। যা নিম্নে দেখানো হলো।



(খ) $f(x) = x+|x|$ যখন $-2\le x\le 2$

সমাধান:

দেওয়া আছে, $f(x) = x+|x|$, যখন, $-2\le x\le 2$

x এর প্রদত্ত সীমার মধ্যে $f(x)$ সর্বদা সংজ্ঞায়িত।

$\therefore D_f = -2\le x\le 2 = [-2, 2]$

আবার x যখন ঋণাত্মক তখন,

$f(x) = -x+|-x| = -x+x = 0$

এবং যখন ধনাত্মক $f(x) = x+|x| = 2x$

$\therefore f(x)$ এর রেঞ্জ $R_f = 0\le f(x)\le 4 = [0, 4]$

$\therefore$ ডোমেন $D_f = [-2, 2]$, রেঞ্জ $R_f = [0,4]$

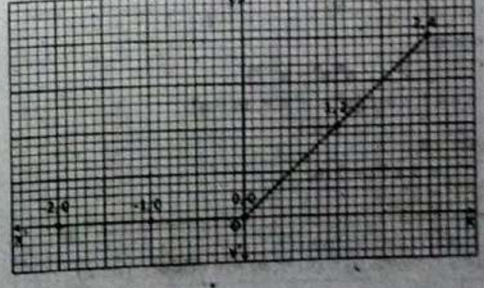
লেখচিত্র অঙ্কন:

ধরি, $y = f(x) = x+|x|$

প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য -2 থেকে 2 এর মধ্যে x এবং y এর অনুরূপ মানগুলোর তালিকা প্রস্তুত করি:

x	-2	-1	0	1	2
y	0	0	0	2	4

এখন, ছক কাগজে সুবিধামত x-অক্ষ XOX' এবং y-অক্ষ YOY' আঁকি। x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতর 5 বর্গঘর = 1 একক এবং y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 5 বর্গঘর = 1 একক ধরে (x,y) বিন্দুগুলো স্থাপন করি। বিন্দুগুলোকে সহজভাবে বক্ররেখায় যুক্ত করলে $y = f(x)$ এর লেখ পাওয়া যায়। যা নিম্নে দেখানো হলো:



(গ) $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & \text{যখন } x \neq 0 \\ 0 & \text{যখন } x = 0 \end{cases}$

সমাধান:

দেওয়া আছে, $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & \text{যখন } x \neq 0 \\ 0 & \text{যখন } x = 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{যখন } x > 0 \\ 0 & \text{যখন } x = 0 \\ -1 & \text{যখন } x < 0 \end{cases}$

এখানে, $x < 0$ এর জন্য $f(x) = -1$, $x = 0$ এর জন্য $f(x) = 0$ এবং $x > 0$ এর জন্য $f(x) = 1$ অর্থাৎ x এর সকল বাস্তব মানের জন্য প্রদত্ত ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত।

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেন $D_f = R$

আবার, $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & \text{যখন } x \neq 0 \\ 0 & \text{যখন } x = 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{যখন } x > 0 \\ 0 & \text{যখন } x = 0 \\ -1 & \text{যখন } x < 0 \end{cases}$

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের রেঞ্জ: $R_f = \{-1, 0, 1\}$

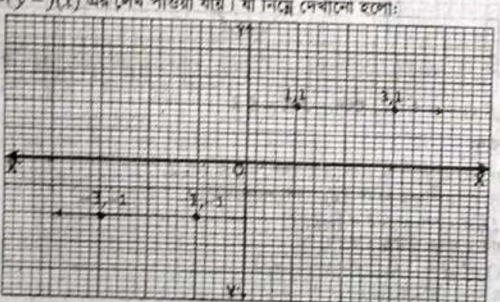
লেখচিত্র অঙ্কন:

$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & \text{যখন } x \neq 0 \\ 0 & \text{যখন } x = 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{যখন } x > 0 \\ 0 & \text{যখন } x = 0 \\ -1 & \text{যখন } x < 0 \end{cases}$

প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x এবং y এর অনুরূপ মানগুলোর তালিকা প্রস্তুত করি:

x	-3	-1	0	1	3
y	-1	-1	0	1	1

এখন, ছক কাগজে সুবিধামত x-অক্ষ XOX' এবং y-অক্ষ YOY' আঁকি। x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতর 5 বর্গঘর = 1 একক এবং y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 5 বর্গঘর = 1 একক ধরে (x, y) বিন্দুগুলো স্থাপন করি। বিন্দুগুলোকে সহজভাবে বক্ররেখায় যুক্ত করলে $y = f(x)$ এর লেখ পাওয়া যায়। যা নিম্নে দেখানো হলো:



১৩। দেওয়া আছে,

$2^{2x}.2^{y-1} = 64$ .... (i)

এবং $6^x.\frac{6^{y-2}}{3} = 72$ .... (ii)

(ক) (i) ও (ii) কে x ও y চলকবিশিষ্ট সরল সমীকরণে পরিণত কর।

(খ) সমীকরণদ্বয় সমাধান করে শুদ্ধতা যাচাই কর।

(গ) x ও y মান যদি কোনো চতুর্ভুজের সন্নিহিত বাহুর দৈর্ঘ্য হয় যেখানে বাহুদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ $90°$, তবে চতুর্ভুজটি আয়ত না বর্গ উল্লেখ কর এবং এর ক্ষেত্রফল ও কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

(ক) এর সমাধান:

দেওয়া আছে, $2^{2x}.2^{y-1} = 64$ .... (i)

$6^x.\frac{6^{y-2}}{3} = 72$ .... (ii)

(i) নং হতে পাই,

$2^{2x+y-1} = 2^6$ [$\because a^m.a^n = a^{m+n}$]

$\Rightarrow 2x + y - 1 = 6$ [$a^m = a^n$ হলে, $m = n$]

$\therefore 2x + y = 7$ .... (iii)

(ii) নং হতে পাই,

$6^{x+y-2} = 3 \times 72 = 216$

$\Rightarrow 6^{x+y-2} = 6^3$

$\Rightarrow x + y - 2 = 3$

$\therefore x + y = 5$ .... (iv)

(iii) ও (iv) নং যথাক্রমে (i) ও (ii) নং এর সরল সমীকরণ। **(Ans.)**

(খ) এর সমাধান:

'ক' হতে পাই,

$2x + y - 7 = 0$ .... (i)

$x + y - 5 = 0$ .... (ii)

(i) − (ii) $\Rightarrow x - 2 = 0$

$\therefore x = 2$

$x = 2$, (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$\therefore 2.2 + y - 7 = 0$

$\Rightarrow y = 7 - 4 = 3$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $(x, y) = (2, 3)$

শুদ্ধি পরীক্ষা:

$x = 2, y = 3$ এর জন্য,

(i) নং এর:

বামপক্ষ $= 2^{2.2}.2^{3-1}$

$= 2^4.2^2$

$= 16.4$

$= 64$

$=$ ডানপক্ষ

(ii) নং এর:

বামপক্ষ $= 6^x.\frac{6^{y-2}}{3}$

$= 6^2.\frac{6^{3-2}}{3}$

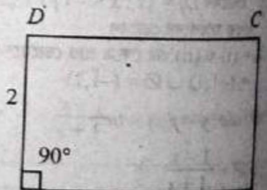
$= 36.\frac{6}{3}$

$= 72 =$ ডানপক্ষ

$\therefore (x, y) = (2, 3)$ এর জন্য (i) ও (ii) নং শুদ্ধ।

(গ) x ও y মান যদি কোনো চতুর্ভুজের সন্নিহিত বাহুর দৈর্ঘ্য হয় যেখানে বাহুদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ $90°$, তবে চতুর্ভুজটি আয়ত না বর্গ উল্লেখ কর এবং এর ক্ষেত্রফল ও কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান:



এখানে,

$ABCD$ চতুর্ভুজের দুটি সন্নিহিত বাহু,

$AB = x = 3$

$AD = y = 2$

$\because AB \neq AD$ এবং এদের অন্তর্ভুক্ত কোণ $90°$।

সুতরাং $ABCD$ চতুর্ভুজটি একটি আয়ত।

$\therefore$ ক্ষেত্রফল $= AB \times AD$

$= 3 \times 2 = 6$ বর্গ একক **(Ans.)**

$\therefore$ কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{AB^2 + BC^2}$

$= \sqrt{3^2 + 2^2}$

$= \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$ একক **(Ans.)**

১৪। দেওয়া আছে, $y = 2^x$

(ক) প্রদত্ত ফাংশনটির ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর।

(খ) ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন কর এবং এর বৈশিষ্ট্যগুলি লিখ।

(গ) ফাংশনটির বিপরীত ফাংশন নির্ণয় করে এটি এক-এক কিনা যা [illegible] এবং বিপরীত ফাংশনটির লেখচিত্র আঁক।

(ক) এর সমাধান:

দেওয়া আছে, $y = 2^x$

এখানে, x এর সকল বাস্তব মানের জন্য ফাংশনটির বাস্তব মান পাওয়া যায়।

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেন, $D_f = (-\infty, \infty)$

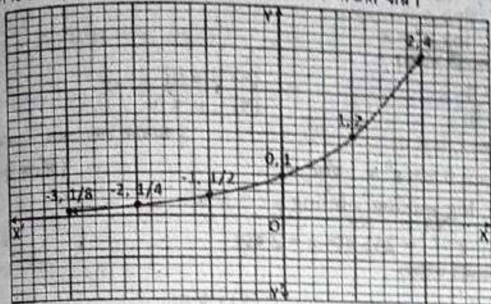
আবার, x এর সকল বাস্তব মানের জন্য, $f(x) > 0$

$\therefore$ ফাংশনের রেঞ্জ, $R_f = (0, \infty)$

(খ) এর সমাধান:
প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x এবং y এর অনুরূপ মানগুলোর তালিকা প্রস্তুত করি:

x	-3	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4

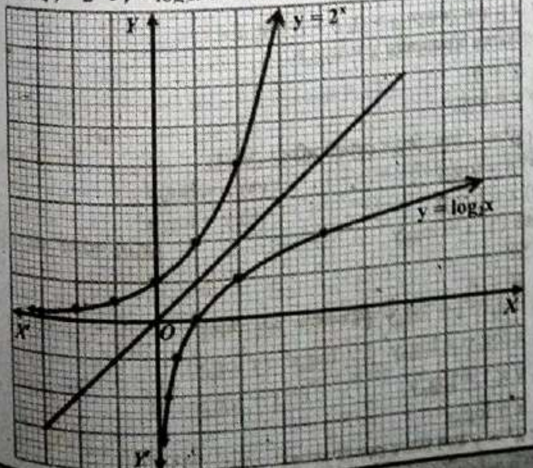
এখন, ছক কাগজে সুবিধামত x-অক্ষ XOX′ এবং Y-অক্ষ YOY′ আঁকি; O মূলবিন্দু নির্দেশ করে। X-অক্ষ ও Y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 5 বর্গঘর = 1 একক ধরে (x, y) বিন্দুগুলো স্থাপন করি।
ছক কাগজে বিন্দুগুলো সংযুক্ত করলে নিম্নরূপ লেখচিত্র পাওয়া যায়।



বৈশিষ্ট্য:
(i) লেখচিত্র y অক্ষকে একটিমাত্র বিন্দুতে ছেদ করে।
(ii) x এর সকল বাস্তব মানের জন্য $y > 0$ হওয়ায় ফাংশনের লেখচিত্র কখনো x-অক্ষকে স্পর্শ বা ছেদ করে না।
(iii) ফাংশনের লেখের বিস্তৃতি x অক্ষের অর্ধউপরিতলে অবস্থিত।
(iv) y অক্ষের ডানদিকে ফাংশনের লেখ উর্ধ্বগামী।
(v) ফাংশনের লেখচিত্র কোনো অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম নয়।

(গ) সমাধান:
এখানে, $y = 2^x = f(x)$
$\Rightarrow 2^x = y$
$\Rightarrow x = \log_2 y$ [উভয়পক্ষে $\log_2$ নিয়ে]
$\Rightarrow f^{-1}(y) = \log_2 y$
$\therefore f^{-1}(x) = \log_2 x$
এক এক নির্ণয়: ধরি, $x_1, x_2 \in R$ এর জন্য $f^{-1}(x_1) = f^{-1}(x_2)$
$\log_2 x_1 = \log_2 x_2$
$\therefore x_1 = x_2$
$\therefore f^{-1}(x_1) = f^{-1}(x_2)$ হবে যদি ও কেবল যদি $x_1 = x_2$ হয়।
$\therefore f(x)$ একটি এক-এক ফাংশন। **(Ans.)**

বিপরীত ফাংশনের লেখচিত্র:
যেহেতু $y = \log_2 x$ হলো, $y = 2^x$ এর বিপরীত ফাংশন।
$y = x$ রেখা সাপেক্ষে সূচক ফাংশনের প্রতিফলন লগারিদমিক ফাংশন নির্ণয়।
করা হয়েছে, $y = 2^x$ ও $y = \log_2 x$ লেখচিত্র পরস্পর, $y = x$ রেখার সাপেক্ষে প্রতিসম।



১০। $f(x) = 3^{2x+2}$ এবং $g(x) = 27^{x+1}$
(ক) $f(x)$ এর ডোমেন নির্ণয় কর।
(খ) $f(x) + g(x) = 36$ হলে, x এর মান নির্ণয় কর।
(গ) $Q(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$ হলে, $Q(x)$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করে লেখচিত্র থেকে ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর।

(ক) এর সমাধান:
দেওয়া আছে, $f(x) = 3^{2x+2}$
এখানে, x এর সকল বাস্তব মানের জন্য ফাংশনটির বাস্তব মান পাওয়া যায়।
$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেন, $D_f = (-\infty, \infty)$

(খ) এর সমাধান:
$$3^{2x+2} + 27^{x+1} = 36$$
বা, $\left(3^{2x}.3^2\right) + \left(3^3\right)^{x+1} = 36$ [$\because a^{m+n} = a^m.a^n$]
বা, $9.3^{2x} + \left(3^3\right)^x.3^3 = 36$
বা, $9.3^{2x} + 27.3^{3x} = 36$
বা, $27.\left(3^x\right)^3 + 9.\left(3^x\right)^2 - 36 = 0$
বা, $27a^3 + 9a^2 - 36 = 0$ [$3^x = a$ ধরে]
বা, $3a^3 + a^2 - 4 = 0$ [উভয়পক্ষকে 9 দ্বারা ভাগ করে]
বা, $3a^3 - 3a^2 + 4a^2 - 4a + 4a - 4 = 0$
বা, $3a^2(a-1) + 4a(a-1) + 4(a-1) = 0$
বা, $(a-1)(3a^2 + 4a + 4) = 0$
বা, $(a-1)(3a^2 + 4a + 4) = 0$
$\therefore a - 1 = 0$
বা, $a = 1$
বা, $3^x = 3^0$
$\therefore x = 0$

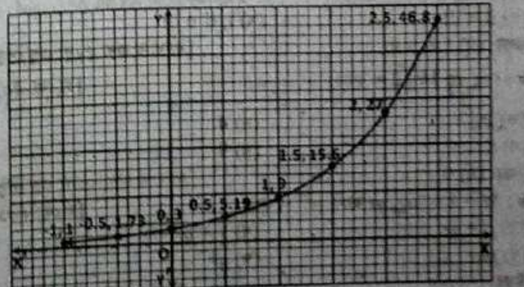
অথবা, $3a^2 + 4a + 4 = 0$
বা, $a = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4.3.4}}{2.3}$
বা, $a = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 48}}{6}$
বা $a = \frac{-4 \pm \sqrt{-32}}{6}$

এখানে, $\sqrt{-32}$ অবাস্তব। সুতরাং ইহা গ্রহণযোগ্য নয়।
$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = 0$

(গ) এর সমাধান:
দেওয়া আছে,
$f(x) = 3^{2x+2}$ এবং $g(x) = 27^{x+1}$
$$\therefore Q(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{27^{x+1}}{3^{2x+2}} = \frac{3^{3(x+1)}}{3^{2x+2}} = \frac{3^{3x+3}}{3^{2x+2}} = 3^{3x+3-2x-2} = 3^{x+1}$$
$\therefore Q(x) = 3^{x+1}$
ধরি, $y = Q(x) = 3^{x+1}$
প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x এবং y এর অনুরূপ মানগুলোর তালিকা প্রস্তুত করি:

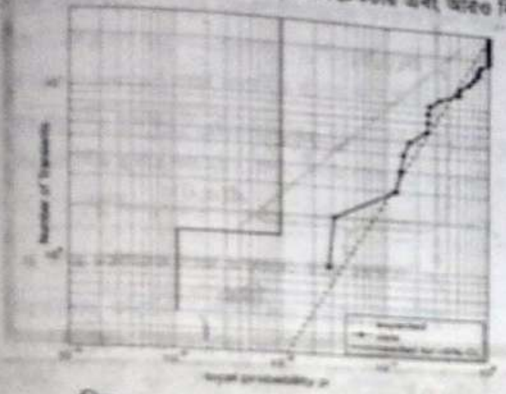
x	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5
y	1	1.73	3	5.19	9	15.6	27	46.8

এখন, ছক কাগজে সুবিধামত X-অক্ষ XOX' এবং Y অক্ষ YOY' আঁকি। X-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 10 বর্গ ঘর = 1 একক এবং Y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 1 বর্গঘর = 2 একক ধরে (x, y) বিন্দুগুলো স্থাপন করি। বিন্দুগুলোকে সহজভাবে বক্ররেখায় যুক্ত করলে $y = f(x)$ এর লেখ পাওয়া যায়। যা নিম্নে দেখানো হলো:

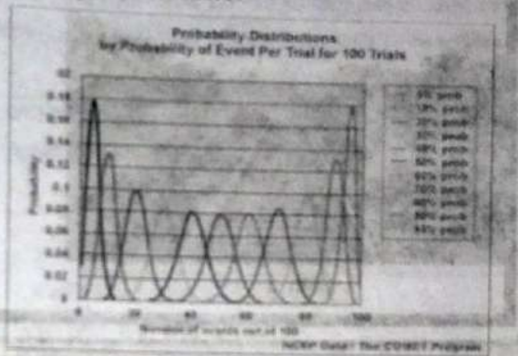


৯ বাস্তব জীবনে এ অধ্যায়ের প্রয়োগ

আমাদের প্রাত্যহিক জীবনে দ্বিপদী বিস্তৃতির ব্যবহার ব্যাপক। খুব ক্ষুদ্র স্তর থেকে অতি উচ্চ স্তর পর্যন্ত দ্বিপদী বিস্তৃতির ব্যবহার রয়েছে। যেমন, আবহাওয়ার পূর্বাভাস প্রদানের ক্ষেত্রে দ্বিপদী বিস্তৃতির ব্যবহার করা হয়ে থাকে। আবার, জাতীয়ভাবে একটি দেশের অর্থনৈতিক অবস্থা পর্যালোচনার ক্ষেত্রেও দ্বিপদীর ব্যবহার করা হয়। আজকাল অত্যাধুনিক স্থাপত্যকলার কিংবা সুদর্শন বাড়ি তৈরিতে দ্বিপদী বিস্তৃতির ব্যবহার রয়েছে। ইন্টারনেটের আই.পি.অ্যাড্রেস, এবং বিভিন্ন প্রতিযোগিতামূলক ফলাফল নির্ধারণের মাধ্যম হিসেবে দ্বিপদী ব্যবহার করা হয়ে থাকে। সর্বপরি শুধু হাতে গোনা কিছু সমস্যা সমাধানের জন্য নয় বরং উচ্চতর বিভিন্ন শিক্ষায় যেমন ইঞ্জিনিয়ারিং, আর্কিটেকচার এবং আরও বিভিন্ন ক্ষেত্রে দ্বিপদী বিস্তৃতির ব্যবহার রয়েছে।

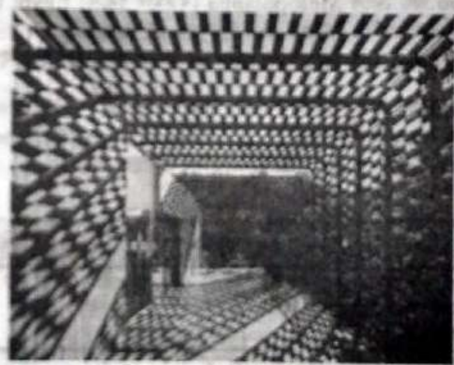


চিত্র-১ : আবহাওয়ার পূর্বাভাস নির্দেশনে

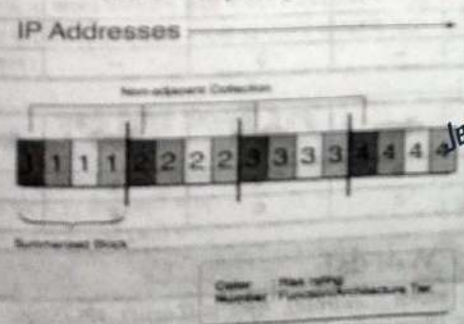


চিত্র-২ : অর্থনৈতিক পর্যালোচনায়

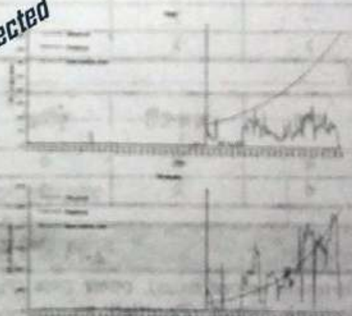
চিত্র-৩ : বাড়ির নকশায়



চিত্র-৪ : আর্কিটেকচারে



চিত্র-৫ : আইপি অ্যাড্রেসে



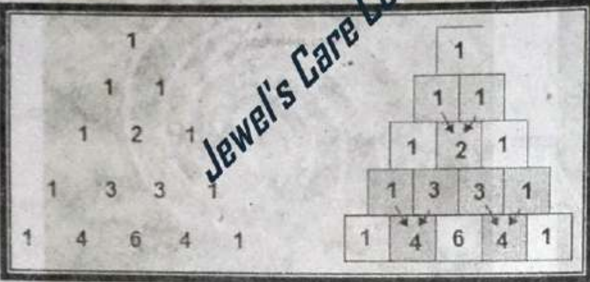
চিত্র-৬: সম্ভাব্যতায়

"A problem is a chance for you to do your best".

–Duke Ellington

১০ দ্বিপদী বিস্তৃতি [Binomial Expansion]

অনুশীলনী-১০.১



চিত্র-১: প্যাসকেলের ত্রিভুজ

$$(x+y)^0 = 1$$
$$(x+y)^1 = 1x + 1y$$
$$(x+y)^2 = 1x^2 + 2xy + 1y^2$$
$$(x+y)^3 = 1x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 1y^2$$
$$(x+y)^4 = 1x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + 1y^4$$
$$(x+y)^5 = 1x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + 1y^5$$

চিত্র-২: দ্বিপদী বিস্তৃতির সূত্রাবলী

ভূমিকা [Introduction]

দ্বিপদী রাশি বা বহুপদী রাশির ঘাত বা শক্তি তিন এর বেশি হলে সেই সকল রাশির মান নির্ণয় যথেষ্ট শ্রমসাধ্য ও সময়সাপেক্ষ হয়ে পড়ে, আর এ থেকেই উৎপত্তি হয় দ্বিপদী বিস্তৃতির (Binomial Expansion) দ্বিপদী উপপাদ্যের সাহায্যে $(x + y)^n$ যুক্ত রাশিকে সহজেই বিস্তৃতি করা যায়।

খ্রিস্টপূর্ব চতুর্থ শতকের দিকে গাণিতবিদ ইউক্লিড (Euclid) সর্বপ্রথম দ্বিপদী সম্পর্কে ধারণা প্রদান করেন। পরবর্তীতে ব্লেইস প্যাসকেল (Blaise Pascal) এক বিশেষ ধরণের ত্রিভুজ ব্যবহার করে অতি সহজেই দ্বিপদীর সহগগুলোকে নির্ণয় করেন, যা প্যাসকেলের ত্রিভুজ নামে পরিচিত।

Blaise Pasca

বোর্ড প্রশ্নাবলির বিশ্লেষণ [Board Questions Analysis]

এই অধ্যায় থেকে বিভিন্ন বোর্ডে বিগত দু'বছরের এসএসসি পরীক্ষায় মোট ৫টি সৃজনশীল প্রশ্ন ও ২৬টি বহুনির্বাচনি প্রশ্ন এসেছে। নিচের 'Board Analysis' অংশে অধ্যায় থেকে কোন সালে কোন বোর্ডে কতটি প্রশ্ন হয়েছে তা দেওয়া আছে।

সৃজনশীল প্রশ্ন:

বোর্ড / সাল	ঢাকা	রাজশাহী	কুমিল্লা	যশোর	চট্টগ্রাম	বরিশাল	সিলেট	দিনাজপুর
২০১৬	–	১	১	১	–	–	–	১
২০১৫	–	–	১	–	–	–	–	–

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন:

বোর্ড / সাল	ঢাকা	রাজশাহী	কুমিল্লা	যশোর	চট্টগ্রাম	বরিশাল	সিলেট	দিনাজপুর
২০১৬	১	২	২	২	২	২	৩	২
২০১৫	২	১	২	২	১	১	১	–

মূল শব্দাবলি [Key Words]

দ্বিপদী (Binomials), প্যাসকেলের ত্রিভুজ (Pascals Triangle), বিস্তৃতি (Expansion), সহগ (Coefficient), পদ (Term), ফ্যাক্টোরিয়াল (Factorial), ঘাত (Power), ভিত্তি (Base).

এ অধ্যায়ের আলোচ্যসূচি

- দ্বিপদী $(1 + y)^n$ এর বিস্তৃতি
- দ্বিপদী সহগ
- প্যাসকেলের ত্রিভুজের ব্যবহার
- দ্বিপদী $(x + y)^n$ এর বিস্তৃতি
- $n!$ এবং ^nc_r এর মান নির্ণয়

প্রাথমিক আলোচনা

দ্বিপদী রাশি: দুইটি পদের সমন্বয়ে গঠিত বীজগণিতীয় রাশিকে দ্বিপদী (*Binomials*) রাশি বলা হয়। দ্বিপদী রাশির ঘাত ধনাত্মক বা ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা বা ভগ্নাংশ হতে পারে।

দ্বিপদী সহগ: $(1+y)^n$ রাশিতে n-এর বিভিন্ন মানের জন্য প্রত্যেক দ্বিপদী বিস্তৃতিতে y-এর বিভিন্ন ঘাতের সহগ (*Coefficent*) কে দ্বিপদী সহগ বলা হয়।

দ্বিপদী বিস্তৃতি: দুইটি পদযুক্ত রাশিকে দ্বিপদ রাশি বলে। দ্বিপদী বিস্তৃতি এমন একটি বীজগাণিতীয় সূত্র যার সাহায্যে একটি দ্বিপদ রাশির যেকোনো শক্তি বা মূলকে একটি ধারায় প্রকাশ করা হয়।

দ্বিপদী রাশির বিস্তৃতি: $(1+y)^n$ -এর বিস্তৃতি নির্ণয়

আমরা জানি,	পদ সংখ্যা	ঘাত (n) এর মান
$(1+y)^0 = 1$	1	$n = 0$
$(1+y)^1 = 1 + y$	2	$n = 1$
$(1+y)^2 = 1 + 2y + y^2$	3	$n = 2$
$(1+y)^3 = 1 + 3y + 3y^2 + y^3$	4	$n = 3$
$(1+y)^4 = 1 + 4y + 6y^2 + 4y^3 + y^4$	5	$n = 4$
$(1+y)^5 = 1 + 4y + 6y^2 + 10y^3 + 5y^4 + y^5$	6	$n = 5$

উপরের বিস্তৃতি সমূহকে ভিত্তি করে নিম্নোক্ত সিদ্ধান্ত নেওয়া যায়:

(a) $(1+y)^n$ এর বিস্তৃতিতে $(n+1)$ সংখ্যক পদ আছে যথা $(1+y)^2$ এর বিস্তৃতিতে ধাপ $n = 2$ কিন্তু পদসংখ্যা 3। অর্থাৎ, ঘাত বা শক্তির চেয়ে পদসংখ্যা একটি বেশি।

(b) y এর ঘাত শূন্য (0) থেকে শুরু করে ক্রমান্বয়ে বৃদ্ধি পায়। যথা: $1, 2, 3 \ldots \ldots n$

$$
\begin{array}{lcccccccccccc}
n=0 & & & & & & 1 & & & & & \\
n=1 & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
n=2 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
n=3 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
n=4 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
n=5 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

প্যাসকেলের ত্রিভুজের বৈশিষ্ট্য ও গঠন প্রক্রিয়া:

(১) প্রত্যেক সারির প্রথম ও শেষ সংখ্যা উভয়ে 1

(২) যেকোনো সংখ্যা এর উপরের সারির বাম ও ডানের সংখ্যা দুটির যোগফল।

প্যাসকেলের ত্রিভুজের ব্যবহার: দ্বিপদী রাশি বা বহুপদী রাশির ঘাত বা শক্তি তিন এর বেশি হলে সেই সমস্ত ক্ষেত্রে বিস্তৃতি নির্ণয় যথেষ্ট শ্রমসাধ্য ও সময় সাপেক্ষ হয়ে পড়ে। এ সমস্যা সমাধানে দ্বিপদী রাশির বিস্তৃতির সূত্র কিংবা প্যাসকেলের ত্রিভুজ সূত্র ব্যবহার করা হয়। প্যাসকেলের ত্রিভুজে প্রতিটি সারির সর্বশেষ বামে ও সর্বশেষ ডানে 1 আছে। আবার বৈশিষ্ট্য অনুসারে $n = 5$ এর জন্য দ্বিপদী সহগ হলো:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}
$$

$n = 6$ এর জন্য সহগগুলো হবে–

প্রতিটি বিস্তৃতির ঘাত ও পদের সম্পর্কে $\binom{n}{r}$ দ্বারা চিহ্নিত করা হয়।

$\binom{n}{r}$ প্রতীকে n ঘাত এবং r পদের অবস্থানের সাথে সম্পর্কিত। [জেনে নাও: n ও r সম্পর্ক সর্বদাই $n \geq r$]

$$\binom{4}{3} = \frac{4 \times (4-1)(4-2)}{1.2.3} = \frac{4.3.2}{1.2.3} = 4$$

সূত্র: $\binom{n}{0} = 1; \binom{n}{1} = n; \binom{n}{n} = 1$

$(1+y)^n$-এর বিস্তৃতি: উপরোক্ত হিসাব অনুযায়ী

$$(1+y)^n = \binom{n}{0}y^0 + \binom{n}{1}y^1 + \binom{n}{2}y^2 + \binom{n}{3}y^3 + \ldots\ldots + \binom{n}{n}y^n$$

$$= 1.y^0 + ny + \frac{n(n-1)}{1.2}y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}y^3 + \ldots\ldots + 1.y^n$$

[এক্ষেত্রে সর্বদা $n \in N$]

$$\therefore (1-y)^n = 1 + n.(-y) + \frac{n(n-1)}{1.2}(-y)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(-y)^3 + \ldots\ldots + (-y)^n$$ [$y = -y$ বসিয়ে পাই.]

$$= 1 - ny + \frac{n(n-1)}{1.2}y^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}y^3 + \ldots\ldots + (-y)^n$$

উপরের বিস্তৃতী পদগুলোর সহগ: যেকোনো দ্বিপদী রাশির বিস্তৃতির r তম পদের সহগ $T_{r+1} = \binom{n}{r}$ এ হিসেবে $(1+y)^n$ এর বিস্তৃতির

১ম পদের সহগ $T_{0+1} = \binom{n}{0}$ ২য় পদের সহগ $T_{1+1} = \binom{n}{1}$ ৩য় পদের সহগ $T_{2+1} = \binom{n}{2}$ ……

$\therefore$ r তম পদের $T_{r+1} = \binom{n}{r}$ [এখানে, T_{r+1} তম পদকে সাধারণ পদ এবং এ পদের মানকে সাধারণ পদের সহগ বলা হয়।]

দ্বিপদী বিস্তৃতির সাহায্যে মান নির্ণয়: আমরা $(1+x)^n$ বা $(1-x)^n$ রাশিগুলোর বিস্তৃতি নির্ণয় করতে পারি। এভাবে যেকোনো সংখ্যাকে $(1+x)^n$ বা $(1-x)^n$ আকারে প্রকাশ করে বিস্তৃতির সাহায্যে সহজে মান নির্ণয় করা যায়।

উদাহরণ: $(1.01)^4$ এর আসন্ন মান নির্ণয় কর।
$(1.01)^4$ দ্বিপদী বিস্তৃতি আকারে প্রকাশ করে পাই,
$(1.01)^4 = (1+0.01)^4$ যা $(1+y)^n$ আকারের পরবর্তীতে দ্বিপদী বিস্তৃতির সূত্র ব্যবহার করে পাওয়া যায় $(1.01)^4 = 1.04060401$.

লক্ষণীয়: (i) $(1+y)^n$ ও $(1-y)^n$ উভয় বিস্তৃতির পদসংখ্যা সমান ($n+1$ সংখ্যক পদ)
(ii) $(1+y)^n$ বিস্তৃতির সবগুলো পদ ধনাত্মক
(iii) $(1-y)^n$ বিস্তৃতির পদগুলো পর্যায়ক্রমে ধনাত্মক ও ঋণাত্মক হয়
(iv) n জোড় হলে শেষ পদটি ধনাত্মক এবং n বিজোড় হলে শেষ পদটি ঋণাত্মক।
(v) দ্বিপদী রাশি $(a+x)^n$ হলে $(a+x)^n = a^n\left(1+\frac{x}{a}\right)^n$ সহজতর আকারে প্রকাশ করে যেকোনো দ্বিপদীর বিস্তৃতি নির্ণয় সহজ।

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনমূলক কাজের সমাধান

কাজ:
নিম্নোক্ত বিস্তৃতিসমূহ নির্ণয় কর (উপরের বিস্তৃতিসমূহের সাহায্য নাও):
$(1+y)^8$
$(1+y)^9$
$(1+y)^{10}$

আমরা জানি, প্যাসকেলের ত্রিভুজ:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে,
(i) $(1+y)^8 = 1 + 8y + 28y^2 + 56y^3 + 70y^4 + 56y^5 + 28y^6 + 8y^7 + y^8$
(ii) $(1+y)^9 = 1 + 9y + 36y^2 + 84y^3 + 126y^4 + 126y^5 + 84y^6 + 36y^7 + 9y^8 + y^9$
(iii) $(1+y)^{10} = 1 + 10y + 45y^2 + 120y^3 + 210y^4 + 252y^5 + 210y^6 + 120y^7 + 45y^8 + 10y^9 + y^{10}$

দ্বিপদী উপপাদ্যের সাহায্যে,

(i) $(1+y)^8 = \binom{8}{0}y^0 + \binom{8}{1}y^1 + \binom{8}{2}y^2 + \binom{8}{3}y^3 + \binom{8}{4}y^4 + \binom{8}{5}y^5 + \binom{8}{6}y^6 + \binom{8}{7}y^7 + \binom{8}{8}y^8$

$= 1 + \frac{8}{1}y + \frac{8.7}{1.2}y^2 + \frac{8.7.6}{1.2.3}y^3 + \frac{8.7.6.5}{1.2.3.4}y^4 + \frac{8.7.6.5.4}{1.2.3.4.5}y^5 + \frac{8.7.6.5.4.3}{1.2.3.4.5.6}y^6 + \frac{8.7.6.5.4.3.2}{1.2.3.4.5.6.7}y^7 + \frac{8.7.6.5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5.6.7.8}y^8$

$= 1 + 8y + 28y^2 + 56y^3 + 70y^4 + 56y^5 + 28y^6 + 8y^7 + y^8$. **(Ans.)**

(ii) $(1+y)^9 = \binom{9}{0}y^0 + \binom{9}{1}y^1 + \binom{9}{2}y^2 + \binom{9}{3}y^3 + \binom{9}{4}y^4 + \binom{9}{5}y^5 + \binom{9}{6}y^6 + \binom{9}{7}y^7 + \binom{9}{8}y^8 + \binom{9}{9}y^9$

$= 1 + \frac{9}{1}y + \frac{9.8}{1.2}y^2 + \frac{9.8.7}{1.2.3}y^3 + \frac{9.8.7.6}{1.2.3.4}y^4 + \frac{9.8.7.6.5}{1.2.3.4.5}y^5 + \frac{9.8.7.6.5.4}{1.2.3.4.5.6}y^6 + \frac{9.8.7.6.5.4.3}{1.2.3.4.5.6.7}y^7 + \frac{9.8.7.6.5.4.3.2}{1.2.3.4.5.6.7.8}y^8 + \frac{9.8.7.6.5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5.6.7.8.9}y^9$

$= 1 + 9y + 36y^2 + 84y^3 + 126y^4 + 126y^5 + 84y^6 + 36y^7 + 9y^8 + y^9$ **(Ans.)**

(iii) $(1+y)^{10}$

$$=\binom{10}{0}y^0+\binom{10}{1}y^1+\binom{10}{2}y^2+\binom{10}{3}y^3+\binom{10}{4}y^4+\binom{10}{5}y^5+\binom{10}{6}y^6+\binom{10}{7}y^7+\binom{10}{8}y^8+\binom{10}{9}y^9+\binom{10}{10}y^{10}$$

$$=1+\frac{10}{1}y+\frac{10.9}{1.2}y^2+\frac{10.9.8}{1.2.3}y^3+\frac{10.9.8.7}{1.2.3.4}y^4+\frac{10.9.8.7.6}{1.2.3.4.5}y^5+\frac{10.9.8.7.6.5}{1.2.3.4.5.6}y^6+\frac{10.9.8.7.6.5.4}{1.2.3.4.5.6.7}y^7$$
$$+\frac{10.9.8.7.6.5.4.3}{1.2.3.4.5.6.7.8}y^8+\frac{10.9.8.7.6.5.4.3.2}{1.2.3.4.5.6.7.8.9}y^9+\frac{10.9.8.7.6.5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10}y^{10}$$

$$=1+10y+45y^2+120y^3+210y^4+252y^5+210y^6+120y^7+45y^8+10y^9+y^{10} \text{ (Ans.)}$$

১. কাজ: $(1+2x^2)^7$ এবং $(1-2x^2)^7$ কে বিস্তৃত কর। [পাঠ্যবই পৃষ্ঠা- ২০৮]

সমাধান:
প্যাসকেলের ত্রিভুজ:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1

$(1+2x^2)^7$ এর জন্য:
প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে—

$$\therefore (1+2x^2)^7 = 1+7(2x^2)+21.(2x^2)^2+35.(2x^2)^3+35.(2x^2)^4+21.(2x^2)^5+7.(2x^2)^6+1.(2x^2)^7$$
$$=1+14x^2+21\times 4x^4+35\times 8x^6+35\times 16x^8+21\times 32x^{10}+7\times 64x^{12}+128x^{14}$$
$$=1+14x^2+84x^4+280x^6+560x^8+672x^{10}+448x^{12}+128x^{14}$$

দ্বিপদী বিস্তৃতির সাহায্যে,

$$(1+2x^2)^7=\binom{7}{0}(2x^2)^0+\binom{7}{1}(2x^2)^1+\binom{7}{2}(2x^2)^2+\binom{7}{3}(2x^2)^3+\binom{7}{4}(2x^2)^4+\binom{7}{5}(2x^2)^5+\binom{7}{6}(2x^2)^6+\binom{7}{7}(2x^2)^7$$
$$=1.1+\frac{7}{1}2x^2+\frac{7.6}{1.2}\times 4x^4+\frac{7.6.5}{1.2.3}\times 8x^6+\frac{7.6.5.4}{1.2.3.4}\times 16x^8+\frac{7.6.5.4.3}{1.2.3.4.5}\times 32x^{10}+\frac{7.6.5.4.3.2}{1.2.3.4.5.6}\times 64x^{12}+1\times 128x^{14}$$
$$=1+14x^2+84x^4+280x^6+560x^8+672x^{10}+448x^{12}+128x^{14} \text{ (Ans.)}$$

$(1-2x^2)^7$ এর জন্য:
প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে—

$$\therefore (1-2x^2)^7 = 1+7\times(-2x^2)+21\times(-2x^2)^2+35\times(-2x^2)^3+35\times(-2x^2)^4+21\times(-2x^2)^5+7\times(-2x^2)^6+1\times(-2x^2)^7$$
$$=1-14x^2+21\times 4x^4-35\times 8x^6+35\times 16x^8-21\times 32x^{10}+7\times 64x^{12}-128x^{14}$$
$$=1-14x^2+84x^4-280x^6+560x^8-672x^{10}+448x^{12}-128x^{14}$$

দ্বিপদী বিস্তৃতির সাহায্যে,

$$(1-2x^2)^7=\binom{7}{0}(-2x^2)^0+\binom{7}{1}(-2x^2)^1+\binom{7}{2}(-2x^2)^2+\binom{7}{3}(-2x^2)^3+\binom{7}{4}(-2x^2)^4+\binom{7}{5}(-2x^2)^5+\binom{7}{6}(-2x^2)^6+\binom{7}{7}(-2x^2)^7$$
$$=1.1-\frac{7}{1}\times 2x^2+\frac{7.6}{1.2}\times 4x^4-\frac{7.6.5}{1.2.3}\times 8x^6+\frac{7.6.5.4}{1.2.3.4}\times 16x^8-\frac{7.6.5.4.3}{1.2.3.4.5}\times 32x^{10}+\frac{7.6.5.4.3.2}{1.2.3.4.5.6}\times 64x^{12}-\frac{7.6.5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5.6.7}\times 128x^{14}$$
$$=1-14x^2+84x^4-280x^6+560x^8-672x^{10}+448x^{12}-128x^{14}. \text{ (Ans.)}$$

২. কাজ: প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে সত্যতা যাচাই কর। (বি.দ্র.: উদাহরণ-৪) [পাঠ্যবই পৃষ্ঠা- ২০৯]

সমাধান:
প্যাসকেলের ত্রিভুজ:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1

প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে-

$$\left(1-\frac{x^2}{4}\right)^8=1+8\left(-\frac{x^2}{4}\right)+28\left(-\frac{x^2}{4}\right)^2+56\left(-\frac{x^2}{4}\right)^3+70\left(-\frac{x^2}{4}\right)^4+56\left(-\frac{x^2}{4}\right)^5+28\left(-\frac{x^2}{4}\right)^6+8\left(-\frac{x^2}{4}\right)^7+1\left(-\frac{x^2}{4}\right)^8$$
$$=1-2x^2+28\times\frac{x^4}{16}-56\times\frac{x^6}{64}+70\times\frac{x^8}{256}-56\times\frac{x^{10}}{1024}+28\times\frac{x^{12}}{4096}-8\times\frac{x^{14}}{16384}+\frac{x^{16}}{65536}$$
$$=1-2x^2+\frac{7}{4}x^4-\frac{7}{8}x^6+\frac{35}{128}x^8-\frac{7}{128}x^{10}+\frac{7}{1024}x^{12}-\frac{1}{2048}x^{14}+\frac{1}{65536}x^{16}$$

এখানে, x^3 যুক্ত কোনো পদ নেই। অর্থাৎ x^3 এর সহগ 0 এবং x^6 এর সহগ $-\frac{7}{8}$. $\therefore \frac{7}{8}$.

১. কাজ:
প্যাসকেলের ত্রিভুজের মাধ্যমে বিস্তৃতিটি যাচাই কর। (উদাহরণ-৭)

সমাধান:

প্যাসকেলের ত্রিভুজ :

$$\begin{array}{c}
1\\
1\quad 1\\
1\quad 2\quad 1\\
1\quad 3\quad 3\quad 1\\
1\quad 4\quad 6\quad 4\quad 1\\
1\quad 5\quad 10\quad 10\quad 5\quad 1\\
1\quad 6\quad 15\quad 20\quad 15\quad 6\quad 1\\
1\quad 7\quad 21\quad 35\quad 35\quad 21\quad 7\quad 1\\
1\quad 8\quad 28\quad 56\quad 70\quad 58\quad 28\quad 8\quad 1
\end{array}$$

প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে-

$$\therefore (2-x)\left(1+\frac{1}{2}x\right)^8 = (2-x)\left\{1+8\times\frac{1}{2}x+28\times\left(\frac{1}{2}x\right)^2+56\times\left(\frac{1}{2}x\right)^3+70\times\left(\frac{1}{2}x\right)^4+\ldots\ldots\right\}$$

$$= (2-x)\left(1+4x+28\times\frac{1}{4}x^2+56\times\frac{1}{8}x^3+\ldots\ldots\right) = (2-x)(1+4x+7x^2+7x^3+\ldots\ldots)$$

$$= (2+8x+14x^2+14x^3+\ldots\ldots)+(-x-4x^2-7x^3-7x^4-\ldots\ldots) = 2+7x+10x^2+7x^3+\ldots\ldots \quad \ldots\ldots(i)$$

$\therefore$ নির্ণেয় বিস্তৃতি $(2-x)\left(1+\frac{1}{2}x\right)^8 = 2+7x+10x^2+7x^3+\ldots\ldots$

এখন, (i) নং বিস্তৃতিতে $x = 0.1$ বসিয়ে পাই,

$$(2-0.1)\times\left(1+\frac{0.1}{2}\right)^8 = 2+7\times0.1+10\times(0.1)^2+7\times(0.1)^3+\ldots\ldots$$

$\Rightarrow 1.9\times(1+0.5)^8 = 2+0.7+10\times(0.01)+7\times(0.001)+\ldots\ldots$

$\Rightarrow 1.9\times(1.05)^8 = 2+0.7+0.1+0.007+\ldots\ldots = 2.807$ (তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত)

$\therefore 1.9\times(1.05)^8 = 2.807$ **(Ans.)**

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-১০.১

১। প্যাসকেলের ত্রিভুজ বা দ্বিপদী বিস্তৃতি ব্যবহার করে $(1+y)^5$ এর বিস্তৃতি নির্ণিয় কর। উক্ত বিস্তৃতির সাহায্যে $(i)\ (1-y)^5$ ও $(ii)\ (1+2x)^5$ এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর।

২। x এর ঘাতের উর্ধ্বক্রম অনুসারে (a) $(1+4x)^6$, (b) $(1-3x)^7$ এর প্রথম চার পদ পর্যন্ত বিস্তৃতি কর।

৩। $(1+x^2)^8$ এর বিস্তৃতির প্রথম চার পদ নির্ণয় কর। উক্ত ফলাফল ব্যবহার করে $(1.01)^8$ এর মান নির্ণয় কর।

৪। x এর ঘাতের উর্ধ্বক্রম অনুসারে নিম্নোক্ত দ্বিপদী সমূহের প্রথম তিন পদ নির্ণয় কর।
(a) $(1-2x)^5$, (b) $(1+3x)^9$ তারপর, (c) $(1-2x)^5(1+3x)^9$ কে x^2 পর্যন্ত বিস্তৃতি কর।

৫। নিম্নোক্ত বিস্তৃতিসমূহের প্রথম চার পদ নির্ণয় কর। [দ্বিপদী বিস্তৃতি বা প্যাসক্যাল ত্রিভুজ এর যেকোনো একটি ব্যবহার করে]
(a) $(1-2x^2)^7$ (b) $\left(1+\frac{2}{x}\right)^4$ (c) $\left(1-\frac{1}{2x}\right)^7$

৬। x^3 পর্যন্ত (a) $(1-x)^6$ এবং (b) $(1+2x)^6$ বিস্তৃত কর। তারপর (c) $(1+x-2x^2)^6$ কে x^3 পর্যন্ত বিস্তৃত কর।

৭। x এর মান যথেষ্ট ছোট হওয়ায় x^3 এবং এর উর্ধ্বঘাতের মান উপেক্ষা করা যায়। প্রমাণ কর যে, $(1+x)^5(1-4x)^4 = 1-11x+26x^2$.

অনুশীলনী-১০.১ এর সমাধান

১। প্যাসকেলের ত্রিভুজ বা দ্বিপদী বিস্তৃতি ব্যবহার করে $(1+y)^5$ এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর। উক্ত বিস্তৃতির সাহায্যে-
$(i)\ (1-y)^5$ ও $(ii)\ (1+2x)^5$ এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর।

সমাধান:

প্যাসকেলের ত্রিভুজ সূত্র:

$$\begin{array}{c}
1\\
1\quad 1\\
1\quad 2\quad 1\\
1\quad 3\quad 3\quad 1\\
1\quad 4\quad 6\quad 4\quad 1\\
1\quad 5\quad 10\quad 10\quad 5\quad 1
\end{array}$$

$\therefore (1+y)^5 = 1+5.y+10.y^2+10.y^3+5.y^4+1.y^5$
$= 1+5y+10y^2+10y^3+5y^4+y^5$. **(Ans.)**

(i)-এর সমাধান:

$(1-y)^5 = 1+5(-y)+10(-y)^2+10(-y)^3+5(-y)^4+1.(-y)^5$
$= 1-5y+10y^2-10y^3+5y^4-y^5$. **(Ans.)**

(ii)-এর সমাধান:

$$(1+2x)^5 = 1 + 5\times(2x) + 10\times(2x)^2 + 10\times(2x)^3 + 5\times(2x)^4 + 1\times(2x)^5$$
$$= 1 + 10x + 10\times4x^2 + 10\times8x^3 + 5\times16x^4 + 32x^5$$
$$= 1 + 10x + 40x^2 + 80x^3 + 80x^4 + 32x^5. \textbf{ (Ans.)}$$

বিকল্প সমাধান:

দ্বিপদী বিস্তৃতি ব্যবহার করে পাই, $(1+y)^5 = \binom{5}{0}y^0 + \binom{5}{1}y^1 + \binom{5}{2}y^2 + \binom{5}{3}y^3 + \binom{5}{4}y^4 + \binom{5}{5}y^5$

$$= 1.1 + \frac{5}{1}y + \frac{5.4}{1.2}y^2 + \frac{5.4.3}{1.2.3}y^3 + \frac{5.4.3.2}{1.2.3.4}y^4 + \frac{5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5}y^5$$
$$= 1 + 5y + 10y^2 + 10y^3 + 5y^4 + y^5 \textbf{ (Ans.)}$$

এখন দ্বিপদী বিস্তৃতির সাহায্যে,

(i) আমরা পাই, $(1+y)^5 = 1+5y+10y^2+10y^3+5y^4+y^5$

$\therefore \{1+(-y)\}^5 = 1+5(-y)+10(-y)^2+10(-y)^3+5(-y)^4+(-y)^5$

$\therefore (1-y)^5 = 1-5y+10y^2-10y^3+5y^4-y^5$

(ii) আমরা পাই, $(1+y)^5 = 1+5y+10y^2+10y^3+5y^4+y^5$

$\therefore \{1+(2x)\}^5 = 1+5(2x)+10(2x)^2+10(2x)^3+5(2x)^4+(2x)^5$

$(1+2x)^5 = 1+10x+10\times4x^2+10\times8x^3+5\times16x^4+32x^5 = 1+10x+40x^2+80x^3+80x^4+32x^5$ **(Ans.)**

২। x এর ঘাতের ঊর্ধ্বক্রম অনুসারে (a) $(1+4x)^6$, (b) $(1-3x)^7$ এর প্রথম চার পদ পর্যন্ত বিস্তৃতি কর।

(a)-এর সমাধান:

প্যাসকেলের ত্রিভুজ সূত্র:

$\therefore (1+4x)^6 = 1 + 6\times(4x) + 15(4x)^2 + 20\times(4x)^3 + \ldots\ldots$ (৪র্থ পদ পর্যন্ত)

$= 1 + 24x + 15\times16x^2 + 20\times64x^2 + \ldots\ldots$

$= 1 + 24x + 240x^2 + 1280x^3 + \ldots\ldots$ **(Ans.)**

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1

(b)-এর সমাধান:

প্যাসকেলের ত্রিভুজ সূত্র:

$\therefore (1-3x)^7 = 1 + 7\times(-3x) + 21\times(-3x)^2 + 35\times(-3x)^3 + \ldots\ldots$ (৪র্থ পদ পর্যন্ত)

$= 1 - 21x + 21\times9x^2 + 35\times(-27)x^3 + \ldots\ldots$

$= 1 - 21x + 189x^2 - 945x^3 + \ldots\ldots$ **(Ans.)**

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1

বিকল্প সমাধান

(a)-এর সমাধান:

দ্বিপদী উপপাদ্যের সাহায্যে−

$$(1+4x)^6 = \binom{6}{0}(4x)^0 + \binom{6}{1}(4x)^1 + \binom{6}{2}(4x)^2 + \binom{6}{3}(4x)^3 + \ldots\ldots$$
$$= 1.1 + \frac{6}{1}(4x) + \frac{6.5}{1.2}(16x^2) + \frac{6.5.4}{1.2.3}(64x^3) + \ldots\ldots = 1+24x+240x^2+1280x^3+\ldots\ldots$$

(b)-এর সমাধান:

দ্বিপদী উপপাদ্যের সাহায্যে−

$$(1-3x)^7 = \binom{7}{0}(-3x)^0 + \binom{7}{1}(-3x)^1 + \binom{7}{2}(-3x)^2 + \binom{7}{3}(-3x)^3 + \ldots\ldots$$
$$= 1.1 + \frac{7}{1}(-3x) + \frac{7.6}{1.2}(9x^2) + \frac{7.6.5}{1.2.3}(-27x^3) + \ldots\ldots = 1-21x+189x^2-945x^3+\ldots\ldots$$

৩। $(1+x^2)^8$ এর বিস্তৃতির প্রথম চার পদ নির্ণয় কর। উক্ত ফলাফল ব্যবহার করে $(1.01)^8$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান:

$$(1+x^2)^8 = \binom{8}{0}(x^2)^0 + \binom{8}{1}(x^2)^1 + \binom{8}{2}(x^2)^2 + \binom{8}{3}(x^2)^3 + \ldots\ldots$$
$$= 1.1 + \frac{8}{1}x^2 + \frac{8.7}{1.2}x^4 + \frac{8.7.6}{1.2.3}x^6 + \ldots\ldots$$
$$= 1 + 8x^2 + 28x^4 + 56x^6 + \ldots\ldots$$

$\therefore$ নির্ণেয় বিস্তৃতি $(1+x^2)^8 = 1 + 8x^2 + 28x^4 + 56x^6 + \ldots\ldots$

এখানে উক্ত বিস্তৃতিতে $x = 0.1$ বসিয়ে পাই,

$$\{1 + (0.1)^2\}^8 = 1 + 8 \times (0.1)^2 + 28 \times (0.1)^4 + 56 \times (0.1)^6 + \dots \dots$$
$$\Rightarrow (1 + 0.01)^8 = 1 + 8 \times (0.01) + 28 \times 0.0001 + 56 \times 0.000001 + \dots \dots$$
$$\therefore (1.01)^8 = 1 + 0.08 + 0.0028 + 0.000056 + \dots \dots$$
$$= 1.082856. \text{ (Ans)}$$

৪। x এর ঘাতের উর্ধ্বক্রম অনুসারে নিম্নোক্ত দ্বিপদী সমূহের প্রথম তিন পদ নির্ণয় কর।
(a) $(1 - 2x)^5$, (b) $(1 + 3x)^9$ তারপর, (c) $(1 - 2x)^5 (1 + 3x)^9$ কে x^2 পর্যন্ত বিস্তৃতি কর।

(a)-এর সমাধান:

দ্বিপদী বিস্তৃতি অনুসারে,

$$(1 - 2x)^5 = \binom{5}{0}(-2x)^0 + \binom{5}{1}(-2x)^1 + \binom{5}{2}(-2x)^2 + \dots \dots \text{ (৩য় পদ পর্যন্ত)}$$
$$= 1\times1 + \frac{5}{1}(-2x) + \frac{5.4}{1.2}\times4x^2 + \dots \dots$$
$$= 1 - 10x + 40x^2 - \dots \dots \text{ (Ans.)}$$

(b)-এর সমাধান:

দ্বিপদী বিস্তৃতি অনুসারে, $(1 + 3x)^9 = \binom{9}{0}(3x)^0 + \binom{9}{1}(3x)^1 + \binom{9}{2}(3x)^2 + \dots \dots$ (৩য় পদ পর্যন্ত)

$$= 1.1 + \frac{9}{1}\times3x + \frac{9.8}{1.2}\times9x^2 + \dots \dots$$
$$= 1 + 27x + 324x^2 + \dots \dots$$

$\therefore$ নির্ণেয় বিস্তৃতি, $1 + 27x + 324x^2 + \dots \dots$ (Ans.)

(c)-এর সমাধান:

$$(1 - 2x)^5 (1 + 3x)^9 = (1 - 10x + 40x^2 - \dots \dots) \times (1 + 27x + 324x^2 + \dots \dots)$$
$$= (1+27x+324x^2+\dots \dots) + (-10x-270x^2-3240x^3-\dots \dots)+(40x^2+1080x^3+12960x^4 + \dots \dots)$$
$$= 1+27x+324x^2-10x-270x^2+40x^2-\dots \dots$$
$$= 1 + 17x + 94x^2 + \dots \dots \text{ (Ans.)}$$

৫। নিম্নোক্ত বিস্তৃতিসমূহের প্রথম চার পদ নির্ণয় কর। [দ্বিপদী বিস্তৃতি বা প্যাসক্যাল ত্রিভুজ এর যেকোনো একটি ব্যবহার করে]

(a) $(1 - 2x^2)^7$ (b) $\left(1 + \frac{2}{x}\right)^4$ (c) $\left(1 - \frac{1}{2x}\right)^7$

(a)-এর সমাধান:

দ্বিপদী বিস্তৃতির সাহায্যে,

$$(1 - 2x^2)^7 = \binom{7}{0}\left(-2x^2\right)^0 + \binom{7}{1}\left(-2x^2\right)^1 + \binom{7}{2}(-2x^2)^2 + \binom{7}{3}(-2x^2)^3 + \dots \dots \text{ (৪র্থ পদ পর্যন্ত)}$$
$$= 1\times1 + \frac{7}{1}(-2x^2) + \frac{7.6}{1.2}\times4x^4 + \frac{7.6.5}{1.2.3}\times(-8x^6) + \dots \dots$$
$$= 1 - 14x^2 + 84x^4 - 280x^6 + \dots\dots \text{ (Ans.)}$$

(b)-এর সমাধান:

দ্বিপদী বিস্তৃতির সাহায্যে,

$$\left(1 + \frac{2}{x}\right)^4 = \binom{4}{0}\left(\frac{2}{x}\right)^0 + \binom{4}{1}\left(\frac{2}{x}\right)^1 + \binom{4}{2}\left(\frac{2}{x}\right)^2 + \binom{4}{3}\left(\frac{2}{x}\right)^3 + \dots \dots \text{ (৪র্থ পদ পর্যন্ত)}$$
$$= 1.1 + \frac{4}{1}.\frac{2}{x} + \frac{4.3}{1.2}.\frac{4}{x^2} + \frac{4.3.2}{1.2.3}.\frac{8}{x^3} + \dots\dots$$
$$= 1 + \frac{8}{x} + \frac{24}{x^2} + \frac{32}{x^3} + \dots \dots \text{ (Ans.)}$$

<u>(c)-এর সমাধান:</u>
দ্বিপদী বিস্তৃতির সাহায্যে-

$$\left(1-\frac{1}{2x}\right)^7=\binom{7}{0}\left(-\frac{1}{2x}\right)^0+\binom{7}{1}\left(\frac{-1}{2x}\right)^1+\binom{7}{2}\left(-\frac{1}{2x}\right)^2+\binom{7}{3}.\left(\frac{-1}{2x}\right)^3+\ldots\ldots \text{ (৪র্থ পদ পর্যন্ত)}$$

$$=1.1+\frac{7}{1}\left(-\frac{1}{2x}\right)+\frac{7.6}{1.2}.\frac{1}{4x^2}+\frac{7.6.5}{1.2.3}\left(-\frac{1}{8x^3}\right)+\ldots\ldots$$

$$=1-\frac{7}{2}.\frac{1}{x}+\frac{21}{4}.\frac{1}{x^2}-\frac{35}{8}.\frac{1}{x^3}+\ldots\ldots \text{ (Ans.)}$$

বিকল্প সমাধান:
প্যাসকেলের ত্রিভুজ :

```
              1
            1   1
          1   2   1
        1   3   3   1
      1   4   6   4   1
    1   5  10  10   5   1
  1   6  15  20  15   6   1
1   7  21  35  35  21   7   1
```

প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে:

<u>(a)-এর সমাধান:</u>

$$(1-2x^2)^7=1+7\times(-2x^2)+21(-2x^2)^2+35(-2x^2)^3+\ldots\ldots$$
$$=1+7(-2x^2)+21(4x^4)+35(-8x^6)+\ldots\ldots$$
$$=1-14x^2+84x^4-280x^6+\ldots\ldots \text{ (Ans.)}$$

<u>(b)-এর সমাধান:</u>

$$\left(1+\frac{2}{x}\right)^4=1+4\left(\frac{2}{x}\right)+6\left(\frac{2}{x}\right)^2+4\left(\frac{2}{x}\right)^3+\ldots\ldots$$

$$=1+\frac{8}{x}+\frac{24}{x^2}+\frac{32}{x^3}+\ldots\ldots \text{ (Ans.)}$$

<u>(c)-এর সমাধান:</u>

$$\left(1-\frac{1}{2x}\right)^7=1+7\left(-\frac{1}{2x}\right)+21\left(-\frac{1}{2x}\right)^2+35\left(-\frac{1}{2x}\right)^3+\ldots\ldots \text{ (৪র্থ পদ পর্যন্ত)}$$

$$=1+7\left(-\frac{1}{2x}\right)+21\left(\frac{1}{4x^2}\right)+35\left(-\frac{1}{8x^3}\right)+\ldots\ldots$$

$$=1-\frac{7}{2x}+\frac{21}{4x^2}-\frac{35}{8x^3}+\ldots\ldots \text{ (Ans.)}$$

[illegible] x^3 পর্যন্ত (a) $(1-x)^6$ এবং (b) $(1+2x)^6$ বিস্তৃত কর। অতঃপর (c) $(1+x-2x^2)^6$ কে x^3 পর্যন্ত বিস্তৃত কর [illegible]

<u>(a)-এর সমাধান:</u>

$$(1-x)^6=\binom{6}{0}(-x)^0+\binom{6}{1}(-x)^1+\binom{6}{2}(-x)^2+\binom{6}{3}(-x)^3+\ldots\ldots \text{ [দ্বিপদী বিস্তৃতির সাহায্যে]}$$

$$=1.1+\frac{6}{1}(-x)+\frac{6.5}{1.2}(x^2)+\frac{6.5.4}{1.2.3}(-x^3)+\ldots\ldots$$

$$=1-6x+15x^2-20x^3+\ldots\ldots \text{ (Ans.)}$$

(b)-এর সমাধান:

দ্বিপদী বিস্তৃতির সাহায্যে- $(1+2x)^6 = \binom{6}{0}(2x)^0 + \binom{6}{1}(2x)^1 + \binom{6}{2}(2x)^2 + \binom{6}{3}(2x)^3 + \dots$

$$= 1.1 + \frac{6}{1}.2x + \frac{6.5}{1.2}.4x^2 + \frac{6.5.4}{1.2.3}.8x^3 + \dots \dots$$

$$= 1 + 12x + 60x^2 + 160x^3 + \dots \dots \text{ (Ans.)}$$

(c)-এর সমাধান:

এখানে, $1 + x - 2x^2 = 1 + 2x - x - 2x^2 = (1-x)(1+2x)$

এখন, $(1 + x - 2x^2)^6 = (1-x)^6 (1+2x)^6$

$$= (1 - 6x + 15x^2 - 20x^3 + \dots \dots)(1 + 12x + 60x^2 + 160x^3 + \dots \dots)$$

$$= (1+12x+60x^2+160x^3+\dots \dots) + (-6x - 72x^2 - 360x^3 \dots \dots) + (15x^2 + 180x^3 \dots \dots) + (-20x^3 - \dots \dots)$$

$$= 1+12x+60x^2+160x^3 - 6x - 72x^2 - 360x^3 + 15x^2 + 180x^3 - 20x^3 + \dots \dots$$

$$= 1 + 6x + 3x^2 - 40x^3 + \dots \dots \text{ (Ans.)}$$

৭। x এর মান যথেষ্ট ছোট হওয়ায় x^3 এবং এর উর্ধ্বঘাতের মান উপেক্ষা করা যায়। প্রমাণ কর যে, $(1+x)^5(1-4x)^4 = 1 - 11x + 26x^2$.

সমাধান:

দ্বিপদী বিস্তৃতির অনুসারে,

$$(1+x)^5 = \binom{5}{0}x^0 + \binom{5}{1}x^1 + \binom{5}{2}x^2 + \binom{5}{3}x^3 + \dots \dots$$

$$= 1.1 + \frac{5}{1}.x + \frac{5.4}{1.2}x^2 + \frac{5.4.3}{1.2.3}x^3 + \dots \dots$$

$$= 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + \dots \dots$$

$$(1-4x)^4 = \binom{4}{0}(-4x)^0 + \binom{4}{1}(-4x)^1 + \binom{4}{2}(-4x)^2 + \binom{4}{3}(-4x)^3 + \dots \dots$$

$$= 1.1 + \frac{4}{1}.(-4x) + \frac{4.3}{1.2}(-4x)^2 + \frac{4.3.2}{1.2.3}(-4x)^3 + \dots \dots$$

$$= 1 - 16x + 6 \times 16x^2 - 4 \times 64x^3 + \dots \dots$$

$$= 1 - 16x + 96x^2 - 256x^3 + \dots \dots$$

সুতরাং, $(1+x)^5(1-4x)^4 = (1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + \dots\dots)(1 - 16x + 96x^2 - 256x^3 + \dots\dots)$

$= 1 - 16x + 96x^2 + 5x - 80x^2 + 10x^2 \dots \dots$ [x^3 এবং তার উর্ধ্বঘাত উপেক্ষা করে]

$= 1 - 11x + 26x^2$

অর্থাৎ, $(1+x)^5(1-4x)^4 = 1 - 11x + 26x^2$. **(প্রমাণিত)**

অনুশীলনী-১০.২

প্রাথমিক আলোচনা

দ্বিপদী উপপাদ্য: আমরা জানি $(x + y)$ একটি দ্বিপদী রাশি। এখন $n \in N$ হলে $(x + y)^n = x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \binom{n}{3} x^{n-3} y^3 + \ldots + y^n$ হলো দ্বিপদী রাশির বিস্তৃতির সূত্র। এ সূত্রটিকে সাধারণত দ্বিপদী উপপাদ্য বলা হয়।

দ্বিপদী রাশির বিস্তৃতি নির্ণয়: দ্বিপদী উপপাদ্যের সাহায্যে যেকোনো দ্বিপদী রাশির বিস্তৃতি নির্ণয় করা যায়।

আমরা জানি, $(1 + y)^n = 1 + \binom{n}{1} y + \binom{n}{2} y^2 + \binom{n}{3} y^3 + \binom{n}{r} y^r + \ldots\ldots + \binom{n}{n} y^n \ldots\ldots$ (i)

$$(x + y)^n = \left\{x\left(1 + \frac{y}{x}\right)\right\}^n = x^n\left(1 + \frac{y}{x}\right)^n$$

$$\therefore x^n\left(1 + \frac{y}{x}\right)^n = x^n\left\{1 + \binom{n}{1}\frac{y}{x} + \binom{n}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^2 + \binom{n}{3}\left(\frac{y}{x}\right)^3 + \ldots\ldots + \binom{n}{n}\left(\frac{y}{x}\right)^n\right\} \quad \text{[(i) নং হতে]}$$

$$= x^n + \binom{n}{1}\left(x^n.\frac{y}{x}\right) + \binom{n}{2}\left(\frac{y^2}{x^2}.x^n\right) + \binom{n}{3}\left(\frac{y^3}{x^3}.x^n\right) + \ldots\ldots \binom{n}{n}\left(\frac{y^n}{x^n}.x^n\right)$$

এখন, $(x + y)^5$-এর বিস্তৃতি লক্ষ করি:

$$(x + y)^5 = x^5 + \binom{5}{1} x^{5-1} y + \binom{5}{2} x^{5-2} y^2 + \binom{5}{3} x^{5-3} y^3 + \binom{5}{4} x^{5-4} y^4 + \binom{5}{5} x^{5-5} y^5$$

$$\therefore (x + y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$$

x-এর ঘাত →	5	4	3	2	1	0
y-এর ঘাত →	0	1	2	3	4	5
x ও y-এর মোট ঘাত →	5	5	5	5	5	5

(i) x-এর ঘাত ক্রমান্বয়ে হ্রাস পেয়ে শেষ পদে শূন্য হয়েছে

(ii) y-এর ঘাত শূন্য হতে ক্রমান্বয়ে বৃদ্ধি পেয়ে শেষ পদে y-এর ঘাত বিস্তৃতি ঘাতের (5) সমান হয়।

(iii) প্রতিটি পদে x ও y ঘাতের যোগফল (5) বিস্তৃতির ঘাতের সমান (5)। এ বৈশিষ্ট্যটি $(x + y)^n$ বিস্তৃতির ক্ষেত্রেও প্রযোজ্য।

বিস্তৃতির মধ্যপদ নির্ণয়:

$(1 + y)^2 = 1 + \boxed{2y} + y^2 \ldots\ldots$ (i)

$(1 + y)^3 = 1 + \boxed{3y + 3y^2} + y^3 \ldots\ldots$ (ii)

$(1 + y)^4 = 1 + 4y + \boxed{6y^2} + 4y^3 + y^4 \ldots\ldots$ (iii)

$(1 + y)^5 = 1 + 5y + \boxed{10y^2 + 10y^3} + 5y^4 + y^5 \ldots\ldots$ (iv)

$\therefore (1 + y)^n$ -এর বিস্তৃতিতে জোড় হলে মধ্যপদ একটি এবং তা $\left(\frac{n}{2} + 1\right)$ তম পদ

$\therefore (1 + y)^n$ -এর বিস্তৃতিতে n বিজোড় হলে মধ্যপদ দুইটি এবং তা $\left(\frac{n-1}{2} + 1\right)$ ও $\left(\frac{n+1}{2} + 1\right)$ তম পদ

$\therefore$ বিস্তৃতিতে ঘাত n হলে বিস্তৃতির পদসংখ্যা n + 1.

$(1 + y)^n$ বিস্তৃতির ভিন্ন প্রকাশ:

(১) $(1 + y)^n = \binom{n}{0} y^0 + \binom{n}{1} y^1 + \binom{n}{2} y^2 + \binom{n}{3} y^3 + \ldots\ldots + \binom{n}{n} y^n$

(২) $(1 + y)^n = {}^nC_0 y^0 + {}^nC_1 y^1 + {}^nC_2 y^2 + {}^nC_3 y^3 + \ldots\ldots {}^nC_n y^n$

(৩) $(1 + y)^n = 1 + ny + \frac{n(n-1)}{2!} y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} y^3 + \ldots\ldots + y^n$

***n*! কে ফেক্টোরিয়াল (*factorial*) *n* বলা হয়।**

$n! = n.(n-1)(n-2)(n-3)\ldots\ldots 3.2.1$

$n!$ বলতে 1 থেকে n পর্যন্ত সকল স্বাভাবিক সংখ্যার ধারাবাহিক গুণফল। যেমন– $3! = 3.2.1 = 6$

$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = {}^nC_r$ যেমন– $\binom{7}{4} = \frac{7!}{4!(7-4)!} = {}^7C_4$

${}^nC_n = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n!\,0!} = \frac{1}{0!} \quad \therefore 1 = \frac{1}{0!}$ অর্থাৎ, $0! = 1$

সূত্রগুলো মনে রাখি: (ক) $n! = n(n-1)(n-2)\ldots\ldots 3.2.1$

(খ) $\binom{n}{r} = {}^nC_r$; (গ) ${}^nC_n = 1$; (ঘ) ${}^nC_0 = 1$; (ঙ) $\binom{n}{n} = {}^nC_n = 1$; (চ) $0! = 1$

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-১০.২

১। $(1+2x+x^2)^3$ এর বিস্তৃতিতে—
i. পদসংখ্যা 4
ii. ২য় পদ $6x$
iii. শেষ পদ x^6
নিচের কোনটি সঠিক?
(ক) i, ii (খ) i, iii
(গ) ii, iii (ঘ) i, ii ও iii

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^n$, যেখানে n জোড় সংখ্যা।
উপরের তথ্য থেকে ২ ও ৩নং প্রশ্নের উত্তর দাও।

২। $(r+1)$ তম পদটি x বর্জিত হলে r এর মান কত?
(ক) 0 (খ) $\frac{n}{2}$
(গ) n (ঘ) 2n

৩। n = 4 হলে, চতুর্থ পদ কত?
(ক) 4 (খ) 4x
(গ) $\frac{4}{x^2}$ (ঘ) $\frac{4}{x}$

৪। $(x+y)^5$-এর বিস্তৃতিতে দ্বিপদী সহগগুলি হলো:
(ক) 5, 10, 10, 5 (খ) 1, 5, 10, 10, 5, 1
(গ) 10, 5, 5, 10 (ঘ) 1, 2, 3, 3, 2, 1

৫। $(1-x)\left(1+\frac{x}{2}\right)^8$ -এর বিস্তৃতিতে x এর সহগ—
(ক) −1 (খ) $\frac{1}{2}$
(গ) 3 (ঘ) $-\frac{1}{2}$

৬। $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^4$ -এর বিস্তৃতিতে x মুক্ত পদ কত?
(ক) 4 (খ) 6
(গ) 8 (ঘ) 0

৭। $(2-x)(1+ax)^5$ কে x^2 পর্যন্ত বিস্তৃত করলে যদি $2+9x+cx^2$ পাওয়া যায়, তবে a ও c এর মান -
(ক) $a=1, c=15$ (খ) $a=5, c=15$
(গ) $a=15, c=1$ (ঘ) $a=1, c=0$

৮। $(x+y)^4$ বিস্তৃতির সহগগুলি সাজালে আমরা পাই –

(ক)
$$\begin{array}{c} 4 \\ 1\ \ 5\ \ 1 \\ 1\ \ 5\ \ 5\ \ 1 \\ 1\ \ 6\ \ 10\ \ 6\ \ 1 \end{array}$$

(খ)
$$\begin{array}{c} 1 \\ 1\ \ 2\ \ 1 \\ 1\ \ 3\ \ 3\ \ 1 \\ 1\ \ 4\ \ 6\ \ 4\ \ 1 \end{array}$$

(গ)
$$\begin{array}{c} 2 \\ 2\ \ 3\ \ 2 \\ 1\ \ 5\ \ 5\ \ 2 \\ 2\ \ 7\ \ 10\ \ 7\ \ 2 \end{array}$$

(ঘ)
$$\begin{array}{c} 6 \\ 6\ \ 12\ \ 6 \\ 6\ \ 18\ \ 18\ \ 6 \\ 6\ \ 24\ \ 36\ \ 24\ \ 6 \end{array}$$

৯। নিম্নোক্ত প্রতিটি ক্ষেত্রে বিস্তৃত কর :
(a) $(2+x^2)^5$ (b) $\left(2-\frac{1}{2x}\right)^6$

১০। নিম্নোক্ত বিস্তৃতিসমূহের প্রথম চারটি পদ নির্ণয় কর। (a) $(2+3x)^6$ (b) $\left(4-\frac{1}{2x}\right)^5$

১১। $\left(p-\frac{1}{2}x\right)^6 = r-96x+sx^2+\dots\dots$ হলে, p, r এবং s এর মান নির্ণয় কর।

১২। $\left(1+\frac{x}{2}\right)^8$ এর বিস্তৃতির x^3 এর সহগ নির্ণয় কর।

১৩। x এর ঘাতের ঊর্ধ্বক্রম অনুসারে $\left(2+\frac{x}{4}\right)^6$ কে x^3 পর্যন্ত বিস্তৃত কর। উহার সাহায্যে $(1.9975)^6$ এর আসন্ন মান চার দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় কর।

১৪। দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে $(1.99)^5$ এর মান চার দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় কর।

১৫। $\left(1+\frac{x}{4}\right)^n$ এর বিস্তৃতির তৃতীয় পদের সহগ চতুর্থ পদের সহগের দ্বিগুণ। n এর মান নির্ণয় কর। বিস্তৃতির পদসংখ্যা ও মধ্যপদ নির্ণয় কর।

১৬। (a) $\left(k-\frac{x}{3}\right)^7$ এর বিস্তৃতিতে k^3 এর সহগ 560 হলে x এর মান নির্ণয় কর।

(b) $\left(x^2+\frac{k}{3}\right)^6$ এর বিস্তৃতিতে x^3 এর সহগ 160 হলে k এর মান নির্ণয় কর।

১৭। $A=(1+x)^7$ এবং $B=(1-x)^8$.

(ক) প্যাসকেলের ত্রিভুজ ব্যবহার করে A এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর।

(খ) B এর বিস্তৃতির চার পদ পর্যন্ত নির্ণয় করে উক্ত ফলাফল ব্যবহার করে (0.99)8 এর মান চার দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় কর।

(গ) AB এর বিস্তৃতির x^7 এর সহগ নির্ণয় কর।

১৮। $(A+Bx)^n$ একটি বীজগাণিতিক রাশি।

(ক) $A=1$, $B=2$ এবং $n=5$ হলে প্যাসকেলের ত্রিভুজ ব্যবহার করে রাশিটির বিস্তৃতি নির্ণয় কর।

(খ) $B=3$ এবং $n=7$ হলে রাশিটির বিস্তৃতির x^4 এর সহগ 22680 হয়। A এর মান নির্ণয় কর।

(গ) $A=2$ এবং $B=1$ হলে রাশিটির বিস্তৃতির পঞ্চম ও ষষ্ঠ পদের সহগ সমান হয়। n এর মান নির্ণয় কর।

অনুশীলনী-১০.২ এর সমাধান

১। $(1+2x+x^2)^3$ এর বিস্তৃতিতে—

i. পদসংখ্যা 4

ii. ২য় পদ 6x

iii. শেষ পদ x^6

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i, ii (খ) i, iii

(গ) ii, iii (ঘ) i, ii ও iii

উত্তর: (গ) ii, iii [Ref: পাঠ্যবই : পৃষ্ঠা-২৩১]

ব্যাখ্যা:

দেওয়া আছে,

$$(1+2x+x^2)^3=[(1+x)^2]^3=(1+x)^6$$

যেহেতু দ্বিপদী রাশির বিস্তৃতিতে পদসংখ্যা শক্তি বা ঘাত এর চেয়ে 1 বেশি হয়;

সেহেতু এখানে, পদসংখ্যা $=(6+1)=7$

এখানে, $(1+2x+x^2)^3$ বা $(1+x)^6$ এর বিস্তৃতি,

$$(1+x)^6=\binom{6}{0}x^0+\binom{6}{1}x^1+\binom{6}{2}x^2+\binom{6}{3}x^3+\binom{6}{4}x^4+\binom{6}{5}x^5+\binom{6}{6}x^6$$

$$=1.1+\frac{6}{1}x+\frac{6.5}{1.2}x^2+\frac{6.5.4}{1.2.3}x^3+\frac{6.5.4.3}{1.2.3.4}x^4+\frac{6.5.4.3.2}{1.2.3.4.5}x^5+1.x^6$$

$$=1+6x+15x^2+20x^3+15x^4+6x^5+x^6$$

সুতরাং, বিস্তৃতির ২য় পদ, 6x

শেষ পদ, x^6

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^n$, যেখানে n জোড় সংখ্যা।

উপরের তথ্য থেকে ২ ও ৩নং প্রশ্নের উত্তর দাও।

২। $(r+1)$ তম পদটি x বর্জিত হলে r এর মান কত?

(ক) 0 (খ) $\frac{n}{2}$

(গ) n (ঘ) 2n

উত্তর: (খ) $\frac{n}{2}$ [Ref: পাঠ্যবই : পৃষ্ঠা-২২৭]

ব্যাখ্যা:

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^n$-এর বিস্তৃতিতে $(r+1)$ তম পদ, $T_{r+1}=\binom{n}{r}x^{n-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r$

$$=\binom{n}{r}x^{n-r}\cdot\frac{1}{x^r}$$

$$=\binom{n}{r}x^{n-2r}$$

কিন্তু পদটি x বর্জিত বলে, পদটিতে x এর সহগ শূন্য হবে। অর্থাৎ, $x^{n-2r}=x^0$

বা, $n-2r=0$

বা, $n=2r$

$\therefore r=\frac{n}{2}$

৩। $n=4$ হলে, চতুর্থ পদ কত?

(ক) 4 (খ) 4x

(গ) $\frac{4}{x^2}$ (ঘ) $\frac{4}{x}$

উত্তর: (গ) $\frac{4}{x^2}$ [Ref: পাঠ্যবই : পৃষ্ঠা-২২৭ (Basic]

ব্যাখ্যা:

রাশিটির চতুর্থ পদ তথা $(3+1)$ তম পদ, $T_{3+1}=\binom{n}{3}x^{n-3}\left(\frac{1}{x}\right)^3$

$$=\binom{4}{3}x^{4-3}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^3\ [\because n=4]$$

$$=\frac{4.3.2}{1.2.3}\cdot x^1\cdot\frac{1}{x^3}$$

$$=4\frac{1}{x^2}$$

৪। $(x+y)^5$-এর বিস্তৃতিতে দ্বিপদী সহগগুলি হলো :

(ক) 5, 10, 10, 5 (খ) 1, 5, 10, 10, 5, 1

(গ) 10, 5, 5, 10 (ঘ) 1, 2, 3, 3, 2, 1

উত্তর: (খ) 1, 5, 10, 10, 5, 1

ব্যাখ্যা:
$(x+y)^n$ এর বিস্তৃতিতে দ্বিপদী সহগগুলো প্যাসকেলের ত্রিভুজ থেকে পাওয়া যায়।

এখানে,

$n=0$	1
$n=1$	1 1
$n=2$	1 2 1
$n=3$	1 3 3 1
$n=4$	1 4 6 4 1
$n=5$	1 5 10 10 5 1

সুতরাং, $n=5$ হলে সহগগুলো– 1 5 10 10 5 1

বিকল্প পদ্ধতি: $(x+y)^5$ বিস্তৃতিতে সহগগুলো হবে যথাক্রমে,

$$\binom{5}{0}, \binom{5}{1}, \binom{5}{2}, \binom{5}{3}, \binom{5}{4}, \binom{5}{5}$$

$\therefore$ নির্ণেয় সহগ : 1, 5, 10, 10, 5, 1

৫। $(1-x)\left(1+\frac{x}{2}\right)^8$ -এর বিস্তৃতিতে x এর সহগ—

(ক) –1 (খ) $\frac{1}{2}$ (গ) 3 (ঘ) $-\frac{1}{2}$

উত্তর: (গ) 3

ব্যাখ্যা:

$$(1-x)\left(1+\frac{x}{2}\right)^8 = (1-x)\left\{\binom{8}{0}\left(\frac{x}{2}\right)^0 + \binom{8}{1}\left(\frac{x}{2}\right)^1 + \dots\right\}$$

$$= (1-x)(1.1 + 8.\frac{x}{2} + \dots)$$

$$= (1-x)(1+4x+\dots)$$

$$= 1 - x + 4x - 4x^2 + \dots$$

$$= 1 + 3x - 4x^2 + \dots$$

$\therefore$ x এর সহগ = 3

৬। $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^4$ -এর বিস্তৃতিতে x মুক্ত পদ কত?

(ক) 4 (খ) 6 (গ) 8 (ঘ) 0

উত্তর: (খ) 6

ব্যাখ্যা:

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^4 = (x^2)^4 + {}^4C_1(x^2)^{4-1}.\frac{1}{x^2} + {}^4C_2(x^2)^{4-2}.\left(\frac{1}{x^2}\right)^2 + \dots$$

$$= x^8 + {}^4C_1x^6.\frac{1}{x^2} + {}^4C_2x^4.\frac{1}{x^4} + \dots$$

$$= x^8 + {}^4C_1x^4 + {}^4C_2 + \dots$$

$\therefore$ বিস্তৃতিতে x মুক্ত পদ, ${}^4C_2 = \binom{4}{2}$

$$= \frac{4\times3}{2}$$

$$= 6$$

বিকল্প পদ্ধতি:
মনে করি, $(r+1)$ তম পদটি x মুক্ত পদ

এখানে, $T_{r+1} = \binom{4}{r}(x^2)^{4-r}\left(\frac{1}{x^2}\right)^r$

$$= {}^4C_r\, x^{8-2r}.x^{-2r}$$

$$= {}^4C_r\, x^{8-4r}$$

যেহেতু, পদটি x মুক্ত

সুতরাং, x এর ঘাত শূন্য

$\therefore 8 - 4r = 0$

$\Rightarrow r = 2$

$\therefore$ x মুক্ত পদটির মান, ${}^4C_2 = \frac{4!}{2!(4-2)!}$

$$= \frac{4!}{2!\times2!}$$

$$= \frac{4\times3\times2\times1}{2\times2} = 6 \text{ [Ans.]}$$

৭। $(2-x)(1+ax)^5$ কে x^2 পর্যন্ত বিস্তৃত করলে যদি $2+9x+cx^2$ পাওয়া যায়, তবে a ও c এর মান -

(ক) $a=1, c=15$ (খ) $a=5, c=15$
(গ) $a=15, c=1$ (ঘ) $a=1, c=0$

উত্তর: (ক) $a=1, c=15$

ব্যাখ্যা:

$$(2-x)(1+ax)^5 = (2-x)\left\{\binom{5}{0}(ax)^0 + \binom{5}{1}(ax)^1 + \binom{5}{2}(ax)^2 + \dots\right\}$$

$$= (2-x)(1 + 5ax + \frac{5.4}{1.2}a^2x^2 + \dots\dots)$$

$$= (2-x)(1 + 5ax + 10a^2x^2 + \dots\dots)$$

$$= 2 - x + 10ax - 5ax^2 + 20a^2x^2 - 10a^2x^3 + \dots\dots$$

$$= 2 + (10a-1)x + (20a^2 - 5a)x^2 - 10a^2x^3 + \dots\dots$$

প্রশ্নমতে, $2 + (10a-1)x + (20a^2-5a)x^2 = 2 + 9x + cx^2$

উভয়পক্ষে একই সহগ সমীকৃত করে পাই,

$\therefore 10a - 1 = 9$

$\therefore a = 1$

আবার, $20a^2 - 5a = c$

$\Rightarrow c = 15$

৮। $(x+y)^4$ বিস্তৃতির সহগগুলি সাজালে আমরা পাই –

(ক)
```
    4
  1 5 1
1 5 5 1
1 6 10 6 1
```
(খ)
```
  1
 1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
```
(গ)
```
    2
  2 3 2
1 5 5 2
2 7 10 7 2
```
(ঘ)
```
    6
  6 12 6
6 18 18 6
6 24 36 24 6
```

উত্তর: সঠিক উত্তর নেই।

ব্যাখ্যা:
$(x+y)^4$ বিস্তৃতির সহগগুলো সাজালে আমরা পাই,

দ্বিপদ	বিস্তৃতি	
$(x+y)^0$	1	1
$(x+y)^1$	$x+y$	1 1
$(x+y)^2$	$x^2+2xy+y^2$	1 2 1
$(x+y)^3$	$x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$	1 3 3 1
$(x+y)^4$	$x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$	1 4 6 4 1

১। দ্বিপদী উপপাদ্য প্রয়োগ করে বিস্তৃত কর :

(a) $(2+x^2)^5$ (b) $\left(2-\frac{1}{2x}\right)^6$

(a)-এর সমাধান:
দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে,

$$(2+x^2)^5 = 2^5 + \binom{5}{1}2^4.x^1 + \binom{5}{2}2^3.(x^2)^2 + \binom{5}{3}2^2.(x^2)^3 + \binom{5}{4}2^1.(x^2)^4 + (x^2)^5$$

$$= 32 + \frac{5}{1}.16.x^2 + \frac{5.4}{1.2}.8.x^4 + \frac{5.4.3}{1.2.3}.4x^6 + \frac{5.4.3.2}{1.2.3.4}.2x^8 + x^{10}$$

$$= 32 + 80x^2 + 80x^4 + 40x^6 + 10x^8 + x^{10} \text{ [Ans.]}$$

দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে,

$(2+x^2)^5 = 2^5 + {}^5C_1.2^4.(x^2) + {}^5C_2.2^3.(x^2)^2 + {}^5C_3.2^2.(x^2)^3 + {}^5C_4.2.(x^2)^4 + (x^2)^5$

$= 32 + 5.16x^2 + 10.8x^4 + 10.4x^6 + 5.2x^8 + x^{10}$ [ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে]

$= 32 + 80x^2 + 80x^4 + 40x^6 + 10x^8 + x^{10}$ **[Ans.]**

(b)-এর সমাধান:

দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে,

$$\left(2-\frac{1}{2x}\right)^6 = 2^6 + \binom{6}{1}2^5\left(-\frac{1}{2x}\right) + \binom{6}{2}2^4\left(-\frac{1}{2x}\right)^2 + \binom{6}{3}2^3\left(-\frac{1}{2x}\right)^3 + \binom{6}{4}2^2\left(-\frac{1}{2x}\right)^4 + \binom{6}{5}2\left(-\frac{1}{2x}\right)^5 + \left(-\frac{1}{2x}\right)^6$$

$$= 2^6 + \frac{6}{1}\times 32\times\left(-\frac{1}{2x}\right) + \frac{6.5}{1.2}\times 16\times\frac{1}{4x^2} + \frac{6.5.4}{1.2.3}\times 8\times\left(\frac{-1}{8x^3}\right) + \frac{6.5.4.3}{1.2.3.4}\times 4\times\frac{1}{16x^4} + \frac{6.5.4.3.2}{1.2.3.4.5}\times 2\times\left(-\frac{1}{32x^5}\right) + \frac{1}{64x^6}$$

$$= 64 - \frac{96}{x} + \frac{60}{x^2} - \frac{20}{x^3} + \frac{15}{4x^4} - \frac{3}{8x^5} + \frac{1}{64x^6} \text{ [Ans.]}$$

বিকল্প সমাধান

দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে,

$$\left(2-\frac{1}{2x}\right)^6 = 2^6 + {}^6C_1 2^5.\left(-\frac{1}{2x}\right) + {}^6C_2 2^4\left(-\frac{1}{2x}\right)^2 + {}^6C_3 2^3\left(-\frac{1}{2x}\right)^3 + {}^6C_4 2^2\left(-\frac{1}{2x}\right)^4 + {}^6C_5 2\left(-\frac{1}{2x}\right)^5 + \left(-\frac{1}{2x}\right)^6$$

$= 64 - 6.32\frac{1}{2x} + 15.16\frac{1}{4x^2} - 20.8\frac{1}{8x^3} + 15.4\frac{1}{16x^4} - 6.2\frac{1}{32x^5} + \frac{1}{64x^6}$ [ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে]

$= 64 - \frac{96}{x} + \frac{60}{x^2} - \frac{20}{x^3} + \frac{15}{4x^4} - \frac{3}{8x^5} + \frac{1}{64x^6}$

১০। নিম্নোক্ত বিস্তৃতিগুলোর প্রথম চারটি পদ নির্ণয় কর : (a) $(2+3x)^6$ (b) $\left(4-\frac{1}{2x}\right)^5$

(a)-এর সমাধান:

দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে,

$(2+3x)^6 = 2^6 + \binom{6}{1}2^5.3x + \binom{6}{2}2^4.(3x)^2 + \binom{6}{3}2^3.(3x)^3 + \dots$ (৪র্থ পদ পর্যন্ত)

$= 64 + \frac{6}{1}.32.3x + \frac{6.5}{1.2}.16\times 9x^2 + \frac{6.5.4}{1.2.3}\times 8\times 27x^3 + \dots$

$= 64 + 576x + 2160x^2 + 4320x^3 + \dots$ **[Ans.]**

বিকল্প সমাধান

দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে, $(2+3x)^6 = 2^6 + {}^6C_1.2^5.(3x) + {}^6C_2.2^4.(3x)^2 + {}^6C_3.2^3.(3x)^3 + \dots$ (৪র্থ পদ পর্যন্ত)

$= 64 + 6.32.(3x) + 15.16.9x^2 + 20.8.27x^3 + \dots$ [ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে]

$= 64 + 576x + 2160x^2 + 4320x^3 + \dots$

(b)-এর সমাধান:

দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে, $\left(4-\frac{1}{2x}\right)^5 = 4^5 + \binom{5}{1}4^4\left(-\frac{1}{2x}\right) + \binom{5}{2}4^3\left(-\frac{1}{2x}\right)^2 + \binom{5}{3}4^2\left(-\frac{1}{2x}\right)^3 + \dots$ (৪র্থ পদ পর্যন্ত)

$= 1024 + \frac{5}{1}.256\left(-\frac{1}{2x}\right) + \frac{5.4}{1.2}.64.\frac{1}{4x^2} + \frac{5.4.3}{1.2.3}.16\left(-\frac{1}{8x^3}\right) + \dots$

$= 1024 - \frac{640}{x} + \frac{160}{x^2} - \frac{20}{x^3} + \dots$ **[Ans.]**

বিকল্প সমাধান

দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে, $\left(4-\frac{1}{2x}\right)^5 = 4^5 + {}^5C_1 4^4\left(-\frac{1}{2x}\right) + {}^5C_2 4^3\left(-\frac{1}{2x}\right)^2 + {}^5C_3 4^2\left(-\frac{1}{2x}\right)^3 + \dots$ ৪র্থ পদ পর্যন্ত

$= 1024 - 5.256\frac{1}{2x} + 10.64\frac{1}{4x^2} - 10.16\frac{1}{8x^3} + \dots$

$= 1024 - \frac{640}{x} + \frac{160}{x^2} - \frac{20}{x^3} + \dots$ [ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে]

PART-4 [...]

১১। $\left(p-\frac{1}{2}x\right)^6 = r - 96x + sx^2 + \dots\dots$ হলে, p, r এবং s এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান:

দেওয়া আছে, $\left(p-\frac{1}{2}x\right)^6 = r - 96x + sx^2 + \dots\dots$ ......(i)

দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে $\left(p-\frac{1}{2}x\right)^6$ এর বিস্তৃতি নিম্নরূপ:

$$\left(p-\frac{1}{2}x\right)^6 = p^6 + \binom{6}{1}p^5\left(-\frac{1}{2}x\right) + \binom{6}{2}p^4\left(-\frac{1}{2}x\right)^2 + \dots\dots$$

$$\Rightarrow \left(p-\frac{1}{2}x\right)^6 = p^6 - \frac{6}{1}.p^5.\frac{1}{2}.x + \frac{6.5}{1.2}.p^4.\frac{1}{4}.x^2 + \dots\dots$$

$$\Rightarrow \left(p-\frac{1}{2}x\right)^6 = p^6 - 3p^5x + \frac{15}{4}p^4x^2 + \dots \dots \quad \text{......(ii)}$$

(i) ও (ii) অনুরূপ পদগুলো তুলনা করে পাই,

$r = p^6$ .... (iii)

$96 = 3p^5$ .... (iv)

$s = \frac{15}{4}p^4$ .... (v)

(iv) নং হতে পাই, $3p^5 = 96$

বা, $p^5 = \frac{96}{3}$

বা, $p^5 = 32$

বা, $p^5 = 2^5$

$\therefore p = 2$

p এর মান (iii) নং-এ বসিয়ে পাই,

$r = p^6$

$\therefore r = 2^6 = 2\times2\times2\times2\times2\times2 = 64$

p এর মান (v) নং-এ বসিয়ে পাই,

$s = \frac{15}{4}p^4$

$\therefore s = \frac{15}{4}\times 2^4 = \frac{15}{4}\times 2\times2\times2\times2 = 60$

Ans: $p = 2$, $r = 64$, $s = 60$

দৃষ্টি আকর্ষণ: পাঠ্যবইয়ের প্রশ্নে $-196x$ এর পরিবর্তে $-96x$ হবে।

১২। $\left(1+\frac{x}{2}\right)^8$ এর বিস্তৃতির x^3 এর সহগ নির্ণয় কর।

সমাধান:

দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে,

$$\left(1+\frac{x}{2}\right)^8 = 1^8 + {}^8C_1.(1)^7.\left(\frac{x}{2}\right)^1 + {}^8C_2.(1)^6.\left(\frac{x}{2}\right)^2 + {}^8C_3.(1)^5\left(\frac{x}{2}\right)^3 + \dots\dots$$

$$= 1 + \frac{8}{1}.\frac{x}{2} + \frac{8.7}{1.2}.\frac{x^2}{4} + \frac{8.7.6}{1.2.3}.\frac{x^3}{8} + \dots\dots$$

$$= 1 + 4x + 7x^2 + 7x^3 + \dots\dots$$

$\therefore x^3$ এর সহগ 7. **[Ans.]**

১৩। x এর ঘাতের ঊর্ধ্বক্রম অনুসারে $\left(2+\frac{x}{4}\right)^6$ কে x^3 পর্যন্ত বিস্তৃত কর। উহার সাহায্যে $(1.9975)^6$ এর আসন্ন মান চার দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় কর।

সমাধান:

দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে, $\left(2+\frac{x}{4}\right)^6$

$$= 2^6 + {}^6C_1.2^5\left(\frac{x}{4}\right)^1 + {}^6C_2.2^4\left(\frac{x}{4}\right)^2 + {}^6C_3.2^3\left(\frac{x}{4}\right)^3 + \dots\dots$$

$$= 64 + \frac{6}{1}.32.\frac{x}{4} + \frac{6.5}{1.2}.16.\frac{x^2}{16} + \frac{6.5.4}{1.2.3}.8.\frac{x^3}{64} + \dots\dots$$

$$= 64 + 48x + 15x^2 + \frac{5}{2}x^3 + \dots\dots$$

$\therefore$ নির্ণেয় বিস্তৃতি,

$$\left(2+\frac{x}{4}\right)^6 = 64 + 48x + 15x^2 + \frac{5}{2}x^3 + \dots\dots$$

এখানে,

$2 + \frac{x}{4} = 1.9975$ বা, $\frac{x}{4} = 1.9975 - 2$

বা, $\frac{x}{4} = -0.0025$ বা, $x = -0.01$

$\therefore \left(2+\frac{-0.01}{4}\right)^6 = 64 + 48(-0.01) + 15\times(-0.01)^2 + \frac{5}{2}\times(-0.01)^3 + \dots$

বা, $(2-0.0025)^6 = 64 - 0.48 + 0.0015 - \frac{5}{2}\times 0.000001 + \dots$

বা, $(1.9975)^6 = 63.5215$ [চার দশমিক স্থান পর্যন্ত] **[Ans.]**

১৪। দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে $(1.99)^5$ এর মান চার দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় কর।

সমাধান:

দ্বিপদী উপপাদ্য অনুসারে আমরা পাই, $(2+x)^5 = 2^5 + {}^5C_1.2^4.x^1 + {}^5C_2.2^3.x^2 + {}^5C_3.2^2.x^3 + {}^5C_4.2^1.x^4 + x^5$

$$= 32 + \frac{5}{1}.16.x + \frac{5.4}{1.2}.8.x^2 + \frac{5.4.3}{1.2.3}4.x^3 + \frac{5.4.3.2}{1.2.3.4}.2.x^4 + x^5$$
$$= 32 + 80x + 80x^2 + 40x^3 + 10x^4 + x^5$$

এখানে, $2 + x = 1.99$ বা, $x = 1.99 - 2$ $\therefore x = -0.01$

$\therefore (2-0.01)^5 = 32 + 80(-0.01) + 80(-0.01)^2 + 40(-0.01)^3 - 10(-0.01)^4 + (-0.01)^5$

বা, $(1.99)^5 = 32 - 0.8 + 0.008 - 0.00004 + 0.0000001 - 0.0000000001$

$\therefore (1.99)^5 = 31.2080$ [চার দশমিক স্থান পর্যন্ত] **[Ans.]**

বিকল্প সমাধান:

$(1.99)^5 = (2-0.01)^5$

দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে পাই,

$$(2-0.01)^5 = 2^5 + \binom{5}{1}2^4.(-0.01) + \binom{5}{2}2^3(-0.01)^2 + \binom{5}{3}2^2(-0.01)^3 + \binom{5}{4}2(-0.01)^4 + (-0.01)^5$$
$$= 32 + 5.16(-0.01) + \frac{5.4}{1.2}.8.(0.0001) + \frac{5.4.3}{1.2.3}.4(-0.000001) + \frac{5.4.3.2}{1.2.3.4}.2(0.00000001) + (-0.0000000001)$$
$$= 32 - 0.8 + 0.008 - 0.00004 + 0.0000001 - 0.0000000001$$

$= 31.2079601 = 31.2080$ **[Ans.]** [চার দশমিক স্থান পর্যন্ত]

১৫। $\left(1+\frac{x}{4}\right)^n$ এর বিস্তৃতির তৃতীয় পদের সহগ চতুর্থ পদের সহগের দ্বিগুণ। n এর মান নির্ণয় কর। বিস্তৃতির পদসংখ্যা ও মধ্যপদ নির্ণয় কর।

সমাধান:

$$\left(1+\frac{x}{4}\right)^n = \binom{n}{0}\left(\frac{x}{4}\right)^0 + \binom{n}{1}\left(\frac{x}{4}\right)^1 + \binom{n}{2}\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \binom{n}{3}\left(\frac{x}{4}\right)^3 + \dots\dots$$

শর্তমতে, $\binom{n}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2 = 2\times\binom{n}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3$

বা, $\frac{n(n-1)}{1.2}\times\frac{1}{16} = 2\times\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\times\frac{1}{64}$

বা, $\frac{n(n-1)}{n(n-1)(n-2)} = 2\times\frac{1}{64}\times\frac{2\times16}{3\times2\times1}$

বা, $\frac{1}{n-2} = \frac{1}{6}$

বা, $n-2 = 6$

বা, $n = 6+2$

$\therefore n = 8$

$n = 8$ হলে, দ্বিপদিটি হবে $\left(1+\frac{x}{4}\right)^8$ এবং পদের সংখ্যা $8+1=9$ যা বিজোড় সংখ্যা। সুতরাং এদের মধ্যপদ হবে একটি।

অর্থাৎ, $\left(\frac{8}{2}+1\right)$ বা $(4+1)$ তম পদই মধ্যপদ।

আমরা জানি,

$(1+x)^n$ এর বিস্তৃতিতে $(r+1)$ তম পদ $= {}^nC_r(1)^{n-r}\times x^r$

$\therefore (4+1)$ তম পদ $= {}^8C_4(1)^{8-4}\left(\frac{1}{4}\right)^4$

$$= \frac{8.7.6.5}{1.2.3.4}\times\frac{1}{4^4}$$
$$= 70\times\frac{1}{4\times4\times4\times4}$$
$$= \frac{70}{256} = \frac{35}{128}$$

$\therefore n = 8$, পদ সংখ্যা $= 9$ এবং মধ্যপদ $= \frac{35}{128}$ **[Ans.]**

১৬। (a) $\left(k-\frac{x}{3}\right)^7$ এর বিস্তৃতিতে k^3 এর সহগ 560 হলে x এর মান নির্ণয় কর।

(b) $\left(x^2+\frac{k}{3}\right)^6$ এর বিস্তৃতিতে x^3 এর সহগ 160 হলে k এর মান নির্ণয় কর।

(a)-এর সমাধান:

$$\left(k-\frac{x}{3}\right)^7 = k^7 + {}^7C_1.k^6\left(-\frac{x}{3}\right) + {}^7C_2k^5\left(-\frac{x}{3}\right)^2 + {}^7C_3k^4\left(-\frac{x}{3}\right)^3 + {}^7C_4k^3\left(-\frac{x}{3}\right)^4 + \dots\dots$$
$$= k^7 + \frac{7}{1}.k^6\left(-\frac{x}{3}\right) + \frac{7.6}{1.2}k^5.\frac{x^2}{9} + \frac{7.6.5}{1.2.3}k^4\left(-\frac{x^3}{27}\right) + \frac{7.6.5.4}{1.2.3.4}k^3.\frac{x^4}{81} + \dots\dots$$
$$= k^7 - \frac{7}{3}k^6x + \frac{7}{3}k^5.x^2 - \frac{35}{27}k^4.x^3 + \frac{35}{81}k^3x^4 + \dots\dots$$

এখানে, $\left(k-\frac{x}{3}\right)^7$ এর বিস্তৃতিতে k^3 এর সহগ $\frac{35}{81}x^4$

প্রশ্নমতে, $\frac{35}{81}x^4 = 560$

বা, $x^4 = \frac{560\times81}{35}$

বা, $x^4 = 1296$

বা, $x^4 - 1296 = 0$

বা, $(x^2)^2 - 36^2 = 0$

বা, $(x^2-36)(x^2+36) = 0$

$\therefore x^2 - 36 = 0$ অথবা, $x^2 + 36 = 0$

বা, $(x+6)(x-6) = 0$ $\therefore x^2 = -36$

$\therefore x = 6, -6$

কিন্তু $x^2 \neq -36$ কারণ কোনো বাস্তব সংখ্যার বর্গ ঋণাত্মক হতে পারে না।

সুতরাং, $x = 6, -6$ **[Ans.]**

(চ)-এর সমাধান:

দ্বিপদী উপপাদ্য ব্যবহার করে,

$$\left(x^2+\frac{k}{x}\right)^6 = (x^2)^6 + {}^6C_1(x^2)^5\left(\frac{k}{x}\right) + {}^6C_2(x^2)^4\left(\frac{k}{x}\right)^2 + {}^6C_3(x^2)^3\left(\frac{k}{x}\right)^3 + {}^6C_4.(x^2)^2\left(\frac{k}{x}\right)^4 + \ldots\ldots$$

$$= x^{12} + \frac{6}{1}.x^{10}.\frac{k}{x} + \frac{6.5}{1.2}.x^8.\frac{k^2}{x^2} + \frac{6.5.4}{1.2.3}x^6.\frac{k^3}{x^3} + \frac{6.5.4.3}{1.2.3.4}x^4.\frac{k^4}{x^4} + \ldots\ldots$$

$$= x^{12} + 6kx^9 + 15k^2x^6 + 20k^3x^3 + 15k^4 + \ldots\ldots$$

এখানে, $\left(x^2+\frac{k}{x}\right)^6$ এর বিস্তৃতিতে x^3 এর সহগ $20k^3$.

প্রশ্নমতে, $20k^3 = 160$

বা, $k^3 = 8$

বা, $k^3 = 2^3$

বা, $k = 2$ **[Ans.]**

১৭। $A = (1+x)^7$ এবং $B = (1-x)^8$.

(ক) প্যাসকেলের ত্রিভুজ ব্যবহার করে A এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর।

(খ) B এর বিস্তৃতির চার পদ পর্যন্ত নির্ণয় করে উক্ত ফলাফল ব্যবহার করে (0.99)8 এর মান চার দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় কর।

(গ) AB এর বিস্তৃতির x^7 এর সহগ নির্ণয় কর।

(ক)-এর সমাধান:

প্যাসকেলের ত্রিভুজ সূত্র:

```
              1
            1   1
          1   2   1
        1   3   3   1
      1   4   6   4   1
    1   5  10  10   5   1
  1   6  15  20  15   6   1
n=7→1   7  21  35  35  21   7   1
```


এখানে, প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে $(1+x)^7$ কে বিস্তৃত করে পাই,

$(1+x)^7 = 1.x^0 + 7.x^1 + 21.x^2 + 35.x^3 + 35.x^4 + 21.x^5 + 7.x^6 + 1.x^7$

$= 1 + 7x + 21x^2 + 35x^3 + 35x^4 + 21x^5 + 7x^6 + x^7$

(খ)-এর সমাধান:

$B = (1-x)^8$

$$= \binom{8}{0}(-x)^0 + \binom{8}{1}(-x)^1 + \binom{8}{2}(-x)^2 + \binom{8}{3}(-x)^3 + \binom{8}{4}(-x)^4 + \binom{8}{5}(-x)^5 + \binom{8}{6}(-x)^6 + \binom{8}{7}(-x)^7 + \binom{8}{8}(-x)^8$$

$$= 1.1 - 8x + \frac{8.7}{1.2}x^2 - \frac{8.7.6}{1.2.3}x^3 + \frac{8.7.6.5}{1.2.3.4}x^4 - \frac{8.7.6.5.4}{1.2.3.4.5}x^5 + \frac{8.7.6.5.4.3}{1.2.3.4.5.6}x^6 - \frac{8.7.6.5.4.3.2}{1.2.3.4.5.6.7}x^7 + 1.x^8$$

$= 1 - 8x + 28x^2 - 56x^3 + 70x^4 - 56x^5 + 28x^6 - 8x^7 + x^8$

B এর বিস্তৃতির প্রথম চার পদ নিয়ে, $(1-x)^8 = 1 - 8x + 28x^2 - 56x^3$

$x = 0.01$ বসিয়ে পাই, $(1-0.01)^8 = 1 - 8\times0.01 + 28(0.01)^2 - 56(0.01)^3$

$= 0.922744$

≈ 0.9227 [চার দশমিক স্থান পর্যন্ত]

(গ)-এর সমাধান:

$A = 1 + 7x + 21x^2 + 35x^3 + 35x^4 + 21x^5 + 7x^6 + x^7$ ['ক' হতে]

$B = 1 - 8x + 28x^2 - 56x^3 + 70x^4 - 56x^5 + 28x^6 - 8x^7 + x^8$ ['খ' হতে]

সুতরাং, $AB = (1 + 7x + 21x^2 + 35x^3 + 35x^4 + 21x^5 + 7x^6 + x^7)(1 - 8x + 28x^2 - 56x^3 + 70x^4 - 56x^5 + 28x^6 - 8x^7 + x^8)$

x^7 যুক্ত পদগুলো নিয়ে $= x^7 - 56x^7 + 21\times28x^7 - 56\times35x^7 + 35\times70x^7 - 56\times21x^7 + 28\times7x^7 - 8x^7$

x^7 এর সহগ $= (1 - 56 + 21\times28 - 56\times35 + 35\times70 - 56\times21 + 28\times7 - 8)$

$= 35$

১৮। $(A+Bx)^n$ একটি বীজগাণিতিক রাশি।

(ক) $A = 1, B = 2$ এবং $n = 5$ হলে প্যাসকেলের ত্রিভুজ ব্যবহার করে রাশিটির বিস্তৃতি নির্ণয় কর।

(খ) $B = 3$ এবং $n = 7$ হলে রাশিটির বিস্তৃতির x^4 এর সহগ 22680 হয়। A এর মান নির্ণয় কর।

(গ) $A = 2$ এবং $B = 1$ হলে রাশিটির বিস্তৃতির পঞ্চম ও ষষ্ঠ পদের সহগ সমান হয়। n এর মান নির্ণয় কর।

(ক)-এর সমাধান:

$A = 1, B = 2$ এবং $n = 5$ হলে, $(1+2x)^5$

প্যাসকেলের ত্রিভুজ সূত্র:

```
          1
        1   1
      1   2   1
    1   3   3   1
  1   4   6   4   1
1   5  10  10   5   1
```

সুতরাং, $(1+2x)^5 = 1 + 5(2x) + 10(2x)^2 + 10(2x)^3 + 5(2x)^4 + 1(2x)^5$

$= 1 + 10x + 10\times4x^2 + 10\times8x^3 + 5\times16x^4 + 1\times32x^5$

$= 1 + 10x + 40x^2 + 80x^3 + 80x^4 + 32x^5$

(খ)-এর সমাধান:

$$(A+3x)^7 = \binom{7}{0}A^7(3x)^0 + \binom{7}{1}A^6(3x)^1 + \binom{7}{2}A^5(3x)^2 + \binom{7}{3}A^4(3x)^3 + \binom{7}{4}A^3(3x)^4 + \ldots\ldots$$

x^4 যুক্ত পদটি, $\binom{7}{4}A^3(3x)^4 = \frac{7.6.5.4}{1.2.3.4}\times A^3\times3^4\times x^4$

সুতরাং, x^4 যুক্ত পদটির সহগ $= \frac{7.6.5.4}{1.2.3.4}\times A^3\times3^4$

প্রশ্নমতে, $\frac{7.6.5.4}{1.2.3.4}\times A^3\times3^4 = 22680$

বা, $2835A^3 = 22680$

বা, $A^3 = 8$

বা, $A = \sqrt[3]{8}$

$= 2$

অতএব, A এর মান, 2

(গ)-এর সমাধান:

$A = 2, B = 1$ হলে, $(2 + 1.x)^n$
$= (2 + x)^n$

রাশিটির বিস্তৃতি:

$$(2+x)^n = \binom{n}{0} 2^n x^0 + \binom{n}{1} 2^{n-1} x^1 + \binom{n}{2} 2^{n-2} x^2 + \binom{n}{3} 2^{n-3} x^3 + \binom{n}{4} 2^{n-4} x^4 + \binom{n}{5} 2^{n-5} x^5 + \ldots\ldots\ldots$$

ধারাটির, পঞ্চম পদের সহগ $= \binom{n}{4} 2^{n-4}$

$$= \frac{n.(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} \cdot 2^{(n-5)} \cdot 2$$

$[\because 2^{n-5}.2^1 = 2^{n-5+1} = 2^{n-4}]$

ষষ্ঠ পদের সহগ $= \binom{n}{5} 2^{n-5}$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5} \cdot 2^{n-5}$$

পঞ্চম ও ষষ্ঠ পদের সহগ সমান বলে,

$$\frac{n.(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} \cdot 2^{(n-5)} \cdot 2 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5} \cdot 2^{n-5}$$

বা, $2 = \frac{n-4}{5}$

বা, $10 = n - 4$

বা, $n = 10 + 4$

$= 14$

অতএব, n এর মান 14।