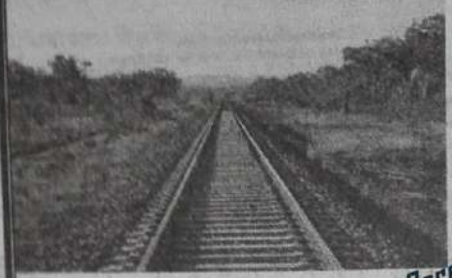
☙ বাস্তব জীবনে এ অধ্যায়ের প্রয়োগ

স্থানাঙ্ক জ্যামিতি বিষয়াবলি সম্পর্কিত "বাস্তব জীবনে এ অধ্যায়ের প্রয়োগ" শীর্ষক অংশটি চতুর্থ অধ্যায়ের শেষে একত্রে উল্লেখ করা হয়েছে বিধায় এ অধ্যায়ে আর আলাদাভাবে উল্লেখ করা হলো না। [রয়েল গাইড পৃষ্ঠা: ২৯৮-৩০০]

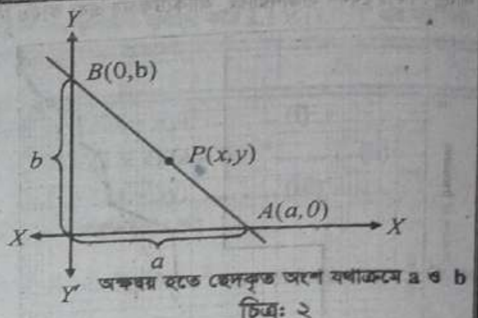
"An investment in knowledge pays the best interest".

–Benjamin Franklin

অনুশীলনী-১১.১



চিত্র: ১



চিত্র: ২

ভূমিকা [Introduction]

খ্রিষ্টপূর্ব ৩০০০ অব্দ থেকে Mesopotamia (বর্তমান ইরাক) Egypt (বর্তমান মিশর) এবং সিন্ধু উপত্যকায় জ্যামিতির ব্যবহার হতো। গ্রীক দার্শনিক ও গণিতবিদ ইউক্লিড ৩০০ খ্রিষ্টপূর্বে এই ধারনা বিস্তৃত করে একটি সুবিন্যস্ত বৈজ্ঞানিক কাঠামোতে রূপান্তরিত করেন। এ কারণে ইউক্লিডকে (Euclid 323 BC-283 BC) জ্যামিতির জনক বলা হয়। ইউক্লিড জ্যামিতিতে রেখা একটি মৌলিক ধারণা।

Euclid

সপ্তদশ শতকের প্রথমার্ধে জ্যামিতির সঙ্গে বীজগণিতের সম্পর্ক স্থাপন এবং বীজগণিতের সাহায্যে জ্যামিতির প্রয়োগ সফলতার সাথে সর্বপ্রথম তুলে ধরেন বিখ্যাত দার্শনিক ও গণিতবিদ রেনে দেকার্ত (Rene Descartes) (1596-1650)। তার প্রবর্তিত জ্যামিতিকে বিশ্লেষণমূলক (Analytical) জ্যামিতি/কার্তেসীয় জ্যামিতি বলা হয়।

Rene Descartes

বোর্ড প্রশ্নাবলির বিশ্লেষণ [Board Questions Analysis]

এই অধ্যায় থেকে বিভিন্ন বোর্ডে বিগত দু'বছরের এসএসসি পরীক্ষায় মোট ৮টি সৃজনশীল প্রশ্ন ও ৩৯টি বহুনির্বাচনি প্রশ্ন এসেছে। নিচের 'Board Analysis' অংশে এই অধ্যায় থেকে কোন সালে কোন বোর্ডে কতটি প্রশ্ন হয়েছে তা দেওয়া আছে।

☑ সৃজনশীল প্রশ্ন:

বোর্ড / সাল	ঢাকা	রাজশাহী	কুমিল্লা	যশোর	চট্টগ্রাম	বরিশাল	সিলেট	দিনাজপুর
২০১৬	–	১	১	১	–	–	১	–
২০১৫	১	১	–	১	–	১	–	–

☑ বহুনির্বাচনি প্রশ্ন:

বোর্ড / সাল	ঢাকা	রাজশাহী	কুমিল্লা	যশোর	চট্টগ্রাম	বরিশাল	সিলেট	দিনাজপুর
২০১৬	২	৪	৩	২	৪	৩	২	৩
২০১৫	৩	২	৩	১	২	৩	২	–

মূল শব্দাবলি [Key Words]

কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক (*Cartesian co-ordinates*), পোলার স্থানাঙ্ক (*Polar co-ordinate*), ভরকেন্দ্র (*Centroid*), সঞ্চারপথ (*Locus*), ঢাল (*Slope*), ছেদবিন্দু (*Point of intersection*), সমান্তরাল (*Parallel*), লম্ব (*Perpendicular*), লম্ব দূরত্ব (*Perpendicular distance*), সমদ্বিখণ্ডক (*Bisector*), অন্তঃকেন্দ্র (*Incentre*); পরিকেন্দ্র (*Circumcentre*), লম্বকেন্দ্র (*Orthocentre*), আয়তাকার কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক (*Rectangular Cartesian Coordinates*); ভুজ (*Abscissa*); কোটি (*Ordinate*); সমবিন্দু (*Concurrent*).

এ অধ্যায়ের আলোচ্যসূচি

- সমতলে কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক ও পোলার স্থানাঙ্ক
- দুইটি বিন্দুর দূরত্ব সূত্র
- শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্কের মাধ্যমে বিন্দুর ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল
- শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্কের মাধ্যমে বিন্দুর চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল
- সরলরেখার ঢাল
- দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী সরলরেখার ঢাল
- অক্ষরেখার সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ
- সরলরেখার সমীকরণের বিভিন্ন আকার
- দুইটি সরলরেখার ছেদবিন্দু
- দুইটি সরলরেখার মধ্যবর্তী কোণ

প্রাথমিক আলোচনা

স্থানাঙ্ক জ্যামিতি (*Coordinate geometry*): বিন্দু, সরলরেখা ও বক্ররেখার বীজগাণিতিক প্রকাশকে জ্যামিতির যে অংশে অধ্যয়ন করা হয়, তাই স্থানাঙ্ক জ্যামিতি নামে পরিচিত।

বিশ্লেষণ জ্যামিতি (*Analytic geometry*): জ্যামিতির যে অংশে বিন্দু সরলরেখা ও বক্ররেখার বীজগাণিতিক প্রকাশকে জ্যামিতির যে অংশে অধ্যয়ন করা হয় তাকে বিশ্লেষণ জ্যামিতি বলে।

কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক (*Cartesian co-ordinates*): সমতলে বিন্দু পাতনের মাধ্যমে সরল বা বক্ররেখা অথবা এদের দ্বারা তৈরি জ্যামিতিক ক্ষেত্র যথা ত্রিভুজ, চতুর্ভুজ, বৃত্ত ইত্যাদি চিত্র প্রকাশ করা হয়। সমতলে বিন্দু পাতনের পদ্ধতির সূচনা করেন বিখ্যাত গণিতবিদ রেনে ডেকার্তে (*Rene Descartes*) ডেকার্তের প্রবর্তিত জ্যামিতির এই স্থানাঙ্ক (*co-ordinates*) প্রথাই কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক নামে পরিচিত।

আয়তাকার কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক (*Rectangular Cartesian coordinates*): পরস্পর সমকোণে ছেদ করে এরূপ একজোড়া অক্ষের সাপেক্ষে কোনো বিন্দুর স্থানাঙ্ককে আয়তাকার কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক বলা হয়। বিন্দুর স্থানাঙ্ক সূচক (x, y) একটি ক্রমজোড় বুঝায় যার প্রথমটি ভুজ ও দ্বিতীয়টি কোটি নির্দেশ করে। তাই (x, y) ও (y, x) দ্বারা দুইটি ভিন্ন বিন্দু বোঝায়।

আয়তাকার কার্তেসীয় স্থানাঙ্কের ক্ষেত্রে লক্ষণীয়

(১) দুইটি সরলরেখা XOX' এবং YOY' আঁকলে XOX' কে x অক্ষ (*x-axis*) YOY' কে y অক্ষ (*y-axis*) বলা হয়।

(২) x অক্ষ ও y অক্ষের ছেদবিন্দু 'O' কে মূলবিন্দু বলা হয়।

(৩) কার্তেসীয় স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয় দ্বারা গঠিত সমতল XOY, YOX', $X'OY'$, $Y'OX$ এই চারটি ভাগে বিভক্ত হয়। এদের প্রত্যেকটিকে চতুর্ভাগ (***Quadrant***) বলা হয়।

(৪) XOY চতুর্ভাগকে প্রথম ধরা হয় এবং ঘড়ির কাঁটার আবর্তনের বিপরীত দিকে পর্যায়ক্রমে দ্বিতীয়, তৃতীয় ও চতুর্থ চতুর্ভাগ ধরা হয়। কোনো বিন্দুর স্থানাঙ্কের চিহ্ন অনুসারে বিন্দুর অবস্থান বিভিন্ন চতুর্ভাগে থাকে।

(৫) p বিন্দুর স্থানাঙ্ক $p(x, y)$ বলতে p বিন্দু হতে অক্ষদ্বয়ের দূরত্বকে বোঝায়।

(৬) $p(x, y)$ বলতে বোঝায় p বিন্দুর ভুজ x এবং কোটি y। ভুজ ও কোটিকে এক সাথে স্থানাঙ্ক বলা হয়।

(৭) কোনো বিন্দু y অক্ষের ডানে থাকলে ভুজ ধনাত্মক ও বামে থাকলে ভুজ ঋণাত্মক হবে। আবার বিন্দুটি x অক্ষের উপরে থাকলে কোটি ধনাত্মক এবং নীচে থাকলে কোটি ঋণাত্মক।

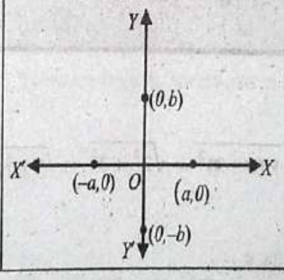
(৮) কোনো বিন্দুর ধনাত্মক ভুজ ও কোটি যথাক্রমে OX ও OY বরাবর বা তাদের সমান্তরাল দিকে থাকবে। একইভাবে ঋণাত্মক ভুজ বা কোটি OX' ও OY' বরাবর বা তাদের সমান্তরাল দিকে থাকবে।

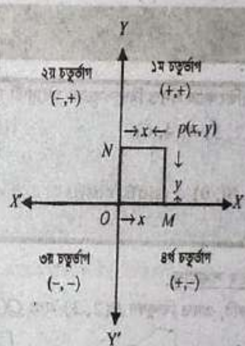
প্রয়োগ

(১) x অক্ষের ওপর কোটি শূন্য অর্থাৎ x অক্ষের উপর সর্বদা $y = 0$ সুতরাং x অক্ষের উপর প্রত্যেক বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(x, 0)$

(২) y অক্ষের ওপর ভুজ শূন্য অর্থাৎ y অক্ষের উপর সর্বদা $x = 0$ সুতরাং y অক্ষের উপর প্রত্যেক বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(0, y)$

(৪) পরস্পরছেদী দুইটি সরল রেখা হতে কোনো নির্দিষ্ট দূরত্বে কেবলমাত্র একটি বিন্দুই থাকতে পারে।





দুইটি বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব

$P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ একটি সমতলে অবস্থিত দুইটি ভিন্ন বিন্দু।

P বিন্দুর ভুজ $= x_1$ এবং কোটি $= y_1$

Q বিন্দুর ভুজ $= x_2$ এবং কোটি $= y_2$

PQR সমকোণী ত্রিভুজে পিথাগোরাসের সূত্র প্রয়োগ করে পাই,

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

অর্থাৎ, যেকোনো দুইটি বিন্দুর মধ্যকার দূরত্ব =

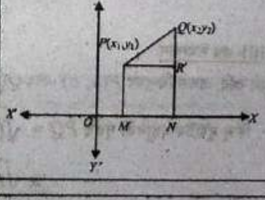
$$\sqrt{(\text{ভুজদ্বয়ের অন্তর})^2 + (\text{কোটিদ্বয়ের অন্তর})^2}$$

প্রয়োগ

মূলবিন্দু (0, 0) হতে কোনো বিন্দুর দূরত্ব:

$(0, 0)$ ও (x, y) বিন্দুর দূরত্ব =

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$



তিনটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক দ্বারা ত্রিভুজ গঠিত হওয়ার শর্ত:

(i) যেকোনো দুই বাহুর দৈর্ঘ্যের সমষ্টি তৃতীয় বাহুর দৈর্ঘ্য অপেক্ষা বৃহত্তর হয়।

(ii) বিন্দু তিনটি একই সরলরেখায় অবস্থিত হলে কখনও ত্রিভুজ গঠন করে না।

স্থানাঙ্কের সাহায্যে সামান্তরিক বা আয়তক্ষেত্র প্রমাণ:

সামান্তরিক: স্থানাঙ্ক বিন্দু চারটি চতুর্ভুজ গঠন করলে এর বিপরীত বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য সমান হলেই সামান্তরিক হবে।

আয়তক্ষেত্র: বিপরীত বাহুর দৈর্ঘ্য সমান এবং একটি কোণ সমকোণ হলেই চতুর্ভুজটি বা সামান্তরিকটি আয়তক্ষেত্রে পরিণত হবে।

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-১১.১

১। প্রতিক্ষেত্রে প্রদত্ত বিন্দুসমূহের মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর।

(*i*) (2, 3) ও (4, 6)   (*ii*) (– 3, 7) ও (–7, 3)   (*iii*) (*a*, *b*) ও (*b*, *a*)

(*iv*) (0, 0) ও (sinθ, cosθ)   (*v*) $\left(-\frac{3}{2}, -1\right)$ ও $\frac{1}{,2}$

২। একটি ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় যথাক্রমে $A(2 - 4)$, $B(-4, 4)$ ও $C(3, 3)$। ত্রিভুজটি অঙ্কন কর এবং দেখাও যে, এটি একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

৩। $A(2, 5)$, $B(-1, 1)$ ও $C(2, 1)$ একটি ত্রিভুজের শীর্ষত্রয়। ত্রিভুজটি আঁক ও দেখাও যে এটি একটি সমকোণী ত্রিভুজ।

৪। $A(1, 2)$, $B(-3, 5)$ ও $C(5, -1)$ বিন্দুত্রয় দ্বারা ত্রিভুজ গঠন করা যায় কি না যাচাই কর।

৫। মূলবিন্দু থেকে $(-5, 5)$ ও $(5, k)$ বিন্দুদ্বয় সমদূরবর্তী হলে k এর মান নির্ণয় কর।

৬। দেখাও যে, $A(2, 2)$, $B(-2, -2)$ এবং $C(-,)$ একটি সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু। এর পরিসীমা তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় কর।

৭। দেখাও যে, $A(-5, 0)$, $B(5, 0)$, $C(5, 5)$ ও $D(-5, 5)$ একটি আয়তক্ষেত্রের চারটি শীর্ষবিন্দু।

৮। $A(-2, -1)$, $B(5, 4)$, $C(6, 7)$ এবং $D(-1, 2)$ দ্বারা গঠিত চতুর্ভুজটি সামান্তরিক না আয়তক্ষেত্র তা নির্ণয় কর।

৯। $A(10, 5)$, $B(7, 6)$, $C(-3, 5)$ বিন্দুগুলোর মধ্যে কোনটি $P(3, -2)$ এর সবচেয়ে নিকটবর্তী ও কোনটি সবচেয়ে দূরবর্তী।

১০। $P(x, y)$ বিন্দু থেকে y-অক্ষের দূরত্ব এবং $Q(3, 2)$ বিন্দুর দূরত্ব সমান। প্রমাণ কর যে, $y^2 - 4y - 6x + 13 = 0$.

অনুশীলনী-১১.১ এর সমাধান

১। প্রতিক্ষেত্রে প্রদত্ত বিন্দুসমূহের মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর।

(*i*) (2, 3) ও (4, 6)   (*ii*) (–3, 7) ও (–7, 3)   (*iii*) (*a*, *b*) ও (*b*, *a*)

(*iv*) (0, 0) ও (sinθ, cosθ)   (*v*) $\left(-\frac{3}{2}, -1\right)$ ও $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$

(i)-এর সমাধান:

মনে করি, প্রদত্ত বিন্দুদ্বয় $P(2, 3)$ এবং $Q(4, 6)$

$\therefore$ বিন্দু দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব $PQ = \sqrt{(4-2)^2 + (6-3)^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$ একক (Ans.)

(ii)-এর সমাধান:

মনে করি, প্রদত্ত বিন্দুদ্বয় $P(-3, 7)$ এবং $Q(-7, 3)$

$\therefore$ বিন্দু দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব $PQ = \sqrt{\{-7-(-3)\}^2 + (3-7)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2}$

$= \sqrt{16} \times \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ একক (Ans.)

(iii)-এর সমাধান:

মনে করি, প্রদত্ত বিন্দুদ্বয় $P(a, b)$ এবং $Q(b, a)$

$\therefore$ বিন্দু দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব $PQ = \sqrt{(b-a)^2 + (a-b)^2}$

$= \sqrt{b^2 - 2ab + a^2 + a^2 - 2ab + b^2}$

$= \sqrt{2a^2 - 4ab + 2b^2} = \sqrt{2(a^2 - 2ab + b^2)} = \sqrt{2(a-b)^2} = (a-b)\sqrt{2}$ একক (Ans.)

(iv)-এর সমাধান:

মনে করি, প্রদত্ত বিন্দুদ্বয় $P(0, 0)$ এবং $Q(\sin\theta, \cos\theta)$.

$\therefore$ বিন্দু দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব $PQ = \sqrt{(\sin\theta - 0)^2 + (\cos\theta - 0)^2} = \sqrt{\sin^2\theta + \cos^2\theta} = \sqrt{1} = 1$ একক (Ans.)

(খ)-এর সমাধান:

মনে করি, প্রদত্ত বিন্দুদ্বয়, $P\left(-\frac{3}{2},-1\right)$ এবং $Q\left(\frac{1}{2},2\right)$

$\therefore$ বিন্দু দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব, $PQ = \sqrt{\left\{\frac{1}{2}-\left(-\frac{3}{2}\right)\right\}^2+\{2-(-1)\}^2}$

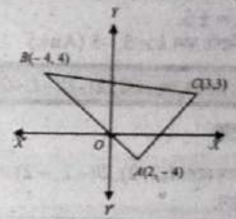
$$= \sqrt{\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)^2+(2+1)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1+3}{2}\right)^2+3^2} = \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2+3^2} = \sqrt{2^2+9} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13} \text{ একক (Ans.)}$$

২। একটি ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় যথাক্রমে $A(2-4)$, $B(-4, 4)$ ও $C(3, 3)$। ত্রিভুজটি অঙ্কন কর এবং দেখাও যে, এটি একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

সমাধান:

প্রদত্ত বিন্দুসমূহ, $A(2, -4)$, $B(-4, 4)$ ও $C(3, 3)$.
xy সমতলে বিন্দুগুলোর অবস্থান দেখানো হলো এবং $A, B; B, C; C, A$ যোগ করে ত্রিভুজটি অঙ্কন করা হলো:



এখন, ABC ত্রিভুজের,

AB বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-4-2)^2+\{4-(-4)\}^2}$

$$= \sqrt{(-6)^2+8^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10 \text{ একক}$$

BC বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{\{3-(-4)\}^2+(3-4)^2}$

$$= \sqrt{7^2+(-1)^2} = \sqrt{49+1} = \sqrt{50} = \sqrt{25\times 2} = 5\sqrt{2} = \sqrt{25}\times\sqrt{2} \text{ একক}$$

AC বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(3-2)^2+\{3-(-4)\}^2} = \sqrt{1^2+7^2} = \sqrt{1+49} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ একক

$\therefore ABC$ ত্রিভুজ-এ BC বাহুর দৈর্ঘ্য $= AC$ বাহুর দৈর্ঘ্য

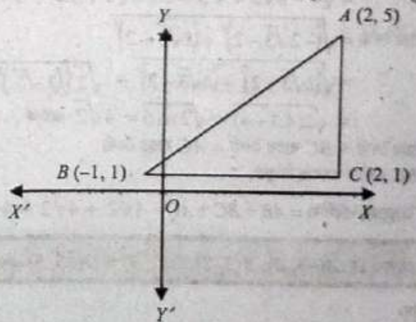
$\therefore$ ত্রিভুজ ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ। **(Ans.)**

দৃষ্টি আকর্ষণ: A, B, ও C বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করে চিত্র অঙ্কন আবশ্যক নয়। আনুপাতিক চিত্র অঙ্কন করলেই হবে।

৩। $A(2, 5)$, $B(-1, 1)$ ও $C(2, 1)$ একটি ত্রিভুজের শীর্ষত্রয়। ত্রিভুজটি আঁক ও দেখাও যে এটি একটি সমকোণী ত্রিভুজ।

সমাধান:

দেওয়া আছে, একটি ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় $A(2, 5)$, $B(-1, 1)$ ও $C(2, 1)$. xy সমতলে বিন্দুত্রয়ের অবস্থান দেখানো হলো এবং এদের দ্বারা গঠিত ত্রিভুজটি অঙ্কন করা হলো।



এখন, ABC ত্রিভুজের

AB বাহু দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-1-2)^2+(1-5)^2}$

$$= \sqrt{(-3)^2+(-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \text{ একক}$$

BC বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{\{2-(-1)\}^2+(1-1)^2}$

$$= \sqrt{3^2+0^2} = \sqrt{9} = 3 \text{ একক}$$

AC বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(2-2)^2+(1-5)^2} = \sqrt{0^2+(-4)^2} = \sqrt{16} = 4$ একক

$\therefore AB^2 = 5^2 = 25$

$BC^2 = 3^2 = 9$

$AC^2 = 4^2 = 16$

এখানে, $AC^2 + BC^2 = 16 + 9 = 25 = AB^2$

অর্থাৎ, ABC ত্রিভুজের, $AC^2 + BC^2 = AB^2$

$\therefore$ পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুযায়ী ΔABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ। [দেখানো হলো]

৪। $A(1, 2)$, $B(-3, 5)$ ও $C(5, -1)$ বিন্দুত্রয় দ্বারা ত্রিভুজ গঠন করা যায় কি না যাচাই কর।

সমাধান:

আমরা জানি, যেকোনো ত্রিভুজের দুই বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর।
মনে করি, ABC একটি ত্রিভুজ ও AB, BC ও AC এর তিনটি বাহু।
এখানে, প্রদত্ত বিন্দুত্রয় $A(1, 2)$, $B(-3, 5)$ ও $C(5, -1)$

$\therefore AB$ বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-3-1)^2+(5-2)^2} = \sqrt{(-4)^2+3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$ একক

BC বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{\{5-(-3)\}^2+(-1-5)^2} = \sqrt{8^2+(-6)^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10$ একক

AC বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(5-1)^2+(-1-2)^2} = \sqrt{4^2+(-3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$ একক

এখানে, $AB + AC = 5 + 5 = 10 = BC$.
অর্থাৎ, দুই বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহুর সমান। সুতরাং বিন্দুত্রয় একই সরলরেখায় অবস্থিত।
অর্থাৎ, বিন্দুত্রয় দ্বারা ত্রিভুজ গঠন করা যাবে না।

৫। মূলবিন্দু থেকে $(-5, 5)$ ও $(5, k)$ বিন্দুদ্বয় সমদূরবর্তী হলে k এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান:

মনে করি, প্রদত্ত বিন্দুদ্বয় $A(-5, 5)$, $B(5, k)$ এবং মূলবিন্দু, $O(0, 0)$.

$\therefore$ দূরত্ব, $OA = \sqrt{(-5-0)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{(-5)^2 + 5^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50}$ একক

দূরত্ব $OB = \sqrt{(5-0)^2 + (k-0)^2} = \sqrt{5^2 + k^2} = \sqrt{25 + k^2}$ একক

প্রশ্নমতে,

$OA = OB$

$\therefore \sqrt{25 + k^2} = \sqrt{50}$

বা, $25 + k^2 = 50$

বা, $k^2 = 25$

$\therefore k = \pm\sqrt{25}$ [বর্গমূল করে]

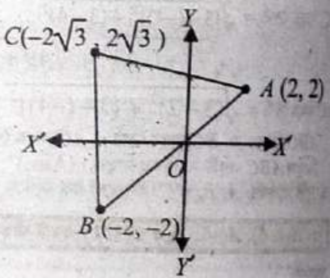
$\therefore k = \pm 5$.

$\therefore$ নির্ণেয় মান $k = 5, -5$ **(Ans.)**

৬। দেখাও যে, $A(2, 2)$, $B(-2, -2)$ এবং $C(-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$ একটি সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু। এর পরিসীমা তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় কর।

সমাধান:

xy সমতলে $A(2, 2)$, $B(-2, -2)$ এবং $C\left(-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\right)$ বিন্দুগুলির অবস্থান চিহ্নিত করা হলো:



এখানে,

AB বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-2-2)^2 + (-2-2)^2}$

$= \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{2\times16} = 4\sqrt{2}$ একক।

BC বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{\{-2\sqrt{3}-(-2)\}^2 + \{2\sqrt{3}-(-2)\}^2}$

$= \sqrt{\left(2-2\sqrt{3}\right)^2 + \left(2+2\sqrt{3}\right)^2}$

$= \sqrt{2^2 - 2.2.2\sqrt{3} + \left(2\sqrt{3}\right)^2 + 2^2 + 2.2.2\sqrt{3} + \left(2\sqrt{3}\right)^2}$

$= \sqrt{4 - 8\sqrt{3} + 4.3 + 4 + 8\sqrt{3} + 4.3} = \sqrt{4+12+4+12} = \sqrt{32} = \sqrt{2\times16} = 4\sqrt{2}$ একক.

AC বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{\left(-2\sqrt{3}-2\right)^2 + \left(2\sqrt{3}-2\right)^2}$

$= \sqrt{\left(2\sqrt{3}+2\right)^2 + \left(2\sqrt{3}-2\right)^2} = \sqrt{2\left\{\left(2\sqrt{3}\right)^2 + 2^2\right\}}$ $\quad [\because (a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2+b^2)]$

$= \sqrt{2(4.3+4)} = \sqrt{2\times16} = 4\sqrt{2}$ একক

AB বাহুর দৈর্ঘ্য $= BC$ বাহুর দৈর্ঘ্য $= AC$ বাহুর দৈর্ঘ্য

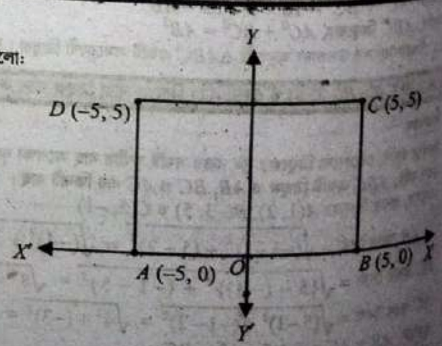
$\therefore ABC$ একটি সমবাহু ত্রিভুজ,

ABC ত্রিভুজের পরিসীমা $= AB + BC + AC = 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = 12\sqrt{2} = 16.97056 = 16.971$ একক (প্রায়) **(Ans.)**

৭। দেখাও যে, $A(-5, 0)$, $B(5, 0)$, $C(5, 5)$ ও $D(-5, 5)$ একটি আয়তক্ষেত্রের চারটি শীর্ষবিন্দু।

সমাধান:

xy সমতলে $A(-5, 0)$, $B(5, 0)$, $C(5, 5)$ এবং $D(-5, 5)$ বিন্দু চারটির অবস্থান চিহ্নিত করা হলো:



AB বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{\{5-(-5)\}^2 + (0-0)^2} = \sqrt{(10)^2 + 0^2} = \sqrt{100} = 10$ একক

CD বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-5-5)^2 + (5-5)^2} = \sqrt{(-10)^2 + 0^2}$

$= \sqrt{100} = 10$ একক

$\therefore AB = CD$ [বিপরীত বাহু]

AD বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{\{-5-(-5)\}^2 + (5-0)^2} = \sqrt{0^2 + 5^2} = \sqrt{25} = 5$ একক

BC বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(5-5)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{0^2 + 5^2} = \sqrt{25} = 5$ একক

$\therefore AD$ বাহুর দৈর্ঘ্য $= BC$ বাহুর দৈর্ঘ্য [বিপরীত বাহু]

$\therefore ABCD$ চতুর্ভুজটির বিপরীত বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য সমান।

সুতরাং বলা যায়, $ABCD$ একটি সামান্তরিক বা আয়তক্ষেত্র।

এখন, BD কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-5-5)^2+(5-0)^2} = \sqrt{(10)^2+25} = \sqrt{100+25} = \sqrt{125} = \sqrt{5\times25} = 5\sqrt{5}$ একক

$\therefore BD^2 = \left(5\sqrt{5}\right)^2 = 25\times5 = 125$

$AB^2 = 10^2 = 100$

$AD^2 = 5^2 = 25$

$AB^2 + AD^2 = 100 + 25 = 125$

$\therefore BD^2 = AB^2 + AD^2$

$\therefore$ পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুযায়ী, ΔABD একটি সমকোণী ত্রিভুজ যার BD হলো অতিভুজ সুতরাং অতিভুজের বিপরীত কোণ, $\angle BAD$ সমকোণ।

$\therefore ABCD$ একটি আয়তক্ষেত্র। **(Ans.)**

বিকল্প সমাধান:

xy সমতলে, $A(-5, 0)$, $B(5, 0)$, $C(5, 5)$ এবং $D(-5, 5)$ বিন্দু চারটির অবস্থান চিহ্নিত করা হলো:

আমরা জানি, বর্গ ও আয়তের কর্ণদ্বয় পরস্পর সমান। আবার সকল বর্গই একটি আয়ত।

সুতরাং $ABCD$ চতুর্ভুজের কর্ণ AC = কর্ণ BD হলে তা অবশ্যই আয়তক্ষেত্র হবে।

এখানে, কর্ণ $AC = \sqrt{\{5-(-5)\}^2+(5-0)^2} = \sqrt{(10)^2+5^2} = \sqrt{100+25} = \sqrt{125} = \sqrt{5\times25} = 5\sqrt{5}$ একক

এবং কর্ণ $BD = \sqrt{(-5-5)^2+(5-0)^2} = \sqrt{(10)^2+25} = \sqrt{100+25} = \sqrt{125} = \sqrt{5\times25} = 5\sqrt{5}$ একক

এখানে, কর্ণ AC = কর্ণ BD

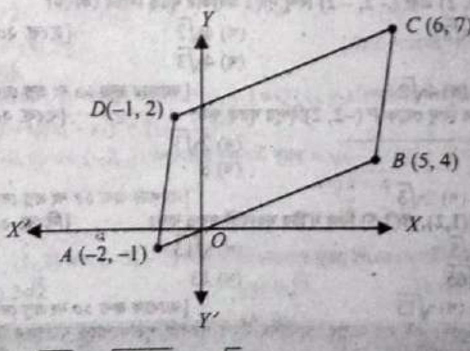
$\therefore ABCD$ চতুর্ভুজ একটি আয়তক্ষেত্র।

[বি.দ্র: পাঠ্যবইয়ের প্রশ্নে বর্গক্ষেত্রের স্থলে আয়তক্ষেত্র হবে।]

৮। $A(-2, -1)$, $B(5, 4)$, $C(6, 7)$ এবং $D(-1, 2)$ দ্বারা গঠিত চতুর্ভুজটি সামান্তরিক না আয়তক্ষেত্র তা নির্ণয় কর।

সমাধান:

xy সমতলে $A(-2, -1)$, $B(5, 4)$, $C(6, 7)$ এবং $D(-1, 2)$ বিন্দু চারটির অবস্থান চিহ্নিত করা হলো:



এখানে,

AB বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{\{5-(-2)\}^2+\{4-(-1)\}^2}$

$= \sqrt{7^2+5^2} = \sqrt{49+25} = \sqrt{74}$ একক

CD বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-1-6)^2+(2-7)^2}$

$= \sqrt{(-7)^2+(-5)^2} = \sqrt{49+25} = \sqrt{74}$ একক

$\therefore AB$ বাহুর দৈর্ঘ্য $= CD$ বাহুর দৈর্ঘ্য [বিপরীত বাহু]

আবার, AD বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{\{-1-(-2)\}^2+\{2-(-1)\}^2}$

$= \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$

BC বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(6-5)^2+(7-4)^2} = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$ একক

$\therefore AD$ বাহুর দৈর্ঘ্য $= BC$ বাহুর দৈর্ঘ্য [বিপরীত বাহু]

$\because ABCD$ চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য সমান।

$\therefore ABCD$ একটি সামান্তরিক বা আয়তক্ষেত্র।

AC কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{\{6-(-2)\}^2+\{7-(-1)\}^2} = \sqrt{8^2+8^2} = \sqrt{64+64} = \sqrt{128} = \sqrt{64\times2} = 8\sqrt{2}$ একক

BD কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-1-5)^2+(2-4)^2} = \sqrt{(-6)^2+(-2)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40} = \sqrt{4\times10} = 2\sqrt{10}$ একক

$\therefore AC$ কর্ণের দৈর্ঘ্য $\neq BD$ কর্ণের দৈর্ঘ্য

$\therefore ABCD$ একটি সামান্তরিক।

৯। $A(10, 5)$, $B(7, 6)$, $C(-3, 5)$ বিন্দুগুলোর মধ্যে কোনটি $P(3, -2)$ এর সবচেয়ে নিকটবর্তী ও কোনটি সবচেয়ে দূরবর্তী।

সমাধান:

প্রদত্ত বিন্দুগুলো যথাক্রমে, $A(10, 5)$, $B(7, 6)$, $C(-3, 5)$ এবং $P(3, -2)$

P হতে যথাক্রমে- A, B, C বিন্দুগুলোর দূরত্ব নির্ণয় করি:

দূরত্ব, $PA = \sqrt{(10-3)^2+\{5-(-2)\}^2} = \sqrt{7^2+7^2} = \sqrt{49+49} = \sqrt{98}$ একক $= 9.899$ একক (প্রায়)

দূরত্ব, $PB = \sqrt{(7-3)^2+\{6-(-2)\}^2} = \sqrt{4^2+8^2} = \sqrt{16+64} = \sqrt{80}$ একক $= 8.944$ একক (প্রায়)

দূরত্ব $PC = \sqrt{(-3-3)^2+\{5-(-2)\}^2} = \sqrt{(-6)^2+7^2} = \sqrt{36+49} = \sqrt{85} = 9.2020$ একক (প্রায়)

$\therefore P$ বিন্দু হতে B বিন্দুর দূরত্ব কম এবং A বিন্দুর দূরত্ব বেশি।

১০। $P(x, y)$ বিন্দু থেকে y-অক্ষের দূরত্ব এবং $Q(3, 2)$ বিন্দুর দূরত্ব সমান। প্রমাণ কর যে, $y^2 - 4y - 6x + 13 = 0$.

সমাধানঃ

এখানে, $P(x, y)$ বিন্দু থেকে y-অক্ষের দূরত্ব $= x$

এবং $P(x, y)$ বিন্দু থেকে $Q(3, 2)$ বিন্দুর দূরত্ব $= \sqrt{(3-x)^2 + (2-y)^2} = \sqrt{9 - 6x + x^2 + 4 - 4y + y^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 6x - 4y + 13}$

প্রশ্নমতে,

$$\sqrt{x^2 + y^2 - 6x - 4y + 13} = x$$

বা, $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 13 = x^2$

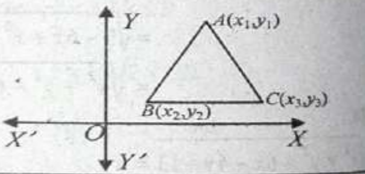
বা, $y^2 - 6x - 4y + 13 = x^2 - x^2$

$\therefore y^2 - 4y - 6x + 13 = 0$ (প্রমাণিত)

অনুশীলনী-১১.২

প্রাথমিক আলোচনা

আমরা জানি, তিনটি ভিন্ন বিন্দু একই সরলরেখায় অবস্থান না করলে ঐ তিনটি বিন্দুকে সরলরেখা দ্বারা যোগ করলে একটি ত্রিভুজ ক্ষেত্র পাওয়া যায়। ত্রিভুজ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের বিভিন্ন পদ্ধতি আলোচনা করা হলো।

পদ্ধতি-১: পরিসীমার সাহায্যে	পদ্ধতি-২: ত্রিভুজের প্রকারভেদের সাহায্যে	পদ্ধতি-৩: স্থানাঙ্কের সাহায্যে
ত্রিভুজের বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে $a, b,$ ও c একক হলে পরিসীমা, $2s = a + b + c$ একক, অর্ধপরিসীমা, $s = \frac{a+b+c}{2}$ একক এবং ত্রিভুজেরক্ষেত্রফল $=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ বর্গ একক এ পদ্ধতিতে ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য জানা থাকলে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় সম্ভব।	(১) কোনো ত্রিভুজের ভূমি ও উচ্চতা জানা থাকলে ত্রিভুজ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল, $=\frac{1}{2}\times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা (২) সমবাহু, সমদ্বিবাহু, কিংবা সমকোণী ত্রিভুজ হলে সূত্র প্রয়োগ করে সহজেই ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা যায়। (ক) সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ [a হলো বাহুর দৈর্ঘ্য] (খ) সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল, $=\frac{b}{4}\sqrt{4a^2-b^2}$ [a হলো সমান সমান বাহুর দৈর্ঘ্য এবং b অপর বাহু] (গ) সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল, $=\frac{1}{2}\times$ লম্ব $\times$ ভূমি	চিত্র, ABC ত্রিভুজে $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ এবং $C(x_3, y_3)$ তিনটি ভিন্ন বিন্দু। ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুত্রয় যথাক্রমে $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ এবং $C(x_3, y_3)$ হলে, ΔABC-এর ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix}$ বর্গ একক; যেমন: $B(x_2, y_2)$ থেকে যাত্রা শুরু করলে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘুরে B বিন্দুতে পৌঁছতে হবে এক্ষেত্রে ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 & x_3 & x_1 & x_2 \\ y_2 & y_3 & y_1 & y_2 \end{vmatrix}$ বর্গ একক অনুরূপে, A ও C বিন্দুর ক্ষেত্রে, Δ-ক্ষেত্র $ABC = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_3 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_3 & y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$ এবং $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix}$ বর্গ একক ΔABC এর ক্ষেত্রফল, $=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix}$ $=\frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_2y_1 - x_3y_2 - x_1y_3)$ বর্গ একক 

যে বিন্দু হতে হিসেবে শুরু করবে অবশ্যই ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘুরে ঐ বিন্দুতে পৌঁছবে।

চতুর্ভুজটি সামান্তরিক, আয়ত, রম্বস ও বর্গ কিনা তা নির্ণয় করে ত্রিভুজ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সূত্রের সাহায্যে চতুর্ভুজটি ক্ষেত্রফলের মান নির্ণয় করা হয়।

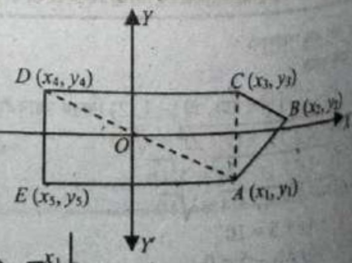
- সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল = (ভূমি $\times$ উচ্চতা) বর্গ একক
- আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = (দৈর্ঘ্য $\times$ প্রস্থ) বর্গ একক
- রম্বসের ক্ষেত্রফল = ($\frac{1}{2}\times$ কর্ণদ্বয়ের গুণফল) বর্গ একক
- বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = (এক বাহুর দৈর্ঘ্য) বর্গ একক।

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনমূলক কাজের সমাধান

১ কাজ: [পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-২৫৫]

চতুর্ভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের পদ্ধতির সাহায্যে পঞ্চভুজ ও ষড়ভুজ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের সূত্র প্রতিপাদন করে।

সমাধান:



চিত্রে $ABCDE$ একটি পঞ্চভুজ। পঞ্চভুজটির পাঁচটি শীর্ষ যথাক্রমে $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2), C(x_3,y_3), D(x_4,y_4), E(x_5, y_5)$; A, B, C, D ও E ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে হলে পঞ্চভুজ $ABCDE$ এর ক্ষেত্রফল তিনটি ত্রিভুজ ক্ষেত্র ABC, ACD ও ADE এর ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান।

পঞ্চভুজক্ষেত্র $ABCDE$ এর ক্ষেত্রফল

$= \Delta ABC$ এর ক্ষেত্রফল $+ \Delta ACD$ এর ক্ষেত্রফল $+ \Delta ADE$ এর ক্ষেত্রফল

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix} + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_3 & x_4 & x_1 \\ y_1 & y_3 & y_4 & y_1 \end{vmatrix} + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_4 & x_5 & x_1 \\ y_1 & y_4 & y_5 & y_1 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_2y_1 - x_3y_2 - x_1y_3) + \frac{1}{2}(x_1y_3 + x_3y_4 + x_4y_1 - x_3y_1 - x_4y_3 - x_1y_4) + \frac{1}{2}(x_1y_4 + x_4y_5 + x_5y_1 - x_4y_1 - x_5y_4 - x_1y_5)$$

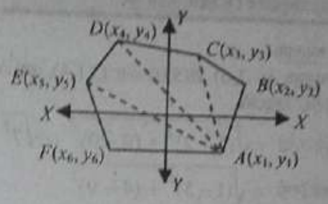
$$=\frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 + x_1y_3 + x_3y_4 + x_4y_1 + x_1y_4 + x_4y_5 + x_5y_1 - x_2y_1 - x_3y_2 - x_1y_3 - x_3y_1 - x_4y_3 - x_1y_4 - x_4y_1 - x_5y_4 - x_1y_5)$$

$$=\frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_5 + x_5y_1 - x_2y_1 - x_3y_2 - x_4y_3 - x_5y_4 - x_1y_5)$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_1 \end{vmatrix}$$

$\therefore ABCDE$ পঞ্চভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_1 \end{vmatrix}$

চিত্রে $ABCDEF$ একটি ষড়ভুজ। ষড়ভুজটির ছয়টি শীর্ষ যথাক্রমে $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$, $D(x_4,y_4)$, $E(x_5,y_5)$, $F(x_6,y_6)$ এবং A,B,C,D,E ও F ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিক অনুসারে নেয়া হয়েছে। ষড়ভুজ $ABCDEF$ এর ক্ষেত্রফল চারটি ত্রিভুজ ক্ষেত্র ABC, ACD, ADE ও AEF এর ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান। এখন, ষড়ভুজক্ষেত্র $ABCDEF$ এর ক্ষেত্রফল $= \Delta ABC$ এর ক্ষেত্রফল $+ \Delta ACD$ এর ক্ষেত্রফল $+ \Delta ADE$ এর ক্ষেত্রফল $+ \Delta AEF$ এর ক্ষেত্রফল।



$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix} + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_3 & x_4 & x_1 \\ y_1 & y_3 & y_4 & y_1 \end{vmatrix} + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_4 & x_5 & x_1 \\ y_1 & y_4 & y_5 & y_1 \end{vmatrix} + \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_5 & x_6 & x_1 \\ y_1 & y_5 & y_6 & y_1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_2y_1 - x_3y_2 - x_1y_3) + \frac{1}{2}(x_1y_3 + x_3y_4 + x_4y_1 - x_3y_1 - x_4y_3 - x_1y_4) + \frac{1}{2}(x_1y_4 + x_4y_5 + x_5y_1 - x_4y_1 - x_5y_4 - x_1y_5)$$
$$+ \frac{1}{2}(x_1y_5 + x_5y_6 + x_6y_1 - x_5y_1 - x_6y_5 - x_1y_6)$$

$$= \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 + x_1y_3 + x_3y_4 + x_4y_1 + x_1y_4 + x_4y_5 + x_5y_1 + x_1y_5 + x_5y_6 + x_6y_1 - x_2y_1 - x_3y_2 - x_1y_3 - x_3y_1 - x_4y_3 - x_1y_4 - x_4y_1 - x_5y_4 - x_1y_5 - x_5y_1 - x_6y_5 - x_1y_6)$$

$$= \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_5 + x_5y_6 + x_6y_1 - x_2y_1 - x_3y_2 - x_4y_3 - x_5y_4 - x_6y_5 - x_1y_6)$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_1 \end{vmatrix}$$

$\therefore ABCDEF$ ষড়ভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_1 \end{vmatrix}$

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-১১.২

১। $A(-2, 0)$, $B(5, 0)$, $C(1, 4)$ যথাক্রমে ΔABC এর শীর্ষবিন্দু।
(i) AB, BC এবং CA বাহুর দৈর্ঘ্য এবং ΔABC এর পরিসীমা নির্ণয় কর।
(ii) ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

২। নিম্নোক্ত প্রতিক্ষেত্রে ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর :
(i) $A(2, 3)$, $B(5, 6)$ এবং $C(-1, 4)$;
(ii) $A(5, 2)$, $B(1, 6)$ এবং $C(-2, -3)$;

৩। দেখাও যে, $A(1, 1)$, $B(4, 4)$, $C(4, 8)$ এবং $D(1, 5)$ বিন্দুগুলো একটি সামান্তরিকের শীর্ষ বিন্দু। AC ও BD বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। সামান্তরিকটি ক্ষেত্রফল ত্রিভুজের মাধ্যমে তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় কর।

৪। $A(-a, 0)$, $B(0, -a)$, $C(a, 0)$ এবং $D(0, a)$ শীর্ষবিশিষ্ট $ABCD$ চতুর্ভুজটির ক্ষেত্রফল কত?

৫। দেখাও যে, $(0, -1)$, $(-2, 3)$, $(6, 7)$ এবং $(8, 3)$ বিন্দুগুলো একটি আয়তক্ষেত্রের চারটি শীর্ষ। কর্ণদ্বয়ের দৈর্ঘ্য এবং আয়তটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

৬। তিনটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $A(-2, 1)$, $B(10, 6)$ এবং $C(a, -6)$। $AB = BC$ হলে a এর সম্ভাব্য মানসমূহ নির্ণয় কর। 'a' এর মানের সাহায্যে যে ত্রিভুজ গঠিত হয় এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

৭। A, B, C তিনটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $A(a, a + 1)$, $B(-6, -3)$ এবং $C(5, -1)$। AB এর দৈর্ঘ্য AC এর দৈর্ঘ্যের দ্বিগুণ হলে 'a' এর সম্ভাব্য মান এবং ত্রিভুজটির বৈশিষ্ট্য নির্ণয় কর।

৮। নিম্নোক্ত চতুর্ভুজসমূহের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর [পদ্ধতি ২ ব্যবহার কর] :
(i) $(0, 0)$, $(-2, 4)$, $(6, 4)$, $(4, 1)$;
(ii) $(1, 4)$, $(-4, 3)$, $(1, -2)$, $(4, 0)$;
(iii) $(1, 0)$, $(-3, 3)$, $(4, 3)$, $(5, 1)$;

৯। দেখাও যে, $A(2, -3)$, $B(3, -1)$, $C(2, 0)$, $D(-1, 1)$ এবং $E(-2, -1)$ শীর্ষবিশিষ্ট বহুভুজের ক্ষেত্রফল 11 বর্গ একক।

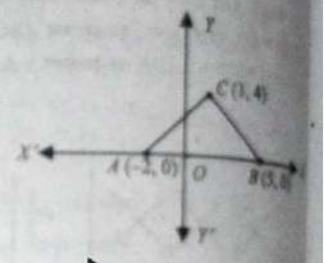
১০। একটি চতুর্ভুজের চারটি শীর্ষ $A(3, 4)$, $B(-4, 2)$, $C(6, -1)$ এবং $D(p, 3)$ এবং শীর্ষসমূহ ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে আবর্তিত। $ABCD$ চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল ত্রিভুজ ABC এর ক্ষেত্রফলের দ্বিগুণ হলে P এর মান নির্ণয় কর।

অনুশীলনী-১১.২ এর সমাধান

১। $A(-2, 0)$, $B(5, 0)$, $C(1, 4)$ যথাক্রমে ΔABC এর শীর্ষবিন্দু।
(i) AB, BC এবং CA বাহুর দৈর্ঘ্য এবং ΔABC এর পরিসীমা নির্ণয় কর।
(ii) ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

(i)-এর সমাধান:

প্রদত্ত বিন্দুসমূহ $A(-2,0)$, $B(5,0)$ এবং $C(1,4)$, এরা ΔABC এর শীর্ষবিন্দু xy সমতলে বিন্দুগুলোর অবস্থান দেখানো হলো।
এখন, ABC ত্রিভুজের,



AB বাহুর দৈর্ঘ্য $=\sqrt{(5+2)^2+(0-0)^2}=\sqrt{7^2}=\sqrt{49}=7$ একক

BC বাহুর দৈর্ঘ্য $=\sqrt{(1-5)^2+(4-0)^2}$
$=\sqrt{(-4)^2+4^2}=\sqrt{16+16}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$ একক

CA বাহুর দৈর্ঘ্য $=\sqrt{(-2-1)^2+(0-4)^2}=\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$ একক

এখন, ΔABC এর পরিসীমা $=AB+BC+CA=(7+4\sqrt{2}+5)=12+4\sqrt{2}$ একক (Ans.)

(ii)-এর সমাধান:

ত্রিভুজটির পরিসীমা, $2s=12+4\sqrt{2}$ একক,

ত্রিভুজটির অর্ধপরিসীমা, $s=\frac{12+4\sqrt{2}}{2}$ একক $=\frac{2(6+2\sqrt{2})}{2}$ একক $=6+2\sqrt{2}$ একক

$\therefore ABC$ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ বর্গ একক
$=\sqrt{(6+2\sqrt{2})(6+2\sqrt{2}-4\sqrt{2})(6+2\sqrt{2}-5)(6+2\sqrt{2}-7)}$ বর্গ একক
$=\sqrt{(6+2\sqrt{2})(6-2\sqrt{2})(2\sqrt{2}+1)(2\sqrt{2}-1)}$ বর্গ একক
$=\sqrt{\{6^2-(2\sqrt{2})^2\}\{(2\sqrt{2})^2-1^2\}}$ বর্গ একক
$=\sqrt{(36-4\times 2)(4\times 2-1)}$
$=\sqrt{(36-8)(8-1)}=\sqrt{28\times 7}=\sqrt{196}=14$ বর্গ একক। (Ans.)

মনে রাখবে: ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ বর্গ একক [ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের এই সূত্রকে আবিষ্কারকের নামানুসারে *Heron's Formula* বলা হয়]

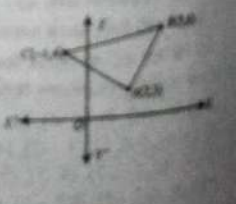
বিকল্প পদ্ধতিতে ক্ষেত্রফল নির্ণয়

$A(-2, 0)$, $B(5, 0)$ এবং $C(1, 4)$ শীর্ষ তিনটি ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে বিবেচনা করে

ΔABC এর ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}-2 & 5 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 4 & 0\end{vmatrix}$ বর্গ একক
$=\frac{1}{2}[-2\times 0+5\times 4+1\times 0-0\times 5-0\times 1-\{4\times(-2)\}]$ বর্গ একক
$=\frac{1}{2}(0+20+0-0-0+8)$ বর্গ একক
$=\frac{1}{2}\times 28=14$ বর্গ একক (Ans.)

২। নিম্নোক্ত প্রতিক্ষেত্রে ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর :
(i) $A(2, 3)$, $B(5, 6)$ এবং $C(-1, 4)$;
(ii) $A(5, 2)$, $B(1, 6)$ এবং $C(-2, -3)$;

(i)-এর সমাধান:



xy সমতলে ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু $A(2,3)$, $B(5,6)$ এবং $C(-1,4)$ বিন্দু তিনটি স্থাপন করে ABC ত্রিভুজ অঙ্কন করা হলো।

$A(2, 3)$, $B(5, 6)$ ও $C(-1, 4)$ শীর্ষ তিনটি ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে বিবেচনা করে ΔABC-এর ক্ষেত্রফল

$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}2 & 5 & -1 & 2\\ 3 & 6 & 4 & 3\end{vmatrix}$ বর্গ একক
$=\frac{1}{2}[2\times 6+5\times 4+(-1)\times 3-3\times 5-6\times(-1)-2\times 4]$ বর্গ একক
$=\frac{1}{2}[12+20-3-15+6-8]$ বর্গ একক $=\frac{1}{2}[38-26]$ বর্গ একক $=\frac{1}{2}\times 12$ বর্গ একক $=6$ বর্গ একক (Ans.)

(i)-এর সমাধান:

xy সমতলে, $A(2,3)$, $B(5,6)$ এবং $C(-1,4)$ বিন্দু তিনটি স্থাপন করে ABC ত্রিভুজ অঙ্কন করা হলো।

এখন, ΔABC ত্রিভুজের

AB বাহুর দৈর্ঘ্য, $c = \sqrt{(5-2)^2 + (6-3)^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} = 4.243$

BC বাহুর দৈর্ঘ্য, $a = \sqrt{(-1-5)^2 + (4-6)^2} = \sqrt{(-6)^2 + (-2)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} = 6.325$ একক

AC বাহুর দৈর্ঘ্য, $b = \sqrt{(-1-2)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$ একক $= 3.162$ একক

$\therefore ABC$ ত্রিভুজের পরিসীমা $= a + b + c = (6.325 + 3.162 + 4.243) = 13.73$ একক

অর্ধপরিসীমা $= \frac{13.73}{2} = 6.865$ একক

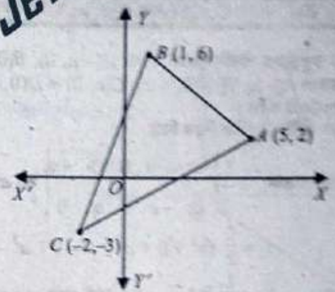
$\therefore ABC$ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{6.865(6.865-6.325)(6.865-3.162)(6.865-4.243)}$

$= \sqrt{6.865 \times 0.54 \times 3.703 \times 2.622} = \sqrt{35.99} = 6$ বর্গ একক প্রায়।

(ii)-এর সমাধান:

xy সমতলে $A(5, 2)$, $B(1, 6)$ এবং $C(-2, -3)$ বিন্দুগুলো স্থাপন করে ত্রিভুজটি আঁকি এবং ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে নিয়ে আমরা পাই,



ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 5 & 1 & -2 & 5 \\ 2 & 6 & -3 & 2 \end{vmatrix}$

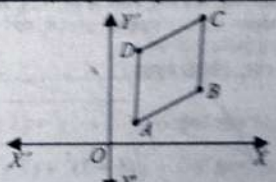
$= \frac{1}{2}(30 - 3 - 4 - 2 + 12 + 15)$

$= \frac{1}{2}(57 - 9)$

$= \frac{1}{2} \times 48 = 24$ বর্গ একক. **(Ans.)**

৩। দেখাও যে, $A(1, 1)$, $B(4, 4)$, $C(4, 8)$ এবং $D(1, 5)$ বিন্দুগুলো একটি সামান্তরিকের শীর্ষ বিন্দু। AC ও BD বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। সামান্তরিকটি ক্ষেত্রফল ত্রিভুজের মাধ্যমে তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় কর।

সমাধান:



আমরা জানি, যে চতুর্ভুজের এক জোড়া বিপরীত বাহু পরস্পর সমান ও সমান্তরাল কিন্তু কর্ণদ্বয় সমান নয় তা একটি সামান্তরিক। তাই কোনো চতুর্ভুজের বিপরীত বাহু গুলো সমান বর্গদ্বয় সমান না হলে তা একটি সামান্তরিক হবে।

xy সমতলে $A(1,1)$, $B(4,4)$ $C(4,8)$ এবং $D(1,5)$ বিন্দুগুলো স্থাপন করি।

ধরি, a, b, c, d যথাক্রমে AB, BC, CD এবং DA বাহুর দৈর্ঘ্য

এবং কর্ণ, $AC = e$ ও কর্ণ, $BD = f$

এখন, AB বাহুর দৈর্ঘ্য, $a = \sqrt{(4-1)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$ একক

BC বাহুর দৈর্ঘ্য, $b = \sqrt{(4-4)^2 + (8-4)^2} = \sqrt{0^2 + 4^2} = \sqrt{16} = 4$ একক

CD বাহুর দৈর্ঘ্য, $c = \sqrt{(1-4)^2 + (5-8)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$ একক

AD বাহুর দৈর্ঘ্য, $d = \sqrt{(1-1)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{0 + 4^2} = \sqrt{16} = 4$ একক

এখানে, AB বাহুর দৈর্ঘ্য $= CD$ বাহুর দৈর্ঘ্য [বিপরীত বাহু]

BC বাহুর দৈর্ঘ্য $= AD$ বাহুর দৈর্ঘ্য [বিপরীত বাহু]

$ABCD$ চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলো পরস্পর সমান।

এখন, AC কর্ণের দৈর্ঘ্য, $e = \sqrt{(4-1)^2 + (8-1)^2} = \sqrt{3^2 + 7^2} = \sqrt{9+49} = \sqrt{58}$ একক

BD কর্ণের দৈর্ঘ্য, $f = \sqrt{(1-4)^2 + (5-4)^2} = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$ একক

$AC \neq BD$ $\therefore$ A, B, C, D একটি সামান্তরিকের শীর্ষবিন্দু।

সামান্তরিকটির ক্ষেত্রফল ত্রিভুজের মাধ্যমে নির্ণয়:

ΔABC এর অর্ধপরিসীমা, $s = \frac{AB + BC + AC}{2} = \frac{\sqrt{18} + 4 + \sqrt{58}}{2} = \frac{15.858}{2} = 7.929$ একক

ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{7.929 \times (7.929 - \sqrt{18})(7.929 - 4)(7.929 - \sqrt{58})}$

$= \sqrt{7.929 \times (7.929 - 4.243)(7.929 - 4)(7.929 - 7.616)}$

$= \sqrt{7.929 \times 3.686 \times 3.929 \times 0.313}$

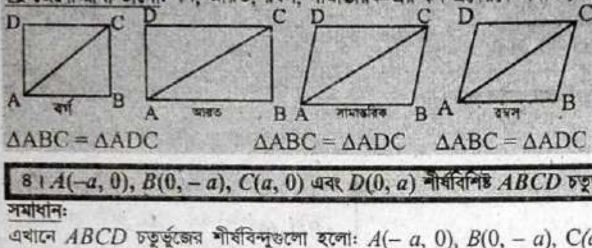
$= \sqrt{35.942}$

$= 5.995$ বর্গএকক

$\therefore ABCD$ সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল $= 2 \times (ABC$ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল) [$\because$ সামান্তরিকের কর্ণ একে সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট দুইটি ত্রিভুজে বিভক্ত করে]

$= 2 \times 5.995 = 11.99$ বর্গ একক **(Ans.)**

জেনে রাখা ভালো: বর্গ, আয়ত, রম্বস, সামান্তরিক-এর কর্ণ এদেরকে সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট দুইটি ত্রিভুজে বিভক্ত করে।

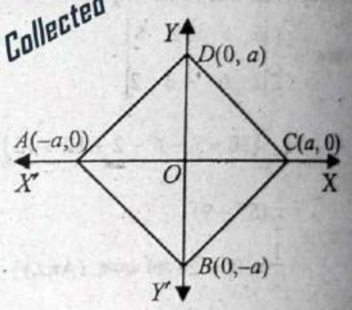


$\Delta ABC = \Delta ADC$ $\Delta ABC = \Delta ADC$ $\Delta ABC = \Delta ADC$ $\Delta ABC = \Delta ADC$

৪। $A(-a, 0)$, $B(0, -a)$, $C(a, 0)$ এবং $D(0, a)$ শীর্ষবিশিষ্ট $ABCD$ চতুর্ভুজটির ক্ষেত্রফল কত?

সমাধান:

এখানে $ABCD$ চতুর্ভুজের শীর্ষবিন্দুগুলো হলো: $A(-a, 0)$, $B(0, -a)$, $C(a, 0)$, $D(0, a)$ xy সমতলে $A(-a, 0)$, $B(0, -a)$, $C(a, 0)$ ও $D(0, a)$ বিন্দুগুলো স্থাপন করে $ABCD$ চতুর্ভুজটি আঁকি।



বিন্দুসমূহকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে নিয়ে

$ABCD$ চতুর্ভুজটির ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -a & 0 & a & 0 & -a \\ 0 & -a & 0 & a & 0 \end{vmatrix}$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}(a^2 + 0 + a^2 + 0 - 0 + a^2 - 0 + a^2)$

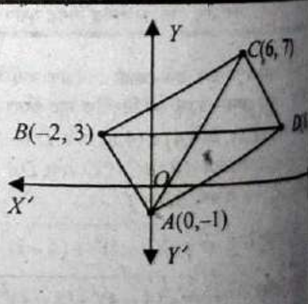
$= \frac{1}{2} \times 4a^2 = 2a^2$ বর্গ একক। **(Ans.)**

৫। দেখাও যে, $(0, -1)$, $(-2, 3)$, $(6, 7)$ এবং $(8, 3)$ বিন্দুগুলো একটি আয়তক্ষেত্রের চারটি শীর্ষ। কর্ণদ্বয়ের দৈর্ঘ্য এবং আয়তটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান:

মনে করি, শীর্ষ বিন্দু চারটি $A(0, -1)$, $B(-2, 3)$, $C(6, 7)$, $D(8, 3)$ পাশের চিত্রে বিন্দুপাতনের মাধ্যমে $ABCD$ চতুর্ভুজটি দেখানো হলো AB, BC, CD এবং DA চারটি বাহু এবং AC ও BD চতুর্ভুজটির দুইটি কর্ণ।

এখন, $ABCD$ চতুর্ভুজ।



AB বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-2-0)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$ একক

BC বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(6+2)^2 + (7-3)^2} = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{64+16} = \sqrt{80}$ একক

CD বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(8-6)^2 + (3-7)^2} = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$ একক

AD বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(8-0)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{64+16} = \sqrt{80}$ একক

দেখা যাচ্ছে যে, $ABCD$ চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলো পরস্পর সমান

অর্থাৎ, $AB = DC = \sqrt{20}$ একক ও $AD = BC = \sqrt{80}$ একক

$\therefore$ চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক বা আয়ত

আবার, AC কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(6-0)^2 + (7+1)^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$ একক

BD কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(8+2)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{10^2} = \sqrt{100} = 10$ একক

$ABCD$ চতুর্ভুজের AB বাহুর দৈর্ঘ্য $= CD$ বাহুর দৈর্ঘ্য, BC বাহুর দৈর্ঘ্য $= AD$ বাহুর দৈর্ঘ্য এবং AC কর্ণের দৈর্ঘ্য $= BD$ কর্ণের দৈর্ঘ্য।

$\therefore ABCD$ চতুর্ভুজটি একটি আয়তক্ষেত্র। অর্থাৎ প্রদত্ত বিন্দুগুলো একটি আয়তক্ষেত্রের চারটি শীর্ষবিন্দু।

$\therefore ABCD$ আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = সন্নিহিত বাহুর গুণফল

$= AB \times BC = \sqrt{20} \times \sqrt{80} = \sqrt{120 \times 80} = \sqrt{1600} = 40$ বর্গ একক। **(Ans.)**

[বিদ্র: চতুর্ভুজটি যে আয়তক্ষেত্র তা বিকল্পভাবেও প্রমাণ করা যায়।

ΔABC-এ, $AC^2 = (10)^2 = 100$, $BC^2 = (\sqrt{80})^2 = 80$ ও $AB^2 = (\sqrt{20})^2 = 20$ এখানে, $AC^2 = AB^2 + BC^2$

$\therefore$ পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুযায়ী, ΔABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ যার অতিভুজ AC। সুতরাং অতিভুজ AC এর বিপরীত কোণ, $\angle ABC = 1$ সমকোণ

এখন, সামান্তরিকের একটি কোণ সমকোণ হলে তা একটি আয়তক্ষেত্র হবে।

$\because ABCD$ সামান্তরিকের $\angle B = 1$ সমকোণ

$\therefore$ চতুর্ভুজটি একটি আয়তক্ষেত্র।]

৬। তিনটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $A(-2, 1)$, $B(10, 6)$ এবং $C(a, -6)$। $AB = BC$ হলে a এর সম্ভাব্য মানসমূহ নির্ণয় কর। 'a' এর মানের সাহায্যে যে ত্রিভুজ গঠিত হয় এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান:
এখানে, তিনটি বিন্দুর স্থানাংক, $A(-2, 1)$, $B(10, 6)$ এবং $C(a, -6)$.

এখন,

A ও B বিন্দুর দূরত্ব, $AB = \sqrt{(10+2)^2 + (6-1)^2} = \sqrt{(12)^2 + 5^2} = \sqrt{144+25} = \sqrt{169} = 13$ একক

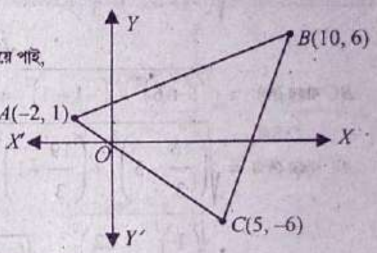
B ও C বিন্দুর দূরত্ব, $BC = \sqrt{(a-10)^2 + (-6-6)^2} = \sqrt{(a-10)^2 + (-12)^2} = \sqrt{a^2 - 20a + 100 + 144}$

$= \sqrt{a^2 - 20a + 244}$ একক

প্রশ্নমতে,

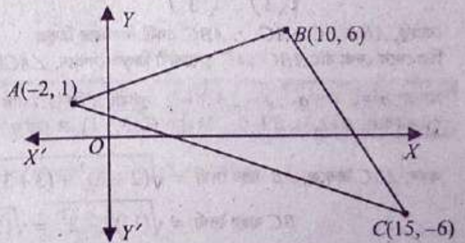
$$AB = BC$$
$$\Rightarrow \sqrt{a^2 - 20a + 244} = 13$$
$$\Rightarrow a^2 - 20a + 244 = 169 \quad \text{[বর্গ করে]}$$
$$\Rightarrow a^2 - 20a + 244 - 169 = 0$$
$$\Rightarrow a^2 - 20a + 75 = 0$$
$$\Rightarrow a^2 - 15a - 5a + 75 = 0$$
$$\Rightarrow a(a-15) - 5(a-15) = 0$$
$$\Rightarrow (a-15)(a-5) = 0$$
$$\therefore a - 15 = 0 \quad \text{অথবা } a - 5 = 0$$
$$\therefore a = 15 \quad \text{বা, } a = 5$$

এখন, $a = 5$ হলে বিন্দু তিনটির স্থানাঙ্ক হয় $A(-2, 1)$, $B(10, 6)$ এবং $C(5, -6)$। বিন্দুগুলো ঘড়ি কাঁটার বিপরীত দিকে নিয়ে পাই,



$$\Delta ACB \text{ এর ক্ষেত্রফল } = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -2 & 5 & 10 & -2 \\ 1 & -6 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= \frac{1}{2}(12 + 30 + 10 - 5 + 60 + 12)$$
$$= \frac{1}{2}(124 - 5) = \frac{1}{2} \times 119 = \mathbf{\frac{119}{2}} \text{ বর্গ একক।}$$

আবার,
$a = 15$ হলে বিন্দু তিনটির স্থানাংক, $A(-2,1)$, $B(10,6)$ এবং $C(15, -6)$ বিন্দুগুলো ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে নিয়ে পাই,



$$\Delta ACB \text{ এর ক্ষেত্রফল } = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -2 & 15 & 10 & -2 \\ 1 & -6 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= \frac{1}{2}(12 + 90 + 10 - 15 + 60 + 12)$$
$$= \frac{1}{2}(184 - 15)$$
$$= \frac{169}{2} \text{ বর্গ একক।}$$

৭। A, B, C তিনটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $A(a, a+1)$, $B(-6, -3)$ এবং $C(5, -1)$। AB এর দৈর্ঘ্য AC এর দৈর্ঘ্যের দ্বিগুণ হলে 'a' এর সম্ভাব্য মান এবং ত্রিভুজটির বৈশিষ্ট্য নির্ণয় কর। (VVI)

সমাধান:
এখানে, A, B, C তিনটি বিন্দুর স্থানাংক যথাক্রমে $A(a, a+1)$, $B(-6,-3)$ এবং $C(5,-1)$

$\therefore AB$ এর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(a+6)^2 + (a+1+3)^2} = \sqrt{(a+6)^2 + (a+4)^2} = \sqrt{a^2 + 12a + 36 + a^2 + 8a + 16}$

$= \sqrt{2a^2 + 20a + 52}$

AC এর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(a-5)^2 + (a+1+1)^2} = \sqrt{(a-5)^2 + (a+2)^2} = \sqrt{a^2 - 10a + 25 + a^2 + 4a + 4}$

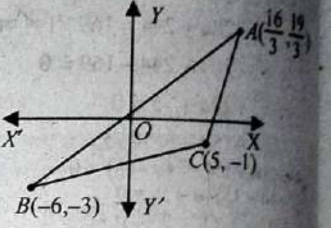
$= \sqrt{2a^2 - 6a + 29}$

প্রশ্নমতে,

$$AB = 2AC$$
$$\text{বা, } \sqrt{2a^2 + 20a + 52} = 2\sqrt{2a^2 - 6a + 29}$$
$$\text{বা, } \left(\sqrt{2a^2 + 20a + 52}\right)^2 = \left(2\sqrt{2a^2 - 6a + 29}\right)^2 \quad \text{[উভয়পক্ষকে বর্গ করে]}$$
$$\text{বা, } 2a^2 + 20a + 52 = 4(2a^2 - 6a + 29)$$
$$\text{বা, } 2a^2 + 20a + 52 = 8a^2 - 24a + 116$$
$$\text{বা, } 2a^2 + 20a + 52 - 8a^2 + 24a - 116 = 0$$

বা, $-6a^2+44a-64=0$
বা, $-2(3a^2-22a+32)=0$
বা, $3a^2-22a+32=0$
বা, $3a^2-16a-6a+32=0$
বা, $a(3a-16)-2(3a-16)=0$
বা, $(3a-16)(a-2)=0$
$\therefore 3a-16=0$ অথবা, $a-2=0$
বা, $3a=16$ বা, $a=2$
$\therefore a=\frac{16}{3}$ বা, $5\frac{1}{3}$
$\therefore$ নির্ণেয় মান $a=\frac{16}{3}$ > বা $5\frac{1}{3}$ অথবা 2.

এখন,
$a=\frac{16}{3}$ হলে $a+1=\frac{16}{3}+1=\frac{19}{3}$, সুতরাং, A বিন্দুর স্থানাঙ্ক $A\left(\frac{16}{3},\frac{19}{3}\right)$



xy সমতলে, $A(\frac{16}{3},\frac{19}{3})$, $B(-6,-3)$ এবং $C(5,-1)$ এর সম্ভাব্য বিন্দুগুলো স্থাপন করে ত্রিভুজ অঙ্কন করা হলো:
ABC ত্রিভুজের,

$$AB \text{ বাহুর দৈর্ঘ্য} = \sqrt{\left(\frac{34}{3}\right)^2+\left(\frac{28}{3}\right)^2} = \sqrt{(11.333)^2+(9.333)^2}$$

$$= \sqrt{215.542} = 14.681 \text{ একক (প্রায়)}$$

$$BC \text{ বাহুর দৈর্ঘ্য} = \sqrt{(5+6)^2+(-1+3)^2} = \sqrt{(11)^2+2^2} = \sqrt{125} = 11.180 \text{ একক (প্রায়).}$$

$$AC \text{ বাহুর দৈর্ঘ্য} = \sqrt{\left(\frac{16}{3}-5\right)^2+\left(\frac{19}{3}+1\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{22}{3}\right)^2} = \sqrt{(0.3333)^2+(7.333)^2} = \sqrt{0.111+53.773} = \sqrt{53.884} = 7.341 \text{ একক}$$

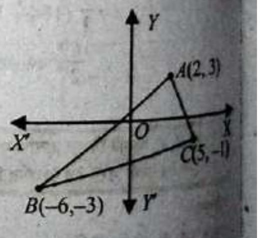
যেহেতু, $AB \neq BC \neq AC$. $\therefore ABC$ একটি বিষমবাহু ত্রিভুজ।
চিত্র থেকে দেখা যায় ABC একটি স্থূলকোণী ত্রিভুজ যেখানে, $\angle ACB$ স্থূলকোণ।

আবার, $a=2$ হলে $a+1=2+1=3$, সুতরাং A বিন্দুর স্থানাঙ্ক $A(2,3)$
xy সমতলে, $A(2,3)$, $B(-6,-3)$ এবং $C(5,-1)$ এর সম্ভাব্য বিন্দুগুলো স্থাপন করে ত্রিভুজ অঙ্কন করা হলো:

এখন, ABC ত্রিভুজে, AB বাহুর দৈর্ঘ্য $=\sqrt{(2+6)^2+(3+3)^2}=\sqrt{8^2+6^2}=\sqrt{64+36}=\sqrt{100}$ একক

BC বাহুর দৈর্ঘ্য $=\sqrt{(11)^2+2^2}=\sqrt{121+4}=\sqrt{125}$, একক

AC বাহুর দৈর্ঘ্য $=\sqrt{(5-2)^2+(-1-3)^2}=\sqrt{3^2+(-4)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}$ একক



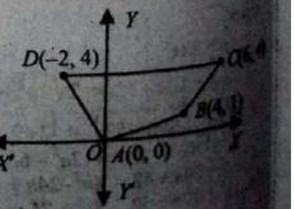
এখানে,

$$AB^2+AC^2=\left(\sqrt{100}\right)^2+\left(\sqrt{25}\right)^2=100+25=125 \text{ এবং } BC^2=\left(\sqrt{125}\right)^2=125$$

$\therefore AB^2+AC^2=BC^2$
$\therefore ABC$ ত্রিভুজটি সমকোণী। এর অতিভুজ BC এবং অতিভুজের বিপরীত কোণে, $\angle BAC$ সমকোণ।

৮। নিম্নোক্ত চতুর্ভুজসমূহের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর [পদ্ধতি ২ ব্যবহার কর] :
(i) (0, 0), (–2, 4), (6, 4), (4, 1);
(ii) (1, 4), (–4, 3), (1, –2), (4, 0);
(iii) (1, 0), (–3, 3), (4, 3), (5, 1). [*Note:* পাঠ্যবইয়ে উল্লিখিত (–3, –3) বিন্দুটি সঠিক নয়]

<u>(i)-এর সমাধান:</u>
মনে করি, বিন্দু চারটি $A(0,0)$ $B(-2,4)$ $C(6,4)$ এবং $D(4,1)$
$\therefore$ বিন্দুসমূহকে xy সমতলে স্থাপন করে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে বিবেচনা করে

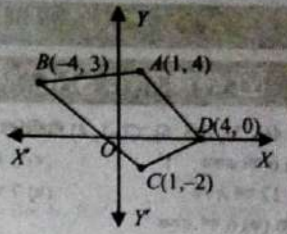


$$\text{চতুর্ভুজক্ষেত্র, } ABCD \text{ এর ক্ষেত্রফল} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 4 & 6 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}(0+16+24+0-0-6+8-0) = \frac{1}{2}\times 42 = 21 \text{ বর্গ একক।}$$

চতুর্ভুজটির ক্ষেত্রফল = 21 বর্গ একক। **(Ans.)**

(ii)-এর সমাধান:
মনে করি বিন্দু চারটি, $A(1,4)$, $B(-4,3)$ $C(1,-2)$ $D(4,0)$
বিন্দু সমূহকে, xy সমতলে স্থাপন করে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে বিবেচনা করে

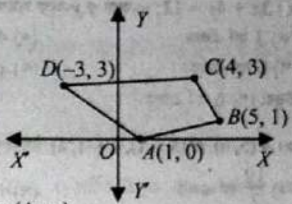


চতুর্ভুজক্ষেত্র $ABCD$ এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & -2 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}\{1\times3+(-4)\times(-2)+1\times0+4\times4-(-4)\times4-1\times3-4\times(-2)-1\times0\}$

$= \frac{1}{2}(3+8+0+16+16-3+8-0) = \frac{1}{2}(51-3) = \frac{1}{2}\times48 = 24$ বর্গ একক। **(Ans.)**

(iii)-এর সমাধান:
প্রদত্ত বিন্দু সমূহকে $A(1,0)$ $B(5,1)$ $C(4,3)$ ও $D(-3,3)$ দ্বারা চিহ্নিত করে,
বিন্দুসমূহকে xy সমতলে স্থাপন করে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে বিবেচনা করে চতুর্ভুজক্ষেত্র

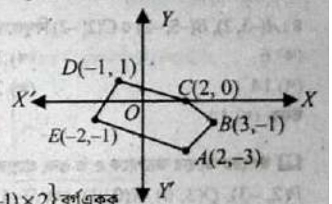


$ABCD$ এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}(1+15+12+0-0-4+9-3) = \frac{1}{2}(37-7) = \frac{1}{2}\times30 = 15$ বর্গ একক। **(Ans.)**

৯। দেখাও যে, $A(2,-3)$, $B(3,-1)$, $C(2,0)$, $D(-1,1)$ এবং $E(-2,-1)$ শীর্ষবিশিষ্ট বহুভুজের ক্ষেত্রফল 11 বর্গ একক।

সমাধান:
বহুভুজটির শীর্ষ বিন্দুগুলো, $A(2,-3)$, $B(3,-1)$, $C(2,0)$, $D(-1,1)$ এবং $E(-2,-1)$
এখানে, শীর্ষবিন্দু পাঁচটি। সুতরাং বহুভুজটি একটি পঞ্চভুজ।
বিন্দুসমূহকে xy সমতলে স্থাপন করে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে নিয়ে $ABCDE$ পঞ্চভুজ এর ক্ষেত্রফল,



$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & -1 & -2 & 2 \\ -3 & -1 & 0 & 1 & -1 & -3 \end{vmatrix}$ বর্গএকক

$= \frac{1}{2}\{2\times(-1)+3\times0+2\times1+(-1)\times(-1)+(-2)\times(-3)-(-3)\times3-(-1)\times2-0\times(-1)-1\times(-2)-(-1)\times2\}$ বর্গএকক

$= \frac{1}{2}(-2+0+2+1+6+9+2+0+2+2) = \frac{1}{2}\times22 = 11$ বর্গ একক।

$\therefore$ বহুভুজটির ক্ষেত্রফল 11 বর্গ একক। **(দেখানো হলো)**

১০। একটি চতুর্ভুজের চারটি শীর্ষ $A(3,4)$, $B(-4,2)$, $C(6,-1)$ এবং $D(p,3)$ এবং শীর্ষসমূহ ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে আবর্তিত। $ABCD$ চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল ত্রিভুজ ABC এর ক্ষেত্রফলের দ্বিগুণ হলে P এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান:
এখানে, $A(3,4)$ $B(-4,2)$ $C(6,-1)$ এবং $D(p,3)$ বিন্দুসমূহকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে নিয়ে চতুর্ভুজক্ষেত্র, $ABCD$ এর ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & -4 & 6 & p & 3 \\ 4 & 2 & -1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}\{3\times2+(-4)\times(-1)+6\times3+p\times4-4\times(-4)-2\times6-(-1)\times p-3\times3\}$

$= \frac{1}{2}(6+4+18+4p+16-12+p-9) = \frac{1}{2}(23+5p)$

আবার,
$A(3,4)$, $B(-4,2)$ এবং $C(6,-1)$ বিন্দুসমূহকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে নিয়ে ত্রিভুজক্ষেত্র

ABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & -4 & 6 & 3 \\ 4 & 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}(6+4+24+16-12+3) = \frac{1}{2}\{3\times2+(-4)\times(-1)+6\times4-4\times(-4)-2\times6-(-1)\times3\} = \frac{1}{2}\times41 = \frac{41}{2}$

প্রশ্নমতে,
$ABCD$ চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল $= 2\times ABC$ ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$\therefore \frac{1}{2}(23+5p) = 2\times\frac{41}{2}$

বা, $23+5p = 82$ বা, $5p = 59$

$\therefore p = \frac{59}{5}$ **(Ans.)**

অনুশীলনী-১১.৩

প্রাথমিক আলোচনা

আমরা জানি, একঘাতের যেকোনো সমীকরণের লেখ সরলরেখা। সরলরেখা অঙ্কনের জন্য যেকোনো দুইটি বিন্দুর স্থানাঙ্কই যথেষ্ট। এ অধ্যায়ে সরলরেখার ঢালের প্রকৃতি ও সমীকরণের নির্ণয় পদ্ধতি জানব।

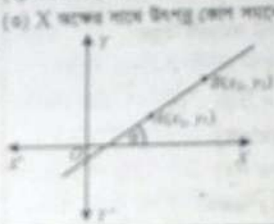
সরলরেখা (Straight line): কোনো বিন্দুর সঞ্চারপথ যদি গতির দিক পরিবর্তন না করে একই রেখা বরাবর অবস্থান করলে ঐ বিন্দুর সঞ্চারপথকে সরলরেখা বলে। সরলরেখা বলতে সোজাসুজি রেখা যাতে কোনো প্রকার বক্রতা বা বাঁকা পরিলক্ষিত হয় না।

ঢাল (Gradient/Slope): কোনো সরলরেখা x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে উৎপন্ন কোণের ট্যান (tangent)-কে ঢাল বলা হয়। অতএব, x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে উৎপন্ন কোণ θ ও ঢাল m এর সম্পর্ক হলো $m = \tan\theta$.

সরলরেখার ঢাল নির্ণয়: একটি সরলরেখা AB যখন $A(x_1, y_1)$ ও $B(x_2, y_2)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করলে তখন এর ঢাল
$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\left[\frac{rise}{run}\right]\left[\frac{\text{ওঠা}}{\text{চলা}}\right]$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

উদাহরণ: AB সরলরেখা $A(2,3)$ ও $B(6,7)$ দুইটি বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করলে
AB রেখার ঢাল, $m = \frac{7-3}{6-2} = \frac{4}{4} = 1$
$\therefore$ AB রেখা ঢাল, $m = 1$
আবার, $m = \tan\theta$ হতে পাই, $\tan\theta = 1 \Rightarrow \tan\theta = \tan45^\circ$ $\therefore \theta = 45^\circ$

(১) ঢাল ধনাত্মক হলে রেখা দ্বারা x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে উৎপন্ন কোণ সূক্ষ্মকোণ।
(২) ঢাল ঋণাত্মক হলে রেখা দ্বারা x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে উৎপন্ন কোণ স্থূলকোণ।
(৩) X অক্ষের সাথে উৎপন্ন কোণ সমকোণ (90°) হলে ঢাল নির্ণয় সম্ভব নয়।



সরল রেখার সম্পর্কে কিছু তথ্য মনে রাখা উচিত	
(i) দুইটি সরলরেখার ঢালদ্বয় সমান হলে রেখা দুইটি সমান্তরাল।	1. $m_1 = m_2$
(ii) দুইটি সরলরেখার ঢালদ্বয়ের গুণফল -1 হলে রেখা দুইটি লম্ব।	2. $m_1 m_2 = -1$
(iii) কিছু ক্ষেত্রে যাদের ঢাল সমান হলেও বিন্দুগুলো সমরেখ।	3. $m_1 = m_2$
(iv) সমরেখ বলতে একই রেখার উপর অবস্থিত। তিনটি বিন্দু সমরেখ হবে যদি যেকোনো দুইটি বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ তৃতীয় বিন্দুটি দ্বারা সিদ্ধ হয়। অথবা বিন্দু তিনটি দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল শূন্য হয়।	4. $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix} = 0$
(v) সকল সমরেখ সমান্তরাল হলেও সকল সমান্তরাল সরলরেখা সমরেখ নয়।	

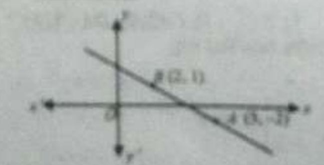
পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-১১.৩

১। নিম্নোক্ত প্রতিটি ক্ষেত্রে A ও B বিন্দুগামী সরলরেখার ঢাল নির্ণয় কর:
(ক) $A(5, -2)$ এবং $B(2, 1)$; (খ) $A(3, 5)$ এবং $B(-1, -1)$
(গ) $A(t, t)$ এবং $B(t^2, t)$; (ঘ) $A(t, t+1)$ এবং $B(3t, 5t+1)$ (VI)
২। তিনটি ভিন্ন বিন্দু $A(t, 1)$, $B(2, 4)$ এবং $C(1, t)$ সমরেখ হলে t এর মান নির্ণয় কর। (VI)
৩। দেখাও যে, $A(0, -3)$, $B(4, -2)$ এবং $C(16, 1)$ বিন্দু তিনটি সমরেখ। (VI)
৪। $A(1, -1)$, $B(t, 2)$ এবং $C(t^2, t+3)$ সমরেখ হলে t এর সম্ভাব্য মান নির্ণয় কর।
৫। $A(3, 3p)$ এবং $B(4, p^2+1)$ বিন্দুগামী রেখার ঢাল -1 হলে p এর মান নির্ণয় কর।
৬। প্রমাণ কর যে, $A(a, 0)$, $B(0, b)$ এবং $C(1, 1)$ সমরেখ হবে যদি $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ হয়। (VVI)
৭। $A(a, b)$, $B(b, a)$ এবং $C\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)$ সমরেখ হলে প্রমাণ কর যে, $a + b = 0$। (VVI)

অনুশীলনী-১১.৩ এর সমাধান

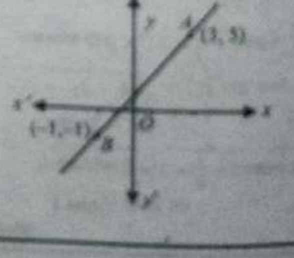
১। নিম্নোক্ত প্রতিটি ক্ষেত্রে A ও B বিন্দুগামী সরলরেখার ঢাল নির্ণয় কর:
(ক) $A(5, -2)$ এবং $B(2, 1)$
(খ) $A(3, 5)$ এবং $B(-1, -1)$
(গ) $A(t, t)$ এবং $B(t^2, t)$
(ঘ) $A(t, t+1)$ এবং $B(3t, 5t+1)$

(ক) এর সমাধান:



এখানে, প্রদত্ত বিন্দু দুইটি $A(5, -2)$ এবং $B(2, 1)$
xy সমতলে বিন্দুটির অবস্থান দেখানো হলো।
আমরা জানি, একটি সরলরেখা AB যখন $A(x_1, y_1)$ ও $B(x_2, y_2)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে তখন এর ঢাল, $m = \frac{rise}{run} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
$\therefore$ প্রদত্ত AB রেখার ঢাল $= \frac{1-(-2)}{2-5} = \frac{1+2}{-3} = \frac{3}{-3} = -1$

(খ) এর সমাধান:
এখানে, প্রদত্ত বিন্দু দুইটি $A(3, 5)$ এবং $B(-1, -1)$
xy সমতলে বিন্দুগুলির অবস্থান দেখানো হলো।



আমরা জানি, একটি সরলরেখা AB যখন $A(x_1, y_1)$ ও $B(x_2, y_2)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে তখন এর ঢাল, $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$\therefore$ প্রদত্ত AB রেখার ঢাল $= \frac{-1-5}{-1-3} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}$ (Ans.)

(গ) এর সমাধান:

এখানে, প্রদত্ত বিন্দু দুইটি $A(t, t)$ এবং $B(t^2, t)$

আমরা জানি, $A(x_1, y_1)$ ও $B(x_2, y_2)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রান্ত সরলরেখার ঢাল

$$m = \frac{rise}{run} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$\therefore A(t, t)$ ও $B(t^2, t)$ বিন্দুগামী রেখার ঢাল $= \frac{t-t}{t^2-t} = \frac{0}{t(t-1)} = 0$ **(Ans)**

(ঘ) এর সমাধান:

এখানে, প্রদত্ত বিন্দু দুইটি $A(t, t+1)$ এবং $B(3t, 5t+1)$

আমরা জানি, $A(x_1, y_1)$ ও $B(x_2, y_2)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রান্ত সরলরেখার ঢাল

$$m = \frac{rise}{run} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$\therefore A(t, t+1)$ ও $B(3t, 5t+1)$ বিন্দুগামী রেখার ঢাল

$$= \frac{5t+1-(t+1)}{3t-t} = \frac{5t+1-t-1}{2t} = \frac{4t}{2t} = 2 \text{ (Ans.)}$$

২। তিনটি ভিন্ন বিন্দু $A(t, 1)$, $B(2, 4)$ এবং $C(1, t)$ সমরেখ t এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান:

দেওয়া আছে, $A(t, 1)$, $B(2, 4)$ এবং $C(1, t)$

এখানে A, B ও C সমরেখা হওয়ায় AB ও BC রেখার ঢাল একই হবে।

আমরা জানি, $A(x_1, y_1)$ ও $B(x_2, y_2)$ বিন্দুগামী রেখার ঢাল

$\therefore AB$ রেখার ঢাল $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-1}{2-t} = \frac{3}{2-t}$

এবং BC রেখার ঢাল $= \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{t-4}{1-2} = \frac{t-4}{-1} = -(t-4) = 4-t$

শর্তমতে,

$\frac{3}{2-t} = 4-t$

বা, $3 = (2-t)(4-t)$

বা, $8 - 2t - 4t + t^2 = 3$

বা, $t^2 - 6t + 8 - 3 = 0$

বা, $t^2 - 6t + 5 = 0$

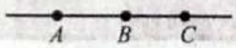
বা, $t^2 - 5t - t + 5 = 0$

বা, $t(t-5) - 1(t-5) = 0$

বা, $(t-5)(t-1) = 0$

$t - 5 = 0$ অথবা, $t - 1 = 0$

$\therefore t = 5$ $\qquad \therefore t = 1$



কিন্তু $t \neq 1$ কারণ $t = 1$ হলে A ও C একই বিন্দু হবে।

$t = 5$. **Ans.**

বিকল্প সমাধান:

যেহেতু $A(t, 1)$, $B(2, 4)$ এবং $C(1, t)$ বিন্দুত্রয় সমরেখ। সেহেতু বিন্দুত্রয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল শূন্য।

$$\therefore \frac{1}{2}\begin{vmatrix} t & 2 & 1 & t \\ 1 & 4 & t & 1 \end{vmatrix} = 0 \left[\because \frac{1}{2}\right] \text{eq} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}[x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_2y_1 - x_3y_2 - x_1y_3]$$

বা, $4t + 2t + 1 - 2 - 4 - t^2 = 0$

বা, $6t - 5 - t^2 = 0$

বা, $t^2 - 6t + 5 = 0$

বা, $t^2 - 5t - t + 5 = 0$

বা, $t(t-5) - 1(t-5) = 0$

বা, $(t-5)(t-1) = 0$

$\therefore t = 5$ অথবা 1

কিন্তু $t = 1$ হলে A ও C বিন্দু একই হয়।

$\therefore t = 1$ গ্রহণযোগ্য নহে।

$\therefore t = 5$ **(Ans.)**

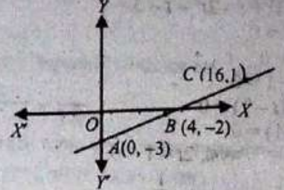
৩। দেখাও যে, $A(0, -3)$, $B(4, -2)$ এবং $C(16, 1)$ বিন্দু তিনটি সমরেখ।

সমাধান:

দেওয়া আছে, $A(0, -3)$, $B(4, -2)$ এবং $C(16, 1)$

এখানে, $A(0, -3)$, $B(4, -2)$ এবং $C(16, 1)$ বিন্দু তিনটি সমরেখ হবে যদি AB ও BC এর ঢাল সমান হয়।

চিত্রে xy সমতলে বিন্দুগুলোর অবস্থান দেখানো হলো:



আমরা জানি, $A(x_1, y_1)$ ও $B(x_2, y_2)$ বিন্দুগামী সরলরেখার ঢাল,

$$m = \frac{rise}{run} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$\therefore AB$ রেখার ঢাল $= \frac{-2-(-3)}{4-0} = \frac{-2+3}{4} = \frac{1}{4}$

এবং BC রেখার ঢাল $= \frac{1-(-2)}{16-4} = \frac{1+2}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

$\therefore AB$ এবং BC রেখার ঢাল সমান।

$\therefore A, B, C$ বিন্দু তিনটি সমরেখ। (*Ans.*)

বিকল্প পদ্ধতি:

দেওয়া আছে, $A(0, -3)$, $B(4, -2)$ এবং $C(16, 1)$

$$\Delta ABC \text{ এর ক্ষেত্রফল} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 4 & 16 & 0 \\ -3 & -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} \text{ বর্গ একক}$$

$$= \frac{1}{2}(0 + 4 - 48 + 12 + 32 - 0) \text{ বর্গ একক}$$

$$= \frac{1}{2}(48 - 48) \text{ বর্গ একক}$$

$$= \frac{1}{2} \times 0 \text{ বর্গ একক}$$

$$= 0 \text{ বর্গ একক}$$

$\therefore$ প্রদত্ত বিন্দুত্রয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল শূন্য।

সুতরাং প্রদত্ত $A, B,$ ও C বিন্দু তিনটি সমরেখ। **(দেখানো হলো)**

৪। $A(1, -1)$, $B(t, 2)$ এবং $C(t^2, t+3)$ সমরেখ হলে t এর সম্ভাব্য মান নির্ণয় কর।

সমাধান:

দেওয়া আছে, $A(1, -1)$, $B(t, 2)$ এবং $C(t^2, t+3)$

এখানে A, B, C সমরেখ হলে AB ও BC এর ঢাল একই হবে।

আমরা জানি, $A(x_1, y_1)$ ও $B(x_2, y_2)$ বিন্দুগামী সরলরেখার ঢাল

$$m = \frac{rise}{run} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$\therefore AB$ রেখার ঢাল $= \frac{2-(-1)}{t-1} = \frac{2+1}{t-1} = \frac{3}{t-1}$

এবং BC রেখার ঢাল $= \frac{t+3-2}{t^2-t} = \frac{t+1}{t(t-1)}$

শর্তমতে,

$\frac{3}{t-1} = \frac{t+1}{t(t-1)}$

বা, $3t(t-1) = (t+1)(t-1)$

বা, $3t(t-1) - (t+1)(t-1) = 0$

বা, $(t-1)(3t-t-1) = 0$

বা, $(t-1)(2t-1) = 0$

হয়, $t - 1 = 0$ $\qquad$ অথবা, $2t - 1 = 0$

বা, $t = 1$ $\qquad$ বা, $2t = 1$ $\therefore t = \frac{1}{2}$

$\therefore t = 1, \frac{1}{2}$ **(Ans.)**

বিকল্প সমাধান:

প্রদত্ত, $A(1,-1)$, $C(t,2)$ এবং $C(t^2, t+3)$ বিন্দুত্রয় সমরেখ।

$\therefore$ ΔABC এর ক্ষেত্রফল শূন্য হবে।

অর্থাৎ $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & t & t^2 & 1 \\ -1 & 2 & t+3 & -1 \end{vmatrix} = 0$

বা, $2 + t(t+3) - t^2 + t - 2t^2 - (t+3) = 0$

বা, $2 + t^2 + 3t - t^2 + t - 2t^2 - t - 3 = 0$

বা, $-1 + 3t - 2t^2 = 0$

বা, $2t^2 - 3t + 1 = 0$

বা, $2t^2 - 2t - t + 1 = 0$

বা, $2t(t-1) - 1(t-1) = 0$

বা, $(t-1)(2t-1) = 0$

হয়, $t - 1 = 0$ অথবা, $2t - 1 = 0$

$\therefore t = 1$ $\therefore t = \frac{1}{2}$

$\therefore$ t এর সম্ভাব্য মানসমূহ $1, \frac{1}{2}$ **(Ans.)**

৫। $A(3, 3p)$ এবং $B(4, p^2+1)$ বিন্দুগামী রেখার ঢাল -1 হলে p এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান:

এখানে, প্রদত্ত বিন্দু দুটি $A(3, 3p)$ এবং $B(4, p^2+1)$

আমরা জানি, $A(x_1, y_1)$ ও $B(x_2, y_2)$ বিন্দুগামী সরলরেখার ঢাল

$$m = \frac{rise}{run} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$\therefore$ AB রেখার ঢাল $= \frac{p^2 + 1 - 3p}{4 - 3} = \frac{p^2 - 3p + 1}{1} = p^2 - 3p + 1$

প্রশ্নমতে,

$p^2 - 3p + 1 = -1$

বা, $p^2 - 3p + 1 + 1 = 0$

বা, $p^2 - 3p + 2 = 0$

বা, $p^2 - 2p - p + 2 = 0$

বা, $p(p-2) - 1(p-2) = 0$

বা, $(p-2)(p-1) = 0$

হয়, $p - 2 = 0$ অথবা, $p - 1 = 0$

$\therefore p = 2$ $p = 1$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $p = 1, 2$. **(Ans.)**

৬। প্রমাণ কর যে, $A(a, 0)$, $B(0, b)$ এবং $C(1, 1)$ সমরেখ হবে, যদি $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ হয়।

সমাধান:

প্রদত্ত বিন্দু $A(a, 0)$, $B(0, b)$ এবং $C(1, 1)$ বিন্দু তিনটি সমরেখ হলে AB ও BC এর ঢাল একই হবে।

আমরা জানি, $A(x_1, y_1)$ ও $B(x_2, y_2)$ বিন্দুগামী সরলরেখার ঢাল,

$$m = \frac{rise}{run} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

এখন, AB রেখার ঢাল $= \frac{b - 0}{0 - a} = -\frac{b}{a}$

BC রেখার ঢাল $= \frac{1 - b}{1 - 0} = \frac{1 - b}{1} = 1 - b$

শর্তমতে,

$-\frac{b}{a} = 1 - b$

বা, $-\frac{b}{a} = -(b-1)$

বা, $\frac{b}{a} = b - 1$

বা, $b = ab - a$

বা, $a + b = ab$

বা, $\frac{1}{b} + \frac{1}{a} = 1$ [ab দ্বারা ভাগ]

$\therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$

$\therefore$ A, B, C সমরেখ হবে যদি $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ হয়। [প্রমাণিত]

বিকল্প সমাধান:

দেওয়া আছে, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ বা, $ab = a + b$

$\therefore ab - b - a = 0$ .... (i)

প্রদত্ত, $A(a, 0)$, $B(0,b)$ এবং $C(1,1)$ বিন্দুত্রয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজ এর ক্ষেত্রফল

$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & 0 & 1 & a \\ 0 & b & 1 & 0 \end{vmatrix}$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}(ab + 0 + 0 - 0 - b - a)$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}(ab - b - a)$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2} \times 0$ বর্গ একক [(i) নং হতে]

$= 0$ বর্গ একক

$\therefore$ প্রদত্ত বিন্দুত্রয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল শূন্য।

সুতরাং, $A(a,0)$, $B(0,b)$ এবং $C(1,1)$ বিন্দুত্রয় সমরেখ। (প্রমাণিত)

৭। $A(a, b)$, $B(b, a)$ এবং $C(\frac{1}{a}, \frac{1}{b})$ সমরেখ হলে প্রমাণ কর যে, $a + b = 0$। (VVI)

সমাধান:

যেহেতু, $A(a, b)$, $B(b, a)$ এবং $C(\frac{1}{a}, \frac{1}{b})$ বিন্দু তিনটি সমরেখ।

$\therefore$ AB এবং BC এর ঢাল একই।

আমরা জানি, $A(x_1, y_1)$ ও $B(x_2, y_2)$ বিন্দুগামী সরলরেখার ঢাল

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$\therefore$ AB রেখার ঢাল $= \frac{a - b}{b - a} = \frac{-(b-a)}{(b-a)} = -1$

BC রেখার ঢাল $= \dfrac{\frac{1}{b} - a}{\frac{1}{a} - b} = \dfrac{\frac{1-ab}{b}}{\frac{1-ab}{a}} = \frac{(1-ab)}{b} \times \frac{a}{(1-ab)}$

$= \frac{a}{b}$

শর্তমতে, $\frac{a}{b} = -1$ বা, $a = -b$ $\therefore a + b = 0$ [প্রমাণিত]

অনুশীলনী-১১.৪

প্রাথমিক আলোচনা

সরলরেখার সমীকরণ: একঘাত বিশিষ্ট চলকের সমীকরণকে সরলরেখার সমীকরণ বলে। সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয়ের কিছু পদ্ধতি আলোচনা করা হলো।

(১) দুইটি বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ: একটি সরলরেখার দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু $A(x_1, y_1)$ ও $B(x_2, y_2)$ দিয়ে অতিক্রম করলে,

সরলরেখার সমীকরণ: $\boxed{\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}}$ বা, $\boxed{\frac{x-x_1}{x_1-x_2} = \frac{y-y_1}{y_1-y_2}}$

উদাহরণ: $A(3,4)$ ও $B(6,7)$ বিন্দুগামী AB রেখার সমীকরণ: $\frac{y-4}{x-3} = \frac{4-7}{3-6}$

$\Rightarrow \frac{y-4}{x-3} = \frac{-3}{-3} = 1 \quad \Rightarrow y-4 = x-3$

$\therefore y = x+1$ নির্ণেয় সরলরেখার সমীকরণ

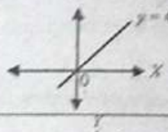
(২) ঢাল ও একটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ: সরলরেখার ঢাল m এবং রেখাটি (x_1, y_1) বিন্দুগামী হলে,

সরলরেখার সমীকরণ: $y - y_1 = m(x - x_1)$

উদাহরণ: একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার ঢাল 3 এবং রেখাটি $(-3, -2)$ বিন্দুগামী হলে সরলরেখার সমীকরণ:

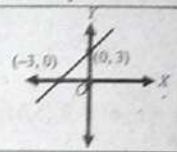
$y - y_1 = m(x - x_1)$ বা, $y - (-3) = 3(x+2)$ বা, $y + 3 = 3x + 6 \therefore y = 3x + 3$

(৩) একটি সরলরেখা মূলবিন্দুগামী ও এর ঢাল m হলে, সরলরেখার সমীকরণ: $y = mx$



(৪) একটি সরলরেখার ঢাল m এবং y অক্ষের ছেদক অংশ c হলে,

সরলরেখার সমীকরণ: $y = mx + c$



সূত্রের সাহায্যে: কোনো সরলরেখার অক্ষদ্বয়ের ছেদক অংশ যথাক্রমে a ও b হলে,

সরলরেখার সমীকরণ: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$; x অক্ষের ছেদবিন্দু $(a, 0)$, y অক্ষের ছেদবিন্দু $(0, b)$

প্রদত্ত সমীকরণ : $2x + 3y = 6 \quad \Rightarrow \frac{2x}{6} + \frac{3y}{6} = \frac{6}{6} \Rightarrow \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$

$\therefore x$ অক্ষের ছেদবিন্দু $(3, 0)$ এবং y অক্ষের ছেদবিন্দু $(0, 2)$

সমীকরণ নির্ণয়ের কৌশল:

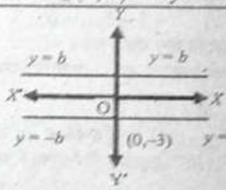
(১) আমরা জানি, x-অক্ষের ওপর কোটি সর্বদা শূন্য অর্থাৎ $y = 0$

$\therefore x$ অক্ষের সমীকরণ $y = 0$

অতএব, কোনো রেখা x অক্ষের সমান্তরালে b একক দূরত্বে অবস্থান করলে সরলরেখার সমীকরণ, $y = b$

আবার অক্ষদ্বয় পরস্পর লম্ব অর্থাৎ x অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখা y অক্ষের ওপর অবশ্যই লম্ব হবে।

অতএব, x অক্ষের সমান্তরাল বা y অক্ষের লম্বরেখার সমীকরণ, $y = b$



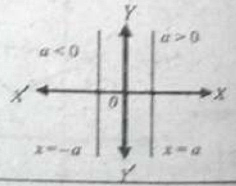
(২) আমরা জানি, y অক্ষের ওপর ভুজ সর্বদা শূন্য (0) অর্থাৎ $x = 0$

$\therefore y$ **অক্ষের সমীকরণ:** $x = 0$

অতএব,কোনো রেখা y অক্ষের সমান্তরালে a একক দূরত্বে অবস্থান করলে সরলরেখার সমীকরণ, $x = a$

$\therefore y$ অক্ষের সমান্তরাল $\Leftrightarrow x$ অক্ষের ওপর লম্ব।

$\therefore y$ **অক্ষের সমান্তরাল বা x অক্ষের লম্বরেখার সমীকরণ $x = a$**



অক্ষদ্বয়ের ছেদবিন্দু নির্ণয়:

(ক) (i) যেকোনো সরলরেখার সমীকরণে $x = 0$ বসিয়ে y অক্ষের ছেদবিন্দু $(0, y)$ নির্ণয় করা হয়।

(ii) $y = 0$ বসিয়ে x অক্ষের ছেদবিন্দু $(x, 0)$ নির্ণয় করা হয়।

উদাহরণ: $2x + 3y = 6$ সমীকরণের x ও y অক্ষদ্বয়ের ছেদবিন্দু নির্ণয় কর। $x = 0$ হলে পাই, $y = 2$ এবং $y = 0$ হলে পাই, $x = 3$ $\therefore x$ অক্ষের ছেদবিন্দু $(3, 0)$ এবং y অক্ষের ছেদবিন্দু $(0, 2)$

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-১১.৪

১। নিচের তথ্যগুলো লক্ষ কর:

i. দুইটি বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয়ে পীথাগোরাসের উপপাদ্যের সাহায্য নেওয়া হয়।

ii. $y - 2x + 5 = 0$ রেখার ঢাল 2

iii. $3x + 5y = 0$ রেখাটি মূলবিন্দুগামী

নিচের কোনটি সঠিক?

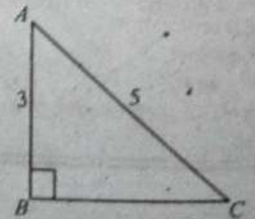
(ক) i (খ) ii ও iii (গ) i ও iii (ঘ) i, ii ও iii

২। $\left\{s(s-a)(s-b)(s-c)\right\}^{\frac{1}{2}}$ **- এ দ্বারা বোঝায়-**

(ক) ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল (খ) বৃত্তের ক্ষেত্রফল

(গ) ত্রিভুজের অর্ধপরিসীমা (ঘ) বৃত্তের অর্ধপরিধি

৩।



ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল

(ক) 12 বর্গ একক (খ) 15 বর্গ একক

(গ) 6 বর্গ একক (ঘ) 60 বর্গ একক

৫। 
$A(1,1)$ $B(3,-3)$
AB রেখার ঢাল
(ক) 2 (খ) -2 (গ) 0 (ঘ) 6

৬। $x-2y-10=0$ এবং $2x+y-3=0$ রেখাদ্বয়ের ঢালদ্বয়ের গুণফল
(ক) -2 (খ) 2 (গ) -2 (ঘ) -1

৭। $y=\frac{x}{2}+2$ এবং $2x-10y+20=0$ সমীকরণদ্বয়
(ক) দুটি ভিন্ন রেখা নির্দেশ করে (খ) একটি রেখা নির্দেশ করে
(গ) রেখাদ্বয় সমান্তরাল (ঘ) রেখাদ্বয় পরস্পরছেদী

৭। $y=x-3$ এবং $y=-x+3$ এর ছেদবিন্দু
(ক) (0,0) (খ) (0,3) (গ) (3,0) (ঘ) (−3,3)

নিচের তথ্যের আলোকে ৮ ও ৯ নং প্রশ্নের উত্তর দাও :
$x=1,\ y=1$

৮। রেখাদ্বয় x অক্ষকে যে বিন্দু ছেদ করে এর স্থানাঙ্ক
(ক) (0,1) (খ) (1,0)
(গ) (0,0) (ঘ) (1,1)

৯। রেখাদ্বয় অক্ষদ্বয়ের সাথে যে ক্ষেত্রটি তৈরি করে এর ক্ষেত্রফল
(ক) $\frac{1}{2}$ বর্গ একক (খ) 1 বর্গ একক
(গ) 2 বর্গ একক (ঘ) 4 বর্গ একক

১০। ঐরূপ সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা $(2,-1)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং যার ঢাল 2.

১১। নিম্নোক্ত বিন্দুদ্বয় দিয়ে অতিক্রান্ত সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।
(a) $A(1,5)$, $B(2,4)$ (b) $A(3,0)$, $B(0,-3)$ (c) $A(a,0)$, $B(2a,3a)$

১২। নিম্নোক্ত প্রতিক্ষেত্রে সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।
(a) ঢাল 3 এবং y ছেদক -5 (b) ঢাল -3 এবং y ছেদক -5 (c) ঢাল 3 এবং y ছেদক 5 (d) ঢাল -3 এবং y ছেদক 5
উপরোক্ত রেখাসমূহ একই সমতলে এঁকে দেখাও।
[এই রেখাসমূহের মাধ্যমে ঢাল বোঝা যাবে এবং y অক্ষের ছেদকের চিহ্নের জন্য রেখা কোন চতুর্ভাগে অবস্থান করবে]

১৩। নিম্নোক্ত রেখাসমূহ x অক্ষকে ও y অক্ষকে কোন বিন্দুতে ছেদ করে নির্ণয় কর। তারপর রেখাসমূহ এঁকে দেখাও।
(a) $y=3x-3$ (b) $2y=5x+6$ (c) $3x-2y-4=0$

১৪। $(k,0)$ বিন্দুগামী ও k ঢাল বিশিষ্ট সরলরেখার সমীকরণ k এর মাধ্যমে নির্ণয় কর। যদি রেখাটি $(5,6)$ বিন্দুগামী হয় তবে k এর মান নির্ণয় কর। (VI)

১৫। $(k^2,2k)$ বিন্দুগামী এবং $\frac{1}{k}$ ঢালবিশিষ্ট রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। যদি রেখাটি $(-2,1)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে, তবে k এর সম্ভাব্য মান নির্ণয় কর।

১৬। একটি রেখা $A(-2,3)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং যার ঢাল $\frac{1}{2}$। রেখাটি যদি আবার $(3,k)$ বিন্দু দিয়ে যায় তবে k এর মান কত? (VVI)

১৭। 3 ঢালবিশিষ্ট একটি রেখা $A(-1,6)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং x অক্ষকে B বিন্দুতে ছেদ করে। A বিন্দুগামী অন্য একটি রেখা x অক্ষকে $C(2,0)$ বিন্দুতে ছেদ করে। (VVI)
(a) AB ও AC রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।
(b) ΔABC এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

১৮। দেখাও যে, $y-2x+4=0$ এবং $3y=6x+10$ রেখাদ্বয় পরস্পর ছেদ করে না। রেখাদ্বয়ের চিত্র এঁকে ব্যাখ্যা কর কেন সমীকরণ দুইটির সমাধান নাই। (VVI)

১৯। $y=x+5$, $y=-x+5$ এবং $y=2$ সমীকরণ তিনটি একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহু নির্দেশ করে। ত্রিভুজটির চিত্র আঁক এবং ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

২০। $y=3x+4$ এবং $3x+y=10$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। রেখাদ্বয়ের চিত্র আঁক এবং x অক্ষ সমেত রেখাদ্বয় গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

২১। প্রমাণ কর যে, $2y-x=2$, $y+x=7$ এবং $y=2x-5$ রেখা তিনটি সমবিন্দু (Concurrent) অর্থাৎ একই বিন্দু দ্বারা অতিক্রম করে। (VVI)

২২। $y=x+3$, $y=x-3$, $y=-x+3$ এবং $y=-x-3$ একটি চতুর্ভুজের চারটি বাহু নির্দেশ করে। চতুর্ভুজটি আঁক এবং ক্ষেত্রফল তিনটি ভিন্ন পদ্ধতিতে নির্ণয় কর।

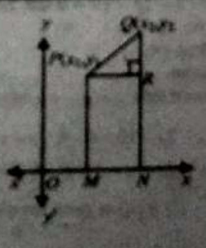
২৩। দেওয়া আছে, $3x+2y=6$
(ক) প্রদত্ত রেখাটি অক্ষদ্বয়কে যে যে বিন্দুতে ছেদ করে তা নির্ণয় কর।
(খ) অক্ষদ্বয়ের খণ্ডিত অংশের পরিমাণ নির্ণয় কর এবং রেখাটি অক্ষদ্বয়ের সাথে যে ত্রিভুজ উৎপন্ন করে এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
(গ) অক্ষদ্বয় এবং রেখাটিকে বাহু বিবেচনা করে এর উপর একটি 5 একক উচ্চতা বিশিষ্ট ঘনবস্তু তৈরি করা হলো। যার শীর্ষ মূলবিন্দুর উপরে ঘনবস্তুটির সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল এবং আয়তন নির্ণয় কর।

২৪। দেওয়া আছে, $A(1,4a)$ এবং $B(5,a^2-1)$ বিন্দুগামী রেখার ঢাল $=-1$
(ক) দেখাও যে, a এর দুইটি মান রয়েছে।
(খ) a এর মানদ্বয়ের জন্য যে চারটি বিন্দু পাওয়া যায়, ধর এরা P,Q,R ও S, $PQRS$ এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
(গ) চতুর্ভুজটি সামান্তরিক না আয়তক্ষেত্র এ ব্যাপারে তোমার মতামত যুক্তিসহ ব্যাখ্যা কর।

অনুশীলনী-১১.৪ এর সমাধান

১। নিচের তথ্যগুলো লক্ষ কর :
i. দুইটি বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয়ে পীথাগোরাসের উপপাদ্যের সাহায্য নেওয়া হয়।
ii. $y-2x+5=0$ রেখার ঢাল 2
iii. $3x+5y=0$ রেখাটি মূলবিন্দুগামী
নিচের কোনটি সঠিক?
(ক) i (খ) ii ও iii (গ) i ও iii (ঘ) i, ii ও iii
উত্তর : (ঘ) i, ii ও iii

ব্যাখ্যা :
i. ধরি P ও Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1,y_1) ও (x_2,y_2) তখন $OM=x_1$, $ON=x_2$
$\therefore MN=PR=ON-OM=x_2-x_1$
$PM=y_1=RN$ ও $QN=y_2$
$\therefore QR=QN-RN=NQ-MP$
$=y_2-y_1$
$\therefore$ চিত্র ΔPQR একটি সমকোণী ত্রিভুজ, যার অতিভুজ PQ
$\therefore$ পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুযায়ী $PQ^2=PR^2+QR^2$
$PQ=\sqrt{PR^2+QR^2}$
$=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

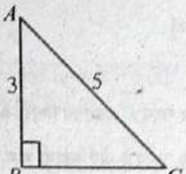


(i) নং সঠিক। [Ref. Topics 11.2 পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-২২৭]

(ii) নং সঠিক। কারণ $y = mx + c$ আকারের সরলরেখার ঢাল হলো, m এবং c হলো y অক্ষের কর্তিত অংশ। $c = 0$ হলে রেখাটি মূল বিন্দুগামী।
এখানে, $y - 2x + 5 = 0$ বা, $y = 2x - 5$ $\therefore$ (ii) নং রেখার ঢাল 2
(iii) নং সঠিক। কারণ (0,0) বিন্দুর জন্য পাই, $3.5 + 5.0 = 0$, যা সত্য।
আবার, $3x + 5y = 0$ রেখার $c = 0$
$\therefore$ রেখাটি মূলবিন্দুগামী (i), (ii) ও (iii) নং সঠিক।

২। $\{s(s-a)(s-b)(s-c)\}^{\frac{1}{2}}$ - এ s দ্বারা বোঝায়-
(ক) ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল (খ) বৃত্তের ক্ষেত্রফল
(গ) ত্রিভুজের অর্ধপরিসীমা (ঘ) বৃত্তের অর্ধপরিধি
উত্তর: (গ) ত্রিভুজের অর্ধপরিসীমা
ব্যাখ্যা:
ABC ত্রিভুজের BC, CA ও AB বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে, a, b ও c
সুতরাং পরিসীমা, $2s = a + b + c$ হলে
অর্ধপরিসীমা, $s = \dfrac{a+b+c}{2}$
এবং ক্ষেত্রফল $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$
এই সূত্র ব্যবহার করে যেকোনো ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় সম্ভব। আবিষ্কারকের নাম অনুসারে এই সূত্রকে **Heron's Formula** বলা হয়।

৩।



ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল-
(ক) 12 বর্গ একক (খ) 15 বর্গ একক
(গ) 6 বর্গ একক (ঘ) 60 বর্গ একক
উত্তর: (গ) 6 বর্গ একক
ব্যাখ্যা:
চিত্রে $\angle ABC = 1$ সমকোণ। সুতরাং, ΔABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ। যার অতিভুজ AC পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে, $AC^2 = AB^2 + BC^2$

$$\text{বা, } BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4 \text{ একক}$$

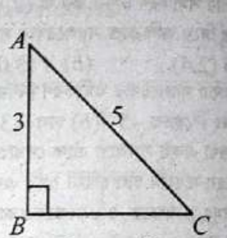
$\therefore$ ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times AB \times BC = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$ বর্গ একক

৪। $A(1,1)$ —————— $B(3,-3)$

AB রেখার ঢাল-
(ক) 2 (খ) –2 (গ) 0 (ঘ) 6
উত্তর: (খ) –2
ব্যাখ্যা:
আমরা জানি, $A(x_1, y_1)$ ও $B(x_2, y_2)$ বিন্দুগামী রেখার ঢাল,
$m = \dfrac{rise}{run} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
$\therefore A(1,1)$ ও $B(3,-3)$ বিন্দুগামী রেখার ঢাল
$m = \dfrac{-3-1}{3-1} = \dfrac{-4}{2} = -2$

৫। $x - 2y - 10 = 0$ এবং $2x + y - 3 = 0$ রেখাদ্বয়ের ঢালদ্বয়ের গুণফল
(ক) –2 (খ) 2 (গ) –2 (ঘ) –1
উত্তর: (ঘ) –1
ব্যাখ্যা:
আমরা জানি, $y = mx + c$ আকারের সরলরেখার ঢাল $= m$
$x - 2y - 10 = 0$ বা, $2y = x - 10$ বা, $y = \frac{x}{2} - 5$ ...... (i)
এবং $2x + y - 3 = 0$ বা, $y = -2x + 3$ ....(ii)
$\therefore$ (i) ও (ii) নং রেখার ঢাল যথাক্রমে $m_1 = \frac{1}{2}, m_2 = -2$
$\therefore$ প্রদত্ত রেখাদ্বয়ের ঢাল $m_1 m_2 = \frac{1}{2} \times (-2) = -1$

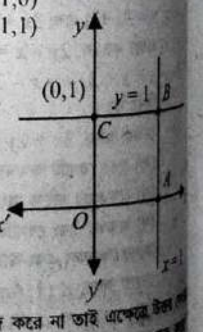
৬। $y = \frac{x}{2} + 2$ এবং $2x - 10y + 20 = 0$ সমীকরণদ্বয়-
(ক) দুটি ভিন্ন রেখা নির্দেশ করে (খ) একই রেখা নির্দেশ করে
(গ) রেখাদ্বয় সমান্তরাল (ঘ) রেখাদ্বয় পরস্পরচ্ছেদী
উত্তর: (ঘ) রেখাদ্বয় পরস্পরচ্ছেদী
ব্যাখ্যা:
$y = \frac{x}{2} + 2$ ... ... (i)
$2x - 10y + 20 = 0$ বা, $y = \frac{x}{5} + \frac{1}{2}$ ... ... (ii)
(i) ও (ii) নং সরলরেখার ঢাল যথাক্রমে, $m_1 = \frac{1}{2}$ ও $m_2 = \frac{1}{5}$ যেহেতু অসমান। সুতরাং রেখাদ্বয় সমান্তরাল নয়। এখন একই সমতলে অবস্থিত অসমান্তরাল রেখার একটি এবং কেবল মাত্র একটি ছেদ বিন্দু থাকবে। সুতরাং রেখাদ্বয় পরস্পরচ্ছেদী



৭। $y = x - 3$ এবং $y = -x + 3$ এর ছেদবিন্দু
(ক) (0,0) (খ) (0,3) (গ) (3,0) (ঘ) (–3,3)
উত্তর: (গ) (3,0)
ব্যাখ্যা:
প্রদত্ত রেখাদ্বয় $y = x - 3$ ও $y = -x + 3$
ছেদবিন্দুতে $x - 3 = -x + 3$ বা, $2x = 6$ $\therefore x = 3$
$x = 3$ হলে, $y = 3 - 3 = 0$
$\therefore y = x - 3$ ও $y = -x + 3$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু (3,0)

নিচের তথ্যের আলোকে ৮ ও ৯ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:
$x = 1, y = 1$

৮। রেখাদ্বয় x অক্ষকে যে বিন্দু ছেদ করে এর স্থানাঙ্ক
(ক) (0,1) (খ) (1,0)
(গ) (0,0) (ঘ) (1,1)
দৃষ্টি আকর্ষণ:
$x = 1$ রেখাটি x অক্ষকে (1,0) বিন্দুতে ও $y = 1$ রেখাটি x অক্ষকে ছেদ বা স্পর্শ করেনা এবং $x = 1$ ও $y = 1$ রেখাদ্বয়ের সাধারণ বিন্দু (1,1) প্রশ্নে বলা হয়েছে "রেখাদ্বয় x অক্ষকে যে বিন্দু ছেদ করে এর স্থানাঙ্ক"



যেহেতু উভয় রেখা একই সাথে x অক্ষকে ছেদ করে না তাই এক্ষেত্রে উত্তর সম্ভব নয়। যদি প্রশ্নে বলা হতো "রেখাদ্বয় পরস্পরকে কোন বিন্দুতে ছেদ করে" তাহলে উত্তর হতো (1,1) বিন্দু।

৯। রেখাদ্বয় অক্ষদ্বয়ের সাথে যে ক্ষেত্রটি তৈরি করে এর ক্ষেত্রফল
(ক) $\frac{1}{2}$ বর্গ একক (খ) 1 বর্গ একক
(গ) 2 বর্গ একক (ঘ) 4 বর্গ একক
উত্তর: (খ) 1 বর্গ একক
ব্যাখ্যা:
৮ নং MCQ এর চিত্র হতে দেখা যায়।
$x = 1$ রেখাটি x অক্ষের ওপর লম্ব এবং $y = 1$ রেখাটি y অক্ষের ওপর লম্ব।
সুতরাং $x = 1$ ও $y = 1$ রেখাদ্বয় (1,1) বিন্দুতে পরস্পরকে লম্বভাবে ছেদ করে।
সুতরাং উৎপন্ন চতুর্ভুজটির প্রত্যেকটি কোণ 1 সমকোণ।
আবার বাহু দৈর্ঘ্য $OA = OB = AB = BC = 1$ একক। সুতরাং ক্ষেত্রটি বর্গক্ষেত্র। সুতরাং, $OABC$ বর্গের ক্ষেত্রফল $= 1^2$ বর্গ একক $= 1$ বর্গ একক।

১০। একটি সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর যা $(2, -1)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং যার ঢাল 2.

সমাধান:

দেওয়া আছে, নির্ণেয় রেখাটির ঢাল $m = 2$ এবং নির্দিষ্ট বিন্দু $(x_1, y_1) = (2, -1)$

এখন (x_1, y_1) বিন্দুগামী ও m ঢালবিশিষ্ট রেখার সমীকরণ:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

∴ নির্ণেয় রেখার সমীকরণ:

$$y - (-1) = 2(x - 2)$$

বা, $y + 1 = 2x - 4$

বা, $y = 2x - 4 - 1$

$\therefore y = 2x - 5$ **(Ans.)**

১১। নিম্নোক্ত বিন্দুদ্বয় দিয়ে অতিক্রান্ত সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

(a) $A(1,5), B(2,4)$ (b) $A(3,0), B(0,-3)$

(c) $A(a,0), B(2a, 3a)$

(a) এর সমাধান:

প্রদত্ত বিন্দুদ্বয়, $A(1,5)$ ও $B(2,4)$

আমরা জানি, $A(x_1, y_1)$ ও $B(x_2, y_2)$ দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

∴ $A(1,5)$ ও $B(2,4)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ,

$\frac{y-5}{x-1} = \frac{5-4}{1-2}$

বা, $\frac{y-5}{x-1} = \frac{1}{-1}$

বা, $-1(y-5) = x-1$

বা, $-y + 5 = x - 1$

বা, $-y = x - 1 - 5$

$\therefore y = -x + 6$ **(Ans.)**

বিকল্প সমাধান:

এখানে, প্রদত্ত বিন্দু দুইটি $A(1,5)$ এবং $B(2,4)$

∴ AB রেখার ঢাল $m = \frac{rise}{run} = \frac{4-5}{2-1} = \frac{-1}{1} = -1$

আমরা জানি, m ঢাল এবং (x_1, y_1) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ $y - y_1 = m(x - x_1)$

$m = -1$ ঢাল এবং $(1,5)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ, $y - 5 = -1(x - 1)$

বা, $y - 5 = -x + 1$

বা, $y = -x + 1 + 5$

$\therefore y = -x + 6$

অথবা, $m = -1$ ঢাল এবং $B(2, 4)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ,

$y - 4 = -1(x - 2)$

বা, $y = -x + 2 + 4$

$\therefore y = -x + 6$ **(Ans.)**

মনে রাখবে: একটি সরলরেখা দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু $A(x_1, y_1)$ এবং $B(x_2, y_2)$ দিয়ে অতিক্রম করলে এর কার্তেসীয় সমীকরণ হবে।

$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$ বা, $\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ বা, $\frac{y-y_1}{y_1-y_2} = \frac{x-x_1}{x_1-x_2}$

(b) এর সমাধান:

এখানে, প্রদত্ত বিন্দু দুইটি $A(3, 0)$ এবং $B(0, -3)$

আমরা জানি, দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু $A(x_1, y_1)$ এবং $B(x_2, y_2)$ দিয়ে গমনকারী সরলরেখার সমীকরণ, $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

∴ $A(3,0)$ ও $B(0,-3)$ বিন্দুগামী AB সরলরেখার সমীকরণ,

$\frac{y-0}{x-3} = \frac{0-(-3)}{3-0}$

বা, $\frac{y}{x-3} = \frac{3}{3}$

বা, $\frac{y}{x-3} = 1$

$\therefore y = x - 3$ **(Ans.)**

(c) এর সমাধান:

এখানে প্রদত্ত বিন্দু দুইটি, $A(a,0)$ এবং $B(2a, 3a)$

আমরা জানি, দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু $A(x_1, y_1)$ এবং $B(x_2, y_2)$ দিয়ে গমনকারী সরলরেখার সমীকরণ, $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

$A(a, 0)$ এবং $B(2a, 3a)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ, $\frac{y-0}{x-a} = \frac{0-3a}{a-2a}$

বা, $\frac{y}{x-a} = \frac{-3a}{-a}$

বা, $\frac{y}{x-a} = 3$

$\therefore y = 3x - 3a$ **(Ans.)**

১২। নিম্নোক্ত প্রতিক্ষেত্রে সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

(a) ঢাল 3 এবং y ছেদক -5 (b) ঢাল -3 এবং y ছেদক -5

(c) ঢাল 3 এবং y ছেদক 5 (d) ঢাল -3 এবং y ছেদক 5

উপরোক্ত চাররেখা একই সমতলে এঁকে দেখাও।

[এই রেখাসমূহের মাধ্যমে ঢাল বোঝা যাবে এবং y অক্ষরে ছেদকের চিহ্নের জন্য রেখা কোন চতুর্ভাগ অবস্থান করবে]

(a) এর সমাধান:

এখানে,

সরলরেখাটির ঢাল, $m = 3$ এবং y অক্ষের ছেদক, $c = -5$

আমরা জানি, কোনো সরলরেখার ঢাল m এবং রেখাটি দ্বারা y অক্ষের ছেদক c হলে, সরলরেখাটির সমীকরণ: $y = mx + c$

∴ নির্ণেয় সরলরেখার সমীকরণ: $y = 3x + (-5) = 3x - 5$ **(Ans.)**

(b) এর সমাধান:

এখানে, সরলরেখাটির ঢাল, $m = -3$ এবং y অক্ষের ছেদক, $c = -5$

আমরা জানি, কোনো সরলরেখার ঢাল m এবং রেখাটি দ্বারা y অক্ষের ছেদক c হলে সরলরেখাটির সমীকরণ, $y = mx + c$

∴ নির্ণেয় সমীকরণ: $y = -3x - 5$ **(Ans.)**

(c) এর সমাধান:

এখানে, সরলরেখাটির ঢাল, $m = 3$ এবং y অক্ষের ছেদক, $c = 5$

আমরা জানি, কোনো সরলরেখার ঢাল m এবং রেখাটি দ্বারা y অক্ষের ছেদক c হলে সরলরেখার সমীকরণ: $y = mx + c$

∴ নির্ণেয় সমীকরণ $y = 3x + 5$. **(Ans.)**

(d) এর সমাধান:

এখানে, সরলরেখাটির ঢাল, $m = -3$ এবং y অক্ষের ছেদক $c = 5$.

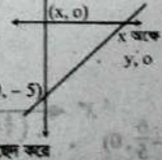
আমরা জানি, কোনো সরলরেখার ঢাল m এবং রেখাটি দ্বারা y অক্ষের ছেদক c হলে, সরলরেখাটির সমীকরণ: $y = mx + c$

∴ নির্ণেয় সরলরেখাটির সমীকরণ: $y = -3x + 5$. **(Ans.)**

উপরোক্ত রেখা চারটি একই সমতলে আঁকতে হবে:

(a) রেখাটি x অক্ষকে $(\frac{5}{3}, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করে

[x- অক্ষে $y = 0$ তাই $y = 3x - 5$ এ $y = 0$ বসিয়ে পাই $x = \frac{5}{3}$]



এবং y অক্ষকে $(0, -5)$ বিন্দুতে ছেদ করে

[y- অক্ষে $x = 0$ তাই $y = 3x - 5$ এ $x = 0$ বসিয়ে পাই $y = -5$]

(b) রেখাটি x অক্ষকে $(-\frac{5}{3}, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করে

[x- অক্ষে $y = 0$ তাই $y = -3x - 5$ এ $y = 0$ বসিয়ে পাই $x = -\frac{5}{3}$]

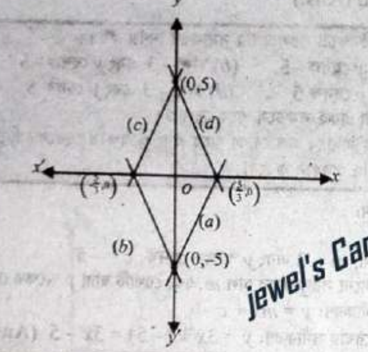
এবং y অক্ষকে $(0, -5)$ বিন্দুতে ছেদ করে

[y- অক্ষে $x = 0$ তাই $y = -3x - 5$ এ $x = 0$ বসিয়ে পাই $y = -5$]

(c) রেখাটি x অক্ষকে $(-\frac{5}{3}, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করে

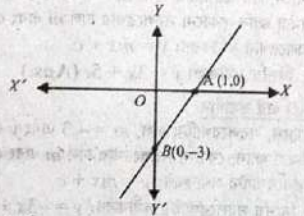
[x- অক্ষে $y=0$ তাই $y=3x+5$ এ $y=0$ বসিয়ে পাই $x=-\frac{5}{3}$]
এবং y অক্ষকে $(0, 5)$ বিন্দুতে ছেদ করে
[y- অক্ষে $x=0$ তাই $y=3x+5$ এ $x=0$ বসিয়ে পাই $y=5$]
(d) রেখাটি x অক্ষকে $(\frac{5}{3},0)$ বিন্দুতে ছেদ করে

[x অক্ষে $y=0$ তাই $y=-3x+5$ এ $y=0$ বসিয়ে পাই $x=\frac{5}{3}$]
এবং y অক্ষকে $(0, 5)$ বিন্দুতে ছেদ করে
[y অক্ষে $x=0$ তাই $y=-3x+5$ এ $x=0$ বসিয়ে পাই $y=5$]
উপরোক্ত চারটি রেখা একই সমতলে অঙ্কন করা হলো।



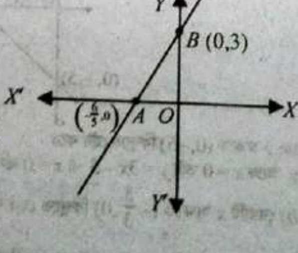
১৩। নিম্নোক্ত রেখাসমূহ x অক্ষকে ও y অক্ষকে কোন বিন্দুতে ছেদ করে নির্ণয় কর। তারপর রেখাসমূহ এঁকে দেখাও।
(a) $y = 3x - 3$ (b) $2y = 5x + 6$ (c) $3x - 2y - 4 = 0$

(a) এর সমাধান:
এখানে, প্রদত্ত সরলরেখার সমীকরণ, $y = 3x - 3$
ধরি, সরলরেখাটি x ও y অক্ষকে যথাক্রমে, A এবং B বিন্দুতে ছেদ করে।
তাহলে, x -অক্ষে $y = 0$
$0 = 3x - 3$
বা, $3x = 3$ $\therefore x = 1$
$\therefore A$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $= (1, 0)$
আবার, y-অক্ষে $x = 0$
$y = 3.0 - 3$ বা, $y = -3$.
$\therefore B$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(0, -3)$



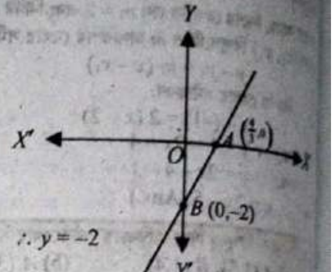
$y = 3x - 3$ রেখাটি x-অক্ষকে $(1,0)$ বিন্দুতে এবং y অক্ষকে $(0,-3)$ বিন্দুতে ছেদ করে। **(Ans.)**

(b) এর সমাধান:
এখানে, প্রদত্ত সরলরেখার সমীকরণ: $2y = 5x + 6$.
ধরি, সরলরেখাটি x ও y অক্ষকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে।
এখন, x -অক্ষে $y = 0$
$\therefore 2.0 = 5x + 6$
বা, $0 = 5x + 6$
বা, $5x = -6$
$\therefore x = -\frac{6}{5}$
$\therefore A$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-\frac{6}{5}, 0)$



আবার, y অক্ষে $x = 0$,
$\therefore 2y = 5 \times 0 + 6$
বা, $2y = 0 + 6$
বা, $2y = 6$
$\therefore y = 3$
$\therefore B$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $= (0,3)$
$\therefore 2y = 5x + 6$ রেখাটি x-অক্ষকে $\left(-\frac{6}{5}, 0\right)$ বিন্দুতে ও y অক্ষকে $(0, 3)$ বিন্দুতে ছেদ করে। **(Ans.)**

(c) এর সমাধান:
এখানে, প্রদত্ত সরলরেখার সমীকরণ: $3x - 2y - 4 = 0$
ধরি, সরলরেখাটি x ও y অক্ষকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে।
তাহলে, x অক্ষে $y = 0$
$\therefore 3x - 2.0 - 4 = 0$
বা, $3x - 4 = 0$
বা, $3x = 4$ $\therefore x = \frac{4}{3}$
$\therefore A$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{4}{3}, 0\right)$
আবার, y অক্ষে $x = 0$,
$\therefore 3.0 - 2y - 4 = 0$
বা, $0 - 2y = 4$ বা, $y = -\frac{4}{2}$ $\therefore y = -2$
$\therefore B$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(0,-2)$



$\therefore 3x - 2y - 4 = 0$ রেখাটি x অক্ষকে $\left(\frac{4}{3}, 0\right)$ বিন্দুতে এবং y অক্ষকে $(0, -2)$ বিন্দুতে ছেদ করে। **(Ans.)**

১৪। $(k,0)$ বিন্দুগামী ও k ঢাল বিশিষ্ট সরলরেখার সমীকরণ k এর মাধ্যমে নির্ণয় কর। যদি রেখাটি $(5,6)$ বিন্দুগামী হয় তবে k এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান:
দেওয়া আছে, ঢাল $m = k$ এবং নির্দিষ্ট বিন্দু $(x_1, y_1) = (k, 0)$
$\therefore (x_1, y_1)$ বিন্দুগামী m ঢাল বিশিষ্ট সরলরেখা সমীকরণ:
$(y - y_1) = m\,(x - x_1)$
$\therefore k$ ঢাল বিশিষ্ট ও $(k,0)$বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ
$y - 0 = k\,(x - k)$
$\therefore y = k\,(x - k)$ ... ... (i)
আবার, রেখাটি $(5, 6)$ বিন্দুগামী হলে সরলরেখার সমীকরণটি $x = 5$ এবং $y = 6$ দ্বারা সিদ্ধ হবে।
$\therefore$ (i) থেকে পাই,
$6 = k\,(5 - k)$
বা, $6 = 5k - k^2$
বা, $6 - 5k + k^2 = 0$
বা, $k^2 - 5k + 6 = 0$
বা, $k^2 - 2k - 3k + 6 = 0$
বা, $k\,(k - 2) - 3\,(k - 2) = 0$
বা, $(k - 2)(k - 3) = 0$
$\therefore$ $k - 2 = 0$ অথবা $k - 3 = 0$
$\therefore$ $k = 2, 3$ **(Ans.)**

১৫। $(k^2,2k)$ বিন্দুগামী এবং $\frac{1}{k}$ ঢালবিশিষ্ট রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। যদি রেখাটি $(-2,1)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে, তবে k এর সম্ভাব্য মান নির্ণয় কর।

সমাধান:
প্রথম অংশ: দেওয়া আছে, নির্ণেয় রেখার ঢাল, $m = \frac{1}{k}$
এবং নির্দিষ্ট বিন্দু, $(x_1, y_1) = (k^2, 2k)$
আমরা জানি, (x_1, y_1) বিন্দুগামী ও m ঢালবিশিষ্ট সরলরেখার সমীকরণ,
$y - y_1 = m\,(x - x_1)$
$\therefore \frac{1}{k}$ ঢাল বিশিষ্ট ও $(k^2,2k)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ–

$$y - 2k = \frac{1}{k}(x - k^2)$$

বা, $y - 2k = \frac{1}{k}x - k$

বা, $y = \frac{1}{k}\,x - k + 2k$

$\therefore y = \frac{1}{k}\,x + k$ **(Ans)**

বি.দ্র.: পাঠ্যবইয়ের উত্তরে ভুল আছে।

দ্বিতীয় অংশ:

$y=\frac{x}{k}+k$ রেখাটি $(-2, 1)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করলে,

$$1=\frac{1}{k}(-2)+k$$

বা, $1=\frac{-2+k^2}{k}$

বা, $k^2-2=k$

বা, $k^2-k-2=0$

বা, $k^2-2k+k-2=0$

বা, $k(k-2)+1(k-2)=0$

বা, $(k-2)(k+1)=0$

হয় $k-2=0$ অথবা, $k+1=0$

বা, $k=2$ বা, $k=-1$

$\therefore$ k এর মান $=-1,2$ **(Ans.)**

১৬। একটি রেখা $A(-2,3)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং যার ঢাল $\frac{1}{2}$। রেখাটি যদি আবার 3 $(3,k)$ বিন্দু দিয়ে যায় তবে k এর মান কত?

সমাধান:

দেওয়া আছে, নির্ণেয় রেখাটির ঢাল $m=\frac{1}{2}$ এবং নির্দিষ্ট বিন্দু $(x_1, y_1)=(-2,3)$

আমরা জানি, (x_1, y_1) বিন্দুগামী ও m ঢাল বিশিষ্ট সরলরেখার সমীকরণ:

$y-y_1=m(x-x_1)$

$\therefore$ $\frac{1}{2}$ ঢাল বিশিষ্ট ও $(-2,3)$ বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ

$$y-3=\frac{1}{2}\{x-(-2)\}$$

বা, $y-3=\frac{1}{2}(x+2)$

বা, $y-3=\frac{1}{2}x+1$

বা, $y=\frac{1}{2}x+1+3$

$\therefore y=\frac{1}{2}x+4$ ... ... (i)

আবার, (i) নং রেখাটি $(3,k)$ বিন্দুগামী হলে, সমীকরণটি $x=3$ এবং $y=k$ দ্বারা সিদ্ধ হবে। তাহলে (i) সমীকরণ হতে পাই,

$k=\frac{1}{2}\times 3+4=\frac{3}{2}+4=\frac{3+8}{2}$ $\therefore k=\frac{11}{2}$

$\therefore$ k এর মান $\frac{11}{2}$ **(Ans.)**

১৭। 3 ঢালবিশিষ্ট একটি রেখা $A(-1,6)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং x অক্ষকে B বিন্দুতে ছেদ করে। A বিন্দুগামী অন্য একটি রেখা x অক্ষকে $C(2,0)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

(a) AB ও AC রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

(b) ΔABC এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

(a) এর সমাধান:

আমরা জানি, (x_1, y_1) বিন্দুগামী m ঢালবিশিষ্ট সরলরেখার সমীকরণ: $y-y_1=m(x-x_1)$

$\therefore$ $(-1,6)$ বিন্দুগামী ও 3 ঢাল বিশিষ্ট সরলরেখার সমীকরণ

$$y-6=3\{x-(-1)\}$$

বা, $y-6=3(x+1)$

বা, $y-6=3x+3$

বা, $y=3x+3+6$

$\therefore y=3x+9$

$\therefore$ AB রেখার সমীকরণ $y=3x+9$.

যেহেতু রেখাটি x অক্ষকে B বিন্দুতে ছেদ করে,

তাহলে B বিন্দুতে $y=0$

$0=3x+9$ বা, $3x=-9$ $\therefore x=-3$

$\therefore$ B বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-3,0)$

আবার, C বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(2,0)$

$\therefore$ AC রেখার সমীকরণ অর্থাৎ $A(-1,6)$ ও $C(2,0)$ বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ:

$$\frac{y-6}{x-(-1)}=\frac{6-0}{-1-2}$$

বা, $\frac{y-6}{x+1}=\frac{6}{-3}$

বা, $\frac{y-6}{x+1}=-2$

বা, $y-6=-2(x+1)$

বা, $y-6=-2x-2$

বা, $y=-2x-2+6$

$\therefore y=-2x+4$ **(Ans.)**

(b) এর সমাধান:

$A(-1,6)$, $B(-3,0)$ এবং $C(2,0)$ শীর্ষ তিনটিকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে বিবেচনা করে।

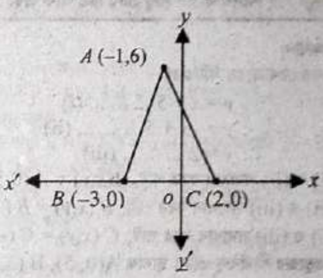
$$\Delta ABC \text{ এর ক্ষেত্রফল}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -1 & -3 & 2 & -1 \\ 6 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\{(-1)\times 0+(-3)\times 0+2\times 6-6\times(-3)-0\times 2-0\times(-1)\}$$

$$=\frac{1}{2}(0+0+12+18-0-0)$$

$$=\frac{1}{2}\times 30$$

$= 15$ বর্গ একক **(Ans.)**



১৮। দেখাও যে, $y-2x+4=0$ এবং $3y=6x+10$ রেখাদ্বয় পরস্পর ছেদ করে না। রেখাদ্বয়ের চিত্র এঁকে ব্যাখ্যা কর কেন সমীকরণ দুইটির সমাধান নাই।

সমাধান:

এখানে, ১ম রেখার সমীকরণ,

$$y-2x+4=0$$

বা, $y=2x-4$

$\therefore y=2x+(-4)$

$\therefore$ রেখাটির ঢাল, $m=2$ এবং y অক্ষের ছেদক, $c=-4$

আবার, ২য় রেখার সমীকরণ,

$$3y=6x+10$$

বা, $y=\frac{6x+10}{3}$

বা, $y=\frac{6x}{3}+\frac{10}{3}$

$\therefore y=2x+\frac{10}{3}$

$\therefore$ রেখাটির ঢাল, $m=2$ এবং y অক্ষের ছেদক, $c=\frac{10}{3}$.

যেহেতু রেখা দুইটির ঢাল সমান কিন্তু y অক্ষের ছেদক ভিন্ন।

$\therefore$ রেখা দুটিকে xy সমতলে আঁকলে পরস্পর সমান্তরালভাবে অবস্থান করবে। তাই রেখাদ্বয় পরস্পর ছেদ করবে না।

এখন, ১ম রেখাটির x ও y অক্ষকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করলে পাই,

A বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(2,0)$ [x অক্ষে $y=0$ তাই $y-2x+4=0$ এ $y=0$ বসিয়ে পাই $x=2$]

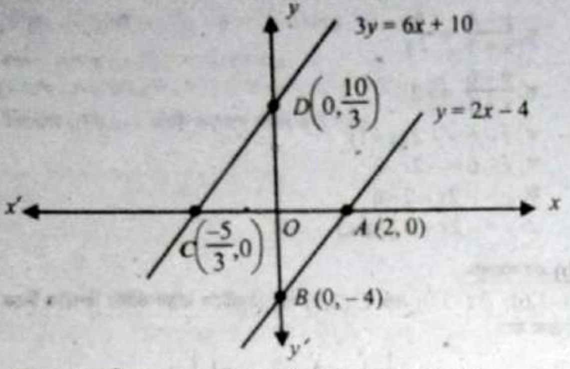
B বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(0,-4)$ [y অক্ষে $x=0$ তাই $y-2x+4=0$ এ $x=0$ বসিয়ে পাই $4y=-4$]

আবার, ২য় রেখাটি x ও y অক্ষকে যথাক্রমে C ও D বিন্দুতে ছেদ করলে পাই,

C বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-\frac{5}{3}, 0)$ [x অক্ষে $y=0$ তাই $3y=6x+10$ এ $y=0$ বসিয়ে পাই $x=-\frac{5}{3}$]

D বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(0, \frac{10}{3})$ [y অক্ষে $x=0$ তাই $3y=6x+10$ এ $x=0$ বসিয়ে পাই $y=\frac{10}{3}$]

এখন xy সমতলে AB ও CD রেখা দুইটি এঁকে দেখানো হলো:



যেহেতু রেখা দুইটি সমান্তরাল। তাই রেখাদ্বয় পরস্পরকে ছেদ করে না।

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণ দুইটির সমাধান নাই।

১৯। $y = x + 5$, $y = -x + 5$ এবং $y = 2$ সমীকরণ তিনটি একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহু নির্দেশ করে। ত্রিভুজটির চিত্র আঁক এবং ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান:

প্রদত্ত রেখাত্রয়ের সমীকরণ:

$y = x + 5$ ... ... (i)

$y = -x + 5$ ... ... (ii)

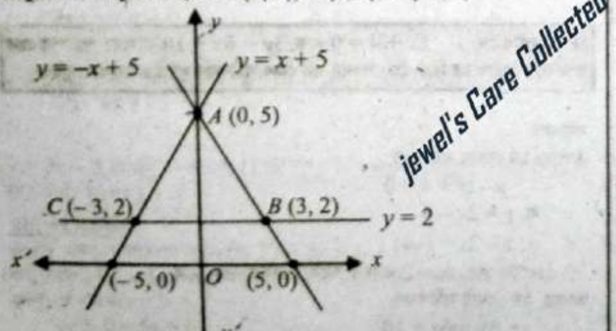
$y = 2$ ... ... (iii)

(i) ও (ii) সমাধান করে পাই, $A(x,y) = A(0,5)$

(ii) ও (iii) সমাধান করে পাই, $B(x,y) = B(3,2)$

(i) ও (iii) সমাধান করে পাই, $C(x,y) = C(-3,2)$

ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু ৩টির স্থানাঙ্ক A(0, 5), B (3, 2), C (−3, 2)



উপরিউক্ত অঙ্কের আলোকে xy সমতলে রেখা তিনটি দ্বারা ABC ত্রিভুজ অঙ্কন করা হলো:

ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & 0 & -3 & 3 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}\{3\times5+0\times2+(-3)\times2-2\times0-5\times(-3)-2\times3\}$

$= \frac{1}{2}(15+0-6-0+15-6)$

$= \frac{1}{2}\times18$

$= 9$ বর্গ একক (Ans.)

২০। $y = 3x + 4$ এবং $3x + y = 10$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু ... রেখাদ্বয়ের চিত্র আঁক এবং x অক্ষ সমন্বয়ে গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল ...

সমাধান:

প্রদত্ত রেখাদ্বয়ের সমীকরণ

$y = 3x + 4$ ... ... (i)

$3x + y = 10$ ... ... (ii)

(ii) হতে পাই,

$3x + y = 10$

বা, $y = 10 - 3x$ ... ... (iii)

(i) ও (iii) হতে পাই,

$3x + 4 = 10 - 3x$

বা, $3x + 3x = 10 - 4$

বা, $6x = 6$

বা, $x = 1$

(i) নং এ x এর মান বসিয়ে পাই,

$y = 3\times1 + 4$

বা, $y = 3 + 4$

$\therefore y = 7$

$\therefore$ রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(1,7)$

আবার, (i) নং রেখা x-অক্ষকে $(-\frac{4}{3}, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করে

[x-অক্ষে $y=0$ তাই $y=3x+4$ এ $y=0$ বসিয়ে পাই $x=-$...

(i) নং রেখা y-অক্ষকে $(0, 4)$ বিন্দুতে ছেদ করে

[y-অক্ষে $x=0$ তাই $y=3x+4$ এ $x=0$ বসিয়ে পাই $y=$...

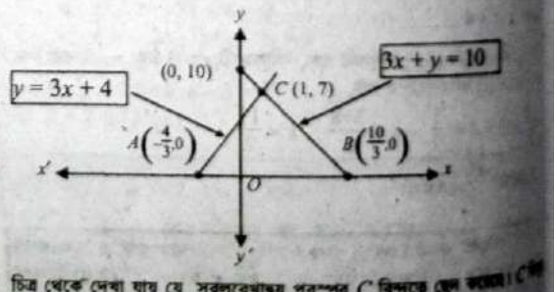
(ii) নং রেখা x-অক্ষকে $(\frac{10}{3}, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করে

[x-অক্ষে $y=0$ তাই $3x+y=10$ এ $y=0$ বসিয়ে পাই $x=$...

(ii) নং রেখা y-অক্ষকে $(0,10)$ বিন্দুতে ছেদ করে

[y-অক্ষে $x=0$ তাই $3x+y=10$ এ $x=0$ বসিয়ে পাই $y=$...

xy সমতলে রেখা দুইটি অঙ্কন করা হলো:



চিত্র থেকে দেখা যায় যে, সরলরেখাদ্বয় পরস্পর C বিন্দুতে ছেদ করেছে। C এর স্থানাঙ্ক $(1,7)$ আবার সরলরেখাদ্বয় x অক্ষকে $A(-\frac{4}{3}, 0)$ এবং $B(\frac{10}{3}, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে, সরলরেখাদ্বয় x অক্ষের সাথে ΔABC উৎপন্ন করে।

$\therefore \Delta ABC$ এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & -\frac{4}{3} & \frac{10}{3} & 1 \\ 7 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}\left(0+0+\frac{70}{3}+\frac{28}{3}-0-0\right)$

$= \frac{1}{2}\times\frac{98}{3}$

$= \frac{49}{3}$ বর্গ একক (Ans.)

২১। প্রমাণ কর যে, $2y - x = 2$, $y + x = 7$ এবং $y = 2x - 5$ রেখা তিনটি সমবিন্দু (*Concurrent*) অর্থাৎ একই বিন্দু দ্বারা অতিক্রম করে।

সমাধান:

রেখা তিনটির সমীকরণ:

$2y - x = 2$ ……… (i)

$y + x = 7$ ……… (ii)

$y = 2x - 5$ ……… (iii)

(ii) নং হতে পাই,

$y + x = 7$

$\therefore y = 7 - x$ ……… (iv)

(i) নং এ $y = 7 - x$ বসিয়ে,

$2(7 - x) - x = 2$

বা, $14 - 2x - x = 2$

বা, $14 - 3x = 2$

বা, $-3x = 2 - 14$

বা, $-3x = -12$

$\therefore x = 4$

(iv) নং এ x এর মান বসিয়ে, $y = 7 - x$ বা, $y = 7 - 4$

$\therefore y = 3$

(i) নং ও (ii) নং সমীকরণ সমাধান করে পাই এদের ছেদবিন্দু $(x, y) = (4, 3)$

এখন, রেখা তিনটি সমবিন্দু হলে (iii) নং সমীকরণ (4,3) বিন্দু দ্বারা সিদ্ধ হবে।

(iii) নং এর বামপক্ষ $= y = 3$

ডানপক্ষ $= 2x - 5$

$= 2 \times 4 - 5$

$= 8 - 5$

$= 3$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ

$\therefore$ সমীকরণ তিনটি সমবিন্দু (প্রমাণিত)

বিকল্প সমাধান:

প্রদত্ত রেখাত্রয় $2y - x = 2$

বা, $-x + 2y - 2 = 0$ ……… (i)

ও $y + x = 7$

বা, $x + y - 7 = 0$ ……… (ii)

এবং $y = 2x - 5$

বা, $2x - y - 5 = 0$ ……… (iii)

(i) ও (ii) নং সমীকরণে আড়গুণন পদ্ধতি প্রয়োগ করে পাই,

$$\frac{x}{-14 + 2} = \frac{y}{-2 - 7} = \frac{1}{-1 - 2}$$

বা, $\dfrac{x}{-12} = \dfrac{y}{-9} = \dfrac{1}{-3}$

সুতরাং, $\dfrac{x}{-12} = \dfrac{1}{-3}$

বা, $x = \dfrac{-12}{-3} = 4$

$\therefore x = 4$

এবং $\dfrac{y}{-9} = \dfrac{1}{-3}$

$\therefore y = 3$

$\therefore$ (i) ও (ii) নং রেখার ছেদ বিন্দু $(x, y) = (4, 3)$

আবার, (ii) ও (iii) নং সমীকরণে আড়গুণন পদ্ধতি প্রয়োগ করে পাই,

$$\frac{x}{-5 - 7} = \frac{y}{-14 + 5} = \frac{1}{-1 - 2}$$

বা, $\dfrac{x}{-12} = \dfrac{y}{-9} = \dfrac{1}{-3}$

সুতরাং, $\dfrac{x}{-12} = \dfrac{1}{-3}$

বা, $x = \dfrac{-12}{-3} = 4$

$\therefore x = 4$

এবং $\dfrac{y}{-9} = \dfrac{1}{-3}$

বা, $y = \dfrac{-9}{-3} = 3$

$\therefore y = 3$

$\therefore$ (ii) ও (iii) নং রেখার ছেদ বিন্দু, $(x, y) = (4, 3)$

অর্থাৎ (i), (ii) ও (iii) নং রেখা (4, 3) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। অর্থাৎ একই বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। **(প্রমাণিত)**

$\therefore$ রেখা তিনটি সমবিন্দু।

২২। $y = x + 3$, $y = x - 3$, $y = -x + 3$ এবং $y = -x - 3$ একটি চতুর্ভুজের চারটি বাহু নির্দেশ করে। চতুর্ভুজটি আঁক এবং ক্ষেত্রফল তিনটি ভিন্ন পদ্ধতিতে নির্ণয় কর।

সমাধান:

প্রদত্ত সমীকরণ চারটি:

$y = x + 3$ ……… (i)

$y = x - 3$ ……… (ii)

$y = -x + 3$ ……… (iii)

$y = -x - 3$ ……… (iv)

(i) নং রেখাটি x-অক্ষকে $(-3, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করে

[x-অক্ষে $y = 0$ তাই $y = x + 3$ এ $y = 0$ বসিয়ে পাই $x = -3$]

এবং y-অক্ষকে $(0, 3)$ বিন্দুতে ছেদ করে

[y-অক্ষে $x = 0$ তাই $y = x + 3$ এ $x = 0$ বসিয়ে পাই $y = 3$]

(ii) নং রেখাটি x-অক্ষকে $(3, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করে

[x-অক্ষে $y = 0$ তাই $y = x - 3$ এ $y = 0$ বসিয়ে পাই $x = 3$]

এবং y-অক্ষকে $(0, -3)$ বিন্দুতে ছেদ করে

[y-অক্ষে $x = 0$ তাই $y = x - 3$ এ $x = 0$ বসিয়ে পাই $y = -3$]

(iii) নং রেখাটি x-অক্ষকে $(3, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করে

[x-অক্ষে $y = 0$ তাই $y = -x + 3$ এ $y = 0$ বসিয়ে পাই $x = 3$]

এবং y-অক্ষকে $(0, 3)$ বিন্দুতে ছেদ করে

[y-অক্ষে $x = 0$ তাই $y = -x + 3$ এ $x = 0$ বসিয়ে পাই $y = 3$]

(iv) নং রেখাটি x-অক্ষকে $(-3, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করে

[x-অক্ষে $y = 0$ তাই $y = -x - 3$ এ $y = 0$ বসিয়ে পাই $x = -3$]

এবং y-অক্ষকে $(0, -3)$ বিন্দুতে ছেদ করে

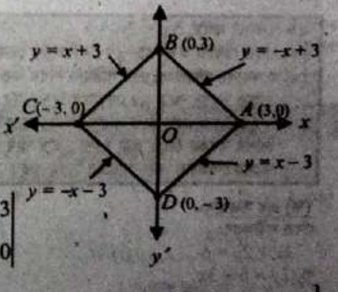
[y-অক্ষে $x = 0$ তাই $y = -x - 3$ এ $x = 0$ বসিয়ে পাই $y = -3$]

প্রাপ্ত তথ্যানুযায়ী (i) (ii) (iii) ও (iv) রেখার সাহায্যে চতুর্ভুজটি আঁকি।

প্রথম পদ্ধতি:

চিত্র হতে পাই,

উৎপন্ন চতুর্ভুজটির শীর্ষ বিন্দুগুলো হলো, $A(3, 0)$, $B(0,3)$, $C(-3,0)$, $D(0, -3)$



বিন্দুগুলোকে ঘড়ির কাটার বিপরীত দিকে নিয়ে চতুর্ভুজ ক্ষেত্র, $ABCD$ এর ক্ষেত্রফল,

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & 0 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & -3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\{3\times3+0\times0+(-3)\times(-3)+0\times0-0\times0-3\times(-3)-0\times0-(-3)\times3\}$$

$$= \frac{1}{2}(9+0+9+0-0+9+0+9) = \frac{1}{2}\times36 = 18 \text{ বর্গ একক}$$

দ্বিতীয় পদ্ধতি:
AC কর্ণ $ABCD$ চতুর্ভুজটিকে দুইটি ত্রিভুজক্ষেত্র ΔABC ও ΔACD এ বিভক্ত করে।

$\therefore AB$ বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(3-0)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$ একক

BC বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(0+3) + (3-0)^2} = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$ একক

CD বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-3-0)^2 + (0+3)^2} = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$ একক

AD বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(3-0)^2 + (0+3)^2} = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$ একক

কর্ণ $CA = \sqrt{(3+3)^2 + (0+0)^2} = \sqrt{36} = 6$ একক

ΔABC এর পরিসীমা, $2s = AB + BC + CA = 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 6$
$= 6\sqrt{2} + 6 = 6(\sqrt{2}+1)$ একক

অর্ধপরিসীমা, $s = \dfrac{6(\sqrt{2}+1)}{2} = 3(\sqrt{2}+1)$ একক

ΔADC এর পরিসীমা $= AC + CD + DA = 6 + 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}$
$= 6 + 6\sqrt{2} = 6(\sqrt{2}+1)$ একক

অর্ধপরিসীমা, $s = \dfrac{6(\sqrt{2}+1)}{2} = 3(\sqrt{2}+1)$

ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= \sqrt{s(s-AB)(s-BC)(s-CA)}$.

$= \sqrt{3(\sqrt{2}+1)\{3(\sqrt{2}+1) - 3\sqrt{2}\}\{3(\sqrt{2}+1) - 3\sqrt{2}\}\{3(\sqrt{2}+1) - 6\}}$

$= \sqrt{3(\sqrt{2}+1)(3\sqrt{2}+3-3\sqrt{2})(3\sqrt{2}+3-3\sqrt{2})(3\sqrt{2}+3-6)}$

$= \sqrt{3(\sqrt{2}+1) \times 3 \times 3 \times (3\sqrt{2}-3)}$

$= \sqrt{3.\ 3.\ 3.3(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}$

$= \sqrt{81\{(\sqrt{2})^2 - 1\}} = \sqrt{81(2-1)} = \sqrt{81} = 9$ বর্গ একক

অনুরূপভাবে, ΔACD এর ক্ষেত্রফল $= 9$ বর্গ একক।
চতুর্ভুজক্ষেত্র, $ABCD$ এর ক্ষেত্রফল $=$ Δ-ক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল
$+$ Δ-ক্ষেত্র ACD এর ক্ষেত্রফল $= (9+9) = 18$ বর্গ একক

তৃতীয় পদ্ধতি:
দ্বিতীয় পদ্ধতি হতে পাই,
$ABCD$ চতুর্ভুজের বাহু, $AB = BD = CD = DA = 3\sqrt{2}$ একক। কর্ণ, $AC = 6$ একক।
কর্ণ $BD = \sqrt{0 + (3+3)^2} = \sqrt{6^2} = 6$
যেহেতু, $ABCD$ চতুর্ভুজের সবগুলো বাহুর দৈর্ঘ্য সমান এবং কর্ণ, $AC =$ কর্ণ BD.
$\therefore$ $ABCD$ চতুর্ভুজটির একটি বর্গক্ষেত্র যার প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য $3\sqrt{2}$ একক।
$ABCD$ বর্গক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল $=$ (এক বাহুর দৈর্ঘ্য)$^2 = (3\sqrt{2})^2 = 18$ বর্গ একক।
(Ans.)

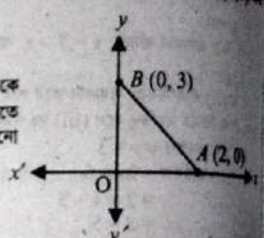
২০। দেওয়া আছে, $3x + 2y = 6$
(ক) প্রদত্ত রেখাটি অক্ষদ্বয়কে যে যে বিন্দুতে ছেদ করে তা নির্ণয় কর।
(খ) অক্ষদ্বয়ের খণ্ডিত অংশের পরিমাণ নির্ণয় কর এবং রেখাটি অক্ষদ্বয়ের সাথে যে ত্রিভুজ উৎপন্ন করে এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
(গ) অক্ষদ্বয় এবং রেখাটিকে ধার বিবেচনা করে এর ওপর একটি 5 একক উচ্চতা বিশিষ্ট ঘনবস্তু তৈরি করা হলো। যার শীর্ষ মূলবিন্দুর ওপরে ঘনবস্তুটির সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল এবং আয়তন নির্ণয় কর।

(ক) এর সমাধান:
প্রদত্ত সমীকরণ:
$3x + 2y = 6$ ……… (i)
বা, $2y = 6 - 3x$
$\therefore y = \dfrac{1}{2}(6-3x)$ ……… (ii)
আবার, $3x = 6 - 2y$
বা, $x = \dfrac{1}{3}(6-2y)$ ……… (iii)

এখন, x অক্ষে $y = 0$ $\therefore$ (iii) নং এর $y = 0$ বসিয়ে পাই,
$x = \dfrac{1}{3}(6 - 2\times0)$ $\therefore x = 2$
$\therefore$ প্রদত্ত রেখাটি x অক্ষকে $(2,0)$ বিন্দুতে ছেদ করে।
আবার, y-অক্ষে $x = 0$ সুতরাং, (ii) নং এ $x = 0$ বসিয়ে পাই,
$y = \dfrac{1}{2}(6 - 3\times0) = 3$
$\therefore$ প্রদত্ত রেখাটি y-অক্ষকে $(0, 3)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

বিকল্প সমাধান:
$3x + 2y = 6$
বা, $\dfrac{3x}{6} + \dfrac{2y}{6} = 1$
বা, $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 1$
সুতরাং $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ এর সাথে তুলনা করে পাই, x-অক্ষের ছেদবিন্দু $(2,0)$ ও y-অক্ষের ছেদবিন্দু $(0,3)$।

(খ) এর সমাধান:
প্রদত্ত সরলরেখাটি x ও y-অক্ষকে যথাক্রমে $A(2, 0)$ ও $B(0, 3)$ বিন্দুতে ছেদ করে। যা পাশের চিত্রে দেখানো হয়েছে।

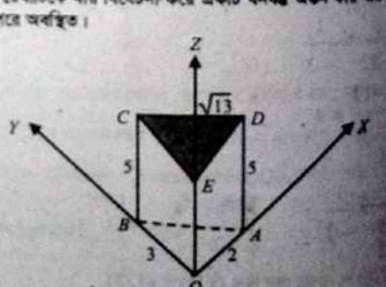


অক্ষদ্বয়ের খণ্ডিতাংশের পরিমাণ $= \sqrt{(2-0)^2 + (0-3)^2}$
$= \sqrt{4+9}$
$= \sqrt{13}$ (Ans.)

লেখচিত্র থেকে দেখা যায় রেখাটি অক্ষদ্বয়ের সাথে ABO সমকোণী ত্রিভুজ উৎপন্ন করে কারণ অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ $90°$ এবং ΔABO এর শীর্ষগুলো $A(2,0)$, $B(0, 3)$ ও $O(0, 0)$
$\therefore$ AOB ত্রিভুজের শীর্ষগুলোকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে নিয়ে

ΔABO এর ক্ষেত্রফল $= \dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$
$= \dfrac{1}{2}(2\times3 + 0\times0 + 0\times0 - 0\times0 - 3\times0 - 0\times2)$
$= \dfrac{1}{2}\times 6$
$= 3$ বর্গ একক। (Ans.)

(গ) এর সমাধান:
অক্ষদ্বয় এবং রেখাটিকে ধার বিবেচনা করে একটি ঘনবস্তু অঙ্কন করি যার শীর্ষ মূলবিন্দুর ওপরে অবস্থিত।



ঘনবস্তুর সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $=$ ত্রিভুজক্ষেত্র OAB $+$ আয়তক্ষেত্র $OADE$ $+$ আয়তক্ষেত্র $ABCD$ $+$ আয়তক্ষেত্র $OBCE$ $+$ ত্রিভুজক্ষেত্র CDE

$= \left(\dfrac{1}{2}\times2\times3 + 2\times5 + 5\times\sqrt{13} + 3\times5 + \dfrac{1}{2}\times2\times3\right)$ বর্গ একক
$= \left(3 + 10 + 5\sqrt{13} + 15 + 3\right)$ বর্গ একক
$= 31 + 5\sqrt{13}$ বর্গ একক। Ans.

দ্বিতীয় পদ্ধতি:

AC কর্ণ $ABCD$ চতুর্ভুজটিকে দুইটি ত্রিভুজক্ষেত্র ΔABC ও ΔACD এ বিভক্ত করে।

$\therefore AB$ বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(3-0)^2+(0-3)^2} = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$ একক

BC বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(0+3)+(3-0)^2} = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$ একক

CD বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-3-0)^2+(0+3)^2} = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$ একক

AD বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(3-0)^2+(0+3)^2} = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$ একক

কর্ণ $CA = \sqrt{(3+3)^2+(0+0)^2} = \sqrt{36} = 6$ একক

ΔABC এর পরিসীমা, $2s = AB+BC+CA = 3\sqrt{2}+3\sqrt{2}+6$

$= 6\sqrt{2}+6 = 6(\sqrt{2}+1)$ একক

অর্ধপরিসীমা, $s = \dfrac{6(\sqrt{2}+1)}{2} = 3(\sqrt{2}+1)$ একক

ΔADC এর পরিসীমা $= AC+CD+DA = 6+3\sqrt{2}+3\sqrt{2}$

$= 6+6\sqrt{2} = 6(\sqrt{2}+1)$ একক

অর্ধপরিসীমা, $s = \dfrac{6(\sqrt{2}+1)}{2} = 3(\sqrt{2}+1)$

ΔABC এর ক্ষেত্রফলে $= \sqrt{s(s-AB)(s-BC)(s-CA)}$.

$= \sqrt{3(\sqrt{2}+1)\{3(\sqrt{2}+1)-3\sqrt{2}\}\{3(\sqrt{2}+1)-3\sqrt{2}\}\{3(\sqrt{2}+1)-6\}}$

$= \sqrt{3(\sqrt{2}+1)\,(3\sqrt{2}+3-3\sqrt{2})\,(3\sqrt{2}+3-3\sqrt{2})\,(3\sqrt{2}+3-6)}$

$= \sqrt{3(\sqrt{2}+1)\times 3\times 3\times(3\sqrt{2}-3)}$

$= \sqrt{3.\,3.\,3.3(\sqrt{2}+1)\,(\sqrt{2}-1)}$

$= \sqrt{81\{(\sqrt{2})^2-1\}} = \sqrt{81(2-1)} = \sqrt{81} = 9$ বর্গ একক

অনুরূপভাবে, ΔACD এর ক্ষেত্রফল $= 9$ বর্গ একক।

চতুর্ভুজক্ষেত্র, $ABCD$ এর ক্ষেত্রফল $=$ Δ-ক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল $+$ Δ-ক্ষেত্র ACD এর ক্ষেত্রফল $= (9+9) = 18$ বর্গ একক

তৃতীয় পদ্ধতি:

দ্বিতীয় পদ্ধতি হতে পাই,

$ABCD$ চতুর্ভুজের বাহু, $AB = BD = CD = DA = 3\sqrt{2}$ একক। কর্ণ, $AC = 6$ একক।

কর্ণ $BD = \sqrt{0+(3+3)^2} = \sqrt{6^2} = 6$

যেহেতু, $ABCD$ চতুর্ভুজের সবগুলো বাহুর দৈর্ঘ সমান এবং কর্ণ, $AC =$ কর্ণ BD.

$\therefore ABCD$ চতুর্ভুজটির একটি বর্গক্ষেত্র যার প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য $3\sqrt{2}$ একক।

$ABCD$ বর্গক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল $=$ (এক বাহুর দৈর্ঘ্য)$^2 = (3\sqrt{2})^2 = 18$ বর্গ একক।

(Ans.)

২৩। দেওয়া আছে, $3x+2y=6$

(ক) প্রদত্ত রেখাটি অক্ষদ্বয়কে যে যে বিন্দুতে ছেদ করে তা নির্ণয় কর।

(খ) অক্ষদ্বয়ের খণ্ডিত অংশের পরিমাণ নির্ণয় কর এবং রেখাটি অক্ষদ্বয়ের সাথে যে ত্রিভুজ উৎপন্ন করে এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

(গ) অক্ষদ্বয় এবং রেখাটিকে ধার বিবেচনা করে এর ওপর একটি 5 একক উচ্চতা বিশিষ্ট ঘনবস্তু তৈরি করা হলো। যার শীর্ষ মূলবিন্দুর ওপরে ঘনবস্তুটির সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল এবং আয়তন নির্ণয় কর।

(ক) এর সমাধান:

প্রদত্ত সমীকরণ:

$3x+2y=6$ ……… (i)

বা, $2y = 6-3x$

$\therefore y = \frac{1}{2}(6-3x)$ ……… (ii)

আবার, $3x = 6-2y$

বা, $x = \frac{1}{3}(6-2y)$ ……… (iii)

এখন, x অক্ষে $y=0$ $\therefore$ (iii) নং এর $y=0$ বসিয়ে পাই,

$x = \frac{1}{3}(6-2\times 0)$ $\therefore x = 2$

$\therefore$ প্রদত্ত রেখাটি x অক্ষকে $(2,0)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

আবার, y-অক্ষে $x=0$ সুতরাং, (ii) নং এ $x=0$ বসিয়ে পাই,

$y = \frac{1}{2}(6-3\times 0) = 3$

$\therefore$ প্রদত্ত রেখাটি y-অক্ষকে $(0, 3)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

বিকল্প সমাধান:

$3x+2y=6$

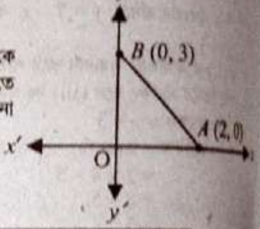
বা, $\frac{3x}{6}+\frac{2y}{6}=1$

বা, $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$

সুতরাং $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ এর সাথে তুলনা করে পাই, x-অক্ষের ছেদবিন্দু $(2,0)$ ও y-অক্ষের ছেদবিন্দু $(0,3)$।

(খ) এর সমাধান:

প্রদত্ত সরলরেখাটি x ও y-অক্ষকে যথাক্রমে $A(2, 0)$ ও $B(0, 3)$ বিন্দুতে ছেদ করে। যা পাশের চিত্রে দেখানো হয়েছে।



অক্ষদ্বয়ের খণ্ডিতাংশের পরিমাণ $= \sqrt{(2-0)^2+(0-3)^2}$

$= \sqrt{4+9}$

$= \sqrt{13}$ **(Ans.)**

লেখচিত্র থেকে দেখা যায় রেখাটি অক্ষদ্বয়ের সাথে ABO সমকোণী ত্রিভুজ উৎপন্ন করে কারণ অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ $90°$ এবং ΔABO এর শীর্ষগুলো $A(2,0)$, $B(0, 3)$ ও $O(0, 0)$

$\therefore AOB$ ত্রিভুজের শীর্ষগুলোকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে নিয়ে

ΔABO এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

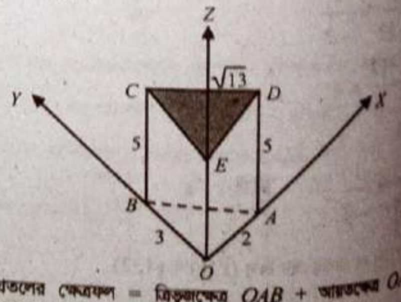
$= \frac{1}{2}(2\times 3+0\times 0+0\times 0-0\times 0-3\times 0-0\times 2)$

$= \frac{1}{2}\times 6$

$= 3$ বর্গ একক। **(Ans.)**

(গ) এর সমাধান:

অক্ষদ্বয় এবং রেখাটিকে ধার বিবেচনা করে একটি ঘনবস্তু অঙ্কন করি যার শীর্ষ মূলবিন্দুর ওপরে অবস্থিত।



ঘনবস্তুর সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $=$ ত্রিভুজক্ষেত্র OAB $+$ আয়তক্ষেত্র $OADE$ $+$ আয়তক্ষেত্র $ABCD$ $+$ আয়তক্ষেত্র $OBCE$ $+$ ত্রিভুজক্ষেত্র CDE

$= \left(\frac{1}{2}\times 2\times 3+2\times 5+5\times\sqrt{13}+3\times 5+\frac{1}{2}\times 2\times 3\right)$ বর্গ একক

$= \left(3+10+5\sqrt{13}+15+3\right)$ বর্গ একক

$= 31+5\sqrt{13}$ বর্গ একক। **Ans.**

ঘনবস্তুটির আয়তন = ভূমির ক্ষেত্রফল × উচ্চতা

এখানে, ঘনবস্তুটির ভূমির ক্ষেত্রফল = ΔOAB এর ক্ষেত্রফল

$= 3$ বর্গ একক।

$\therefore$ আয়তন $= (3 \times 5)$ ঘন একক

$= 15$ ঘন একক। **(Ans.)**

বিকল্প সমাধান:

অক্ষদ্বয় এবং রেখাটিকে ধার বিবেচনা করে এর ওপর একটি 5 একক উচ্চতা বিশিষ্ট ঘনবস্তু তৈরি করা হলে তা হবে একটি প্রিজম। এবং এর ভূমির ক্ষেত্রফল = ΔOAB ক্ষেত্রফল = 3 বর্গ একক এবং ভূমির পরিসীমা = ΔOAB এর পরিসীমা $= 2 + 3 + \sqrt{13}$ একক

$\therefore$ প্রিজমের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল

= 2 (ভূমির ক্ষেত্রফল) + পার্শ্ব তলগুলোর ক্ষেত্রফল

$= 2 \times 3 +$ ভূমির পরিসীমা × উচ্চতা

$= \{2 \times 3 + (5 + \sqrt{13}) \times 5\}$ বর্গ একক

$= \{6 + 25 + 5\sqrt{13}\}$ বর্গ একক

$= (31 + 5\sqrt{13})$ বর্গ একক **(Ans.)**

এবং ঘনবস্তুটির আয়তন = প্রিজমের আয়তন

= প্রিজমের ভূমির ক্ষেত্রফল × উচ্চতা

$= \Delta OAB$ এর ক্ষেত্রফল × উচ্চতা

$= 3 \times 5$ ঘন একক

$= 15$ ঘন একক **(Ans.)**

২৪। দেওয়া আছে, $A(1, 4a)$ এবং $B(5, a^2 - 1)$ বিন্দুগামী রেখার ঢাল $= -1$

(ক) দেখাও যে, a এর দুইটি মান রয়েছে।

(খ) a এর মানদ্বয়ের জন্য যে চারটি বিন্দু পাওয়া যায়, ধর এরা P, Q, R ও S, $PQRS$ এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

(গ) চতুর্ভুজটি সামান্তরিক না আয়ত? এ ব্যাপারে তোমার মতামত যুক্তিসহ ব্যাখ্যা কর।

(ক) এর সমাধান:

দেওয়া আছে, $A(1, 4a)$ এবং $B(5, a^2-1)$ বিন্দুগামী রেখার ঢাল $= -1$

আমরা জানি, $A(x_1, y_1)$ ও $B(x_2, y_2)$ বিন্দুগামী রেখার ঢাল $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$\therefore A(1, 4a)$ ও $B(5, a^2 - 1)$ বিন্দুগামী রেখার ঢাল

$= \frac{a^2 - 1 - 4a}{5 - 1} = \frac{a^2 - 4a - 1}{4}$

প্রশ্নমতে,

$\frac{a^2 - 4a - 1}{4} = -1$

বা, $a^2 - 4a - 1 = -4$

বা, $a^2 - 4a + 3 = 0$

যেহেতু a যুক্ত সমীকরণটি একটি দ্বিঘাত সমীকরণ সুতরাং a এর দুইটি মান আছে। (দেখানো হলো)

(খ) এর সমাধান:

'ক' হতে পাই,

$a^2 - 4a + 3 = 0$

বা, $a^2 - 3a - a + 3 = 0$

বা, $a(a - 3) - 1(a - 3) = 0$

বা, $(a - 1)(a - 3) = 0$

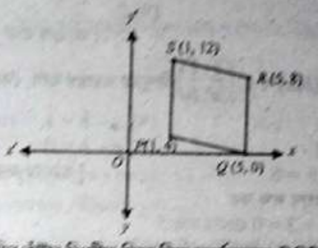
$\therefore a - 1 = 0$ অথবা $a - 3 = 0$

$\therefore a = 1$ বা, $a = 3$

$a = 1$ এর জন্য বিন্দু দুইটি $(1, 4)$ ও $(5, 0)$

$a = 3$ এর জন্য বিন্দু দুইটি $(1, 12)$ ও $(5, 8)$

$\therefore$ বিন্দুগুলো $P(1, 4)$, $Q(5, 0)$, $R(5, 8)$ ও $S(1, 12)$ যা চিত্রে দেখানো হয়েছে।



$\therefore$ বিন্দু সমূহকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে নিয়ে চতুর্ভুজক্ষেত্র $PQRS$ এর ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 5 & 5 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 8 & 12 & 4 \end{vmatrix}$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}(0 + 40 + 60 + 4 - 20 - 0 - 8 - 12)$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2} \times 64$ বর্গ একক

$= 32$ বর্গ একক **(Ans.)**

(গ) এর সমাধান:

'খ' হতে প্রাপ্ত বিন্দু চারটি, $P(1,4)$, $Q(5,0)$, $R(5,8)$ ও $S(1,12)$

এখন, PQ বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(5-1)^2 + (0-4)^2}$

$= \sqrt{16 + 16} = 4\sqrt{2}$ একক

QR বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(5-5)^2 + (8-0)^2} = \sqrt{8^2} = 8$ একক

RS বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(1-5)^2 + (12-8)^2}$

$= \sqrt{16 + 16} = 4\sqrt{2}$ একক

SP বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(1-1)^2 + (12-4)^2} = \sqrt{8^2} = 8$ একক

কর্ণ $PR = \sqrt{(5-1)^2 + (8-4)^2}$

$= \sqrt{16 + 16} = 4\sqrt{2}$ একক

কর্ণ $SQ = \sqrt{(1-5)^2 + (12-0)^2} = \sqrt{16 + 144} = \sqrt{160}$ একক।

$PQ = 4\sqrt{2} = RS$ [বিপরীত বাহু]

$QR = 8 = SP$ [বিপরীত বাহু]

এবং কর্ণ $PR \neq$ কর্ণ SQ

চতুর্ভুজটির বিপরীত বাহুগুলো পরস্পর সমান বলে চতুর্ভুজটি সামান্তরিক বা আয়ত হতে পারে কিন্তু কর্ণদ্বয় অসমান বলে চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক। কারণ সামান্তরিকের বিপরীত বাহুগুলো পরস্পর সমান এবং কর্ণদ্বয় অসমান। **(Ans.)**

বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর

✍ বাস্তব জীবনে এ অধ্যায়ের প্রয়োগ

আমরা কি কেউ পড়ার সময় চিন্তা করে দেখেছি 'ভেক্টর' অধ্যায়টি থেকে আমরা কি পড়েছি বা পড়ছি? যারা চিন্তা করেছেন তাদের সাধুবাদ জানাই। কারণ চিন্তার মাধ্যমেই বিজ্ঞানগুলো বিকশিত হয়েছে।

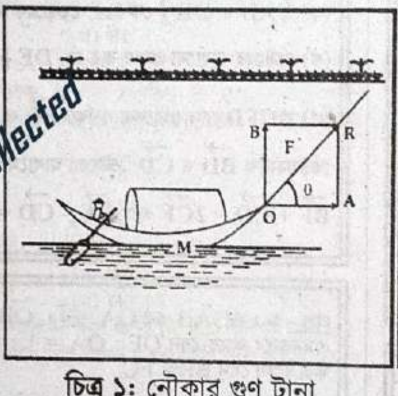
আমাদের প্রতিদিনকার চলার পথে আমরা অবচেতনভাবেই ভেক্টর মেনেই কাজ করছি। যেমন- ধরুন আমি যদি নিজ বাড়ির ঠিকানা দিতে গিয়ে বলতাম, ৫ মিটার যান, তারপর ২০ মিটার যান এবং ঘুরে দাড়ান। তাহলেই বাড়ি পেয়ে যাবেন। কেউ কি বুঝতেন? কিন্তু আমরা যদি ৫ মিটার ও ২০ মিটার এর সাথে উত্তর, দক্ষিণ বা ডান বাম উল্লেখ করে দেই তবে খুব সহজেই পেয়ে যাবে। এই মানের সাথে দিকের ধারণাটিই সহজ কথায় ভেক্টর।

আমরা যখন সাইকেল চালাই, বা হাটি বা ঘুড়ি উড়াই তখন আমরা প্রতিনিয়তই বল প্রয়োগ করি। এ বল হচ্ছে ভেক্টর। এই বল ভেক্টরের কার্যকর ব্যবহার আমরা মনের অজান্তেই করে যাই। কখনোও কি চিন্তা করে দেখেছি কীভাবে, বল ভেক্টরগুলো কাজ করে? উচ্চ মাধ্যমিক পদার্থ বিজ্ঞান বইয়ে এ নিয়ে কিছু সুন্দর আলোচনা আছে। (পারলে একটু চোখ বুলিয়ে নিলে ভালো হয়)।

বিজ্ঞান ও প্রযুক্তির বহুবিধ বিষয়ে ভেক্টরের প্রয়োগ করা হয়। নিউটনীয়ান বলবিদ্যা, কোয়ান্টাম মেকানিক্স ইত্যাদি বিষয়ে ভেক্টরের প্রয়োগ দেখা যায়। তাছাড়া ভেক্টর ক্যালকুলাস ও বিভিন্ন ইঞ্জিনিয়ারিং এ্যাপ্লিকেশনে ভেক্টর ব্যবহৃত হয়। পদার্থবিজ্ঞান বইয়ের কার্ল, ডাইভারজেন্স, গ্র্যাডিয়েন্ট এগুলো ভেক্টর ক্যালকুলাসের উদাহরণ।

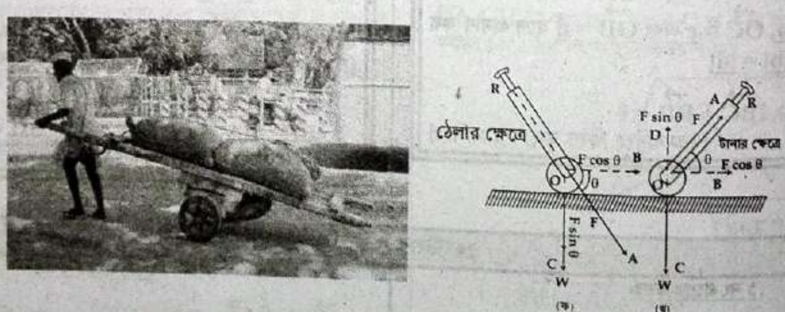
আচ্ছা, এবার নিজেরা বাস্তব জীবনে প্রচলিত এমন কিছু উদাহরণ খুঁজে বের করতে চেষ্টা করুন। দেখুন কিছু খুঁজে পান কিনা?

.... কী? কিছু কি পেলেন? যদি পেয়েন থাকেন এ্যযবহ, **Congratulations!** আর না পেলেও ঘাবড়ানোর কিছু নেই। কারণ মনে রাখবেন মানুষ কি অদেখা (Real/Virtual) কোনো কিছু নিয়ে কল্পনা করতে পারেনা কেবলমাত্র দেখা জিনিসগুলোকে নিয়েই বিভিন্নভাবে কল্পনা করতে পারে। তাই নিজের চিন্তা এবং কল্পনা শক্তিকে বাড়াতে Always চেষ্টা করবেন কিছু দেখার, বোঝার অথবা করার। আর তাহলেই ইনশাআল্লাহ আপনাদের মেধা বিকশিত হবে। এবং প্রশ্নটির উত্তরের জন্য নিচের চিত্রগুলো লক্ষ্য করেন এবং মিলিয়ে নিন।



চিত্র ১: নৌকার গুণ টানা

চিত্র ২: বাটুল বা তীর নিক্ষেপ



চিত্র ৩.৪: লন রোলার টানা/ঠেলা

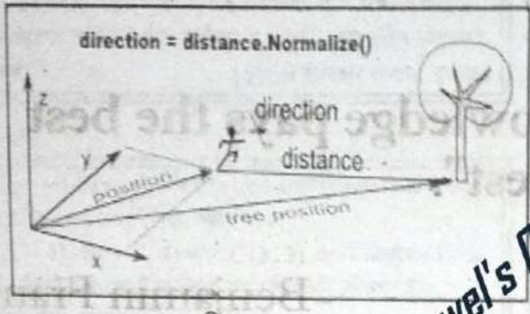
"Always do your best. What you plant now, you will harvest later".

–Og Mandino

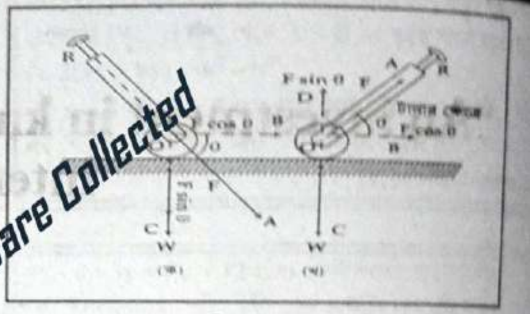
১২

সমতলীয় ভেক্টর [Coplanar Vector]

অনুশীলনী-১২



চিত্র: ১



চিত্র: ২

ভূমিকা [Introduction]

ভেক্টর (Vector) শব্দটির উৎপত্তি হয়েছে ল্যাটিন শব্দ **Vehere** থেকে, যার অর্থ **to carry**। আমরা দৈনন্দিন জীবনে অনেক বস্তু বা রাশি পরিমাপ করি যার কোন কোনটি শুধুমাত্র সংখ্যা দ্বারাই সম্পূর্ণরূপে প্রকাশ করা যায়। আবার কোন কোন রাশিকে সম্পূর্ণরূপে প্রকাশ করতে মান এবং দিক উভয়ই উল্লেখ করার প্রয়োজন হয়। এরূপ রাশিই হল ভেক্টর রাশি। ১৮৩১ সালের পর থেকে গণিতশাস্ত্রের যে তিনটি আবিষ্কার ভেক্টরের উদ্ভাবনকে ত্বরান্বিত করে, তা হল "গাউস-এর অবাস্তব সংখ্যার জ্যামিতিক ব্যাখ্যা"; "লিবনিজ এর জ্যামিতিক অবস্থান নির্ণয় পদ্ধতি"; এবং "নিউটনের সামান্তরিক ক্ষেত্রে বল বা গতি সম্পর্কিত বিদ্যা"। ভেক্টরের অত্যাধুনিক রূপ হল টেন্সর (tensor) যা গণিতশাস্ত্রের উচ্চতর পর্যায়ে আলোচনা করা হয়।

Cospar Wessel (1745-1818) ও Carl Friedrich Gauss (1777-1855) জটিল সংখ্যা সমতলের একটি বিন্দুকে ভেক্টর দ্বারা প্রকাশ করেন। আইরিশ গণিতবিদ, পদার্থবিদ, জ্যোতির্বিদ উইলিয়াম রোয়ান হ্যামিলটন (Willium Rowan Hamilton) এর ১৮৪৩ সালে কোয়াটারনিয়ন সংখ্যা ধারণাই ভেক্টরের মূলভিত্তি। এরপর Jashia Willard Gibbs এবং Oliver Heakiside একটি বিশেষ ভেক্টর পদ্ধতি আবিষ্কার করেন।

বোর্ড প্রশ্নাবলির বিশ্লেষণ [Board Questions Analysis]

এই অধ্যায় থেকে বিভিন্ন বোর্ডে বিগত দু'বছরের এসএসসি পরীক্ষায় মোট ১০টি সৃজনশীল প্রশ্ন ও ২৩টি বহুনির্বাচনি প্রশ্ন এসেছে। নিচের ছকে অধ্যায়ের অন্তর্ভুক্ত অংশে এই অধ্যায় থেকে কোন সালে কোন বোর্ডে কতটি প্রশ্ন হয়েছে তা দেওয়া আছে।

☑ সৃজনশীল প্রশ্ন:

বোর্ড / সাল	ঢাকা	রাজশাহী	কুমিল্লা	যশোর	চট্টগ্রাম	বরিশাল	সিলেট	দিনাজপুর
২০১৬	১	–	১	–	১	১	১	১
২০১৫	–	–	১	–	১	১	–	১

☑ বহুনির্বাচনি প্রশ্ন:

বোর্ড / সাল	ঢাকা	রাজশাহী	কুমিল্লা	যশোর	চট্টগ্রাম	বরিশাল	সিলেট	দিনাজপুর
২০১৬	১	১	১	২	২	১	–	১
২০১৫	২	১	২	২	২	১	১	৩

মূল শব্দাবলি [Key Words]

রাশি (Quantity), পরিমাণ (Magnitude), স্কেলার রাশি/অদিক রাশি/নির্দিক রাশি (Scalar Quantity), দিক (Direction), ভেক্টর রাশি (Vector Quantity), ধারক রেখা (Support Line), বিপরীত ভেক্টর (Opposite Vector), বিনিময় বিধি (Commutative Law), সংযোগ বিধি (Associative Law), স্কেলার গুণিতক (Scalar Multiple), বন্টন সূত্র (Distributive Law), অবস্থান ভেক্টর (Position Vector).

এ অধ্যায়ের আলোচ্যসূচি

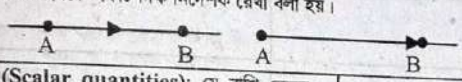
- স্কেলার রাশি ও ভেক্টর রাশি
- ভেক্টর রাশির জ্যামিতিক প্রতিরূপ
- ভেক্টরের সমতা
- ভেক্টরের যোগ ও বিয়োগ
- ভেক্টর যোগের সামান্তরিক বিধি
- ভেক্টরের বিয়োগ
- ভেক্টর বিয়োগের ত্রিভুজ বিধি
- ভেক্টর যোগের বিধিসমূহ
- ভেক্টর যোগের বিনিময় বিধি
- ভেক্টর যোগের সংযোগ বিধি
- ভেক্টর যোগের বর্জন বিধি
- ভেক্টরের সংখ্যা গুণিতক
- ভেক্টরের সংখ্যা গুণিতক সংক্রান্ত বন্টন সূত্র
- অবস্থান ভেক্টর

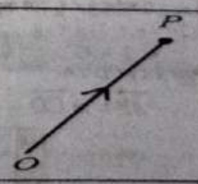
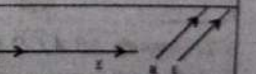
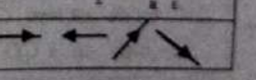
প্রাথমিক আলোচনা

দৈনন্দিন জীবনে প্রায় সব ক্ষেত্রেই বস্তুর পরিমাপের প্রয়োজন হয়। আবার যদি বলা হয় একটি লোক একবিন্দু থেকে যাত্রা শুরু করে প্রথমে 4 মিটার ও পরে 5 মিটার দূরত্ব অতিক্রম করল। লোকটি যাত্রাবিন্দু থেকে কোনদিকে কত মিটার দূরে তা বোঝা মুশকিল। এরকম দৈনন্দিন জীবনের অনেক কার্যক্রম শুধু স্কেলার রাশি দ্বারা ব্যাখ্যা করা যায় না। এক্ষেত্রে ভেক্টর রাশির ধারণা প্রয়োজন হয়।

দিক নির্দেশক রেখাংশ (directed line segment): কোনো রেখাংশের একপ্রান্তকে আদিবিন্দু (initial point) এবং অপর প্রান্তকে অন্তঃবিন্দু (terminal point) হিসেবে চিহ্নিত করলে ঐ রেখাংশকে একটি দিক নির্দেশক রেখা বলা হয়।

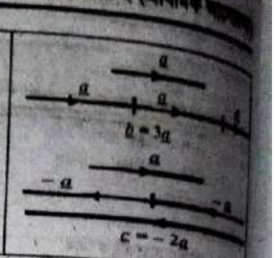
উদাহরণ:



স্কেলার রাশি (Scalar quantities): যে রাশি কেবল এককসহ পরিমাণ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বোঝানো যায়, একে স্কেলার বা অদিক বা নির্দিক রাশি বলা হয়।		উদাহরণ: দৈর্ঘ্য, ভর, আয়তন, দ্রুতি, তাপমাত্রা, সময় ইত্যাদি।
ভেক্টর রাশি (Vector quantities): যে রাশিকে সম্পূর্ণরূপে প্রকাশ করার জন্য এর পরিমাণ ও দিক উভয়ের প্রয়োজন হয়, একে ভেক্টর বা সদিক রাশি বলা হয়।	(i) দিক নির্দেশক রেখাংশের আদিবিন্দু A এবং অন্তঃবিন্দু B হলে ঐ দিক নির্দেশক রেখাংশকে $\overrightarrow{AB}$ দ্বারা সূচিত করা হয়। (ii) রেখাংশের দৈর্ঘ্য $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert$ বা AB দ্বারা প্রকাশ করা হয়।	উদাহরণ: সরণ, বেগ, ত্বরণ, ওজন, বল ইত্যাদি।
ধারক রেখা: কোনো ভেক্টর যে অসীম সরলরেখার অংশবিশেষ, একে ঐ ভেক্টরের ধারক রেখা বা শুধু ধারক বলা হয়।	চিত্রে $\vec{u}$ ও $\vec{v}$ ভেক্টরের অংশবিশেষ। এখানে AB কে $\vec{u}$ ও $\vec{v}$ এর ধারক বলে। $\vec{u}$ বা $\underline{u}$ এর দৈর্ঘ্যকে u বা $\lvert\vec{u}\rvert$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।	
	বিভিন্ন প্রকারের ভেক্টর:	
বিপরীত ভেক্টর: $\underline{v}$ কে $\underline{u}$–এর বিপরীত ভেক্টর বলা হয়। যদি (i) $\lvert\underline{v}\rvert = \lvert\underline{u}\rvert$ (ii) $\underline{v}$ এর ধারক, $\underline{u}$-এর ধারকের সঙ্গে অভিন্ন বা সমান্তরাল হয় (iii) $\underline{v}$ এর দিক $\underline{u}$ এর দিকের বিপরীত হয়।	বি.দ্র.: $\underline{u} = \overrightarrow{AB}$ হলে $-\underline{u} = \overrightarrow{BA}$ অতএব $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$	
শূন্য ভেক্টর: যে ভেক্টরের পরমমান শূন্য এবং যার দিক নির্ণয় করা যায় না একে শূন্য ভেক্টর বলে। এক্ষেত্রে ভেক্টরের আদিবিন্দু ও অন্তঃবিন্দু একটিমাত্র বিন্দু হয় যেমন $\overrightarrow{AA}, \overrightarrow{BB}$ শূন্য ভেক্টর।	শূন্য ভেক্টরকে $\underline{0}$ প্রতীক দ্বারা সূচিত করা হয়। $\overrightarrow{AA} = 0, \overrightarrow{BB} = 0$ $\therefore$ বলা যায় $\underline{u} + \underline{0} = \underline{0} + \underline{u} = \underline{u}$ বি.দ্র.: শূন্য ভেক্টর এমন একটি ভেক্টর যার নির্দিষ্ট দিক বা ধারক রেখা নেই।	
একক ভেক্টর: একটি ভেক্টরকে একক ভেক্টর বলা হয়, যদি এর দৈর্ঘ্য একক হয়। যেমন $\lvert\vec{u}\rvert = 1$		
অবস্থান ভেক্টর: সমতলে কোনো নির্দিষ্ট 0 বিন্দুর সাপেক্ষে ঐ সমতলের অন্য একটি বিন্দুর অবস্থান যে ভেক্টরের সাহায্যে প্রকাশ করা হয় তাকে অবস্থান ভেক্টর বলে। যেমন (১) সমতলে নির্দিষ্ট বিন্দু (0) এর সাপেক্ষে P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\overrightarrow{OP}$	O বিন্দুর সাপেক্ষে A বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\overrightarrow{OA}$ O বিন্দুর সাপেক্ষে B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\overrightarrow{OB}$ A, B যোগ করি। অতএব, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$	
সদৃশ ভেক্টর: যদি দুইটি ভেক্টরের দিক একই হয় তবে তাদেরকে সদৃশ ভেক্টর বলে।		
বিসদৃশ ভেক্টর: যদি একাধিক ভেক্টর সদৃশ্য না হয় তবে এদেরকে বিসদৃশ ভেক্টর বলা হয়।		

সমরেখ ভেক্টর: একাধিক ভেক্টর সমরেখ হবে যদি এদের ধারক রেখা একই হয়।

বি.দ্র.: (১) দুইটি ভেক্টরের ধারক রেখা অভিন্ন বা সমান্তরাল হলে এদের একটিকে অপরটির সংখ্যাগুণিতক আকারে প্রকাশ করা যায়।
(২) তিনটি বিন্দু A, B, C সমরেখ হবে যদি এবং কেবল যদি $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}$ এর সাংখ্যিক গুণিতক হয়।



বি.দ্র.: ভেক্টর রাশি ও দিক নির্দেশক রেখাংশ সমার্থক ধারণা। দিক নির্দেশককে জ্যামিতিক ভেক্টর বলেও উল্লেখ করা হয়।

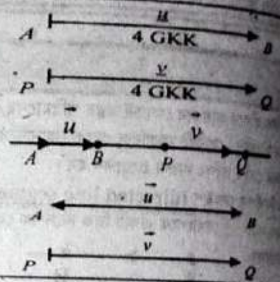
ভেক্টরের বিভিন্ন বিধি:

ভেক্টর সমতা: একটি ভেক্টর $\underline{u}$-কে অপর একটি ভেক্টর $\underline{v}$ এর সমান বলা হয় যদি-

(i) $|\underline{u}| = |\underline{v}|$ বা $|\vec{u}| = |\vec{v}|$ বা, $u = v$ অর্থাৎ $\underline{u}$ ও $\underline{v}$ উভয়ের দৈর্ঘ্য সমান হলে।

(ii) $\vec{u}$ ও $\vec{v}$ এর ধারক একই হয়

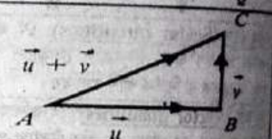
(iii) $\vec{u}$ এর দিক $\vec{v}$ এর দিকের সাথে একমুখী হয় অথবা সমান্তরাল হয়



ভেক্টরের যোগ (Addition of vecors): ধরি, $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ এবং $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$

তবে, $\vec{u}$ ও $\vec{v}$ এর যোগ

$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$



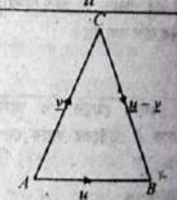
ভেক্টরের বিয়োগ (Subtraction of Vectors): ধরি $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$

$\therefore \vec{u} - \vec{v} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$

এটি ত্রিভুজ বিধি অনুসারে, $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$

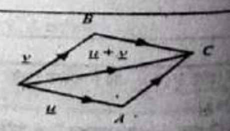
সুতরাং $\vec{u}$ ও $\vec{v}$ ভেক্টর দ্বয়ের বিয়োগফল $\vec{u} - \vec{v}$ বলতে বোঝায় $\vec{u}$ ও $(-\vec{v})$ ভেক্টরদ্বয়ের যোগফল।



ভেক্টর যোগের সামান্তরিক বিধি: কোনো সামান্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহু দ্বারা দুইটি ভেক্টর $\underline{u}$ ও $\underline{v}$ এর মান ও দিক সূচিত হলে, ঐ বিন্দুগামী কর্ণ দ্বারা $\underline{u} + \underline{v}$ ভেক্টরের মান ও দিক সূচিত হয়।

, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}$ [ত্রিভুজ বিধি অনুসারে]

অর্থাৎ, $\overrightarrow{OC} = \underline{u} + \underline{v}$



ভেক্টরের সংখ্যা গুণিতক বা স্কেলার গুণিতক (Scalar multiple of a vector):

$\underline{u}$ একটি অশূন্য ভেক্টর এবং m যেকোনো বাস্তব সংখ্যা হলে $m\underline{u}$ একটি স্কেলার গুণিতক ভেক্টর এবং এর দৈর্ঘ্য $|m||u|$

এখানে $\underline{u}$ ও $m\underline{u}$ ভেক্টর দুইটি সমরেখ।

(১) $m = 0$ হলে $m\underline{u} = 0$,

(২) $m \neq 0$ হলে, $m\underline{u}$ এর ধারক $\underline{u}$ এর ধারকের সাথে অভিন্ন; $m\underline{u}$ এর দৈর্ঘ্য $\underline{u}$ এর দৈর্ঘ্যের m গুণ এবং

(ক) $m > 0$ হলে $m\underline{u}$ এর দিক $\underline{u}$ এর দিকের সংগে একমুখী

(খ) $m < 0$ হলে $m\underline{u}$ এর দিক $\underline{u}$ এর দিকের বিপরীত।

দ্রষ্টব্য:

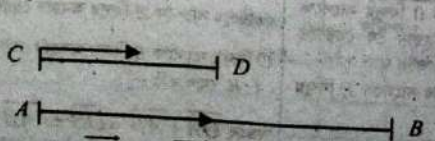
(১) $m = 0$ অথবা $\underline{u} = \underline{0}$ হলে $m\underline{u} = 0$

(২) $1\underline{u} = \underline{u}$, $(-1)\,\underline{u} = -\underline{u}$

লক্ষণীয়: $AB \parallel CD$ হলে-

$$\overrightarrow{AB} = m\,\overrightarrow{CD}$$

$$\text{যেখানে } |m| = \frac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{CD}|} = \frac{AB}{CD}$$



$m > 0$ হবে যদি $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{CD}$ উভয়ের মান ধনাত্মক কিংবা উভয়ই ঋণাত্মক হয় অতএব $m > 0$ হলে, $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{CD}$ সমমুখী।

$m < 0$ হবে যদি $\overrightarrow{AB}$ কিংবা $\overrightarrow{CD}$ যেকোনো একটির মান ঋণাত্মক হয়।

$\therefore m < 0$ হলে $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{CD}$ বিপরীতমুখী।

ভেক্টরের সংখ্যাগুণিতক নিম্নলিখিত নিয়ম মানে:
$\underline{U}$ অশূন্য ভেক্টর, K ও M স্কেলার রাশি হলে
(১) $1\underline{U} = \underline{U}$
(২) $K(M\underline{U}) = (KM)\,\underline{U}$
(৩) $(K + M)\,\underline{U} = K\underline{U} + M\underline{U}$
(৪) $K(\underline{U} + \underline{V}) = K\underline{U} + K\underline{V}$

জেনে রাখা ভালো:
১। সামান্তরিক ও আয়তক্ষেত্রের কর্ণদ্বয় পরস্পর পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।
২। রম্বস ও বর্গের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে।
৩। ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর যোগফল তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর।
৪। ত্রিভুজের যেকোনো দুইবাহুর মধ্যবিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশ ঐ ত্রিভুজের তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল ও তার অর্ধেক।
৫। ট্রাপিজিয়ামের অসমান্তরাল বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমান্তরাল এবং তাদের যোগফলের অর্ধেক।

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনমূলক কাজের সমাধান

কাজ: [Ref: পাঠ্যবই পৃষ্ঠা: ২৫৪]
১। তোমার বাড়ি হতে স্কুল সোজা দক্ষিণে 3 কি.মি. দূরে অবস্থিত। বাড়ি হতে হেঁটে স্কুলে যেতে এক ঘণ্টা সময় লাগলে তোমার গতিবেগ কত?
২। স্কুল ছুটির পর সাইকেলে 20 মিনিটে বাড়ি এলে এক্ষেত্রে তোমার গতিবেগ কত?

১-এর সমাধান:
দেওয়া আছে, বাড়ি থেকে স্কুলের দূরত্ব = 3 কি.মি.
স্কুলে যেতে সময় = 1 ঘণ্টা

আমরা জানি, গতিবেগ $= \frac{\text{দূরত্ব}}{\text{সময়}} = \frac{3}{1} = 3$ কি. মি./ঘণ্টা **(Ans.)**

২-এর সমাধান:
সরণ = 3 কি.মি.

প্রয়োজনীয় সময় = 20 মিনিট $= \frac{20}{60}$ ঘণ্টা $= \frac{1}{3}$ ঘণ্টা

গতিবেগ $= \frac{\text{সরণ}}{\text{সময়}} = \frac{3}{\frac{1}{3}}$ কি.মি./ঘণ্টা = 9 কি.মি./ঘণ্টা। **(Ans.)**

কাজ: [Ref: পাঠ্যবই পৃষ্ঠা: ২৬১]
m ও n এর বিভিন্ন প্রকার সাংখ্যিক মান নিয়ে $\underline{u}$ ভেক্টরের জন্য $(m+n)\,\underline{u} = m\underline{u} + n\underline{u}$ সূত্রটি যাচাই কর।

সমাধান:
m ও n এর বিভিন্ন মানের জন্য প্রমাণ করতে হবে যে,
$(m+n)\,\underline{u} = m\underline{u} + n\underline{u}$
$m = 2, n = 3$ হলে,

বামপক্ষ $= (m+n)\,\underline{u} = (2+3)\,\underline{u} = 5\underline{u}$

ডানপক্ষ $= m\underline{u} + n\underline{u} = 2\underline{u} + 3\underline{u} = 5\underline{u}$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ

$\therefore m = 3, n = -2$ হলে,
বামপক্ষ $= (m+n)\,\underline{u} = [3 + (-2)]\,\underline{u} = (3-2)\underline{u} = \underline{u}$

ডানপক্ষ $= m\underline{u} + n\underline{u} = 3\underline{u} + (-2)\underline{u} = 3\underline{u} - 2\underline{u} = \underline{u}$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ

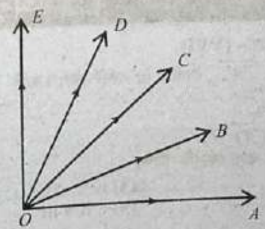
$m = -3, n = -2$ হলে,
বামপক্ষ $= (m+n)\,\underline{u} = [-3 + (-2)]\,\underline{u} = (-5)\underline{u} = -5\underline{u}$

ডানপক্ষ $= m\underline{u} + n\underline{u} = (-3)\underline{u} + (-2)\underline{u} = [(-3) + (-2)]\underline{u} = (-5)\underline{u} = -5\underline{u}$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ
$\therefore (m+n)\underline{u} = m\underline{u} + n\underline{u}$. (প্রমাণিত)

কাজ: [Ref: পাঠ্যবই পৃষ্ঠা: ২৬২]
তোমার খাতায় একটি বিন্দুকে মূলবিন্দু O ধরে বিভিন্ন অবস্থানে আরও পাঁচটি বিন্দু নিয়ে O বিন্দুর সাপেক্ষে এগুলোর অবস্থান ভেক্টর চিহ্নিত কর।

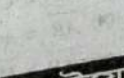
সমাধান:
মনে করি, কোনো সমতলে O একটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং একই সমতলে A অপর একটি বিন্দু। O, A যোগ করলে সমতলে $\overrightarrow{OA}$ ভেক্টরকে O বিন্দুর সাপেক্ষে A বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর বলা হয়।



অনুরূপভাবে, একই O বিন্দুর সাপেক্ষে একই সমতলে অপর চারটি অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}$ এবং $\overrightarrow{OE}$.

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-১২

১। $AB \parallel DC$ হলে –



i. $\overrightarrow{AB} = m.\overrightarrow{DC}$, যেখানে m একটি স্কেলার রাশি
ii. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
iii. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$
উপরের উক্তিগুলোর মধ্যে কোনটি সঠিক?
(ক) i (খ) ii
(গ) i ও ii (ঘ) i, ii ও iii

২। দুটি ভেক্টর সমান্তরাল হলে –
i. এদের যোগের ক্ষেত্রে সামান্তরিক বিধি প্রযোজ্য
ii. এদের যোগের ক্ষেত্রে ত্রিভুজ বিধি প্রযোজ্য
iii. এদের দৈর্ঘ্য সর্বদা সমান।
উপরের উক্তিগুলোর মধ্যে কোনটি সঠিক?
(ক) i (খ) ii
(গ) i ও ii (ঘ) i, ii ও iii

৩। $AB = CD$ এবং $AB \parallel CD$ হলে কোনটি সঠিক?
(ক) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ (খ) $\overrightarrow{AB} = m.\overrightarrow{CD}$ যেখানে m > 1
(গ) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} < O$ (ঘ) $\overrightarrow{AB} + m.\overrightarrow{CD} = O$ যেখানে m > 1

নিচের তথ্যের আলোকে ৪ ও ৫ নম্বর প্রশ্নের উত্তর দাও:

AB রেখাংশের উপর যেকোনো বিন্দু C এবং কোনো ভেক্টর মূলবিন্দুর সাপেক্ষে A, B ও C বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$, $\underline{b}$ ও $\underline{c}$।

৪। $\overline{AA}$ ভেক্টর হচ্ছে—

i. বিন্দু ভেক্টর
ii. একক ভেক্টর
iii. শূন্য ভেক্টর

উপরের উক্তিগুলোর মধ্যে কোনটি সঠিক?

(ক) i, ii (খ) i, iii
(গ) ii, iii (ঘ) i, ii ও iii

৫। ΔABC এর ক্ষেত্রে কোনটি সঠিক?

(ক) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CA}$ (খ) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$
(গ) $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}=\underline{0}$ (ঘ) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\underline{0}$

৬। ABCD সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় $\overline{AC}$ ও $\overline{BD}$ হলে, $\overline{AB}$ ও $\overline{AC}$ ভেক্টরদ্বয়কে $\overline{AD}$ ও $\overline{BD}$ ভেক্টরদ্বয়ের মাধ্যমে প্রকাশ কর এবং দেখাও যে, $\overline{AC}+\overline{BD}=2\overline{BC}$ এবং $\overline{AC}-\overline{BD}=2\overline{AB}$

৭। দেখাও যে, (ক) $-(\underline{a}+\underline{b})=-\underline{a}-\underline{b}$ (খ) $\underline{a}+\underline{b}=\underline{c}$ হলে $\underline{a}=\underline{c}-\underline{b}$

৮। দেখাও যে, (ক) $\underline{a}+\underline{a}=2\underline{a}$ (খ) $(m-n)\,\underline{a}=m\,\underline{a}-n\,\underline{a}$ (গ) $m\,(\underline{a}-\underline{b})=m\,\underline{a}-m\,\underline{b}$

৯। (ক) $\underline{a}$, $\underline{b}$ প্রত্যেকে অশূন্য ভেক্টর হলে দেখাও যে, $\underline{a}=m\underline{b}$ হতে পারে কেবলমাত্র যদি $\underline{a}$, $\underline{b}$ এর সমান্তরাল হয়।
(খ) $\underline{a}$, $\underline{b}$ অশূন্য অসমান্তরাল ভেক্টর এবং $m\,\underline{a}+n\,\underline{b}=0$ হলে দেখাও যে, $m=n=0$

১০। A, B, C, D বিন্দুগুলোর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$ হলে দেখাও যে, ABCD সামান্তরিক হবে যদি এবং কেবল যদি $\underline{b}-\underline{a}=\underline{c}-\underline{d}$ হয়।

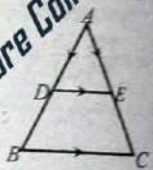
১১। ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের এক বাহুর মধ্যবিন্দু থেকে অঙ্কিত অপর বাহুর সমান্তরাল রেখা তৃতীয় বাহুর মধ্যবিন্দুগামী।

১২। প্রমাণ কর যে, কোনো চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করলে তা একটি সামান্তরিক হয়।

১৩। ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, ট্রাপিজিয়ামের অসমান্তরাল বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমান্তরাল ও তাদের যোগফলের অর্ধেক।

১৪। ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, ট্রাপিজিয়ামের কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমান্তরাল এবং তাদের বিয়োগফলের অর্ধেক।

১৫। ΔABC এর AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E

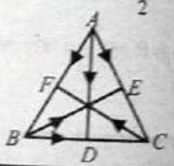


ক. $(\overline{AD}+\overline{DE})$ কে $\overline{AC}$ ভেক্টরের মাধ্যমে প্রকাশ কর।

খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, BC ∥ DE এবং $DE=\frac{1}{2}BC$

গ. BCED ট্রাপিজিয়ামের কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে M ও N হলে ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, MN ∥ DE ∥ BC এবং $MN=\frac{1}{2}(BC-DC)$

১৬। ΔABC এর BC, CA ও AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E ও F



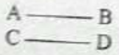
ক. $\overline{AB}$ ভেক্টরকে $\overline{BE}$ ও $\overline{CF}$ ভেক্টরের মাধ্যমে প্রকাশ কর।

খ. প্রমাণ কর যে, $\overline{AD}+\overline{BE}+\overline{CF}=\underline{O}$

গ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, F বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত BC এর সমান্তরাল রেখা অবশ্যই E বিন্দুগামী হবে।

অনুশীলনী-১২ এর সমাধান

১। AB ∥ DC হলে – (VVI)



i. $\overrightarrow{AB}=m.\overrightarrow{DC}$, যেখানে m একটি স্কেলার রাশি
ii. $\overline{AB}=\overline{DC}$
iii. $\overline{AB}=\overrightarrow{CD}$

উপরের উক্তিগুলোর মধ্যে কোনটি সঠিক?

(ক) i (খ) ii
(গ) i ও ii (ঘ) i, ii ও iii

উত্তর: (ক) i

ব্যাখ্যা:

i. সঠিক; কারণ $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ দুইটি সমান্তরাল ভেক্টর হলে, $\vec{a}=m\vec{b}$;

যেখানে m একটি স্কেলার রাশি। এখানে $\overline{AB}\parallel\overline{DC}$

সুতরাং $\overline{AB}=m.\overline{DC}$.

ii. সর্বদা সত্য নয়, শুধু ভেক্টরদ্বয়ের দৈর্ঘ্য সমান হলে সত্য হবে।
∴ ii. নং সঠিক নয়।

২। দুটি ভেক্টর সমান্তরাল হলে –

i. এদের যোগের ক্ষেত্রে সামান্তরিক বিধি প্রযোজ্য
ii. এদের যোগের ক্ষেত্রে ত্রিভুজ বিধি প্রযোজ্য
iii. এদের দৈর্ঘ্য সর্বদা সমান

উপরের উক্তিগুলোর মধ্যে কোনটি সঠিক?

(ক) i (খ) ii
(গ) i ও ii (ঘ) i, ii ও iii

উত্তর: (খ) ii

ব্যাখ্যা:

i. সত্য নয়; কারণ দুইটি ভেক্টর সমান্তরাল হলে এদের যোগের ক্ষেত্রে সামা... বিধি প্রযোজ্য নয়।

ii. নং সঠিক কারণ, দুইটি ভেক্টর সমান্তরাল হলে এদের যোগের ক্ষেত্রে সামা... বিধি প্রযোজ্য না হলেও ত্রিভুজ বিধি প্রযোজ্য। [Ref: ...]

iii. সঠিক নয় কারণ; দুইটি ভেক্টর সমান্তরাল হলে এদের দৈর্ঘ্য সমান হতে ... নাও হতে পারে।

৩। AB = CD এবং AB ∥ CD হলে কোনটি সঠিক?

(ক) $\overline{AB}=\overrightarrow{CD}$
(খ) $\overrightarrow{AB}=m.\overrightarrow{CD}$ যেখানে m > 1
(গ) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}<O$
(ঘ) $\overline{AB}+m.\overline{CD}=O$ যেখানে m > 1

উত্তর: (ক) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$

ব্যাখ্যা:

$\overline{AB}$ ও $\overline{CD}$ দুইটি ভেক্টর এবং AB = CD ও AB ∥ CD হলে ... $\overline{AB}=\overline{CD}$.

যেমন: একটি সামান্তরিকের বিপরীত বাহু AD ও BC দুইটি ... জন্য $\overline{AD}=\overline{BC}$, কারণ সামান্তরিকের বিপরীত বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য সমান ও পরস্পর সমান্তরাল।

নিচের তথ্যের আলোকে ৪ ও ৫ নম্বর প্রশ্নের উত্তর দাও:
AB রেখাংশের উপর যেকোনো বিন্দু C এবং কোনো ভেক্টর মূলবিন্দুর সাপেক্ষে A, B ও C বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$, $\underline{b}$ ও $\underline{c}$।

৪। $\overrightarrow{AA}$ ভেক্টর হচ্ছে—
i. বিন্দু ভেক্টর
ii. একক ভেক্টর
iii. শূন্য ভেক্টর

উপরের উক্তিগুলোর মধ্যে কোনটি সঠিক?

(ক) i, ii (খ) i, iii
(গ) ii, iii (ঘ) i, ii ও iii

উত্তর: (খ) i, iii

ব্যাখ্যা:
বিন্দু ভেক্টর: যে ভেক্টরের মান শূন্য অর্থাৎ, আদি বিন্দু ও অন্তঃবিন্দু একই অবস্থানে থাকে তাকে বিন্দু ভেক্টর বলে। যেহেতু $\overrightarrow{AA}$ ভেক্টরের ক্ষেত্রে আদি ও অন্তঃবিন্দু একই তাই এটি বিন্দু ভেক্টর।
আবার, শূন্য ভেক্টরও একটি বিন্দু ভেক্টর; কিন্তু একক ভেক্টরের মান 1 বিধায় এটি বিন্দু ভেক্টর নয়।
অতএব, সঠিক উত্তর i, iii

৫। ΔABC এর ক্ষেত্রে কোনটি সঠিক?

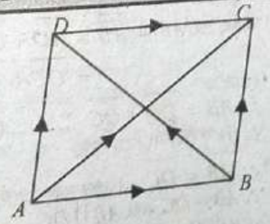
(ক) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CA}$ (খ) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$
(গ) $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}=\underline{0}$ (ঘ) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\underline{0}$

উত্তর: (ঘ) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\underline{0}$

ব্যাখ্যা:
ত্রিভুজের বাহুত্রয় $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ ও $\overrightarrow{CA}$ হলে,
ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ সূত্রানুসারে, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$
বা, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}=0$
অর্থাৎ, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\underline{0}$ $[\because \overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}]$

৬। ABCD সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় $\overrightarrow{AC}$ ও $\overrightarrow{BD}$ হলে $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{AC}$ ভেক্টরদ্বয়কে $\overrightarrow{AD}$ ও $\overrightarrow{BD}$ ভেক্টরদ্বয়ের মাধ্যমে প্রকাশ কর এবং দেখাও যে, $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{BC}$ এবং $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{AB}$. (VVI)

সমাধান:
দেওয়া আছে, $ABCD$ একটি সামান্তরিক। $\overrightarrow{AC}$ ও $\overrightarrow{BD}$ এর কর্ণদ্বয়। $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{AC}$ ভেক্টরদ্বয়কে $\overrightarrow{AD}$ ও $\overrightarrow{BD}$ ভেক্টরদ্বয়ের মাধ্যমে প্রকাশ করতে হবে এবং দেখাতে হবে যে,



$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{BC}$ এবং $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{AB}$

প্রমাণ: ΔABD-তে $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$ [ত্রিভুজ বিধি]
$\therefore \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BD}$ ...... (i) $[\because \overrightarrow{DB}=-\overrightarrow{BD}]$
আবার,
$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$ [ΔACD-এ ত্রিভুজ বিধি অনুসারে]
$=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}$ [$ABCD$ সামান্তরিক বলে $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$]
$=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BD}$ $[\because \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BD}]$
বা, $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BD}$ ...... (ii)
বা, $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BD}$ [উভয়পক্ষে $\overrightarrow{BD}$ যোগ করে পাই]
$=2\overrightarrow{AD}$

$\therefore \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{BC}$ ...... (iii) [$ABCD$ সামান্তরিক বলে $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$]
আবার, $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}=(2\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BD})-\overrightarrow{BD}$ [(ii) নং হতে]
$=2\overrightarrow{AD}-2\overrightarrow{BD}$
$=2(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BD})$
$=2(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB})$ $[\because \overrightarrow{DB}=-\overrightarrow{BD}]$
$=2\overrightarrow{AB}$ [ত্রিভুজ বিধি অনুসারে $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}$]
$\therefore \overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{AB}$ ...... (iv)
সমীকরণ (i), (ii), (iii) ও (iv) নং হতে পাই:
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BD}$
$\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BD}$
$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{BC}$ এবং $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{AB}$. (দেখানো হলো)

৭। দেখাও যে, (ক) $-(\underline{a}+\underline{b})=-\underline{a}-\underline{b}$ (খ) $\underline{a}+\underline{b}=\underline{c}$ হলে $\underline{a}=\underline{c}-\underline{b}$

(ক) এর সমাধান:
দেখাতে হবে যে, $-(\underline{a}+\underline{b})=-\underline{a}-\underline{b}$
এখানে, $-(\underline{a}+\underline{b})=-1(\underline{a}+\underline{b})$
$=(-1)\underline{a}+(-1)\underline{b}$ [বণ্টন সূত্র]
$=-\underline{a}-\underline{b}$
$\therefore -(\underline{a}+\underline{b})=-\underline{a}-\underline{b}$ (দেখানো হলো)

(খ) এর সমাধান:
দেওয়া আছে, $\underline{a}+\underline{b}=\underline{c}$
প্রমাণ করতে হবে যে, $\underline{a}=\underline{c}-\underline{b}$
দেওয়া আছে, $\underline{a}+\underline{b}=\underline{c}$
বা, $\underline{a}+\underline{b}-\underline{b}=\underline{c}-\underline{b}$ [উভয় পক্ষে $(-\underline{b})$ যোগ করে]
বা, $\underline{a}=\underline{c}-\underline{b}$
আবার, বিপরীতক্রমে মনে করি, $\underline{a}=\underline{c}-\underline{b}$
বা, $\underline{a}+\underline{b}=\underline{c}-\underline{b}+\underline{b}$ [উভয় পক্ষে $\underline{b}$ যোগ করে]
$=\underline{c}-\underline{0}$
$\therefore \underline{a}+\underline{b}=\underline{c}$
$\therefore \underline{a}+\underline{b}=\underline{c}$ হলে $\underline{a}=\underline{c}-\underline{b}$ এবং বিপরীতক্রমে। (দেখানো হলো)

৮। দেখাও যে, (ক) $\underline{a}+\underline{a}=2\underline{a}$ (খ) $(m-n)\underline{a}=m\underline{a}-n\underline{a}$
(গ) $m(\underline{a}-\underline{b})=m\underline{a}-m\underline{b}$

(ক) এর সমাধান:
$\underline{a}+\underline{a}=1\underline{a}+1\underline{a}$ [স্কেলার গুণের নিয়মানুসারে]
$=(1+1)\underline{a}$ $[\because m\underline{a}+n\underline{a}=(m+n)\underline{a}]$
$=2\underline{a}$ $\therefore \underline{a}+\underline{a}=2\underline{a}$ (দেখানো হলো)

(খ) এর সমাধান:
$(m-n)\underline{a}=\{m+(-n)\}\underline{a}$
$=m\underline{a}+(-n)\underline{a}$ $[\because (m+n)\underline{a}=m\underline{a}+n\underline{a}]$
$=m\underline{a}-n\underline{a}$ [স্কেলার গুণের নিয়মানুসারে]
$\therefore (m-n)\underline{a}=m\underline{a}-n\underline{a}$ (দেখানো হলো)

(গ)-এর সমাধান:
$m(\underline{a}-\underline{b})=m\{\underline{a}+(-\underline{b})\}$
$=m\underline{a}+m(-\underline{b})$ $[\because (\underline{a}+\underline{b})m=m\underline{a}+m\underline{b}]$
$=m\underline{a}-m\underline{b}$ $[\because n(-\underline{a})=-n\underline{a}]$
$\therefore m(\underline{a}-\underline{b})=m\underline{a}-m\underline{b}$ (দেখানো হলো)

৯। (ক) $\underline{a}$, $\underline{b}$ প্রত্যেকে অশূন্য ভেক্টর হলে দেখাও যে, $\underline{a} = m\underline{b}$ হতে পারে কেবলমাত্র যদি $\underline{a}$, $\underline{b}$ এর সমান্তরাল হয়।
(খ) $\underline{a}$, $\underline{b}$ অশূন্য অসমান্তরাল ভেক্টর এবং $m\,\underline{a} + n\,\underline{b} = 0$ হলে দেখাও যে, $m = n = 0$

(ক) এর সমাধান:

দেওয়া আছে, $\underline{a} = m\,\underline{b}$
এখানে, $\underline{b}$ ভেক্টরটি $\underline{a}$ ভেক্টরের m সংখ্যক গুণিতক।
যদি, $m > 0$ হয় তবে $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ ভেক্টর সমমুখী।
যদি, $m < 0$ হয় তবে $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ ভেক্টর বিপরীতমুখী।
আবার, $m = 0$ হলে $\underline{a} = \underline{0}$ হবে, কিন্তু $\underline{a}$ একটি অশূন্য ভেক্টর (শর্তমতে)
সুতরাং $m \neq 0$.
$\underline{a}$ ও $\underline{b}$ এর দিক যদি একই হয় তাহলে তারা সদৃশ সমান্তরাল, আর যদি বিপরীত হয় তাহলে তারা বিসদৃশ সমান্তরাল হবে।
সুতরাং উভয়ক্ষেত্রেই $\underline{a}$, $\underline{b}$ এর সমান্তরাল। (দেখানো হলো)

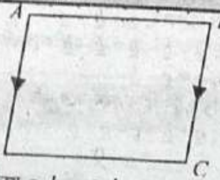
(খ) এর সমাধান:

দেওয়া আছে, $\underline{a}$, $\underline{b}$ দুটি অশূন্য অসমান্তরাল ভেক্টর এবং $m\,\underline{a} + n\,\underline{b} = \underline{0}$। দেখাতে হবে যে, $m = n = 0$

দেওয়া আছে, $m\,\underline{a} + n\,\underline{b} = \underline{0}$
বা, $m\,\underline{a} + n\,\underline{b} - n\,\underline{b} = \underline{0} - n\underline{b}$ [উভয়পক্ষে $-n\,\underline{b}$ যোগ করে]
বা, $m\,\underline{a} = -n\,\underline{b}$
যদি m ও n অশূন্য হয় তাহলে $\underline{a}$ ও $\underline{b}$
(i) বিপরীতমুখী হবে যদি m ও n এর চিহ্ন একই হয়।
(ii) সমমুখী হবে যদি m ও n এর চিহ্ন বিপরীত হয়।
উভয় ক্ষেত্রেই $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ সমান্তরাল হবে যা অসম্ভব কেননা দেওয়া আছে যে $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ দুটি অসমান্তরাল ভেক্টর।
$\therefore$ m ও n অশূন্য হতে পারে না।
অর্থাৎ $m = n = 0$. (দেখানো হলো)

১০। A, B, C, D বিন্দুগুলোর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ হলে দেখাও যে, ABCD সামান্তরিক হবে যদি এবং কেবল যদি $\underline{b} - \underline{a} = \underline{c} - \underline{d}$ হয়।

সমাধান:



দেওয়া আছে, A, B, C ও D বিন্দুগুলোর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$ দেখাতে হবে যে, $ABCD$ সামান্তরিক হবে যদি এবং কেবল যদি $\underline{b} - \underline{a} = \underline{c} - \underline{d}$ হয়।

A, B, C ও D বিন্দুগুলোর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ ও $\underline{d}$

$\therefore \overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$ এবং $\overrightarrow{DC} = \underline{c} - \underline{d}$

মনে করি, $ABCD$ একটি সামান্তরিক। তাহলে AB ও DC পরস্পর সমান ও সমান্তরাল হবে।

$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$\therefore \underline{b} - \underline{a} = \underline{c} - \underline{d}$

বিপরীতক্রমে, মনে করি, $\underline{b} - \underline{a} = \underline{c} - \underline{d}$

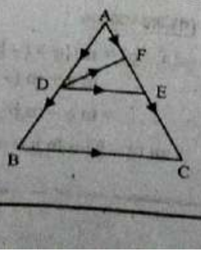
$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

সুতরাং, AB ও DC রেখা দুটি পরস্পর সমান ও সমান্তরাল। অর্থাৎ $ABCD$ একটি সামান্তরিক।

$\therefore ABCD$ একটি সামান্তরিক হবে যদি এবং কেবল যদি $\underline{b} - \underline{a} = \underline{c} - \underline{d}$ হয়।
(দেখানো হলো)

১১। ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের এক বাহুর মধ্যবিন্দু থেকে অঙ্কিত অপর বাহুর সমান্তরাল রেখা তৃতীয় বাহুর মধ্যবিন্দুগামী। (VI)

সমাধান:



মনে করি, ABC ত্রিভুজের AB বাহুর মধ্যবিন্দু D দিয়ে BC বাহুর সমান্তরাল করে অঙ্কিত রেখা AC কে E বিন্দুতে ছেদ হয়। প্রমাণ করতে হবে যে, E, AC এর মধ্যবিন্দু।

প্রমাণ:
মনে করি, E নয় বরং F, AC এর মধ্যবিন্দু।

তাহলে, $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ [$\because D, AB$ এর মধ্যবিন্দু]

এবং $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ [$\because F, AC$ এর মধ্যবিন্দু]

$\therefore \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF}$ [ΔADF-এ ত্রিভুজ বিধি অনুসারে]

$= -\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AF}$ [$\because \overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{AD}$]

$= \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; [$\because F, AC$ এর মধ্যবিন্দু এবং D, AB এর মধ্যবিন্দু]

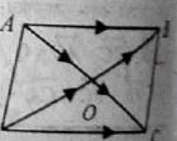
$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$

$\therefore \overrightarrow{DF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ [$\because \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$]

অর্থাৎ, $DF \parallel BC$. কিন্তু $DE \parallel BC$ (দেওয়া আছে)
তাহলে, DE ও DF রেখাদ্বয় উভয়েই D বিন্দু দিয়ে যায় এবং BC এর সমান্তরাল
অতএব, তারা (অর্থাৎ DE ও DF)
অবশ্যই সমাপতিত হবে।
$\therefore E$ ও F একই বিন্দু হবে। অর্থাৎ E, AC এর মধ্যবিন্দু। (প্রমাণিত)

১২। প্রমাণ কর যে, কোনো চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করলে তা একটি সামান্তরিক হয়। (VVI)

সমাধান:



মনে করি, $ABCD$ চতুর্ভুজের AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, $ABCD$ একটি সামান্তরিক।

প্রমাণ: $\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{OB}$ [$\because O, BD$ এর মধ্যবিন্দু]

এবং $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AO}$ [$\because O, AC$ এর মধ্যবিন্দু]

এখন, ΔODC-এ $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OC}$ ……… (i)

আবার, ΔOAB-এ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$ [ত্রিভুজ বিধি অনুসারে]

$= \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{DO}$ [$\because \underline{AO} = \underline{OC}, \underline{OB} = \underline{DO}$]

$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OC}$ ……… (ii) [$\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$]

$\therefore$ (i) ও (ii) নং হতে পাই,

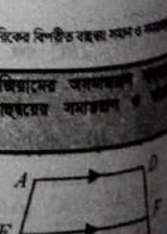
$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ [ভেক্টর সমতার শর্ত]

$\therefore AB = DC$ এবং $AB \parallel DC$

$\therefore ABCD$ একটি সামান্তরিক। (প্রমাণিত) [$\because$ সামান্তরিকের বিপরীত বাহুদ্বয় সমান ও সমান্তরাল]

১৩। ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, ট্রাপিজিয়ামের অসমান্তরাল বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমান্তরাল ও তাদের যোগফলের অর্ধেক। (VI)

সমাধান:



মনে করি, $ABCD$ ট্রাপিজিয়ামের AB ও CD বাহুদ্বয় অসমান্তরাল এবং BC ও AD বাহুদ্বয় সমান্তরাল। E ও F যথাক্রমে AB ও CD এর মধ্যবিন্দু। E, F যোগ করা হলো। প্রমাণ করতে হবে যে, EF, AD ও BC-এর সমান্তরাল।

অর্থাৎ, $EF \parallel AD \parallel BC$ এবং $|\overrightarrow{EF}| = \frac{1}{2}(|\overrightarrow{AD}| + |\overrightarrow{BC}|)$

প্রমাণ: মনে করি, কোনো ভেক্টর মূল বিন্দুর সাপেক্ষে A, B, C, D বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ ও $\underline{d}$।

$\therefore \overrightarrow{BC} = \underline{c} - \underline{b}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{d} - \underline{a}$

$\therefore E$ বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b})$ [$\because E, AB$ এর মধ্যবিন্দু]

এবং F বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d})$ [$\because F, CD$ এর মধ্যবিন্দু]

$$\therefore \overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d}) - \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b})$$

$$= \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d} - \underline{a} - \underline{b})$$

$$= \frac{1}{2}\{(\underline{c} - \underline{b}) + (\underline{d} - \underline{a})\}$$

$$\therefore \overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD})$$

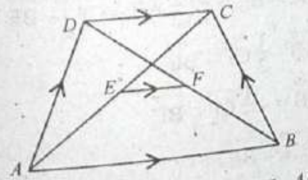
কিন্তু BC ও AD পরস্পর সমান্তরাল হওয়ায় $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}$ ভেক্টটিরও তাদের অর্থাৎ (অর্থাৎ BC ও AD এর) সমান্তরাল হবে। সুতরাং $\overrightarrow{EF}$ ভেক্টরও BC ও AD এর সমান্তরাল হবে কারণ, $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD})$

অধিকন্তু $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD})$ [যেহেতু তারা সমান্তরাল]

$\therefore \overrightarrow{EF} \parallel \overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{BC}$ এবং $|\overrightarrow{EF}| = \frac{1}{2}(|\overrightarrow{AD}| + |\overrightarrow{BC}|)$ (প্রমাণিত)

১৪। ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, ট্রাপিজিয়ামের কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমান্তরাল এবং তাদের বিয়োগফলের অর্ধেক। (VVI)

সমাধান:



মনে করি, $ABCD$ ট্রাপিজিয়ামের সমান্তরাল বাহুদ্বয় AB ও DC এবং ট্রাপিজিয়ামের AC ও BD কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে E ও F. E ও F যোগ করি। ধরি, $AB > DC$.

প্রমাণ করতে হবে যে, EF রেখাংশ AB ও DC সমান্তরাল এবং

$$EF = \frac{1}{2}(AB - DC).$$

প্রমাণ: মনে করি, কোন নির্দিষ্ট মূলবিন্দুর প্রেক্ষিতে A, B, C, D বিন্দুগুলোর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমের $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ তাহলে, $\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$ এবং $\overrightarrow{DC} = \underline{c} - \underline{d}$.

আবার, AC রেখাংশের মধ্যবিন্দু এর অবস্থান ভেক্টর $\underline{g} = \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{c})$ এবং

BD রেখাংশের মধ্যবিন্দু F এর অবস্থান ভেক্টর $\underline{f} = \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{d})$

$$\therefore \overrightarrow{EF} = \underline{f} - \underline{g}$$

$$= \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{d}) - \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{c})$$

$$= \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{d} - \underline{a} - \underline{c})$$

$$= \frac{1}{2}\{(\underline{b} - \underline{a}) + (\underline{d} - \underline{c})\}$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC})$$

[$\because \overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$ এবং $-\overrightarrow{DC} = -(\underline{c} - \underline{d}) = \underline{d} - \underline{c}$]

$ABCD$ ট্রাপিজিয়ামের, $AB \parallel DC$ হওয়ায় $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC}$ ভেক্টরটিও $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{DC}$ এর সমান্তরাল হবে।

$\therefore EF$ ভেক্টরটিও $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{CD}$ এর সমান্তরাল।

$$\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC}) \parallel \overrightarrow{DC}$$

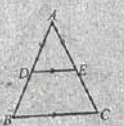
$\therefore \overrightarrow{EF} \parallel \overrightarrow{AB}$ এবং $\overrightarrow{EF} \parallel \overrightarrow{DC}$

আবার, $|\overrightarrow{AB}| = AB$ এবং $|\overrightarrow{DC}| = DC$

$$\therefore |\overrightarrow{EF}| = \frac{1}{2}(|\overrightarrow{AB}| - |\overrightarrow{DC}|)$$

বা, $EF = \frac{1}{2}(AB - DC)$. (প্রমাণিত)

১৫।



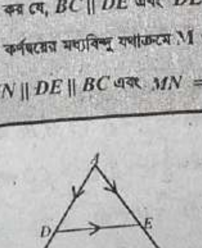
ΔABC এর AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E. (VVI)

ক. $(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE})$ কে $\overrightarrow{AC}$ ভেক্টরের মাধ্যমে প্রকাশ কর।

খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $BC \parallel DE$ এবং $DE = \frac{1}{2} BC$

গ. $BCED$ ট্রাপিজিয়ামের কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে M ও N হলে ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $MN \parallel DE \parallel BC$ এবং $MN = \frac{1}{2}(BC - DC)$

(ক) এর সমাধান:



ΔABC এর AB ও AC এর বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E. D, E যোগ করি।

ΔADE-এ ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি প্রয়োগ করে পাই।

$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$ .... (i) [ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি]

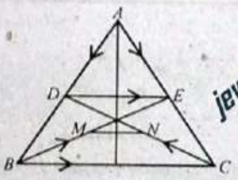
$\therefore \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ [$\because E, AC$ এর মধ্যবিন্দু]

(খ) এর সমাধান:

মনে করি, ABC ত্রিভুজের AB ও AC বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E. D, E যোগ করি। ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ করতে হবে যে, $DE \parallel BC$ এবং $DE = \frac{1}{2}BC$.

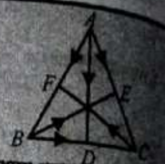
প্রমাণ:
ΔADE-এ ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি প্রয়োগ করে পাই,
$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$
বা, $\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DE}$ .... (i)
আবার, ΔABC-এ
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ [ত্রিভুজ বিধি অনুসারে]
$\therefore \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ .... (ii)
কিন্তু $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AE}$ ও $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AD}$ [$\because D$ ও E বিন্দু যথাক্রমে AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু]
এখন, (ii) নং থেকে পাই,
$\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$
বা, $2\overrightarrow{AE} - 2\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$
বা, $2\left(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD}\right) = \overrightarrow{BC}$
বা, $2\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BC}$ [(i) নং হতে পাই $\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DE}$]
বা, $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ $\therefore DE = \frac{1}{2}BC$
সুতরাং, $\overrightarrow{BC}$ ও $\overrightarrow{DE}$ এর রেখাদ্বয় একই বা সমান্তরাল। কিন্তু এখানে ধারক রেখা এক নয়। সুতরাং $\overrightarrow{DE}$ ও $\overrightarrow{BC}$ ভেক্টরদ্বয়ের ধারক রেখাদ্বয় সমান্তরাল। অর্থাৎ DE এবং BC সমান্তরাল।
অর্থাৎ, $DE \parallel BC$ এবং $DE = \frac{1}{2}BC$.

(গ) এর সমাধান:



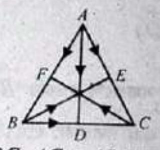
অঙ্কন: C, D এবং B, E যোগ করি। CD ও BE এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে N ও M নির্ণয় করি ও যোগ করি।
প্রমাণ করতে হবে যে, $MN \parallel DE \parallel BC$ এবং $MN = \frac{1}{2}(BC - DE)$
প্রমাণ: মনে করি, কোনো ভেক্টর মূলবিন্দু সাপেক্ষে B, C, E, D এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{b}, \underline{c}, \underline{e}, \underline{d}$.
$\therefore \overrightarrow{DE} = \underline{e} - \underline{d}$ এবং $\overrightarrow{BC} = \underline{c} - \underline{b}$
$\therefore M$ বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{e})$ [$\because M, BE$ এর মধ্যবিন্দু]
N বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d})$ [$\because N, CD$ এর মধ্যবিন্দু]
$\therefore \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d}) - \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{e})$
$= \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d} - \underline{b} - \underline{e})$
বা, $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\{(\underline{c} - \underline{b}) - (\underline{e} - \underline{d})\}$
$\therefore \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DE})$
$BC \parallel DE$ হওয়ায় $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DE}$ ভেক্টরটিও $\overrightarrow{BC}$ ও $\overrightarrow{DE}$ ভেক্টরের সমান্তরাল হবে। তাহলে $\overrightarrow{MN}$ ভেক্টরটি $\overrightarrow{BC}$ ও $\overrightarrow{DE}$ ভেক্টরদ্বয়ের সমান্তরাল হবে কারণ, $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DE})$
$\therefore |\overrightarrow{MN}| = \frac{1}{2}|(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DE})| = \frac{1}{2}(|\overrightarrow{BC}| - |\overrightarrow{DE}|)$
বা, $MN = \frac{1}{2}(BC - DE)$
অর্থাৎ $MN \parallel DE \parallel BC$
এবং, $MN = \frac{1}{2}(BC - DE)$. **(প্রমাণিত)**

১৬।



ΔABC এর BC, CA ও AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E ও F. (VVI)
ক. $\overrightarrow{AB}$ ভেক্টরকে $\overrightarrow{BE}$ ও $\overrightarrow{CF}$ ভেক্টরের মাধ্যমে প্রকাশ কর।
খ. প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \underline{O}$
গ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, F বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত BC এর সমান্তরাল ... অবশ্যই E বিন্দুগামী হবে।

(ক) এর সমাধান:



দেওয়া আছে, ΔABC এর BC, AC ও AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E ও F. A, D; B, F ও C, F যোগ করি। $\overrightarrow{AB}$ ভেক্টরকে $\overrightarrow{BE}$ ও $\overrightarrow{CF}$ ভেক্টরের মাধ্যমে প্রকাশ করতে হবে।
ΔABE-এ,
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE}$
বা, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ .... (i) [E, AC এর মধ্যবিন্দু]
আবার, ΔACF-এ
বা, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$
বা, $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CF}\right) - \overrightarrow{BE}$
বা, $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CF} - \overrightarrow{BE}$
বা, $\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CF} - \overrightarrow{BE}$
বা, $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CF} - \overrightarrow{BE}$
বা, $\overrightarrow{AB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{CF} - \frac{4}{3}\overrightarrow{BE}$

(খ) এর সমাধান:
ΔABE থেকে ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি অনুসারে,
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE}$
বা, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ [$\because$ E, AC এর মধ্যবিন্দু]
বা, $2\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}\right) = \overrightarrow{AC}$
বা, $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BE}$ .... (i)
ΔBEC-এ
$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EC}$
বা, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ [$\because E, AC$ এর মধ্যবিন্দু]
বা, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BE} + \frac{1}{2}\left(2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BE}\right)$ .... [(i) থেকে]
বা, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BE}$ .... (ii)

আবার, ΔACF-এ

$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AF}$

বা, $\overrightarrow{CF}=-\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ [$\because F, AB$ এর মধ্যবিন্দু]

বা, $\overrightarrow{CF}=-\left(2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BE}\right)+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

বা, $\overrightarrow{CF}=-2\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{BE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

বা, $\overrightarrow{CF}=\left(-2+\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{BE}$

বা, $\overrightarrow{CF}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{BE}$

ΔABD-এ

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$

বা, $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ [$\because D, BC$ এর মধ্যবিন্দু]

বা, $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BE}\right)$ [(ii) থেকে প্রাপ্ত]

বা, $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}$

বা, $\overrightarrow{AD}=\left(1+\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}$

বা, $\overrightarrow{AD}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}$

এখন, $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}$

$=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{BE}+\left(-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{BE}\right)$

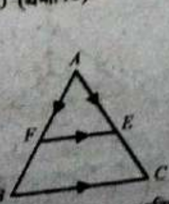
$=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BE}-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{BE}$

$=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BE}-2\overrightarrow{BE}$

$=0$

$\therefore \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=0$ (প্রমাণিত)

(গ) এর সমাধান:



দেওয়া আছে, ΔABC এর AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে F ও E. E, F যোগ করি। ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ করতে হবে যে, F বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত BC এর সমান্তরাল রেখা অবশ্যই E বিন্দুগামী হবে। অর্থাৎ $FE \parallel BC$.

প্রমাণ:

F ও E যথাক্রমে AB ও AC মধ্যবিন্দু।

$\therefore \overrightarrow{FB}=\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ এবং $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{EC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি অনুসারে পাই,

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

বা, $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$ ....(i)

এবং, $\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{AE}$

বা, $\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AF}$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ [$\because \overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$]

$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ [(i) থেকে]

$\therefore \left|\overrightarrow{FE}\right|=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BC}\right|$

$\therefore FE=\frac{1}{2}BC$, আবার $\overrightarrow{FE}$ ও $\overrightarrow{BC}$ এর ধারক রেখা একই বা সমান্তরাল।

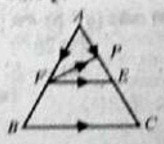
কিন্তু F ও E যথাক্রমে AB ও AC এর মধ্যবিন্দু বলে $\overrightarrow{FE}$ ও $\overrightarrow{BC}$ ধারক রেখা একই হতে পারে না।

$\therefore F$ বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত BC এর সমান্তরাল রেখা অবশ্যই E বিন্দুগামী হবে। অর্থাৎ $FE \parallel BC$. (প্রমাণিত)

বিকল্প সমাধান:

মনে করি, ABC ত্রিভুজের AB বাহুর মধ্যবিন্দু F এবং F বিন্দু দিয়ে BC বাহুর সমান্তরাল করে অঙ্কিত রেখা AC কে E বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করতে হবে যে, E, AC এর মধ্যবিন্দু।

ধরি, E নয় বরং P, AC এর মধ্যবিন্দু।



তাহলে $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ [$\because F, AB$ এর মধ্যবিন্দু]

এবং $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ [$\because P, \overrightarrow{AC}$ এর মধ্যবিন্দু।]

$\therefore \overrightarrow{FP}=\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AP}=-\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AP}$ [$\because \overrightarrow{FA}=-\overrightarrow{AF}$]

$=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

$\therefore \overrightarrow{FP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

অর্থাৎ, $FP \parallel BC$ কিন্তু $FE \parallel BC$ [দেওয়া আছে]

অতএব, $\overrightarrow{FE}$ ও $\overrightarrow{FP}$ রেখাদ্বয় উভয়েই F বিন্দু দিয়ে যায় এবং $\overrightarrow{BC}$ এর সমান্তরাল।

অতএব, তারা (অর্থাৎ $\overrightarrow{FE}$ ও $\overrightarrow{FP}$) অবশ্যই সমাপতিত হবে।

$\therefore E$ ও P একই বিন্দু হবে। অর্থাৎ E, AC এর মধ্যবিন্দু। (প্রমাণিত)

সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর

বিগত এসএসসি পরীক্ষার সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর

প্রশ্ন-১। $ABCD$ চতুর্ভুজের $A(6, -4)$, $B(2, 2)$, $C(-2, 2)$, $D(-6, -4)$ শীর্ষ বিন্দুসমূহ ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে আবর্তিত।

(ক) BD এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

(খ) $ABCD$ চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফলের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্রের কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

(গ) $ABCD$ একটি ট্রাপিজিয়াম এবং P ও Q যথাক্রমে AB ও CD এর মধ্যবিন্দু হলে ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $PQ \parallel AD \parallel BC$ এবং $PQ = \frac{1}{2}(AD + BC)$. [ঢাকা বোর্ড-২০১৬]

(ক)-এর উত্তর:

এখানে,

B বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(2,2)$

এবং D বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-6, -4)$

তাহলে, B ও D বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্বই হবে এর দৈর্ঘ্য,

$$\therefore BD = \sqrt{(-6-2)^2 + (-4-2)^2}$$
$$= \sqrt{(-8)^2 + (-6)^2}$$
$$= \sqrt{100}$$
$$= 10 \text{ একক}$$

$\therefore$ BD এর দৈর্ঘ্য 10 একক **(Ans.)**

(খ)-এর উত্তর:

বিন্দুসমূহকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে নিয়ে চতুর্ভুজক্ষেত্র ABCD এর ক্ষেত্রফল

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 6 & 2 & -2 & -6 & 6 \\ -4 & 2 & 2 & 4 & 4 \end{vmatrix} \text{ বর্গ একক}$$

$$= \frac{1}{2}(12 + 4 + 8 + 24 + 8 + 4 + 12 + 24) \text{ বর্গ একক}$$

$$= \frac{1}{2}(96) = \text{বর্গ একক} = 48 \text{ বর্গ একক}$$

$\therefore$ ABCD চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল 48 বর্গ একক

মনে করি, একটি বর্গক্ষেত্রের একবাহুর দৈর্ঘ্য = a একক

$\therefore$ বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = a^2 বর্গ একক

যেহেতু শর্তমতে বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফলের সমান:

$a^2 = 48$

বা, $a = \sqrt{48}$

বা, $a = 6.92$ একক (প্রায়)

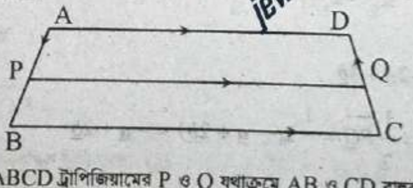
$\therefore$ বর্গক্ষেত্রটির কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{2}a$

$= \sqrt{2} \times 6.92$

$= 9.286$ একক (প্রায়)

$\therefore$ বর্গক্ষেত্রের কর্ণের দৈর্ঘ্য 9.786 একক **(Ans.)**

(গ)-এর উত্তর:



মনে করি, ABCD ট্রাপিজিয়ামের P ও Q যথাক্রমে AB ও CD বাহুর মধ্যবিন্দু। ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ করতে হবে যে,

$PQ \parallel AD \parallel BC$ এবং $PQ = \frac{1}{2}(AD + BC)$

প্রমাণ: মনে করি, কোনো ভেক্টর মূল বিন্দুর সাপেক্ষে A,B,C,D বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে, $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$

$\therefore \overrightarrow{AB} = \underline{c} - \underline{b}$ এবং $\overrightarrow{AD} = \underline{d} - \underline{a}$

$\therefore$ P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b})$ [... P,AB এর মধ্যবিন্দু]

এবং Q বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d})$ [... Q,DC এর মধ্যবিন্দু]

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d}) - \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b})$$
$$= \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d} - \underline{a} - \underline{b})$$
$$= \frac{1}{2}\{(\underline{c} - \underline{d}) + (\underline{d} - \underline{a})\}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}\right)$$
$$\therefore \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}\right)$$

কিন্তু $\overrightarrow{BC}$ এবং $\overrightarrow{AD}$ পরস্পর সমান্তরাল হওয়ায় $\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}\right)$ ... তাদের সমান্তরাল হবে।

$\therefore PQ \parallel AD \parallel BC$ এবং $PQ = \frac{1}{2}(AD + BC)$ [প্রমাণিত]

প্রশ্ন-২। একটি চতুর্ভুজের চারটি শীর্ষ যথাক্রমে $A(7, 2)$, $B(-4, 2)$, C(... এবং $D(7, -3)$.

(ক) AC সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

(খ) চতুর্ভুজটি সামান্তরিক না আয়ত তা নির্ণয় কর।

(গ) উদ্দীপকে উল্লিখিত চতুর্ভুজটির সন্নিহিত বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু ... R, S হলে, ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, $PQRS$ একটি ... [রাজশাহী বো...

(ক)-এর উত্তর:

AC রেখার ঢাল, $m = \frac{-3-2}{-4-7} = \frac{5}{11}$

$y - y_1 = m(x - x_1)$ সমীকরণ ব্যবহার করে পাই AC সরলরেখার সমী...

$y - 2 = \frac{5}{11}(x - 7)$

বা, $11y - 22 = 5x - 35$

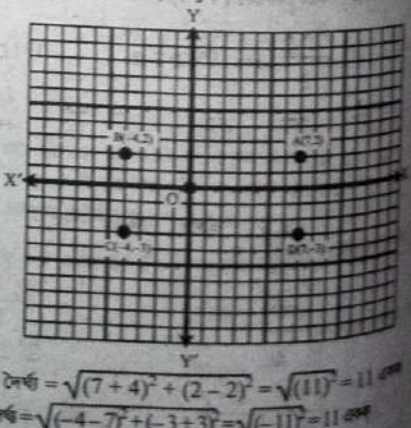
বা, $11y = 5x - 35 + 22$

$\therefore 11y = 5x - 13$

ইহাই নির্ণেয় সরল রেখার সমীকরণ।

(খ)-এর উত্তর:

দেওয়া আছে, একটি চতুর্ভুজের চারটি শীর্ষ যথাক্রমে A(7, 2), B(-4, ... $C(-4, -3)$ এবং $D(7, -3)$। xy সমতলে এদের অবস্থান দেখানো হ...



AB বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(7+4)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{(11)^2} = 11$ একক

CD বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-4-7)^2 + (-3+3)^2} = \sqrt{(-11)^2} = 11$ একক

আবার,

AD বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(7-7)^2 + (2+3)^2} = \sqrt{(5)^2} = 5$ একক

BC বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-4+4)^2 + (2+3)^2} = \sqrt{(5)^2} = 5$ একক

দেখা যাচ্ছে যে, বিপরীত বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য সমান।

সুতরাং, বলা যায়, ABCD একটি সামান্তরিক যা আয়তক্ষেত্র।

এখন,

BD কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-4-7)^2 + (2+3)^2}$
$= \sqrt{(-11)^2 + (5)^2}$
$= \sqrt{121 + 23}$
$= \sqrt{146}$ একক

এখন, $BD^2 = (\sqrt{146})^2 = 146,$

$AB^2 = (11)^2 = 121,$

$AD^2 = (5)^2 = 25$

$\therefore AB^2 + AD^2 = 121 + 25 = 146$

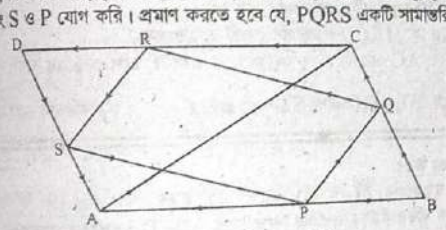
এখানে, $BD^2 = AB^2 + AD^2$

পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুযায়ী ABD একটি সমকোণী ত্রিভুজ এবং $\angle BAD$ সমকোণ।

সুতরাং, ABCD একটি আয়তক্ষেত্র।

(গ)-এর উত্তর:

মনে করি, ABCD চতুর্ভুজের বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু P, Q, R, S। P ও Q, Q ও R, R ও S এবং S ও P যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, PQRS একটি সামান্তরিক।



প্রমাণ: মনে করি, $\overrightarrow{AB} = \underline{a}$, $\overrightarrow{BC} = \underline{b}$, $\overrightarrow{CD} = \underline{c}$, $\overrightarrow{DA} = \underline{d}$

তাহলে, $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b})$

অনুরূপভাবে, $\overrightarrow{QR} = \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{c})$, $\overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d})$ এবং $\overrightarrow{SP} = \frac{1}{2}(\underline{d} + \underline{a})$

কিন্তু $(\underline{a} + \underline{b}) + (\underline{c} + \underline{d}) = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} = 0$

অর্থাৎ $\underline{a} + \underline{b} = -(\underline{c} + \underline{d})$

$\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b}) = -\frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d}) = -\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{SR}$

$\therefore$ PQ এবং SR সমান ও সমান্তরাল।

অনুরূপভাবে, QR এবং PS সমান ও সমান্তরাল।

PQRS একটি সামান্তরিক। [প্রমাণিত]

প্রশ্ন-৩। $P(7, 2)$, $Q(-4, 2)$, $R(-4, -3)$ এবং $S(7, -3)$ বিন্দুগুলো একটি চতুর্ভুজের চারটি শীর্ষবিন্দু।

(ক) PQ বাহুর ঢাল নির্ণয় কর।

(খ) বিন্দু চারটি দ্বারা গঠিত চতুর্ভুজটি আয়তক্ষেত্র নাকি সামান্তরিক — যাচাই কর।

(গ) যদি উদ্দীপকে উল্লেখিত চতুর্ভুজটি সন্নিহিত বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E, F ও G হয়, তবে ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, $DEFG$ একটি সামান্তরিক।

[কুমিল্লা বোর্ড-২০১৬]

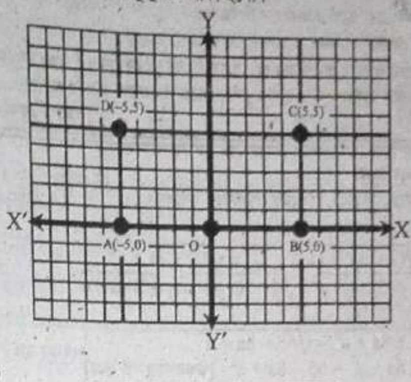
(ক)-এর উত্তর:

P ও Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (7, 2) ও (− 4, 2)।

PQ বাহুর ঢাল, $m = \frac{2-2}{-4-7} = \frac{0}{-11} = 0$ **(Ans.)**

(খ)-এর উত্তর:

xy সমতলে P(7, 2) Q (− 4, 2), R(− 4, − 3) এবং S (7, − 3) বিন্দু চারটির অবস্থান চিহ্নিত করে চতুর্ভুজটি আঁকা হলো।



এখানে,

PQ বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-4-7)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{(-11)^2} = 11$ একক

QR বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-4+4)^2 + (-3-2)^2} = \sqrt{(-5)^2} = 5$ একক

RS বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(7+4)^2 + (-3+3)^2} = \sqrt{(11)^2} = 11$ একক

PS বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(7-7)^2 + (-3-2)^2} = \sqrt{(-5)^2} = 5$ একক

$\therefore$ PQ বাহুর দৈর্ঘ্য = RS বাহুর দৈর্ঘ্য এবং QR বাহুর দৈর্ঘ্য = PS বাহুর দৈর্ঘ্য।

সুতরাং বলা যায়, PQRS একটি সামান্তরিক বা আয়তক্ষেত্র

আবার, PR কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-4-7)^2 + (-3-2)}$
$= \sqrt{(-11)^2 + (-5)^2}$
$= \sqrt{121 + 25}$
$= \sqrt{s146}$ একক

এখন, $PR^2 = (\sqrt{146})^2 = 146$, $PQ^2 = (11)^2 = 121$

এবং $QR^2 = (5)^2 = 25$

$PQ^2 + QR^2 = 121 + 25 = 146$

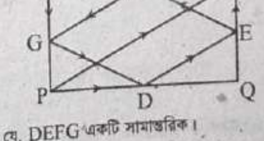
$\therefore PR^2 = PR^2 + QR^2$

$\therefore$ পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুযায়ী PQR একটি সমকোণী ত্রিভুজ এবং $\angle PQR$ সমকোণ।

সুতরাং, এ দ্বারা প্রমাণিত হলো যে, PQRS একটি আয়তক্ষেত্র।

(গ)-এর উত্তর:

মনে করি, PQRS চতুর্ভুজের PQ, QR, RS ও SP বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু D, E, F ও G। D, E; E, F; F, G এবং G, D যোগ করি।



প্রমাণ করতে হবে যে, DEFG একটি সামান্তরিক।

প্রমাণ: মনে করি, $\overrightarrow{PQ} = \underline{p}$, $\overrightarrow{QR} = \underline{q}$, $\overrightarrow{RS} = \underline{r}$, $\overrightarrow{SP} = \underline{s}$

তাহলে $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DQ} + \overrightarrow{QE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ} + \frac{1}{2}\overrightarrow{QR}$
$= \frac{1}{2}(\underline{p} + \underline{q})$

অনুরূপভাবে $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\underline{p} + \underline{r})$, $\overrightarrow{CG} = \frac{1}{2}(\underline{r} + \underline{s})$ $\overrightarrow{GA} = \frac{1}{2}(\underline{s} + \underline{p})$

কিন্তু $(\underline{p} + \underline{q}) + (\underline{r} + \underline{s}) = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RP} = \overrightarrow{PR} - \overrightarrow{PR} = \vec{0}$

অর্থাৎ $\underline{p} + \underline{q} = -(\underline{r} + \underline{s})$

$\therefore \overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}(\underline{p} + \underline{q}) = -\frac{1}{2}(\underline{r} + \underline{s})$
$= -\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{GF}$

$\therefore$ DE এবং CG সমান ও সমান্তরাল। অনুরূপভাবে EF এবং GD সমান ও সমান্তরাল।

$\therefore$ DEFG একটি সামান্তরিক। [প্রমাণিত]