প্রশ্ন-৪ । ABC ত্রিভুজের শীর্ষ বিন্দু যথাক্রমে $A(2, -4)$ $B(-4, 4)$ এবং $C(3, a)$, যেখানে, $a > 0$.
(ক) $AC = BC$ হলে a এর মান নির্ণয় কর।
(খ) AB রেখার সমীকরণ ও ঢাল নির্ণয় কর।
(গ) ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, ΔABC এর যে কোনো দুই বাহুর মধ্যবিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশ ঐ ত্রিভুজের তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল ও তার অর্ধেক। [চট্টগ্রাম বোর্ড-২০১৬]

(ক)-এর উত্তর:
দেওয়া আছে, ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু যথাক্রমে $A(2, -4)$, $B(-4, 4)$ এবং $C(3, a)$ যেখানে, $a > 0$

$AC = \sqrt{(2-3)^2 + (-4-a)^2} = \sqrt{17 + 8a + a^2}$

$BC = \sqrt{(-4-3)^2 + (4-a)^2} = \sqrt{49 + 16 - 8a + a^2} = \sqrt{65 - 8a + a^2}$

যেহেতু, $AC = BC$

বা, $\sqrt{17 + 8a + a^2} = \sqrt{65 - 8a + a^2}$

বা, $17 + 8a + a^2 = 65 - 8a + a^2$ [উভয়পক্ষে বর্গ করে]

বা, $16a = 48$

বা, $a = \frac{48}{16}$

$\therefore a = 3$ **(Ans.)**

(খ)-এর উত্তর:
আমরা জানি, দুইটি বিন্দুগামী $A(x_1, x_2)$ এবং $B(x_2, y_2)$ রেখার সমীকরণ,

$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ ....(i)

(i) নং এর সাহায্যে $A(2, -4)$, $B(-4, 4)$ বিন্দুদ্বয় দ্বারা গঠিত AB রেখার সমীকরণ, $\frac{y - (-4)}{x - 2} = \frac{-4 - 4}{2 - (-4)}$

বা, $\frac{y + 4}{x - 2} = \frac{-8}{2 + 4}$

বা, $6(y + 4) = -8(x - 2)$

বা, $6y + 24 = -8x + 16$

বা, $6y = -8x + 16 - 24$

বা, $6y = -8x - 8$

বা, $3y = -4x - 4$

$\therefore 3y = -4x - 4$

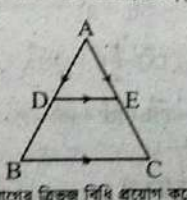
এবং ঢাল, $m = \frac{4 - (-4)}{-4 - 2}$ $\left[\because \text{ঢাল}, m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right]$

$= \frac{4 + 4}{-6}$

$= -\frac{8}{6}$

$= -\frac{4}{3}$ **(Ans.)**

(গ)-এর উত্তর:
মনে করি, ABC ত্রিভুজের AB ও AC বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E। D, E যোগ করি। ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ করতে হবে যে, DE || BC এবং $DE = \frac{1}{2}BC$।



প্রমাণ: ΔADE-এ ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি প্রয়োগ করে পাই,

$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$

বা, $\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DE}$ .... (i)

আবার, ΔABC-এ

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ [ত্রিভুজ বিধি অনুসারে]

$\therefore \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ .... (ii)

কিন্তু $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AT}$ ও $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AD}$

[$\because$ D ও E বিন্দু যথাক্রমে AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু]

এখন, (ii) নং থেকে পাই,

$\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$

বা, $2\overrightarrow{AE} - 2 = \overrightarrow{BC}$

বা, $2\left(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD}\right) = \overrightarrow{BC}$

বা, $2\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BC}$ [(i) নং হতে পাই, $\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DE}$]

বা, $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ $\left[DE = \frac{1}{2}BC\right]$

সুতরাং, $\overrightarrow{BC}$ ও $\overrightarrow{DE}$ এর রেখাদ্বয় একই বা সমান্তরাল। কিন্তু এখানে রেখাদ্বয় এক নয়। সুতরাং $\overrightarrow{DE}$ ও $\overrightarrow{BC}$ ভেক্টরদ্বয়ের ধারক রেখাদ্বয় সমান্তরাল।

অর্থাৎ, DE || BC এবং $DE = \frac{1}{2}BC$। [প্রমাণিত]

প্রশ্ন-৫ । $ABCD$ চতুর্ভুজের $A(-5, 0)$, $B(5, 0)$, $C(5, 5)$ এবং $D(-5, 5)$ শীর্ষ বিন্দুসমূহ ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে আবর্তিত হয়।
(ক) $ABCD$ চতুর্ভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
(খ) দেখাও যে, $ABCD$ চতুর্ভুজটি একটি আয়তক্ষেত্র।
(গ) AB ও AC এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে S এবং T হলে ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, ST || BC এবং $ST = \frac{1}{2}BC$. [বরিশাল বোর্ড-২০১

(ক)-এর উত্তর:
ABCD চতুর্ভুজের $A(-5, 0)$, $B(5, 0)$, $C(5, 5)$ এবং $D(-5, 5)$ শীর্ষবিন্দুসমূহকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে নিয়ে ABCD চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল,

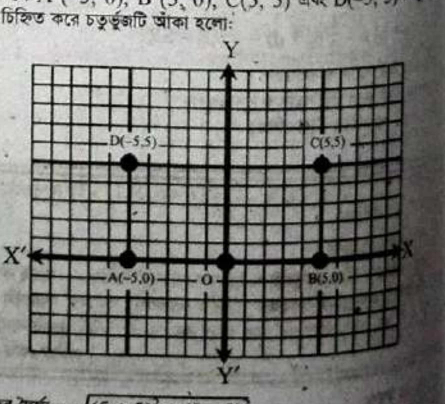
$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -5 & 5 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{vmatrix}$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}(0 + 25 + 25 - 0 - 0 + 25)$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}(75)$ বর্গ একক

$= 37.5$ বর্গ একক **(Ans.)**

(খ)-এর উত্তর:
xy সমতলে $A(-5, 0)$, $B(5, 0)$, $C(5, 5)$ এবং $D(-5, 5)$ বিন্দুগুলি অবস্থান চিহ্নিত করে চতুর্ভুজটি আঁকা হলো:



AB বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(5+5)^2 + (0-0)^2}$

$= \sqrt{(10)^2}$

$= 10$ একক

CD বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-5-5)^2 + (5-5)^2}$
$= \sqrt{(-10)^2 + 0}$
$= \sqrt{100}$
$= 10$ একক

$\therefore$ AB বাহুর দৈর্ঘ্য = CD বাহুর দৈর্ঘ্য,

আবার,

AD বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-5+5)^2 + (5-0)^2}$
$= \sqrt{0 + 25}$
$= 5$ একক

BC বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(5-5)^2 + (5-0)^2}$
$= \sqrt{0 + 25}$
$= 5$ একক

$\therefore$ AD বাহুর দৈর্ঘ্য = BC বাহুর দৈর্ঘ্য

$\therefore$ বিপরীত বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য সমান।

সুতরাং বলা যায়, ABCD একটি সামান্তরিক বা আয়তক্ষেত্র।

BD কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-5-5)^2 + (5-0)^2}$
$= \sqrt{(-10)^2 + (5)^2}$
$= \sqrt{100 + 25}$
$= \sqrt{125}$ একক

এখন, $BD^2 = \sqrt{(125)}^2 = 125$
$AB^2 = (10)^2 = 100$
$AD^2 = (5)^2 = 26$
$AB^2 + AD^2 = 100 + 25 = 125$

$\therefore BD^2 = AB^2 + AD^2$

$\therefore$ পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুযায়ী ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ $\angle BAD$ সমকোণ।

সুতরাং, এ দ্বারা প্রমাণিত হলো যে, ABCD একটি আয়তক্ষেত্র। [দেখানো হলো]

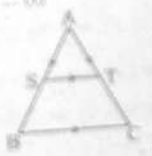
৪ (গ)-এর উত্তর

মনে করি, ABC ত্রিভুজের AB ও AC বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে S ও T। S, T যোগ করি। ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ করতে হবে যে, ST ∥ BC এবং $ST = \frac{1}{2}BC$।

প্রমাণ: ΔAST-এ ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি প্রয়োগ করে পাই,

$\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{ST} = \overrightarrow{AT}$

বা, $\overrightarrow{AT} - \overrightarrow{AS} = \overrightarrow{ST}$ .... (i)



আবার, ΔABC-এ

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ [ত্রিভুজ বিধি অনুসারে]

$\therefore \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ .... (ii)

কিন্তু $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AE}$ ও $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AS}$
[$\because$ S ও T বিন্দু যথাক্রমে AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু]

এখন, (ii) নং থেকে পাই,

$\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$

বা, $2\overrightarrow{AT} - 2\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{BC}$

বা, $2\left(\overrightarrow{AT} - \overrightarrow{AS}\right) = \overrightarrow{BC}$

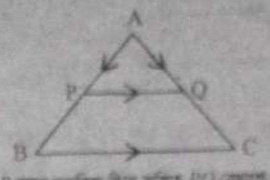
বা, $2\overrightarrow{ST} = \overrightarrow{BC}$ [(i) নং হতে পাই $\overrightarrow{AT} - \overrightarrow{AS} = \overrightarrow{ST}$]

বা, $\overrightarrow{ST} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ $\left[\therefore DE = \frac{1}{2}BC\right]$

সুতরাং BC ও ST এর দৈর্ঘ্য একই বা সমান্তরাল। কিন্তু এদের ধারক রেখা এক নয়। সুতরাং $\overrightarrow{ST}$ ও $\overrightarrow{BC}$ ভেক্টরদ্বয়ের ধারক রেখাদ্বয় সমান্তরাল।

অর্থাৎ, ST ∥ BC এবং $ST = \frac{1}{2}BC$। [প্রমাণিত]

প্রশ্ন-৯।



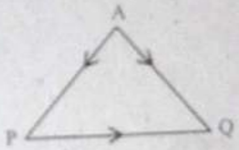
চিত্রে, ΔABC এ AB বাহুর মধ্যবিন্দু দিয়ে অঙ্কিত PQ রেখাংশ BC এর সমান্তরাল।

(ক) APQ ত্রিভুজের ক্ষেত্রে ভেক্টর বিয়োগের ত্রিভুজ বিধি বর্ণনা কর।

(খ) ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, Q, AC এর মধ্যবিন্দু।

(গ) $PBCQ$ ট্রাপিজিয়ামের PB ও QC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে R ও S হলে প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{BC}\right)$। [চট্টগ্রাম বোর্ড- ২০১৫]

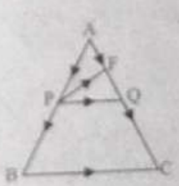
৯ (ক) এর সমাধান



একটি আদিবিন্দু A থেকে দুইটি ভেক্টর $\overrightarrow{AP}$ এবং $\overrightarrow{AQ}$ এর বিয়োগফল হচ্ছে অন্ত বিন্দু P এবং Q দ্বারা বিপরীতক্রমে গঠিত ভেক্টর $\overrightarrow{QP}$ অর্থাৎ, $\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{QP}$

৯ (খ) এর সমাধান

মনে করি, ABC ত্রিভুজের AB বাহুর মধ্যবিন্দু P দিয়ে BC বাহুর সমান্তরাল করে অঙ্কিত রেখা AC কে Q বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করতে হবে যে Q, AC এর মধ্যবিন্দু।



প্রমাণ:

মনে করি, Q নয় বরং F, AC এর মধ্যবিন্দু। তাহলে

$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ [$\because P$, AB এর মধ্যবিন্দু]

এবং $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ [$\because F$, AC এর মধ্যবিন্দু]

$\therefore \overrightarrow{PF} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AF}$ [ΔAPF-এ ত্রিভুজ বিধি অনুসারে]

$= \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AF}$ [$\because \overrightarrow{PA} = -\overrightarrow{AP}$]

$= \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ $\left[\begin{array}{l}\because F, AC \text{ এর মধ্যবিন্দু} \\ \text{এবং } P, AB \text{ এর মধ্যবিন্দু}\end{array}\right]$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$

$\therefore \overrightarrow{PF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ [$\because \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$]

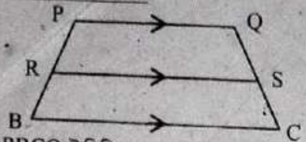
অর্থাৎ PF ∥ BC কিন্তু PQ ∥ BC (দেওয়া আছে)

তাহলে PQ ও PF রেখাদ্বয় উভয়েই D বিন্দু দিয়ে যায় এবং BC এর সমান্তরাল।

অতএব তারা (অর্থাৎ PQ ও PF) অবশ্যই সমাপতিত হবে।

$\therefore Q$ ও F একই বিন্দু হবে। অর্থাৎ Q, AC এর মধ্যবিন্দু। (প্রমাণিত)

ঌ (গ) এর সমাধান:



PBCQ ট্রাপিজিয়ামের PB ও QC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে R ও S। R ও S যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, $\overrightarrow{RS}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{BC}\right)$

প্রমাণ: মনে করি কোন ভেক্টর মূলবিন্দুর সাপেক্ষে PBCQ বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{p}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{q}$.

$\therefore \overrightarrow{BC}=\underline{c}-\underline{b}$ এবং $\overrightarrow{PQ}=\underline{q}-\underline{p}$

$\therefore$ R বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $=\frac{1}{2}(\underline{b}+\underline{p})$

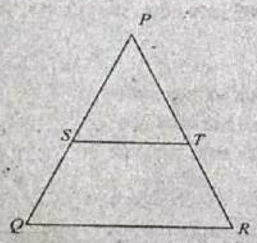
এবং S বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $=\frac{1}{2}(\underline{c}+\underline{q})$

$\therefore \overrightarrow{RS}=\frac{1}{2}(\underline{c}+\underline{q}-\underline{b}-\underline{p})$

$=\frac{1}{2}(\underline{c}-\underline{b}+\underline{q}-\underline{p})$

$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{PQ}\right)$ (প্রমাণিত)

প্রশ্ন-৭।



ΔPQR, এর PQ এবং PR এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে S এবং T

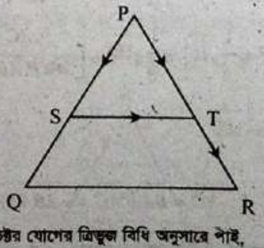
(ক) $\overrightarrow{PS}+\overrightarrow{ST}$ কে $\overrightarrow{PR}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ কর।

(খ) ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $ST \parallel QR$ এবং $ST=\frac{1}{2}QR$.

(গ) $\square$ SQRT এর কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে M ও N হলে ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $MN \parallel ST \parallel QR$ এবং $MN=\frac{1}{2}(QR-ST)$.

[কুমিল্লা বোর্ড- ২০১৫]

ঌ (ক) এর সমাধান:



ত্রিভুজ PST হতে ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি অনুসারে পাই,

$\overrightarrow{PT}=\overrightarrow{PS}+\overrightarrow{ST}$ ... ... (i)

যেহেতু PR এর মধ্যবিন্দু T,

সুতরাং, $\overrightarrow{PT}=\frac{1}{2}\overrightarrow{PR}$

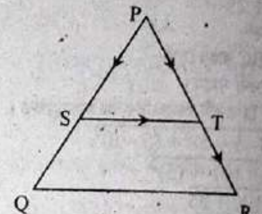
$\overrightarrow{PT}$ এর এই মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$\frac{1}{2}\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{PS}+\overrightarrow{ST}$

বা, $\overrightarrow{PS}+\overrightarrow{ST}=\frac{1}{2}\overrightarrow{PR}$ (প্রমাণিত)

ঌ (খ) এর সমাধান:

মনেকরি, PQR ত্রিভুজের PQ ও PR বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে S ও T. S, T যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, ST||QR এবং $ST=\frac{1}{2}QR$.



ভেক্টর বিয়োগের ত্রিভুজবিধি অনুসারে,

$\overrightarrow{PT}-\overrightarrow{PS}=\overrightarrow{ST}$ ....(1)

এবং $\overrightarrow{PR}-\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{QR}$

কিন্তু $\overrightarrow{PR}=2\overrightarrow{PT}$, $\overrightarrow{PQ}=2\overrightarrow{PD}$ [∵ S ও T যথাক্রমে PQ ও PR বাহুর মধ্যবিন্দু

$\therefore \overrightarrow{PR}-\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{QR}$ থেকে পাই,

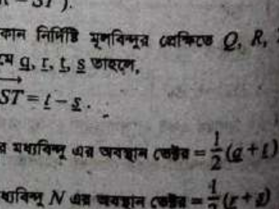
$2\overrightarrow{PT}-2\overrightarrow{PS}=\overrightarrow{QR}$ অর্থাৎ $2\left(\overrightarrow{PT}-\overrightarrow{PS}\right)=\overrightarrow{QR}$

বা, $2\overrightarrow{ST}=\overrightarrow{QR}$, [(1) হতে]

$\therefore \overrightarrow{ST}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BR}$

আবার, $\left|\overrightarrow{ST}\right|=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{QR}\right|$ বা, $SE=\frac{1}{2}QR$ সুতরাং $\overrightarrow{ST}$ ও $\overrightarrow{QR}$ ভেক্টরদ্বয়ের ধারক রেখা একই বা সমান্তরাল। কিন্তু এখানে ধারক রেখা এক নয়। সুতরাং $\overrightarrow{ST}$ ও $\overrightarrow{QR}$ ভেক্টরদ্বয়ের ধারক রেখাদ্বয় অর্থাৎ ST এবং QR সমান্তরাল। (প্রমাণিত)

ঌ (গ) এর সমাধান:



মনে করি, $QRTS$ ট্রাপিজিয়ামের সমান্তরাল বাহুদ্বয়, QR ও ST এবং ট্রাপিজিয়ামের QT ও RS কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে M ও N. M ও N যোগ করি। ধরি, $QR > ST$. প্রমাণ করতে হবে যে, MN রেখাংশ QR ও ST ...

এবং $MN=\frac{1}{2}(QR-ST)$.

প্রমাণ: মনে করি, কোন নির্দিষ্ট মূলবিন্দুর প্রেক্ষিতে Q, R, T, S বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{q}, \underline{r}, \underline{t}, \underline{s}$ তাহলে,

$\overrightarrow{QR}=\underline{r}-\underline{q}$ এবং $\overrightarrow{ST}=\underline{t}-\underline{s}$.

আবার, QT রেখাংশের মধ্যবিন্দু M এর অবস্থান ভেক্টর $=\frac{1}{2}(\underline{q}+\underline{t})$

এবং RS রেখাংশের মধ্যবিন্দু N এর অবস্থান ভেক্টর $=\frac{1}{2}(\underline{r}+\underline{s})$

$\therefore \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\underline{r} + \underline{s}) - \frac{1}{2}(\underline{q} + \underline{t})$

$= \frac{1}{2}(\underline{r} + \underline{s} - \underline{q} - \underline{t})$

$= \frac{1}{2}\{(\underline{r} - \underline{q}) + (\underline{s} - \underline{t})\}$

$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{QR} - \overrightarrow{ST}\right)$ $[\because \overrightarrow{QR} = \underline{r} - \underline{q}$ এবং $-\overrightarrow{ST} = -(\underline{t} - \underline{s}) = \underline{s} - \underline{t}]$

$QRTS$ ট্রাপিজিয়ামের $QR \| ST$ হওয়ায়, $\overrightarrow{QR} - \overrightarrow{ST}$ ভেক্টরটিও $\overrightarrow{QR}$ ও $\overrightarrow{ST}$ এর সমান্তরাল হবে।

$\therefore \overrightarrow{MN}$ ভেক্টরটিও $\overrightarrow{QR}$ ও $\overrightarrow{TS}$ এর সমান্তরাল।

$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{QR} - \overrightarrow{ST}\right) \| \overrightarrow{ST}$

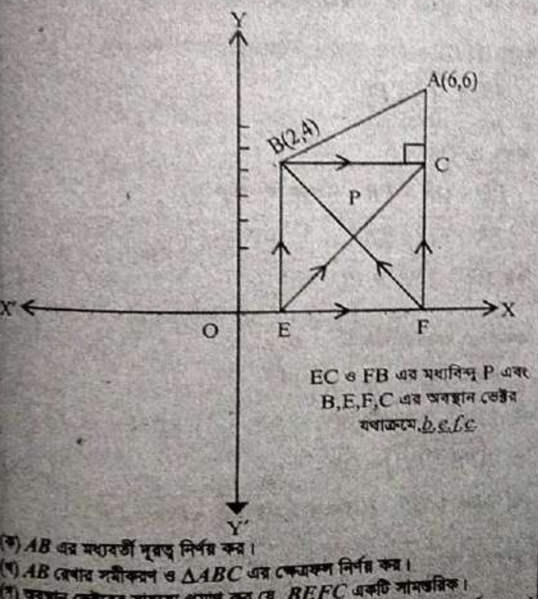
$\therefore \overrightarrow{MN} \| \overrightarrow{QR}$ এবং $\overrightarrow{MN} \| \overrightarrow{ST}$

আবার, $\left|\overrightarrow{QR}\right| = QR$ এবং $\left|\overrightarrow{ST}\right| = ST$

$\therefore |MN| = \frac{1}{2}\left(\left|\overrightarrow{QR}\right| - \left|\overrightarrow{ST}\right|\right)$

বা, $MN = \frac{1}{2}(QR - ST)$. (প্রমাণিত)

প্রশ্ন-৮।



(ক) AB এর মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর।
(খ) AB রেখার সমীকরণ ও ΔABC এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
(গ) অবস্থান ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $BEFC$ একটি সামন্তরিক।
[সিলেট বোর্ড- ২০১৫]

৮ (ক) এর সমাধান:

AB এর মধ্যবর্তী দূরত্ব $= \sqrt{(6-2)^2 + (6-4)^2}$

$= \sqrt{16+4}$

$= \sqrt{20}$ একক।

৮ (খ) এর সমাধান:

AB রেখার সমীকরণ,

$\frac{x-6}{6-2} = \frac{y-6}{6-4}$

বা, $2(x-6) = 4(y-6)$

বা, $2x - 12 = 4y - 24$

বা, $2x - 4y = -12$

বা, $x - 2y = -6$

যেহেতু, ΔABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ।
সুতরাং C বিন্দুর ভুজ = A বিন্দুর ভুজ
C বিন্দুর কোটি = A বিন্দুর কোটি $C = (6,4)$

ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 6 & 6 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 6 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}\{6(4-4) - 6(2-6) + 1(8-24)\}$

$= \frac{1}{2}(24-16) = \frac{1}{2} \times 8 = 4$ বর্গ একক (**Ans:**)

৮ (গ) এর সমাধান:

FB রেখার মধ্যবিন্দু P। B ও F এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{b}, \underline{f}$ হলে P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{f})$

আবার, EC রেখার মধ্যবিন্দু P। E ও C এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{e}$ ও $\underline{c}$ হলে p বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{e} + \underline{c})$

$\therefore \frac{1}{2}(\underline{f} + \underline{b}) = \frac{1}{2}(\underline{e} + \underline{c})$

$\therefore \underline{f} + \underline{b} = \underline{e} + \underline{c}$

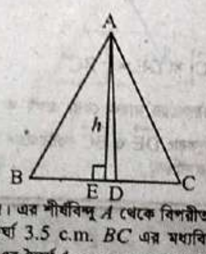
বা, $\underline{f} - \underline{e} = \underline{c} - \underline{b}$

বা, $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{BC}$

সুতরাং EF ও BC পরস্পর সমান ও সমান্তরাল।
আমরা জানি, কোনো চতুর্ভুজের দুইটি বিপরীত বাহু পরস্পর সমান ও সমান্তরাল হলে চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক।
সুতরাং BEFC একটি সামান্তরিক।

প্রশ্ন-৯। ABC ত্রিভুজের উচ্চতা $h = 3.5$ cm, শীর্ষবিন্দু A থেকে ভূমি BC এর উপর মধ্যমা $AD = 4$ সে.মি. এবং $\angle B = 60°$।
(ক) সংক্ষিপ্ত বিবরণসহ ত্রিভুজটি অংকন কর।
(খ) প্রমাণ কর যে, $AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + 2BD^2$.
(গ) ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, AB ও AC এর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাংশ BC এর সমান্তরাল এবং দৈর্ঘ্যে তার অর্ধেক। [যশোর বোর্ড- ২০১৫]

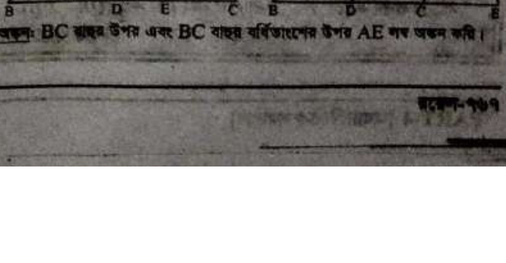
৯ (ক) এর সমাধান:



ধরি, ABC একটি ত্রিভুজ। এর শীর্ষবিন্দু A থেকে বিপরীত বাহু BC এর উপর AE লম্ব আঁকি। AE এর দৈর্ঘ্য 3.5 c.m. BC এর মধ্যবিন্দু D নির্ণয় করি। AD যোগ করি। সুতরাং AD এর দৈর্ঘ্য 4 c.m. এবং $\angle ABC = 60°$.

৯ (খ) এর সমাধান:

বিশেষ নির্বচন: ΔABC এর AD মধ্যমা BC বাহুকে সমদ্বিখণ্ডিত করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$



অঙ্কন: BC বাহুর উপর এবং BC বাহুর বর্ধিতাংশের উপর AE লম্ব অঙ্কন করি।

প্রমাণ: ΔABD এর $\angle ADB$ স্থূলকোণ এবং BD রেখার বর্ধিতাংশের ওপর AD রেখার লম্ব অভিক্ষেপ DE।

স্থূলকোণের ক্ষেত্রে পীথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি অনুসারে আমরা পাই,

$AB^2 = AD^2 + BD^2 + 2BD.\ DE$ ……… (1)

এখানে, ΔACD এর $\angle ADC$ সূক্ষ্মকোণ এবং DC রেখার এবং DC রেখার বর্ধিতাংশের ওপর AD রেখার লম্ব অভিক্ষেপ DE.

∴ সূক্ষ্মকোণের ক্ষেত্রে পীথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি অনুসারে পাই,

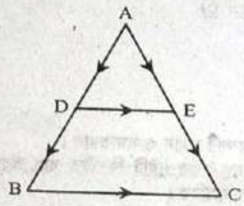
$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2CD.\ DE$ ……… (2)

এখন, সমীকরণ (1) ও (2) যোগ করে পাই,

$$AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + BD^2 + CD^2 + 2BD.DE - 2CD.DE$$
$$= 2AD^2 + BD^2 + BD^2 + 2BD.DE - 2BD.DE \quad [\because BD = CD]$$
$$= 2AD^2 + 2BD^2$$
$$= 2(AD^2 + BD^2) \text{ (প্রমাণিত)}$$

৯ (গ) এর সমাধান:

মনে করি, ABC ত্রিভুজের AB ও AC বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E. D, E যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, DE ∥ BC এবং $DE = \frac{1}{2} BC$



প্রমাণ: ভেক্টর বিয়োগের ত্রিভুজবিধি অনুসারে,

$\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DE}$ ……… (1)

এবং $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$

কিন্তু $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AD}$ [∵ D, E বিন্দু যথাক্রমে AB ও AC এর মধ্যবিন্দু]

∴ $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ থেকে পাই

$2\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ অর্থাৎ $2(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{BC}$

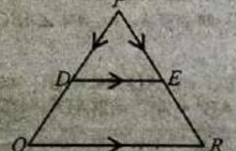
∴ $2\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BC}$, {(1) হতে}

∴ $2\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

আবার, $|\overrightarrow{DE}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|$ বা $DE = \frac{1}{1} BC$

আবার $\overrightarrow{DE}$ ও $\overrightarrow{BC}$ ভেক্টরদ্বয়ের ধারক রেখা একই বা সমান্তরাল। কিন্তু এখানে ধারক রেখা এক নয়। সুতরাং $\overrightarrow{DE}$ ও $\overrightarrow{BC}$ ভেক্টরদ্বয়ের ধারক রেখাদ্বয় অর্থাৎ DE এবং BC সমান্তরাল। [প্রমাণিত]

প্রশ্ন-১০।



ΔPQR-এর PQ ও PR বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E.

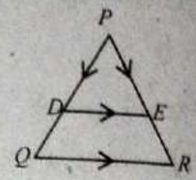
(ক) $\left(\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DE}\right)$ কে $\overrightarrow{PR}$ ভেক্টরের মাধ্যমে প্রকাশ কর।

(খ) ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $DE \| QR$ এবং $DE = \frac{1}{2} QR$.

(গ) DERQ ট্রাপিজিয়ামের কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে F ও G হলে, ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $FG \| DE \| QR$ এবং $FG = \frac{1}{2}(QR - DE)$.

[বরিশাল বোর্ড- ২০১৫]

৯ (ক) এর সমাধান:



যেহেতু PR এর মধ্যবিন্দু E তাই, $\overrightarrow{PR} = 2\overrightarrow{PE}$

বা, $\overrightarrow{PE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PR}$

ΔPDE হতে ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি অনুযায়ী পাই,

$$\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{PE}$$
$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{PR}$$

∴ $\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PR}$ (Ans.)

৯ (খ) এর সমাধান:

মনে করি, PQR ত্রিভুজের PQ ও PR বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E. D, E যোগ করি। ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ করতে হবে যে, $DE \| QR$ এবং $DE = \frac{1}{2} QR$

প্রমাণ: ΔPDE-এ ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি প্রয়োগ করে পাই,

$\overline{PD} + \overline{DE} = \overline{PE}$

বা, $\overline{PE} - \overline{PD} = \overline{DE}$ ……… (i)

আবার, ΔPQR-এ

$\overline{PQ} + \overline{QR} = \overline{PR}$ [ত্রিভুজ বিধি অনুসারে]

∴ $\overline{PR} - \overline{PQ} = \overline{QR}$ ……… (ii)

কিন্তু $\overline{PR} = 2\overline{PE}$ ও $\overline{PQ} = 2\overline{PD}$

[∵ D ও E বিন্দু যথাক্রমে PQ ও PR বাহুর মধ্যবিন্দু]

এখন, (ii) নং থেকে পাই,

$\overline{PR} - \overline{PQ} = \overline{PR}$

বা, $2\overline{PE} - 2\overline{PD} = \overline{QR}$

বা, $2(\overline{PE} - \overline{PD}) = \overline{QR}$

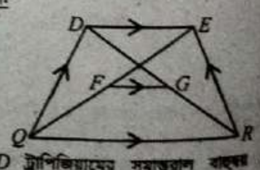
বা, $2\overline{DE} = \overline{QR}$ [(i) নং হতে পাই $\overline{PE} - \overline{PD} = \overline{DE}$]

বা, $\overline{DE} = \frac{1}{2}\overline{QR}$ ∴ $DE = \frac{1}{2} QR$

সুতরাং, $\overline{QR}$ ও $\overline{DE}$ এর রেখাদ্বয় একই বা সমান্তরাল। কিন্তু এখানে ধারক রেখা এক নয়। সুতরাং $\overline{DE}$ ও $\overline{QR}$ ভেক্টরদ্বয়ের ধারক রেখাদ্বয় সমান্তরাল। অর্থাৎ DE এবং QR সমান্তরাল।

অর্থাৎ, $DE \| QR$ এবং $DE = \frac{1}{2} QR$. [প্রমাণিত]

৯ (গ) এর সমাধান:



মনে করি, QRED ট্রাপিজিয়ামের সমান্তরাল বাহুদ্বয় QR ও DE. ট্রাপিজিয়ামের QE ও RD কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে F ও G. F ও G ...

ধরি, $QR > DE$. প্রমাণ করতে হবে যে, FG রেখাংশ QR ও DE সমান্তরাল এবং $FG = \frac{1}{2}(QR - DE)$.

প্রমাণ: মনে করি, কোন নির্দিষ্ট মূলবিন্দুর প্রেক্ষিতে Q, R, E, D বিন্দুগুলোর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{q}, \underline{r}, \underline{e}, \underline{d}$ তাহলে $\overrightarrow{QR} = \underline{r} - \underline{q}$

এবং $\overrightarrow{DE} = \underline{e} - \underline{d}$.

আবার, QR রেখাংশের মধ্যবিন্দু এর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{q} + \underline{e})$

এবং RD রেখাংশের মধ্যবিন্দু F এর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{r} + \underline{d})$

$$\therefore \overrightarrow{FG} = \frac{1}{2}(\underline{r} + \underline{d}) - \frac{1}{2}(\underline{q} + \underline{e})$$

$$= \frac{1}{2}(\underline{r} + \underline{d} - \underline{q} - \underline{e})$$

$$= \frac{1}{2}\{(\underline{r} - \underline{q}) + (\underline{d} - \underline{e})\}$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{QR} - \overrightarrow{DE})$$

$[\because \overrightarrow{QR} = \underline{r} - \underline{q}$ এবং $-\overrightarrow{DE} = -(\underline{e} - \underline{d}) = \underline{d} - \underline{e}]$

$QRED$ ট্রাপিজিয়ামের $QR \parallel DE$ হওয়ায়, $\overrightarrow{QR} - \overrightarrow{QD}$ ভেক্টরটিও $\overrightarrow{QR}$ ও $\overrightarrow{DE}$ এর সমান্তারাল হবে।

$\therefore \overrightarrow{EG}$ ভেক্টরটিও $\overrightarrow{QR}$ ও $\overrightarrow{ED}$ এর সমান্তরাল।

$$\overrightarrow{FG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{QR} - \overrightarrow{DE}) \parallel \overrightarrow{DE}$$

$\therefore \overrightarrow{FG} \parallel \overrightarrow{QR}$ এবং $\overrightarrow{FG} \parallel \overrightarrow{DE}$

আবার, $|\overrightarrow{QR}| = QR$ এবং $|\overrightarrow{DE}| = DE$

$$\therefore |FG| = \frac{1}{2}(|\overrightarrow{QR}| - |\overrightarrow{DE}|)$$

বা, $FG = \frac{1}{2}(QR - DE)$. (প্রমাণিত)

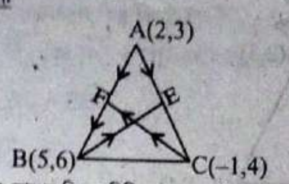
প্রশ্ন-১১ । ΔABC- এর BC, AC ও AB বাহুত্রয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E ও F এবং শীর্ষবিন্দুত্রয়ের স্থানাঙ্ক A(2,3), B(5,6), C(−1,4).

(ক) $\overrightarrow{AB}$ ভেক্টরকে $\overrightarrow{BE}$ ও $\overrightarrow{CF}$ ভেক্টরের মাধ্যমে প্রকাশ কর।

(খ) ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $EF \parallel BC$ এবং $EF = \frac{1}{2}BC$.

(গ) ΔABC-এর বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করে এর [illegible] নির্ণয় কর।

১১ (ক) এর সমাধান:



ΔABE হতে ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি অনুসারে পাই,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE}$$

বা, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ ....(i) [যেহেতু E, AC এর মধ্যবিন্দু]

আবার, ΔAFC হতে ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি অনুসারে পাই,

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CF}$$

বা, $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CF}$ [যেহেতু F, AB এর মধ্যবিন্দু]

বা, $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AC}$ ....(ii)

(i) কে 2 দ্বারা গুণ করে (i) হতে (ii) বিয়োগ করি,

$$2\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = 0$$

বা, $\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} = -(\overrightarrow{CF} - \overrightarrow{BE})$

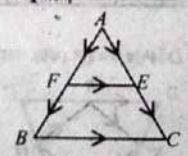
বা, $\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}(\overrightarrow{CF} + \overrightarrow{BE})$ (Ans.)

১১ (খ) এর সমাধান:

মনেকরি, ABC ত্রিভুজের AB ও AC বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে- D ও E. D,E যোগ করি।

প্রমাণ করতে হবে যে, $DE \parallel BC$ এবং $DE = \frac{1}{2}BC$

ভেক্টর বিয়োগের ত্রিভুজবিধি অনুসারে,



$$\overleftrightarrow{AE} - \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{FE} \text{ ....(1)}$$

এবং $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$

কিন্তু $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AF}$

[$\because$ F ও E যথাক্রমে AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু]

$\therefore \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ থেকে পাই,

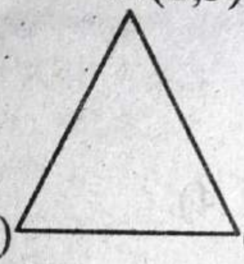
$2\overrightarrow{AE} - 2\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BC}$ অর্থাৎ $2(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AF}) = \overrightarrow{BC}$

বা, $2\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{BC}$, [(1) হতে]

$$\therefore \overrightarrow{FE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

আবার, $|\overrightarrow{FE}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|$ বা, $FE = \frac{1}{2}BC$ সুতরাং $\overrightarrow{FE}$ ও $\overrightarrow{BC}$ ভেক্টরদ্বয়ের ধারক রেখা একই বা সমান্তরাল। কিন্তু এখানে ধারক রেখা এক নয়। সুতরাং $\overrightarrow{FE}$ ও $\overrightarrow{BC}$ ভেক্টরদ্বয়ের ধারক রেখাদ্বয় অর্থাৎ FE এবং BC সমান্তরাল।

২ (গ) এর সমাধান:



AB বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(5-2)^2 + (6-3)^2}$
$= \sqrt{3^2 + 3^2}$
$= \sqrt{18}$

BC বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(5+1)^2 + (6-4)^2}$
$= \sqrt{6^2 + 2^2}$
$= \sqrt{40}$

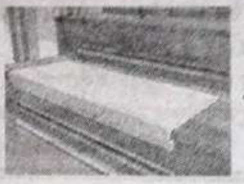
AC বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(2+1)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{10}$

$\therefore$ অর্ধ পরিসীমা, $s = \dfrac{\sqrt{18} + \sqrt{40} + \sqrt{10}}{2}$
$= 6.865$

$\therefore$ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$
$= \sqrt{6.865(6.865-\sqrt{18})(6.865-\sqrt{40})(6.865-\sqrt{10})}$
$= 6.002$ বর্গ একক। **(Ans.)**

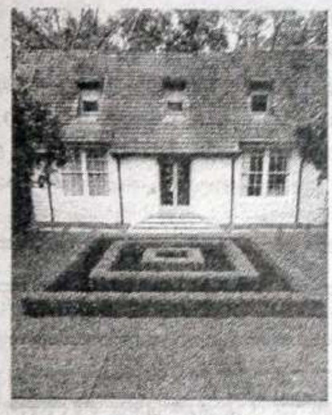
বাস্তব জীবনে এ অধ্যায়ের প্রয়োগ

সাধারণভাবে পরিমিতি বলতে কোনো কিছুর পরিমাপকে নির্দেশ করে। আর পরিমাপকৃত রাশি এবং নির্ধারিত এককের অনুপাতই কোনো রাশির পরিমাণ নির্ধারণ করে থাকে। শিক্ষার্থীরা স্বভাবতই পরিমিতিকে শুধুমাত্র পাঠ্যবইয়ের কিছু সংখ্যক সমস্যার মাঝে সীমাবদ্ধ করে রাখে। অথচ আমাদের দৈনন্দিন জীবনের অধিকাংশ ক্ষেত্রেই যে আমরা পরিমিতিকে ব্যবহার করছি তা অনেকেই খেয়াল করি না। উদাহরণস্বরূপ আমরা বিভিন্ন বস্তু, খাদ্য দ্রব্য পরিমাপ করে একটি নির্দিষ্ট পরিমাণ ক্রয় করি। যখন কোনো আসবাবপত্র, স্থাপনা বা পোষাক তৈরি করা হয় তখন প্রতিটি অংশ সূক্ষ্মভাবে পরিমাপ করে নিতে হয়।



চিত্র- ১: সিঁড়িতে কার্পেট মোড়াতে পরিমিতির প্রয়োগ

চিত্র- ২: কোণক আকৃতির আর্মি তাবু



চিত্র- ৩: বাগানের চারপাশের রাস্তার পরিমাপ নির্ণয়ে পরিমিতি

চিত্র- ৪: সিলিন্ডার আকৃতির পাইপ

এছাড়া একটি নির্দিষ্ট পৃষ্ঠে রং লাগাতে মোট রং এর পরিমাণ, একটি নির্দিষ্ট জায়গা কার্পেট দিয়ে মোড়াতে মোট কার্পেটের পরিমাণ, একটি বাগান ঘেরার জন্য প্রয়োজনীয় বেড়া, একটি রাস্তা টাইলস্ দ্বারা মোড়াতে প্রয়োজনীয় টাইলস্, একটি পরিখা মাটি দ্বারা পূর্ণ করতে প্রয়োজনীয় মাটির পরিমাণ, একটি বৃত্তাকার রেস ট্রাকের দূরত্ব, কোনো ম্যাপ থেকে তথ্য নেওয়া, কোনো যাত্রায় প্রয়োজনীয় জ্বালানীর পরিমাণ, কোনো ঘনবস্তুর আয়তন ও পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল নির্ণয়, পিজ্জার কোনো টুকরার আয়তন নির্ণয় সহ প্রতি ক্ষেত্রেই পরিমাপ ব্যবহৃত হয়।

চিত্র- ৫: ঘনক আকৃতির প্রিন্টার

চিত্র- ৬: কোণক আকৃতির পিরামিড

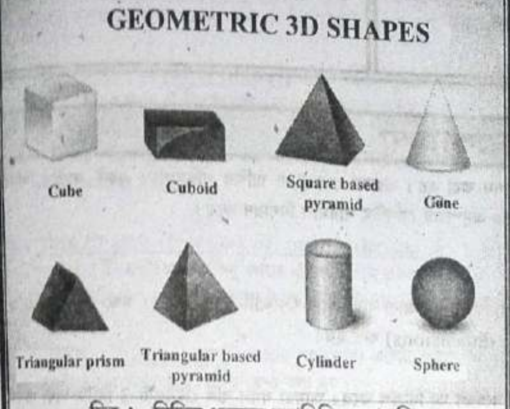
"Anyone who has never made a mistake has never tried anything new".

–Albert Einstein

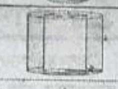
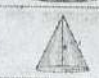
১৩

ঘন জ্যামিতি [Solid Geometry]

অনুশীলনী-১৩



চিত্র-১: বিভিন্ন ধরনের জ্যামিতিক আকৃতি

Name	Figure	Lateral or Curved Surface Area (sq.units)	Total Surface Area (sq.units)	Volume (cu.units)
Solid right circular cylinder		$2\pi r h$	$2\pi r(h+r)$	$\pi r^2 h$
Right circular hollow cylinder		$2\pi h(R+r)$	$2\pi(R+r)(R-r+h)$	$\pi R^2h-\pi r^2h$ $\pi h(R^2-r^2)$ $\pi h(R+r)(R-r)$
Solid right circular cone		πrl	$\pi r(l+r)$	$\frac{1}{3}\pi r^2 h$
Frustum		-------	-------------	$\frac{1}{3}\pi h(R^2+r^2+Rr)$
Sphere		$4\pi r^2$	---	$\frac{4}{3}\pi r^3$

চিত্র-২: বিভিন্ন জ্যামিতিক আকৃতির ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয়

ভূমিকা [Introduction]

ব্যবহারিক প্রয়োজনে, রেখার দৈর্ঘ্য, তলের ক্ষেত্রফল, ঘনবস্তুর আয়তন ইত্যাদি পরিমাপ করা হয়। এ রকম যেকোনো রাশি পরিমাপের ক্ষেত্রে একই জাতীয় নির্দিষ্ট পরিমাণের একটি রাশিকে একক হিসাবে গ্রহণ করা হয়। পরিমাপকৃত রাশি এবং এরূপ নির্ধারিত এককের অনুপাতই রাশিটির পরিমাপ নির্ধারণ করে।

অর্থাৎ পরিমাপ $= \dfrac{\text{পরিমাপকৃত রাশি}}{\text{একক রাশি}}$।

নির্ধারিত একক সম্পর্কে প্রত্যেক পরিমাপ একটি সংখ্যা যা পরিমাপকৃত রাশিটির একক রাশির কতগুণ তা নির্দেশ করে। যেমন, বেঞ্চটি 5 মিটার লম্বা। এখানে মিটার একটি নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্য যাকে একক হিসাবে ধরা হয়েছে এবং যার তুলনায় বেঞ্চটি 5 গুণ লম্বা।


Archimedes

আর্কিমিডিস (*Archimedes*, জন্মস্থান: সিসিলি; 287BC-212BC): প্রতিভাবান গণিতবিদ আর্কিমিডিস জন্মেছিলেন খৃষ্টের জন্মের প্রায় ২০০ বছর পূর্বে। খুব ছোট বেলা থেকেই গণিতের প্রতি তাঁর ভালবাসা তৈরি হয়েছিল। তিনি যুদ্ধাস্ত্র (*Claw of Archimedes* এবং *Miniatare Planetarium*) তৈরিতে অধিক পারদর্শী হলেও কঠিন বস্তুর আপেক্ষিক ঘনত্ব নির্ণয়ের সূত্র আবিষ্কারের জন্য বিখ্যাত হয়ে আছেন। এই সূত্রটির আবিষ্কার নিয়ে প্রচলিত একটি গল্পও রয়েছে।

বোর্ড প্রশ্নাবলির বিশ্লেষণ [Board Questions Analysis]

এই অধ্যায় থেকে বিভিন্ন বোর্ডে বিগত দু'বছরের এসএসসি পরীক্ষায় মোট ৪টি সৃজনশীল প্রশ্ন ও ৪৩টি বহুনির্বাচনি প্রশ্ন এসেছে। নিচের 'Board Analysis' অংশে এই অধ্যায় থেকে কোন সালে কোন বোর্ডে কতটি প্রশ্ন হয়েছে তা দেওয়া আছে।

☑ সৃজনশীল প্রশ্ন:

বোর্ড / সাল	ঢাকা	রাজশাহী	কুমিল্লা	যশোর	চট্টগ্রাম	বরিশাল	সিলেট	দিনাজপুর
২০১৬		–	–	১		১		১
২০১৫	–	–	–	–	–	–	১	–

☑ বহুনির্বাচনি প্রশ্ন:

বোর্ড / সাল	ঢাকা	রাজশাহী	কুমিল্লা	যশোর	চট্টগ্রাম	বরিশাল	সিলেট	দিনাজপুর
২০১৬	১	৪	৩	৪	৪	৪	৫	৪
২০১৫	২	৩	১	১	২	২	৩	–

মূল শব্দাবলি [Key Words]

পরিমিতি (*Mensuration*), পরিমাপ (*Measurement*), ঘনবস্তু (*Parallelopiped*), পরিসীমা (*Perimeter*), সমবাহু ত্রিভুজ (*Equilateral Triangle*), কর্ণ (*Diagonal*), সামান্তরিক (*Parallelogram*), ভূমি (*Base*), সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ (*Isosceles Triangle*), চতুর্ভুজ (*Quadrilateral*), বর্গক্ষেত্র (*Square*), সমান্তরাল (*Parallel*), আয়তাকার (*Rectangular*), সুষম বহুভুজ (*Regular Polygon*), উচ্চতা (*Height*), রম্বস (*Rhombus*), ট্রাপিজিয়াম (*Trapezium*), আয়তাকার ঘনবস্তু (*Rectangular Solid Body*), ঘনক (*Cube*), বেলন (*Circular Cylinder*), প্রিজম (*Prism*), সুষম ষড়ভুজ (*Regular Hexagon*), পিরামিড (*Pyramid*), সমবৃত্তভূমিক কোণক (*Right Circular Cone*), গোলক (*Sphere*), যৌগিক ঘনবস্তু (*Componud Solid*).

এ অধ্যায়ের আলোচ্যসূচি

• আয়তকার ঘনবস্তুর সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল	• প্রিজমের আয়তন	• সমবৃত্তভূমিক কোনকের বক্র তলের ক্ষেত্রফল
• ঘনকের সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল	• পিরামিডের সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল	• গোলকের পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল
• ঘনকের আয়তন	• পিরামিডের আয়তন	• গোলকের আয়তন
• ঘনকের কর্ণ	• সমবৃত্তভূমিক কোনকের সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল	
• প্রিজমের সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল	• সমবৃত্তভূমিক কোনকের আয়তন	

প্রাথমিক আলোচনা

ব্যবহারিক প্রয়োজনে "রেখার দৈর্ঘ্য", "তলের ক্ষেত্রফল", "ঘনবস্তুর আয়তন" ইত্যাদি পরিমাপন করা হয়। এরকম যেকোনো রাশির পরিমাপনে একই জাতীয় নির্দিষ্ট পরিমাপের একটি রাশিকে একক হিসেবে গ্রহণ করা হয়। পরিমাণকৃত রাশি এবং নির্ধারিত এককের অনুপাতই রাশিটির পরিমাপ নির্ধারণ করে।

অর্থাৎ $\dfrac{\text{পরিমাপকৃত রাশি}}{\text{একক রাশি}} = \text{পরিমাপ}$

ঘন জ্যামিতি (Solid geometry): গণিত শাস্ত্রের যে শাখার সাহায্যে ঘনবস্তু এবং তল, রেখা ও বিন্দুর ধর্ম জানা যায়, একে ঘন জ্যামিতি বলা হয়। কখনো কখনো একে জাগতিক জ্যামিতি (Geometry of space) বা ত্রিমাত্রিক জ্যামিতিও (Geometry of three dimensions) বলা হয়।

লক্ষণীয়:

নির্ধারিত একক সাপেক্ষে প্রত্যেক পরিমাপ একটি সংখ্যা যা পরিমাপকৃত রাশিটির একক রাশির কতগুণ তা নির্দেশ করে। আমরা যখন বলি টেবিলটি 3 মিটার লম্বা তখন বুঝতে হবে যে মিটার একটি নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্য যাকে একক হিসেবে ধরা হয়েছে যার তুলনায় টেবিলটি 3 গুণ লম্বা।

রৈখিক পরিমাপ: দৈর্ঘ্য পরিমাপনে সাধারণত মিটার ও তা থেকে উদ্ভূত একক সমূহ ব্যবহার করা হয়। ফুট, হাত ইত্যাদি একক ও ব্যবহৃত হয়।

ক্ষেত্র পরিমাপ: রৈখিক এককের ওপর নির্ভর করে ক্ষেত্রফল পরিমাপের একক নির্ধারণ করা হয়। যে বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য একক (যেমন 1 সে.মি.) তার ক্ষেত্রফল 1 বর্গএকক (যেমন 1 বর্গ সে.মি.) ধরা হয় এবং ক্ষেত্রফল নির্ণয়ে একে একক ধরা হয়।

$\boxed{\text{ক্ষেত্রফল পরিমাপের একক : বর্গএকক}}$

আয়তন পরিমাপ: দৈর্ঘ্যের পরিমাপ, প্রস্থের পরিমাপ ও উচ্চতার পরিমাপ একই এককে প্রকাশ করে আয়তনের পরিমাপ ঘন এককে নির্ণয় করা হয়।

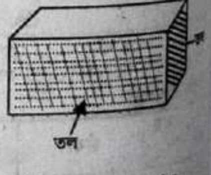
অর্থাৎ আয়তাকার ঘনবস্তুর আয়তনের পরিমাপ = (দৈর্ঘ্য × প্রস্থ × উচ্চতা) ঘন একক।

$\boxed{\text{ঘনবস্তুর ঘনফলই আয়তন}}$

ঘন জ্যামিতির মৌলিক ধারণা: ঘন জ্যামিতিতে বিন্দু, রেখা ও তলের ধারণাকে মৌলিক ধারণা হিসেবে গ্রহণ করা হয়।

১। বস্তুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা প্রত্যেকটিকে ঐ বস্তুর মাত্রা (dimension) বলা হয়।

২। বিন্দুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা নেই। এটি একটি ধারণা মাত্র। বাস্তবে বোঝার জন্য আমরা ডট (.) ব্যবহার করি। বিন্দুকে অবস্থানের প্রতিরূপ বলা হয়। সুতরাং বিন্দুর কোনো মাত্রা নেই। তাই বিন্দু শূন্য মাত্রিক।



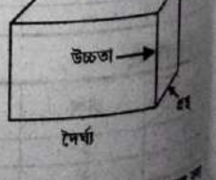
৩। রেখার কেবল দৈর্ঘ্য আছে, প্রস্থ ও উচ্চতা নেই। তাই রেখা একমাত্রিক।

উদাহরণ: $A \longleftrightarrow B$ চিত্রে AB রেখার কেবল দৈর্ঘ্য আছে।

৪। তলের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ আছে, উচ্চতা নেই তাই তল দ্বিমাত্রিক

উদাহরণ: প্রত্যেক ঘনবস্তু এক বা একাধিক তল দ্বারা সীমাবদ্ধ। গোলকের উপরিভাগও একটি তল।

৫। যে বস্তুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা আছে একে ঘনবস্তু বলা হয়। ঘনবস্তুর তিনটি মাত্রা বিদ্যমান। তাই ঘনবস্তু ত্রিমাত্রিক।



কতিপয় প্রাথমিক সংজ্ঞা:

১। **সমতল (Plane surface):** কোনো তলের উপরস্থ যেকোনো দুইটি বিন্দুর সংযোজক সরলরেখা সম্পূর্ণরূপে ঐ তলের ওপর অবস্থিত হলে, ঐ তলকে সমতল বলা হয়। পুকুরের পানি স্থির থাকলে ঐ পানির উপরিভাগ একটি সমতল। সিমেন্ট দিয়ে নির্মিত বা মোজাইককৃত ঘরের মেঝেকে আমরা সমতল বলে থাকি। কিন্তু জ্যামিতিকভাবে তা সমতল নয়, কারণ ঘরের মেঝেতে কিছু উঁচু-নিচু থাকেই।

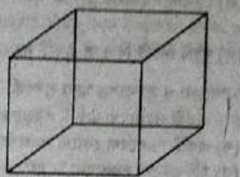
দ্রষ্টব্য: অন্য কিছু উল্লেখ না থাকলে ঘন জ্যামিতিতে রেখা বা দৈর্ঘ্য এবং তলের বিস্তার অসীম (infinite) বা অনির্দিষ্ট মনে করা হয়। সুতরাং তলের সংজ্ঞা থেকে অনুমান করা যায় যে, কোনো সরলরেখার একটি অংশ কোনো তলের ওপর থাকলে অপর কোনো অংশ ঐ তলের বাইরে থাকতে পারে না।

২। **বক্রতল (Curved surface):** কোনো তলের ওপর অবস্থিত যেকোনো দুইটি বিন্দুর সংযোজক সরলরেখা সম্পূর্ণরূপে ঐ তলের ওপর অবস্থিত না হলে, ঐ তলকে বক্রতল বলা হয়। গোলকের পৃষ্ঠতল একটি বক্রতল।

৪। **একতলীয় রেখা (Coplanar straight lines)**: একাধিক সরলরেখা একই সমতলে অবস্থিত হলে, বা এদের সকলের মধ্য দিয়ে একটি সমতল অঙ্কন সম্ভব হলে ঐ সরলরেখাগুলোকে একতলীয় বলা হয়।

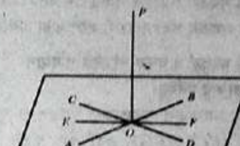
৫। **নৈকতলীয় রেখা (Skew or non coplanar lines)**: একাধিক সরলরেখা একই সমতলে অবস্থিত না হলে বা এদের মধ্য দিয়ে একটি সমতল অঙ্কন করা সম্ভব না হলে এগুলোকে নৈকতলীয় সরলরেখা বলা হয়। দুইটি পেন্সিলকে একটির ওপর আর একটি দিয়ে যোগ বা গুণচিহ্ন আকৃতির একটি বস্তু তৈরি করলেই দুইটি নৈকতলীয় সরলরেখা উৎপন্ন হবে।

৬। **সমান্তরাল সরলরেখা (Parallel lines)**: দুইটি একতলীয় সরলরেখা যদি পরস্পর ছেদ না করে অর্থাৎ যদি এদের কোনো সাধারণ বিন্দু না থাকে, তবে এদের সমান্তরাল সরলরেখা বলা হয়।



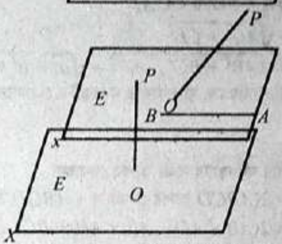
৭। **সমান্তরাল তল (Parallel planes)**: দুইটি সমতল যদি পরস্পর ছেদ না করে অর্থাৎ যদি এদের কোনো সাধারণ রেখা না থাকে তবে ঐ তলদ্বয়কে সমান্তরাল তল বলা হয়।

৮। **সমতলের সমান্তরাল রেখা**: একটি সরলরেখা ও একটি সমতলকে অনির্দিষ্টভাবে বর্ধিত করলেও যদি এরা পরস্পর ছেদ না করে, তবে ঐ সরলরেখাকে উক্ত তলের সমান্তরাল রেখা বলা হয়।



৯। **তলের লম্ব রেখা (Normal or perpendicular to a plane)**: কোনো সরলরেখা একটি সমতলের উপরস্থ কোনো বিন্দু থেকে ঐ সমতলের ওপর অঙ্কিত কোনো বিন্দু থেকে ঐ সমতলের ওপর অঙ্কিত যেকোনো রেখার ওপর লম্ব হলে, উক্ত সরলরেখাকে ঐ সমতলের ওপর লম্ব বলা হয়।

১০। **তির্যক (Oblique) রেখা**: কোনো সরলরেখা একটি সমতলের সাথে সমান্তরাল বা লম্ব না হলে, ঐ সরলরেখাকে সমতলের তির্যক রেখা বলা হয়।

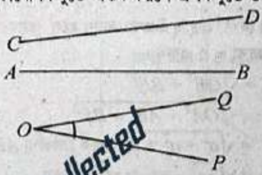


১১। **উলম্ব (Vertical) রেখা বা তল**: স্থির অবস্থায় ঝুলন্ত ওলনের সুতার সঙ্গে সমান্তরাল কোনো রেখা বা তলকে খাড়া বা উলম্ব তল বলে।

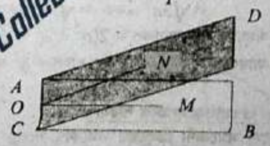
১২। **অনুভূমিক (Horizontal) তল ও রেখা**: কোনো সমতল একটি খাড়া সরলরেখার সাথে লম্ব হলে, তাকে শয়ান বা অনুভূমিক তল বলা হয়। আবার কোনো অনুভূমিক তলে অবস্থিত যেকোনো সরলরেখাকে অনুভূমিক সরলরেখা বলা হয়।

১৩। **সমতল ও নৈকতলীয় চতুর্ভুজ**: কোনো চতুর্ভুজের বাহুগুলো সকলে একই তলে অবস্থিত হলে, একে সমতল চতুর্ভুজ বলা হয়। আবার কোনো চতুর্ভুজের বাহুগুলো সকলে একই তলে অবস্থিত না হলে, ঐ চতুর্ভুজকে নৈকতলীয় চতুর্ভুজ বলা হয়। নৈকতলীয় চতুর্ভুজের দুইটি সন্নিহিত বাহু একতলে এবং অপর দুইটি অন্য তলে অবস্থিত। সুতরাং কোনো নৈকতলীয় চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুদ্বয় নৈকতলীয়।

১৪। **নৈকতলীয় রেখার অন্তর্গত কোণ**: দুইটি নৈকতলীয় রেখার অন্তর্গত কোণ এদের যেকোনো একটি ও এর উপরস্থ যেকোনো বিন্দু থেকে অঙ্কিত অপরটির সমান্তরাল রেখার অন্তর্গত কোণের সমান। আবার দুইটি নৈকতলীয় রেখার প্রত্যেকের সমান্তরাল দুইটি রেখার কোনো বিন্দুতে অঙ্কন করলে ঐ বিন্দুতে উৎপন্ন কোণের পরিমাণও নৈকতলীয় রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত কোণের সমান।

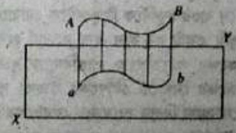


মনে করি AB ও CD দুইটি নৈকতলীয় রেখা। যেকোনো O বিন্দুতে AB ও CD এর সমান্তরাল যথাক্রমে OP এবং OQ রেখাদ্বয় অঙ্কন করলে $\angle POQ$ ই AB ও CD এর অন্তর্গত কোণ নির্দেশ করবে।

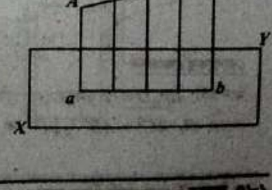


১৫। **দ্বিতল কোণ (Dihedral angle)**: দুইটি সমতল সরলরেখায় ছেদ করলে এদের ছেদ রেখাস্থ যেকোনো বিন্দু থেকে ঐ সমতলদ্বয়ের প্রত্যেকের ওপর ঐ ছেদ রেখার সাথে লম্ব এরূপ একটি করে রেখা অঙ্কন করলে উৎপন্ন কোণই ঐ সমতলদ্বয়ের অন্তর্গত দ্বিতল কোণ।

AB ও CD সমতলদ্বয় AC রেখায় পরস্পর ছেদ করেছে। AC রেখাস্থ O বিন্দুতে AB সমতলে OM এবং CD সমতলে ON এরূপ দুইটি সরলরেখা অঙ্কন করা হলো যেন এরা উভয়ই AC এর সঙ্গে O বিন্দুতে লম্ব হয়। তাহলে $\angle MON$ ই AB ও CD সমতলদ্বয়ের অন্তর্গত দ্বিতল কোণ সূচিত করে। দুইটি পরস্পরচ্ছেদী সমতলের অন্তর্গত দ্বিতল কোণের পরিমাণ এক সমকোণ হলে, ঐ সমতলদ্বয় পরস্পর লম্ব।



১৬। **অভিক্ষেপ**: কোনো বিন্দু থেকে একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার ওপর বা কোনো সমতলের ওপর অঙ্কিত লম্বরেখার পাদবিন্দুকে ঐ রেখা বা সমতলের ওপর উক্ত বিন্দুর পাতন বা অভিক্ষেপ (Projection) বলা হয়। কোনো সরলরেখা বা বক্ররেখার সকল বিন্দু থেকে কোনো নির্দিষ্ট সমতলের ওপর অঙ্কিত লম্বগুলোর পাদবিন্দুসমূহের সেটকে ঐ সমতলের ওপর উক্ত সরলরেখা বা বক্ররেখার অভিক্ষেপ বলা হয়। এই অভিক্ষেপকে লম্ব অভিক্ষেপও (Orthogonal Projection) বলা হয়।



চিত্রে XY সমতলের ওপর একটি বক্ররেখা ও একটি সরলরেখার অভিক্ষেপ দেখানো হয়েছে।

দুইটি সরলরেখার মধ্যে সম্পর্ক :

(ক) দুইটি সরলরেখা একতলীয় হতে পারে, সেক্ষেত্রে এরা অবশ্যই সমান্তরাল হবে বা কোনো এক বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করবে।

(খ) দুইটি সরলরেখা নৈকতলীয় হতে পারে, সেক্ষেত্রে এরা সমান্তরালও হবে না কিংবা কোনো বিন্দুতে ছেদও করবে না।

স্বতঃসিদ্ধ:

(ক) কোনো সমতলের উপরস্থ দুইটি বিন্দুর সংযোজক সরলরেখাকে অনির্দিষ্টভাবে বর্ধিত করলেও তা সম্পূর্ণভাবে ঐ সমতলে অবস্থিত থাকবে। সুতরাং একটি সরলরেখা ও একটি সমতলের মধ্যে দুইটি সাধারণ বিন্দু থাকলে, ঐ সরলরেখা বরাবর এদের মধ্যে অসংখ্য সাধারণ বিন্দু থাকবে।

(খ) দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু বা একটি সরলরেখার মধ্য দিয়ে অসংখ্য সমতল অঙ্কন করা যায়।

সরলরেখা ও সমতলের মধ্যে সম্পর্ক

(ক) একটি সরলরেখা একটি সমতলের সঙ্গে সমান্তরাল হলে এদের মধ্যে কোনো সাধারণ বিন্দু থাকবে না।

(খ) একটি সরলরেখা কোনো সমতলকে ছেদ করলে এদের মধ্যে মাত্র একটি সাধারণ বিন্দু থাকবে।

(গ) যদি কোনো সরলরেখা ও সমতলের দুইটি সাধারণ বিন্দু থাকে, তাহলে সম্পূর্ণ সরলরেখাটি ঐ সমতলের অবস্থিত হবে।

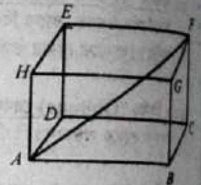
দুইটি সমতলের মধ্যে সম্পর্ক

(ক) দুইটি সমতল পরস্পর সমান্তরাল হলে এদের মধ্যে কোনো সাধারণ বিন্দু থাকবে না।

(খ) দুইটি সমতল পরস্পরছেদী হলে এরা একটি সরলরেখায় ছেদ করবে এবং এদের অসংখ্য সাধারণ বিন্দু থাকবে।

আয়তকার ঘনবস্তু ও ঘনক সংক্রান্ত পরিমাপ

(১) আয়তাকার ঘনবস্তু:



তিন জোড়া সমান্তরাল আয়তাকার সমতল বা পৃষ্ঠ দ্বারা আবদ্ধ ঘনবস্তুকে আয়তাকার ঘনবস্তু বলে।

মনে করি, $ABCDEFGH$ একটি আয়তাকার ঘনবস্তু যেখানে এর দৈর্ঘ্য, $AB = a$, প্রস্থ, $AD = b$ এবং উচ্চতা, $AH = c$ একক।

(i) আয়তাকার ঘনবস্তুটির কর্ণ, AF

$= \sqrt{AC^2 + CF^2}$

$= \sqrt{AB^2 + BC^2 + CF^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ [যেহেতু $BC = AD = b, CF = AH = c$]

সহজেই দেখানো যায় যে, আয়তাকার ঘনবস্তুটির যেকোনো কর্ণের দৈর্ঘ্য একই হবে।

(ii) আয়তাকার ঘনবস্তুটির সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল

$= 2(ABCD$ তলের ক্ষেত্রফল $+ ABGH$ তলের ক্ষেত্রফল $+ BCFG$ তলের ক্ষেত্রফল$)$

$= 2(AB \times AD + AB \times AH + BC \times BG)$ বর্গ একক

$= 2(ab + ac + bc)$ বর্গ একক [যেহেতু $BC = AD = b$ এবং $BG = AH = c$]

$= 2(ab + bc + ca)$ বর্গ একক।

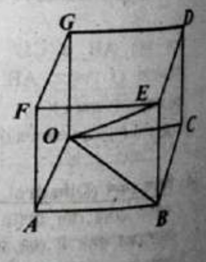
(iii) আয়তাকার ঘনবস্তুটির আয়তন = আয়তাকার ঘনবস্তু এর (দৈর্ঘ্য × প্রস্থ × উচ্চতা)

$= AB \times AD \times AH$ ঘন একক $= abc$ ঘন একক।

ঘনক:

আয়তাকার ঘনবস্তু এর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা সমান হলে, তাকে ঘনক বলে। মনে করি, $OABCDEFG$ একটি ঘনক।

এর দৈর্ঘ্য = প্রস্থ = উচ্চতা = a একক।



(i) ঘনকটির কর্ণ $OE = \sqrt{OB^2 + BE^2}$

$= \sqrt{OA^2 + AB^2 + BE^2}$

$= \sqrt{a^2 + a^2 + a^2}$ একক [যেহেতু $AB = OC = a$ এবং $BE = OG = a$]

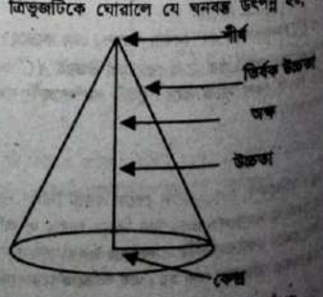
$= \sqrt{3a^2}$ একক $= \sqrt{3}a$ একক

(ii) ঘনক এর সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল $= 2(a^2 + a^2 + a^2)$ বর্গ একক $= 6a^2$ বর্গ একক।

(iii) ঘনকটির আয়তন $= a \times a \times a$ ঘন একক $= a^3$ ঘন একক।

কোণক, বেলন ও গোলক সংক্রান্ত পরিমাপ:

কোণক: কোনো সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ সংলগ্ন যেকোনো একটি বাহুকে স্থির রেখে ঐ বাহুর চতুর্দিকে ত্রিভুজটিকে ঘোরালে যে ঘনবস্তু উৎপন্ন হয়, তাকে সমবৃত্তভূমিক কোণক বলে।



যে বাহুর চতুর্দিকে ত্রিভুজটিকে ঘোরানো হয়, তাকে কোণকের অক্ষ বলে। সমবৃত্তভূমিক কোণকের ভূমি একটি বৃত্ত হবে এবং ব্যাসার্ধ হবে সমকোণ সংলগ্ন অক্ষ ব্যতীত অপর বাহুর দৈর্ঘ্যের সমান। অক্ষের সমকোণযুক্ত প্রান্তবিন্দুকে বৃত্তের কেন্দ্র এবং অপর প্রান্তবিন্দুকে কোণকের শীর্ষ বলে। অক্ষের দৈর্ঘ্যকে কোণকের উচ্চতা বলে। কোণকের শীর্ষ এবং বৃত্তাকার ভূমির পরিধির ওপর যেকোনো বিন্দুর সংযোজক রেখাংশের দৈর্ঘ্যকে কোণকের তির্যক উচ্চতা বা হেলান উন্নতি বলে।

[দ্রষ্টব্য: কোণক বলতে সাধারণত সমবৃত্তভূমিক কোণককেই বোঝানো হয়ে থাকে।]

কোণকের ক্ষেত্রফল:

মনে করি, $ABCD$ একটি কোণক। এর ভূমির ব্যাসার্ধ, $BC = r$ একক, উচ্চতা, $AB = h$ এবং তির্যক উচ্চতা বা হেলান উন্নতি, $AC = \ell$ একক। সমকোণী ত্রিভুজ ABC থেকে আমরা পাই, $AC^2 = AB^2 + BC^2$ বা, $\ell^2 = h^2 + r^2$ $\therefore \ell = \sqrt{h^2 + r^2}$

PART-4 [অধ্যায়ভিত্তিক সমাধান]

(i) কোণকের বক্রতলের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ (ভূমির পরিধি) $\times$ (হেলানো উন্নতি)

$= \frac{1}{2} \times 2\pi r \times \ell$ বর্গ একক

$= \pi r \ell$ বর্গ একক

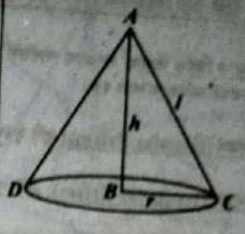
$= \pi r \sqrt{h^2 + r^2}$ বর্গ একক।

(ii) কোণক এর সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল = বক্রতলের ক্ষেত্রফল + ভূমির ক্ষেত্রফল

$= \pi r \ell + \pi r^2$ বর্গ একক

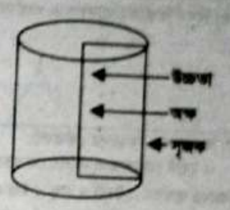
$= \pi r (\ell + r)$ বর্গ একক

(iii) কোণক এর আয়তন $= \frac{1}{3} \times$ (ভূমির ক্ষেত্রফল $\times$ উচ্চতা) $= \frac{1}{3} \pi r^2 h$ ঘন একক।



বেলন: কোনো আয়তক্ষেত্রের যেকোনো বাহুকে অক্ষ ধরে আয়তক্ষেত্রটিকে ঐ বাহুর চতুর্দিকে ঘোরালে যে ঘনবস্তুর সৃষ্টি হয়, তাকে সমবৃত্তভূমিক বেলন বলে। সমবৃত্তভূমিক বেলনের দুই প্রান্ত বৃত্ত হবে। বেলনের অক্ষের দৈর্ঘ্যকে এর উচ্চতা বলা হয়। আয়তক্ষেত্রের অক্ষের সমান্তরাল ঘূর্ণায়মান বাহুটিকে বেলনের সৃজক বা উৎপাদক রেখা বলে।

[দ্রষ্টব্য: বেলন বলতে সাধারণত সমবৃত্তভূমিক বেলনকেই বোঝানো হয়।]



বেলনের ক্ষেত্রফল:

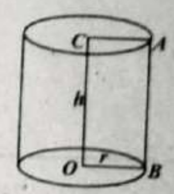
মনে করি, $ABOC$ একটি বেলন। এর ভূমির ব্যাসার্ধ $OB = r$ একক এবং উচ্চতা $OC = h$ একক

(i) বেলন এর বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল = ভূমির পরিধি $\times$ উচ্চতা $= 2\pi rh$ বর্গ একক।

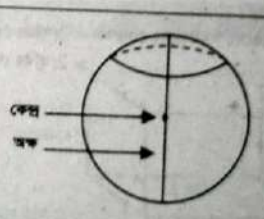
(ii) বেলন এর সমগ্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল = বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল + দুই প্রান্তের ক্ষেত্রফল

$= 2\pi rh + 2\pi r^2)$ বর্গ একক $= 2\pi r (h + r)$ বর্গ একক।

(iii) বেলন এর আয়তন = ভূমির ক্ষেত্রফল $\times$ উচ্চতা $= \pi r^2 h$ ঘন একক



গোলক (Sphere): কোনো অর্ধবৃত্তের ব্যাসকে অক্ষ ধরে অর্ধবৃত্তটিকে ঐ ব্যাসের চারদিকে গোলারে যে ঘনবস্তুর সৃষ্টি হয়, তাকে গোলক বলে। অর্ধবৃত্তের কেন্দ্রটি গোলকের কেন্দ্র। অর্ধবৃত্তটি এর ব্যাসের চারদিকে ঘুরে যে তল উৎপন্ন করে, তাকে গোলকের তল বলে। অর্ধবৃত্তের ব্যাসই গোলকের ব্যাস।



গোলকের ক্ষেত্রফল:

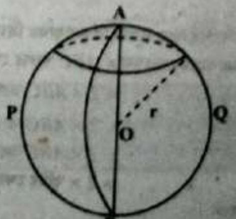
মনে করি, APBQ একটি গোলক। O এর কেন্দ্র এবং ব্যাসার্ধ, r একক।

(i) গোলকের পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $= \pi \times (\text{ব্যাস})^2$ বর্গ একক

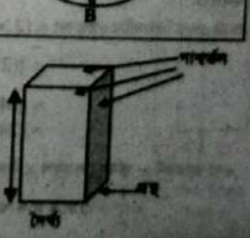
$= \pi \times (2r)^2$ বর্গ একক

$= 4\pi r^2$ বর্গ একক।

(iii) গোলক এর আয়তন $= \frac{4}{3} \pi r^3$ ঘন একক।



প্রিজম (Prism): যে ঘনবস্তুর দুই প্রান্ত সর্বসম এবং সমান্তরাল বহুভুজ দ্বারা আবদ্ধ এবং অন্য তলগুলো সামান্তরিক একে প্রিজম বলে। ভূমির তলের নামের ওপর নির্ভর করে প্রিজমের নামকরণ করা হয়। যেমন- ত্রিভুজাকার প্রিজম, চতুর্ভুজাকার প্রিজম, পঞ্চভুজাকার প্রিজম ইত্যাদি।

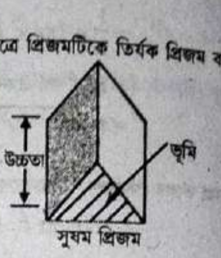


কাচের তৈরি খাড়া ত্রিভুজাকার প্রিজম আলোকরশ্মি বিচ্ছুরণের জন্য ব্যবহৃত হয়

সমপ্রিজম ও তির্যক প্রিজম: সবগুলো পার্শ্বতল আয়তাকার হলে প্রিজমটিকে খাড়া বা সমপ্রিজম বলে এবং অন্যক্ষেত্রে প্রিজমটিকে তির্যক প্রিজম বলা হয়। বাস্তবে খাড়া প্রিজমই অধিক ব্যবহৃত হয়।

সুষম প্রিজম (Regular Prism): ভূমি সুষম বহুভুজ হলে প্রিজমকে সুষম প্রিজম বলে।

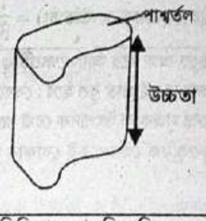
বিষম প্রিজম (Irregular Prism): ভূমি সুষম না হলে ইহাকে বিষম প্রিজম বলে।



সংজ্ঞানুসারে আয়তাকার ঘনবস্তু ও ঘনক উভয়কেই প্রিজম বলা হয়

প্রিজমের আয়তন:

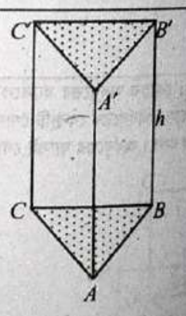
(ক) বিষম প্রিজমের আয়তন = পার্শ্বতলগুলোর ক্ষেত্রফল × উচ্চতা



(খ) আয়তাকার প্রিজমের ক্ষেত্রফল,
= ছয়টি আয়তাকার তলের ক্ষেত্রফলের সমষ্টি
প্রিজমের আয়তন = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ × উচ্চতা
= ভূমির ক্ষেত্রফল × উচ্চতা

(গ) সিলিন্ডার আকৃতির প্রিজমের ক্ষেত্রে,
বক্রতলের ক্ষেত্রফল = $2\pi rh$
প্রিজমের আয়তন = $\pi r^2 h$

প্রিজমের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল = 2(ভূমির ক্ষেত্রফল) + পার্শ্বতলগুলোর ক্ষেত্রফল
= 2(ভূমির ক্ষেত্রফল) + ভূমির পরিসীমা × উচ্চতা



বর্ণনা: পাশের চিত্রে একটি ত্রিভুজাকৃতির প্রিজম দেখানো হয়েছে।

এর সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল = ABC তলের ক্ষেত্রফল + $A'B'C'$ তলের ক্ষেত্রফল + $ABB'A'$ তলের ক্ষেত্রফল + $ACC'A'$ তলের ক্ষেত্রফল + $BB'C'C$ তলের ক্ষেত্রফল

= $2 \times ABC$ তলের ক্ষেত্রফল + $(AB \times h)$ বর্গ একক + $(AC \times h)$ বর্গ একক + $(BC \times h)$ বর্গ একক [$\because$ ABC তল = $A'B'C'$ তল]

= $2 \times ABC$ তলের ক্ষেত্রফল + $h\,(AB + AC + BC)$ বর্গ একক

= $2 \times ABC$ তলের ক্ষেত্রফল + $h \times \Delta ABC$ এর পরিসীমা বর্গ একক

= 2 × ভূমির ক্ষেত্রফল + ভূমির পরিসীমা × উচ্চতা বর্গ একক

উদাহরণ:

চিত্রে প্রদত্ত প্রিজমটির ক্ষেত্রফল = (2 × ভূমির ক্ষেত্রফল) + ভূমির পরিসীমা × উচ্চতা

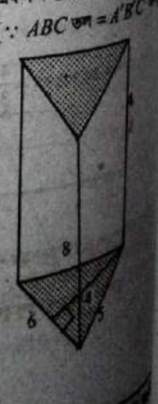
= $\{(2 \times \frac{1}{2} \times 6 \times 4) + (8 + 6 + 5) \times 4\}$ বর্গ একক

= $(24 + 19 \times 4)$ বর্গ একক

= $(24 + 76)$ বর্গ একক = 100 বর্গ একক

এবং আয়তন = ভূমির ক্ষেত্রফল × উচ্চতা

= $\frac{1}{2} \times 6 \times 4 \times 4$ ঘন একক = 48 ঘন একক

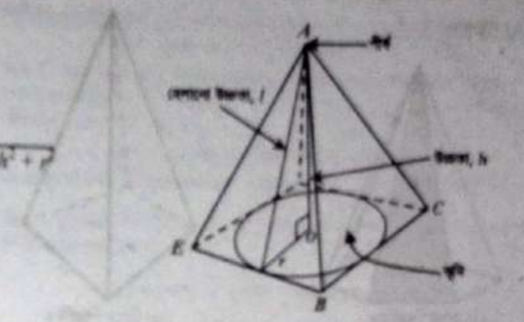


(গ) পিরামিডের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল = ভূমির ক্ষেত্রফল + পার্শ্বতলগুলোর ক্ষেত্রফল
কিন্তু পিরামিডের পার্শ্বতলগুলো সর্বসম ত্রিভুজ হলে,
পিরামিডের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল,

$= $ ভূমির ক্ষেত্রফল $+ \frac{1}{2}$ (ভূমির পরিধি $\times$ হেলানো উচ্চতা)

পিরামিডের উচ্চতা, h ভূমির অন্তবৃত্তের ব্যাসার্ধ, r এবং হেলানো উচ্চতা, ℓ হলে $\ell = \sqrt{h^2 + r^2}$

(ঘ) আয়তন $= \frac{1}{3} \times$ ভূমির ক্ষেত্রফল $\times$ উচ্চতা

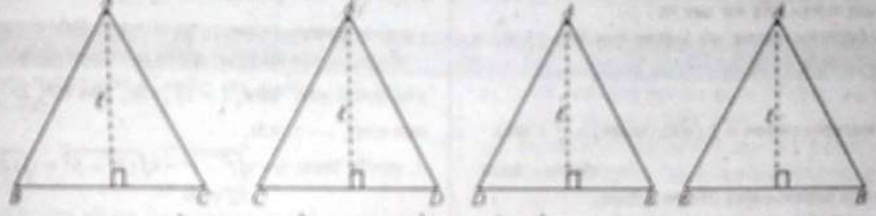


ঘন বস্তুর ধার পরিসীমা বাহুর দৈর্ঘ্য × বাহুর সংখ্যা

ব্যাখ্যা: চিত্রে একটি সুষম পিরামিড দেখানো হয়েছে। এর ভূমি বর্গাকার।
এর সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল = বর্গাকার ভূমির ক্ষেত্রফল + পার্শ্বতলগুলোর ক্ষেত্রফল

$= BCDE$ তলের ক্ষেত্রফল $+ ABC$ তলের ক্ষেত্রফল $+ ADC$ তলের ক্ষেত্রফল $+ ADE$ তলের ক্ষেত্রফল $+ AEB$ তলের ক্ষেত্রফল

এখানে, তল ABC, তল ADC, তল ADE, তল AEB এর প্রত্যেকে ত্রিভুজাকৃতির এদের ভূমিগুলো যথাক্রমে BC, DC, DE ও EB এবং প্রত্যেকের উচ্চতা হলো পিরামিডটির হেলানো তলের উচ্চতা।



সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $=$ ভূমির ক্ষেত্রফল $+ \frac{1}{2} \times BC \times \ell + \frac{1}{2} \times CD \times \ell + \frac{1}{2} \times DE \times \ell + \frac{1}{2} \times EB \times \ell$

$= $ ভূমির ক্ষেত্রফল $+ \frac{1}{2}(BC + CD + DE + EB) \times \ell$

$= $ ভূমির ক্ষেত্রফল $+ \frac{1}{2} \times$ ভূমির পরিসীমা $\times$ হেলানো উচ্চতা

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনমূলক কাজের সমাধান

ক. কাজ [পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-২৭৫]
১। তোমরা প্রত্যেকে একটি করে সুষম ঘনবস্তু ও বিষম ঘনবস্তুর নাম লিখ।
২। তোমার উল্লেখিত ঘনবস্তুগুলোর কয়েকটি ব্যবহার লিখ।

১। সমাধান:

সুষম ঘনবস্তু	বিষম ঘনবস্তু
আয়তাকার কাচফলক	ইটের খণ্ড
একটি সম্পূর্ণ ইট	কয়লার টুকরা
আয়তাকার একটি বাক্স	একখণ্ড পাথর

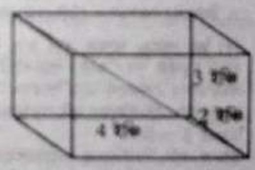
২। সমাধান:

নিচে সুষম ঘনবস্তু ও বিষম ঘনবস্তুর নাম ও ব্যবহার দেওয়া হলো:

সুষম ঘনবস্তু	ব্যবহার
আয়তাকার কাচফলক	আলোর প্রতিসরণ নির্ণয় করতে এবং চশমার লেন্স ইত্যাদি তৈরিতে।
একটি সম্পূর্ণ ইট	ঘরবাড়ি ও রাস্তাঘাট তৈরিতে।
আয়তাকার একটি বাক্স	মালামাল পরিবহনে।
ইটের খণ্ড	ঘর ও রাস্তাঘাট নির্মাণে।
কয়লার টুকরা	বিদ্যুৎ কেন্দ্রে জ্বালানি হিসেবে।
এক খণ্ড পাথর	বাড়ি, সেতু, রাস্তাঘাট ইত্যাদি নির্মাণে।

খ. কাজ [পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-২৭৭]
১। শিক্ষার্থীরা একটি ছোট বাক্স (খুঁটি অথবা দিয়াশলাই বাক্স) এর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা মেপে এর আয়তন, তলগুলোর ক্ষেত্রফল ও কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান:
মেপে দেখলাম শিক্ষার্থীর একটি ছোট বাক্সের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে 4 ইঞ্চি, 3 ইঞ্চি এবং 2 ইঞ্চি।



$\therefore$ বাক্সটির ছয়টি তলের ক্ষেত্রফল $= 2(4.3$

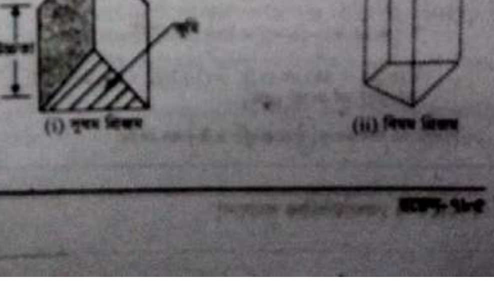
$= 2(12 + 6 + 8) = 52$ বর্গ ইঞ্চি

আয়তন $= (4 \times 3 \times 2)$ ঘন ইঞ্চি $= 24$ ঘন ইঞ্চি

এবং কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{4^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{16 + 9 + 4} = \sqrt{29}$ ইঞ্চি

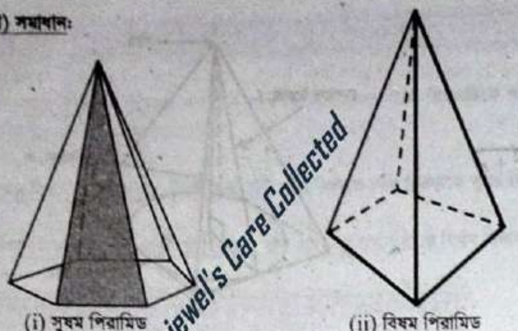
গ. কাজ [পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-২৭৮]
১। তোমরা প্রত্যেকে একটি করে সুষম ও একটি করে বিষম (ক) প্রিজম ও (খ) পিরামিড আঁক।
২। প্রত্যেকে সুষম, তোমার অঙ্কিত ঘনবস্তুটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল এবং আয়তন নির্ণয় কর।

১ (ক) সমাধান:



(i) সুষম প্রিজম (ii) বিষম প্রিজম

১ (খ) সমাধান:



(i) সুষম পিরামিড (ii) বিষম পিরামিড

২। সমাধান:

(ক) এর ক্ষেত্রে: বিষম প্রিজমের সংজ্ঞা হতে আমরা জানি, যে প্রিজমের ভূমি সুষম নয় তাকে বিষম প্রিজম বলে। ১নং প্রশ্নে উল্লেখিত চতুর্ভুজাকৃতির প্রিজমের ভূমি চতুর্ভুজটি সুষম নয়। তাই পাঠ্যবইয়ে প্রদত্ত সূত্র ব্যবহার করে এই প্রিজমের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল এবং আয়তন নির্ণয় করা সম্ভব নয়।

মেপে দেখলাম, সুষম ত্রিভুজাকার প্রিজমের ভূমি ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য 13, 12 ও 5 সে.মি. এবং উচ্চতা 10 সে.মি.।

আমরা জানি,

ত্রিভুজাকার প্রিজমের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $= 2$ (ভূমির ক্ষেত্রফল) $+ \frac{1}{2} \times$ ভূমির পরিসীমা $\times$ উচ্চতা।

এবং প্রিজমের আয়তন = ভূমির ক্ষেত্রফল $\times$ উচ্চতা

প্রিজমের ভূমির বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 13, 12 ও 5 সে.মি.

যেহেতু $12^2 + 5^2 = 13^2$, সুতরাং প্রিজমটির ভূমি একটি সমকোণী ত্রিভুজ যার ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2} \times 12 \times 5$ বর্গ সে.মি. $= 30$ বর্গ সে.মি.

$\therefore$ প্রিজমটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল,

$= \left\{2 \times 30 + \frac{1}{2}(13 + 12 + 5) \times 10\right\}$ বর্গ সে.মি.

$= \left(60 + \frac{1}{2} \times 30 \times 10\right)$ বর্গ সে.মি.

$= (60 + 150)$ বর্গ সে.মি. $=210$ বর্গ সে.মি.

$\therefore$ প্রিজমের আয়তন $= (30 \times 10)$ ঘনসে.মি. $= 300$ ঘন সে.মি.

(খ) এর ক্ষেত্রে: আবার, ১নং প্রশ্নে উল্লেখিত চতুর্ভুজাকৃতি বিষম পিরামিডের ভূমি সুষম চতুর্ভুজ নয়। তাই, পাঠ্যবইয়ে প্রদত্ত সূত্র ব্যবহার করে বিষম পিরামিডের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল এবং আয়তন নির্ণয় করা সম্ভব নয়। মেপে দেখলাম, সুষম ষড়ভুজাকার পিরামিডের ভূমি ষড়ভুজের প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য 2 সে.মি. এবং হেলানো উচ্চতা 8 সে.মি.।

আমরা জানি, পিরামিডের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল,

$=$ ভূমির ক্ষেত্রফল $+ \frac{1}{2}$ (ভূমির পরিসীমা $\times$ হেলানো উচ্চতা)

এবং পিরামিডের আয়তন $= \frac{1}{3} \times$ভূমির ক্ষেত্রফল$\times$উচ্চতা পিরামিডের বাহুর সংখ্যা, n

এবং প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য a হলে এর ভূমির ক্ষেত্রফল $= \frac{na^2}{4} \cot\left(\frac{180°}{6}\right)$

এক্ষেত্রে, ষড়ভুজাকার পিরামিডটির ভূমির ক্ষেত্রফল,

$= 6\sqrt{3} + \frac{1}{2}\{(2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2) \times 8\}$ বর্গ সে. মি.

$= \frac{6.(2)^2}{4} \cot\left(\frac{180°}{6}\right) = 6 \cot 30°$

$= 6\sqrt{3}$ বর্গ সে.মি. $[\because \cot 30° = \sqrt{3}]$

$\therefore$ পিরামিডের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল,

$= \left\{6\sqrt{3} + \frac{1}{2}(6 \times 2 \times 8)\right\}$ বর্গ সে.মি.

$= (6\sqrt{3} + 48)$ বর্গ সে.মি. $= (10.392 + 48)$ বর্গ.সে.মি.

58.392 বর্গ সে.মি. (প্রায়)

$\therefore$ পিরাডিমের আয়তন $= \left(\frac{1}{3} \times 6\sqrt{3} \times 8\right)$ ঘন সে.মি.

$= \frac{48\sqrt{3}}{3}$ ঘন সে.মি. $= (16\sqrt{3})$ ঘন সে.মি.

$= 27.713$ ঘন সে.মি. **(Ans)**

> **কাজ** [পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-
>
> জন্মদিনে বা অন্যান্য আনন্দ উৎসবে ব্যবহৃত কোণক আকৃতির একটি ক্যাপ সংগ্রহ করে এর বক্রতলের ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয় কর।

সমাধান:

- কোণক আকৃতির ক্যাপটিকে এর প্রতিসম রেখার সাপেক্ষে ভাঁজ করি।
- ভাঁজ খুলে ভাঁজ করা রেখা বরাবর মিটার স্কেল বসিয়ে কোণকটির ব্যাস নির্ণয় করি।
- নির্ণয়কৃত ব্যাসের পরিমাপকে 2 দ্বারা ভাগ করে কোণকটির ব্যাসার্ধ নির্ণয় করি।
- কোণকের শীর্ষ হতে হেলান তল বরাবর মিটার স্কেল বসিয়ে এর হেলান তলের উচ্চতা নির্ণয় করি।
- $h = \sqrt{\ell^2 - r^2}$ সূত্র ব্যবহার করে কোণকের উচ্চতা নির্ণয় করি।
- অতঃপর বক্রতলের ক্ষেত্রফলের সূত্র ও আয়তন নির্ণয়ের সূত্র ব্যবহার করে কোণক আকৃতির ক্যাপটির বক্রতলের ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয় করি।

এখন, হেলানো তলের উচ্চতা, $\ell = 13$ সে.মি., ভূমির ব্যাস, $2r = 10$ সে.মি.

অর্থাৎ ব্যাসার্ধ, $r = 5$ সে.মি.

$\therefore$ ক্যাপটির উচ্চতা, $h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144}$

$= 12$ সে.মি.

বক্রতলের ক্ষেত্রফল $= \pi r\ell = 3.1416 \times 5 \times 13$

$= 204.204$ বর্গ সে.মি. (প্রায়)

আয়তন $= \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \times 3.1416 \times (5)^2 \times 12$

$= 314.16$ ঘন সে.মি.

উত্তর: বক্রতলের ক্ষেত্রফল 204.204 বর্গ সে.মি. (প্রায়)

> **কাজ** [পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-
>
> একটি খেলনা বল বা ফুটবল নিয়ে তার ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর। অতঃপর এর আয়তন বের কর।

সমাধান:

একটি সুতা দিয়ে বলটির বৃহত্তর পরিধি পরিমাপ করি। এখন মিটার স্কেল দিয়ে সুতাটি পরিমাপ করে পাই, সুতার দৈর্ঘ্য 62.84 সে.মি.।

এখানে, সুতার দৈর্ঘ্য = বলের পরিধি।

এখন, ফুটবলটির ব্যাসার্ধ r সে.মি. হলে এর পরিধি $2\pi r$ সে.মি.

$\therefore 2\pi r = 62.84$

বা, $r = \frac{62.84}{2 \times 3.1416}$

বা, $r = 10.0012$

$\therefore$ বলটির ব্যাসার্ধ $r = 10$ সে.মি. (প্রায়)

$\therefore$ বলের আয়তন $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3} \times 3.1416 \times (10)^3$ ঘন সে.মি.

$= \frac{4}{3} \times 3.1416 \times 1000$ ঘন সে.মি.

$= 4188.8$ ঘন সে.মি.(প্রায়)

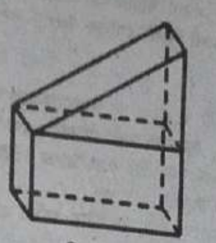
উত্তর: ব্যাসার্ধ 10 সে.মি.

এবং আয়তন 4188.8 ঘন সে.মি.(প্রায়)

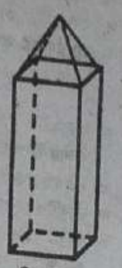
> **কাজ**
>
> তোমরা প্রত্যেকে একটি করে যৌগিক ঘনবস্তু অঙ্কন কর ও ... উহার ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয়ের সূত্র লেখ।

সমাধান:

চিত্র-1



চিত্র-2



চিত্র-3

চিত্র-1: ইহা একটি ক্যাপসুল যা দুটি অর্ধ-গোলক এবং একটি সিলিন্ডার নিয়ে গঠিত।

অর্ধ-গোলকের পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times 4\pi r^2$ বর্গ একক

" " আয়তন $= \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi r^3$ ঘন একক

সিলিন্ডারের পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল $= 2\pi rh$ বর্গ একক

" " আয়তন $= \pi r^2 h$ ঘন একক

চিত্র-2: ইহা ত্রিভুজাকার প্রিজম (উপরের অংশ) এবং আয়তাকার ঘনবস্তু (নিচের অংশ) দ্বারা গঠিত।

প্রিজমের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল,

$= 2$ (ভূমির ক্ষেত্রফল) + ভূমির পরিসীমা × উচ্চতা

প্রিজমের আয়তন = ভূমির ক্ষেত্রফল × উচ্চতা

চিত্র-3: ইহা একটি পিরামিড (উপরের অংশ) এবং আয়তাকার ঘনবস্তু (নিচের অংশ) দ্বারা গঠিত।

পিরামিডের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল,

= ভূমির ক্ষেত্রফল + $\frac{1}{2}$ (ভূমির পরিধি × হেলানো উচ্চতা)

পিরামিডের আয়তন $= \frac{1}{3} \times$ ভূমির ক্ষেত্রফল × উচ্চতা আয়তাকার ঘনবস্তুর

সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল

$= 2$ (দৈর্ঘ্য × প্রস্থ + প্রস্থ + উচ্চতা + উচ্চতা × দৈর্ঘ্য) বর্গ একক

আয়তাকার ঘনবস্তুর আয়তন = (দৈর্ঘ্য × প্রস্থ×উচ্চতা) ঘন একক।

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-১৩

১। একটি আয়তাকার ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য 5 সে.মি., প্রস্থ 4 সে.মি. এবং উচ্চতা 3 সে.মি. হলে এর কর্ণ কত?

(ক) $5\sqrt{2}$ সে.মি.　(খ) 25 সে.মি.

(গ) $25\sqrt{2}$ সে.মি.　(ঘ) 50 সে.মি.

২। কোনো সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ভিন্ন অপর বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য 4 সে.মি. এবং 3 সে.মি.। ত্রিভুজটিকে বৃহত্তর বাহুর চতুর্দিকে ঘোরালে –

i. উৎপন্ন ঘনবস্তুটি একটি সমবৃত্তভূমিক কোণক হবে

ii. ঘনবস্তুটি একটি সমবৃত্তভূমিক সিলিন্ডার হবে

iii. উৎপন্ন ঘনবস্তুটির ভূমির ক্ষেত্রফল হবে 9π বর্গ সে.মি.

ওপরের বাক্যগুলোর মধ্যে কোনটি সঠিক?

(ক) i　(খ) ii　(গ) i ও iii　(ঘ) ii ও iii

নিম্নের তথ্যের আলোকে ৩ ও ৪ নম্বর প্রশ্নের উত্তর দাও:

2 সে.মি. ব্যাসবিশিষ্ট একটি গোলক আকৃতির বল একটি সিলিন্ডার আকৃতির বাক্সে ঠিকভাবে এঁটে যায়।

৩। সিলিন্ডারের আয়তন কত?

(ক) 2π ঘন সে.মি.　(খ) 4π ঘন সে.মি.

(গ) 6π ঘন সে.মি.　(ঘ) 8π ঘন সে.মি.

৪। সিলিন্ডারটির অনধিকৃত অংশের আয়তন কত?

(ক) $\frac{\pi}{3}$ ঘন সে.মি.　(খ) $\frac{2\pi}{3}$ ঘন সে.মি.

(গ) $\frac{4\pi}{3}$ ঘন সে.মি.　(ঘ) $\frac{3\pi}{3}$ ঘন সে.মি.

নিম্নের তথ্যের ভিত্তিতে ৫ ও ৬ নম্বর প্রশ্নের উত্তর দাও:

6 সে.মি. ব্যাসবিশিষ্ট একটি ধাতব কঠিন গোলককে গলিয়ে 3 সে.মি. ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি সমবৃত্তভূমিক সিলিন্ডার তৈরি করা হলো।

৫। উৎপন্ন সিলিন্ডারটির উচ্চতা কত?

(ক) 4 সে.মি.　(খ) 6 সে.মি.　(গ) 8 সে.মি.　(ঘ) 12 সে.মি.

৬। সিলিন্ডারটির বক্রতলের ক্ষেত্রফল কত বর্গ সে.মি.?

(ক) 24π　(খ) 42π　(গ) 72π　(ঘ) 96π

৭। একটি আয়তাকার ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে 16 মি., 12 মি. ও 4.5 মিটার। এর পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল, কর্ণের দৈর্ঘ্য এবং আয়তন নির্ণয় কর।

৮। ভূমির ওপর অবস্থিত 2.5 মিটার দৈর্ঘ্য ও 1.0 মিটার প্রস্থ বিশিষ্ট (অভ্যন্তরীণ পরিমাপ) একটি আয়তাকার জলাধারের উচ্চতা 0.4 মিটার হলে, এর আয়তন এবং অভ্যন্তরীণ তলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

৯। একটি আয়তাকার ঘনবস্তুর মাত্রাগুলো 5 সে.মি., 4 সে.মি. ও 3 সে.মি. হলে, এর কর্ণের সমান ধারবিশিষ্ট ঘনকের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

১০। 70 জন ছাত্রের জন্য এরূপ একটি হোস্টেল নির্মাণ করতে হবে যাতে প্রত্যেক ছাত্রের জন্য 4.25 বর্গমিটার মেঝে ও 13.6 ঘনমিটার শূন্যস্থান থাকে। ঘরটি 3.4 মিটার লম্বা হলে, এর প্রস্থ ও উচ্চতা কত হবে?

১১। একটি সমবৃত্তভূমিক কোণকের উচ্চতা 8 সে.মি. এবং ভূমির ব্যাসার্ধ 6 সে.মি. হলে, সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয় কর।

১২। একটি সমবৃত্তভূমিক কোণকের উচ্চতা 24 সে.মি. এবং আয়তন 1232 ঘন সে.মি.। এর হেলানো উচ্চতা কত?

১৩। কোনো সমকোণী ত্রিভুজের দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য 5 সে.মি. এবং 3.5 সে.মি.। একে বৃহত্তর বাহুর চতুর্দিকে ঘোরালে যে ঘনবস্তু উৎপন্ন হয়, এর আয়তন নির্ণয় কর।

১৪। 6 সে.মি. ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট একটি গোলকের পৃষ্ঠতল ও আয়তন নির্ণয় কর।

১৫। 6, 8 ও r সে.মি. ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট তিনটি কঠিন কাঁচের বল গলিয়ে 9 সে.মি. ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট একটি কঠিন গোলকে পরিণত করা হলো। r এর মান নির্ণয় কর।

১৬। একটি ফাঁপা লোহার গোলকের বাইরের ব্যাস 13 সে.মি. এবং লোহার বেধ 2 সে.মি.। ঐ গোলকে ব্যবহৃত লোহা দিয়ে একটি নিরেট গোলক তৈরি করা হলো। তার ব্যাস কত হবে?

১৭। 4 সে.মি. ব্যাসার্ধের একটি নিরেট গোলককে গলিয়ে 5 সে.মি. বহির্ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট ও সমভাবে পুরু একটি ফাঁপা গোলক প্রস্তুত করা হলো। দ্বিতীয় গোলকটি কত পুরু?

১৮। একটি লোহার নিরেট গোলকের ব্যাসার্ধ 6 সে.মি.। এর লোহা থেকে 8 সে.মি. দৈর্ঘ্য ও 6 সে.মি. ব্যাসের কয়টি নিরেট সিলিন্ডার প্রস্তুত করা যাবে?

১৯। $\frac{22}{\pi}$ সে.মি. ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট একটি গোলক আকৃতির বল একটি ঘনক আকৃতির বাক্সে ঠিকভাবে এঁটে যায়। বাক্সটির অনধিকৃত অংশের আয়তন নির্ণয় কর।

২০। 13 সে.মি. ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট একটি গোলকের কেন্দ্র থেকে 12 সে.মি. দূরবর্তী কোন বিন্দুর মধ্য দিয়ে ব্যাসের ওপর লম্ব সমতল গোলকটিকে ছেদ করে। উৎপন্ন তলটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

২১। একটি ঢাকনাযুক্ত কাঠের বাক্সের বাইরের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ যথাক্রমে 1.6 মি., 1.2 মি., উচ্চতা 0.8 মিটার এবং এর কাঠ 3 সে.মি. পুরু। বাক্সটির ভেতরের তলের ক্ষেত্রফল কত? প্রতি বর্গমিটার 14.44 টাকা হিসাবে বাক্সের ভেতর রং করতে কত খরচ হবে?

২২। 120 মি. দৈর্ঘ্য ও 90 মি. প্রস্থবিশিষ্ট (বহির্মাপ) আয়তাকার বাগানের চতুর্দিকে 2 মি. উচ্চ ও 25 সে.মি. পুরু প্রাচীর নির্মাণ করতে 25 সে.মি. দৈর্ঘ্য 12.5 সে.মি. প্রস্থ এবং 8 সে.মি. বেধ বিশিষ্ট কতগুলো ইট লাগবে?

২৩। একটি আয়তাকার ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের অনুপাত 4 : 3 এবং এর আয়তন 2304 ঘন সে.মি.। প্রতি বর্গসেন্টিমিটারে 10 টাকা হিসাবে ঐ বস্তুর তলায় সীসার প্রলেপ দিতে 1920 টাকা খরচ হলে, ঐ বস্তুর মাত্রাগুলো নির্ণয় কর।

২৪। কোণক আকারের একটি তাঁবুর উচ্চতা 7.5 মিটার। এই তাঁবু দ্বারা 2000 বর্গমিটার জমি ঘিরতে চাইলে কী পরিমাণ ক্যানভাস লাগবে?

২৫। একটি পঞ্চভুজাকার প্রিজমের দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 6 সে.মি. ও 8 সে.মি. এবং অপর তিনটি বাহুর প্রত্যেকটির দৈর্ঘ্য 10 সে.মি., উচ্চতা 12.5 সে.মি.। প্রিজমটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয় কর।

২৬। 4 সে.মি. বাহুবিশিষ্ট একটি সুষম ষড়ভুজাকার প্রিজমের উচ্চতা 5 সে.মি.। ইহার সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল ও আয়তন বের কর।

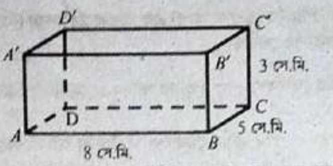
২৭। 6 সে.মি. বাহুবিশিষ্ট সুষম ষড়ভুজের ওপর অবস্থিত একটি পিরামিডের উচ্চতা 10 সে.মি.। ইহার সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয় কর।

২৮। একটি সুষম চতুস্তলকের যেকোনো ধারের দৈর্ঘ্য 8 সে.মি. হলে, ইহার সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয় কর।

২৯। একটি স্থাপনার নিচের অংশ 3 মি. দৈর্ঘ্য আয়তাকার ঘনবস্তু ও উপরের অংশ সুষম পিরামিড। পিরামিডের ভূমির বাহুর দৈর্ঘ্য 2 মি. এবং উচ্চতা 3 মি. হলে স্থাপনাটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয় কর।

৩০। 25 মি. দৈর্ঘ্য ও 18 মি. প্রস্থবিশিষ্ট ভূমির উপর অবস্থিত দোচালা গুদাম ঘরের দেয়ালের উচ্চতা 5 মি.। প্রতিটি চালার প্রস্থ 14 মি. হলে গুদাম ঘরটির আয়তন নির্ণয় কর।

৩১।



ক. চিত্রের ঘনবস্তুটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

খ. ঘনবস্তুটির কর্ণের সমান ধারবিশিষ্ট একটি ধাতব ঘনককে গলিয়ে 18 সে.মি. ব্যাসবিশিষ্ট কতগুলো নিরেট গোলক উৎপন্ন করা যাবে তা নিকটতম পূর্ণসংখ্যায় নির্ণয় কর।

গ. ঘনবস্তুটির $ABCD$ তলের সমান আয়তক্ষেত্রকে বৃহত্তর বাহুর চতুর্দিকে ঘোরালে যে ঘনবস্তু উৎপন্ন হয়, এর সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল এবং আয়তন নির্ণয় কর।

৩২। একটি সমবৃত্তভূমিক কোনকৃতির তাঁবুর উচ্চতা 8 মিটার এবং এর ভূমির ব্যাস 50 মিটার।

ক. তাঁবুটির হেলানো উচ্চতা নির্ণয় কর।

খ. তাঁবুটি স্থাপন করতে কত বর্গমিটার জমির প্রয়োজন হবে? তাঁবুটির ভিতরের শূন্যস্থানের পরিমাণ নির্ণয় কর।

গ. তাঁবুটির প্রতি বর্গমিটার ক্যানভাসের মূল্য 125 টাকা হলে ক্যানভাস বাবদ কত খরচ হবে?

অনুশীলনী-১৩ এর সমাধান

১। একটি আয়তাকার ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য 5 সে.মি., প্রস্থ 4 সে.মি. এবং উচ্চতা 3 সে.মি. হলে এর কর্ণ কত?

(ক) $5\sqrt{2}$ সে.মি. (খ) 25 সে.মি.

(গ) $25\sqrt{2}$ সে.মি. (ঘ) 50 সে.মি.

উত্তর: (ক) $5\sqrt{2}$ সে.মি.

ব্যাখ্যা:

আয়তাকার ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে a, b ও c একক হলে এর কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{a^2+b^2+c^2}$ একক

$\therefore$ আলোচনাধীন ঘনবস্তুটির কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{5^2+4^2+3^2}$ সে.মি.

$= \sqrt{25+16+9}$ সে.মি.

$= \sqrt{50}$ সে.মি.

$= \sqrt{25\times 2}$ সে.মি.

$= 5\sqrt{2}$ সে.মি.।

Note: পাঠ্যবইয়ের প্রশ্নে 8 সে.মি. এর পরিবর্তে 5 সে.মি. হবে।

২। কোনো সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ভিন্ন অপর বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য 4 সে.মি. এবং 3 সে.মি.। ত্রিভুজটিকে বৃহত্তর বাহুর চর্তুর্দিকে ঘোরালে –

i. উৎপন্ন ঘনবস্তুটি একটি সমবৃত্তভূমিক কোণক হবে

ii. ঘনবস্তুটি একটি সমবৃত্তভূমিক সিলিন্ডার হবে

iii. উৎপন্ন ঘনবস্তুটির ভূমির ক্ষেত্রফল হবে 9π বর্গ সে.মি.

ওপরের বাক্যগুলোর মধ্যে কোনটি সঠিক?

(ক) i (খ) ii (গ) i ও iii (ঘ) ii ও iii

উত্তর: (গ) i ও iii

ব্যাখ্যা:

- আমরা জানি, কোনো সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ সংলগ্ন একটি বাহুকে অক্ষ (axis) ধরে এর চতুর্দিকে ত্রিভুজটিকে একবার ঘুরিয়ে আনলে যে ঘনবস্তু উৎপন্ন হয়। একে সমবৃত্তভূমিক কোণক বলা হয়।
- এখানে, অতিভুজ ভিন্ন অপর বাহুদ্বয় দেওয়া আছে। সুতরাং বৃহত্তর বাহুর 4 সে.মি. এর চতুর্দিকে ঘোরালে যে কোণক উৎপন্ন হবে এর উচ্চতা, $h = 4$ সে.মি. ও ভূমির ব্যাসার্ধ $r = 3$ সে.মি.।

অতএব, কোণকটির ভূমির ক্ষেত্রফল $= \pi r^2$ বর্গ একক

$= \pi \times 3^2$ বর্গ সে.মি.

$= 9\pi$ বর্গ সে.মি.

$\therefore$ (i) ও (iii) নং সঠিক।

নিচের তথ্যের আলোকে ৩ ও ৪ নম্বর প্রশ্নের উত্তর দাও:

2 সে.মি. ব্যাসবিশিষ্ট একটি গোলক আকৃতির বল একটি সিলিন্ডার আকৃতির বাক্সে ঠিকভাবে এঁটে যায়। (VVI)

৩। সিলিন্ডারের আয়তন কত?

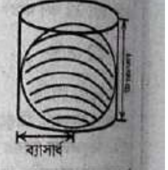
(ক) 2π ঘন সে.মি. (খ) 4π ঘন সে.মি.

(গ) 6π ঘন সে.মি. (ঘ) 8π ঘন সে.মি.

উত্তর: (ক) 2π ঘন সে.মি.

ব্যাখ্যা:

2 সে.মি. ব্যাসবিশিষ্ট একটি গোলক আকৃতির বল একটি সিলিন্ডার আকৃতির বাক্সে ঠিকভাবে এঁটে যায়।



সুতরাং, সিলিন্ডার আকৃতির বাক্সটির উচ্চতা হবে বলটির ব্যাসের সমান এবং ব্যাসার্ধ হবে বলটির ব্যাসার্ধের সমান। (চিত্রে দ্রষ্টব্য)

$\therefore$ বাক্সটির উচ্চতা, $h = 2$ সে.মি.

এবং ব্যাসার্ধ $= \frac{1}{2} \times 2 = 1$ সে.মি.

$\therefore$ বাক্সের আয়তন $= \pi r^2 h$

$= \pi \times 1^2 \times 2$

$= 2\pi$ ঘন সে.মি

৪। সিলিন্ডারটির অনধিকৃত অংশের আয়তন কত?

(ক) $\frac{\pi}{3}$ ঘন সে.মি. (খ) $\frac{2\pi}{3}$ ঘন সে.মি.

(গ) $\frac{4\pi}{3}$ ঘন সে.মি. (ঘ) $\frac{3\pi}{3}$ ঘন সে.মি.

উত্তর: (খ) $\frac{2\pi}{3}$ ঘন সে.মি.

ব্যাখ্যা:

অনধিকৃত অংশের আয়তন = বাক্সের আয়তন – বলের আয়তন

এখন, বলের আয়তন $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3}\pi \times 1^3$

$= \frac{4\pi}{3}$ ঘন সে.মি.

$\therefore$ অনধিকৃত অংশের আয়তন $= 2\pi - \frac{4\pi}{3}$

$= \frac{2\pi}{3}$ ঘন সে.মি.

নিচের তথ্যের ভিত্তিতে ৫ ও ৬ নম্বর প্রশ্নের উত্তর দাও: (VI)

6 সে.মি. ব্যাসবিশিষ্ট একটি ধাতব কঠিন গোলককে গলিয়ে 3 সে.মি. ব্যাসার্ধের একটি সমবৃত্তভূমিক সিলিন্ডার তৈরি করা হলো।

৫। উৎপন্ন সিলিন্ডারটির উচ্চতা কত?

(ক) 4 সে.মি. (খ) 6 সে.মি. (গ) 8 সে.মি. (ঘ) 12 সে.মি.

উত্তর: (ক) 4 সে.মি.

ব্যাখ্যা:

যেহেতু গোলক গলিয়ে সিলিন্ডার তৈরি করা হয়েছে। তাই গোলকের আয়তন সিলিন্ডারের আয়তনের সমান।

গোলকের ব্যাস 6 সে.মি.

$\therefore$ ব্যাসার্ধ $r = \frac{6}{2}$ সে.মি.

$= 3$ সে.মি.

$\therefore$ গোলকের আয়তন $= \frac{4}{3}\pi r^3$ ঘন সে.মি.

$= \frac{4}{3} \times \pi \times 3^3$ ঘন সে.মি.

$= 36\pi$ ঘন সে.মি.

ধরি, সমবৃত্তভূমিক সিলিন্ডারটির উচ্চতা, h সে.মি.

দেওয়া আছে, সিলিন্ডারটির ব্যাসার্ধ, $r = 3$ সে.মি.

$\therefore$ সমবৃত্তভূমিক সিলিন্ডারটির আয়তন $= \pi r^2 h$ ঘন সে.মি.

$\therefore \pi r^2 h = 36\pi$

বা, $r^2 h = 36$

বা, $h = \frac{36}{3^2}$ $[\because r = 3]$

$\therefore h = 4$ সে.মি.

৬। সিলিন্ডারটির বক্রতলের ক্ষেত্রফল কত বর্গ সে.মি.?

(ক) 24π (খ) 42π (গ) 72π (ঘ) 96π

উত্তর: (ক) 24π

ব্যাখ্যা:

সিলিন্ডারের বক্রতলের ক্ষেত্রফল,

$= 2\pi rh$ বর্গ সে.মি.

$= 2 \times \pi \times 3 \times 4$ বর্গ সে.মি. [$\because$ ৫ এর ব্যাখ্যা হতে $r = 3$ সে.মি. ও $h = 4$ সে.মি.]

$= 24\pi$ বর্গ সে.মি.

৭। একটি আয়তাকার ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে 16 মি., 12 মি. ও 4.5 মিটার। এর পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল, কর্ণের দৈর্ঘ্য এবং আয়তন নির্ণয় কর।

সমাধান:

দেওয়া আছে, আয়তাকার ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য, $a = 16$ মিটার

প্রস্থ, $b = 12$ মিটার

এবং উচ্চতা, $c = 4.5$ মিটার।

আমরা জানি,

আয়তাকার ঘনবস্তুর পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল,

$= 2(ab + bc + ca)$ বর্গ একক

$= 2(16 \times 12 + 12 \times 4.5 + 4.5 \times 16)$ বর্গমিটার

$= 2(192 + 54 + 72)$ বর্গমিটার

$= 636$ বর্গমিটার

আমরা জানি,

আয়তাকার ঘনবস্তুর কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ একক

$= \sqrt{(16)^2 + (12)^2 + (4.5)^2}$ মিটার

$= \sqrt{256 + 144 + 20.25}$ মিটার

$= \sqrt{420.25}$ মিটার

$= 20.5$ মিটার

আমরা জানি,

আয়তকার ঘনবস্তুর আয়তন $= (a \times b \times c)$ ঘনএকক

$= (16 \times 12 \times 4.5)$ ঘনমিটার

$= 864$ ঘনমিটার।

আয়তাকার ঘনবস্তুর পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল, কর্ণের দৈর্ঘ্য ও আয়তন যথাক্রমে 636 বর্গমিটার, 20.5 মিটার ও 864 ঘনমিটার। (Ans.)

৮। ভূমির ওপর অবস্থিত 2.5 মিটার দৈর্ঘ্য ও 1.0 মিটার প্রস্থ বিশিষ্ট (অভ্যন্তরীণ পরিমাপ) একটি আয়তাকার জলাধারের উচ্চতা 0.4 মিটার হলে, এর আয়তন এবং অভ্যন্তরীণ তলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। (VI)

সমাধান:

দেওয়া আছে,

আয়তাকার জলাধারের, দৈর্ঘ্য, $a = 2.5$ মিটার

প্রস্থ, $b = 1.0$ মিটার

ও উচ্চতা, $c = 0.4$ মিটার

আমরা জানি,

আয়তাকার ক্ষেত্রের আয়তন $= abc$ ঘনএকক

$= 2.5 \times 1.0 \times 0.4$ ঘনমিটার

$= 1$ ঘনমিটার

আমরা জানি,

আয়তাকার ক্ষেত্রের অভ্যন্তরীণ তলের ক্ষেত্রফল,

$= 2(ab + bc + ca)$ বর্গ একক

$= 2(2.5 \times 1.0 + 1.0 \times 0.4 + 0.4 \times 2.5)$ বর্গমিটার

$= 2(2.5 + 0.4 + 1.00)$ বর্গমিটার

$= 7.8$ বর্গমিটার

উত্তর: আয়তাকার জলাধারের আয়তন 1 ঘনমিটার এবং অভ্যন্তরীণ তলের ক্ষেত্রফল 7.8 বর্গমিটার।

৯। একটি আয়তাকার ঘনবস্তুর মাত্রাগুলো 5 সে.মি., 4 সে.মি. ও 3 সে.মি. হলে, এর কর্ণের সমান ধারবিশিষ্ট ঘনকের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান:

মনে করি, আয়তাকার ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ এবং উচ্চতা যথাক্রমে a একক, b একক ও c একক। ঘনবস্তুর কর্ণের সমান ধারাবিশিষ্ট ঘনকের সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে হবে।

দেওয়া আছে,

আয়তাকার ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য, $a = 5$ সে.মি.

প্রস্থ, $b = 4$ সে.মি.

এবং উচ্চতা, $c = 3$ সে. মি.

আমরা জানি,

আয়তাকার ঘনবস্তুর কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ একক

$= \sqrt{5^2 + 4^2 + 3^2}$ সে.মি.

$= \sqrt{25 + 16 + 9}$ সে.মি.

$= \sqrt{50}$ সে.মি.

$\therefore$ প্রশ্নমতে ঘনকের ধার, $a = \sqrt{50}$ সে.মি.

আমরা জানি,

ঘনকের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $= 6a^2$ বর্গ একক

$= 6\left(\sqrt{50}\right)^2$ বর্গ সে.মি.

$= 6 \times 50$ বর্গ সে.মি.

$= 300$ বর্গ সে.মি.

ঘনকের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল 300 বর্গ সে.মি. (Ans.)

[মনে রাখবে: সবচেয়ে বড় দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট মাত্রা দৈর্ঘ্য, তারচেয়ে ছোটটি প্রস্থ এবং সবচেয়ে ছোট মাত্রাটি উচ্চতা হিসেবে ধরা হয়]

১০। 70 জন ছাত্রের জন্য এরূপ একটি হোস্টেল নির্মাণ করতে হবে যাতে প্রত্যেক ছাত্রের জন্য 4.25 বর্গমিটার মেঝে ও 13.6 ঘনমিটার শূন্যস্থান থাকে। ঘরটি 3.4 মিটার লম্বা হলে, এর প্রস্থ ও উচ্চতা কত হবে? (VVI)

সমাধান:

দেওয়া আছে,

1 জন ছাত্রের জন্য প্রয়োজনীয় ক্ষেত্রফল $= 4.25$ বর্গমিটার মেঝে

$\therefore$ 70 " " " " $= (4.25 \times 70)$ বর্গ মি মেঝে

$= 297.50$ বর্গ মি. মেঝে

[illegible]

$$\frac{297.5}{3.4}$$

[illegible] $= 87.5$ [illegible]

[illegible]

1 [illegible] $= 13.6$ [illegible]

70 [illegible] $= (13.6 \times 70)$

$= 952$ [illegible]

[illegible] $= \dfrac{952}{3.4 \times 87.5}$ [illegible]

[illegible] $= 3.2$ [illegible]

[illegible] 87.5 [illegible] 3.2 [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] $h = 8$ [illegible]

$l = \sqrt{h^2 + r^2}$

$= \sqrt{8^2 + 6^2}$ [illegible]

$= \sqrt{100}$ [illegible]

$= 10$ [illegible]

[illegible]

[illegible] $= \pi r(l + r)$ [illegible]

$= 3.1416 \times 6 \times (10 + 6)$ [illegible]

$= 301.5936$ [illegible]

[illegible] $= \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$ [illegible]

$= \dfrac{1}{3}\pi(6)^2 8$ [illegible]

$= 301.5936$ [illegible]

[illegible] 301.6 [illegible] 301.6 [illegible]

[illegible] 24 [illegible] 1232 [illegible]

[illegible]

[illegible] $h = 24$ [illegible]

[illegible] $= \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$ [illegible]

[illegible] $\dfrac{1}{3}\pi r^2 h = 1232$ [illegible] $h = 24$ [illegible]

$r^2 = \dfrac{1232 \times 3}{24\pi}$

$r^2 = 49.0196$

$\therefore r = 7.0014$ [illegible]

[illegible] $l = \sqrt{h^2 + r^2}$ [illegible]

$= \sqrt{(24)^2 + (7.0014)^2}$ [illegible]

$= \sqrt{576 + 49.0196}$ [illegible]

$= \sqrt{625.02}$ [illegible]

$= 25$ [illegible]

[illegible] 25 [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] 5 [illegible]

[illegible] $h = 5$ [illegible]

$r = 3.5$ [illegible]

[illegible]

[illegible] $= \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$ [illegible]

$= \dfrac{1}{3} \times 3.1416 \times (3.5)^2 \times 5$ [illegible]

$= 64.14$ [illegible]

[illegible] 64.14 [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible] $r = 6$ [illegible]

[illegible] $= 4\pi r^2$ [illegible]

$\therefore$ 6 [illegible] $= 4 \times 3.1416 \times 6^2$ [illegible]

$= 452.3904$ [illegible]

$= 452.39$ [illegible]

[illegible] $= \dfrac{4}{3}\pi r^3$ [illegible]

$= \dfrac{4}{3} \times 3.1416 \times 6^3$ [illegible]

$= 904.7808 = 904.8$ [illegible]

[illegible] 452.39 [illegible] 904.8 [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

$A = \left\{\frac{4}{3}\pi\times 6^3 + \frac{4}{3}\pi\times 8^3 + \frac{4}{3}\pi r^3\right\}$ ঘন সে.মি.

$= \frac{4}{3}\pi\times(6^3 + 8^3 + r^3)$ ঘন সে.মি.

9 সে.মি. ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট গোলকের আয়তন, $B = \frac{4}{3}\pi\times 9^3$ ঘন সে.মি.

প্রশ্নমতে, A = B

বা, $\frac{4}{3}\pi\times(6^3 + 8^3 + r^3) = \frac{4}{3}\pi\times 9^3$

বা, $6^3 + 8^3 + r^3 = 9^3$

বা, $216 + 512 + r^3 = 729$

বা, $r^3 = 729 - 728 = 1$

$\therefore r = 1$

উত্তর: r এর মান 1 সে.মি.

১৬। একটি ফাঁপা লোহার গোলকের বাইরের ব্যাস 13 সে.মি. এবং লোহার বেধ 2 সে.মি.। ঐ গোলকে ব্যবহৃত লোহা দিয়ে একটি নিরেট গোলক তৈরি করা হলো তার ব্যাস কত হবে? (VI)

সমাধান:

<u>গোলকে ব্যবহৃত লোহার আয়তন নির্ণয়:</u>

গোলকের বাইরের ব্যাসার্ধ = $\frac{13}{2}$ সে.মি. = 6.5 সে.মি.

গোলকের ফাঁপা অংশের ব্যাসার্ধ = (6.5 – 2) = 4.5 সে.মি.

$\therefore$ ফাঁপা অংশের আয়তন = $\frac{4}{3}\times\pi\times 4.5^3$ ঘন সে.মি.

[$\because$ গোলকের আয়তন = $\frac{4}{3}\pi r^3$ ঘন একক]

$= \frac{4}{3}\times 3.1416\times(4.5)^3$ ঘন সে.মি.

= 381.7044 ঘন সে.মি.

সম্পূর্ণ গোলকের আয়তন = $\frac{4}{3}\times\pi\times 6.5^3$ ঘন সে.মি.

$= \frac{4}{3}\times 3.1416\times(6.5)^3$ ঘন সে.মি.

= 1150.3492 ঘন সে.মি.

$\therefore$ গোলকে ব্যবহৃত নিরেট লোহার আয়তন

= (1150.3492 – 381.7044) ঘন সে.মি.

= 768.6448 ঘন সে. মি.

এখন, নিরেট লোহার গোলকের ব্যাসার্ধ, r হলে এর আয়তন হবে $\frac{4}{3}\pi r^3$ ঘন একক যা ঐ নিরেট লোহার আয়তনের সমান।

$\therefore \frac{4}{3}\pi r^3 = 768.6448$

বা, $r^3 = \frac{768.6448\times 3}{4\times 3.1416}$

বা, $r^3 = 183.5$

$\therefore r = 5.6826$

$\therefore$ নিরেট লোহার গোলকের ব্যাস = 2r

= (2 × 5.6826) সে.মি.

= 11.3652 সে.মি.

= 11.37 সে.মি. (প্রায়)

উত্তর: নিরেট গোলকের ব্যাস 11.37 সে.মি. (প্রায়)

১৭। 4 সে.মি. ব্যাসার্ধের একটি নিরেট গোলককে গলিয়ে 5 সে.মি. বহিঃব্যাসার্ধ বিশিষ্ট ও সমভাবে পুরু একটি ফাঁপা গোলক প্রস্তুত করা হলো। দ্বিতীয় গোলকটি কত পুরু? (VVI)

সমাধান:

দেওয়া আছে,

নিরেট গোলকের ব্যাসার্ধ, r = 4 সে.মি.

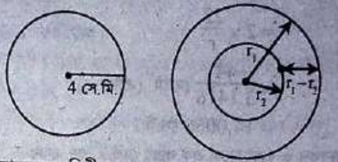
ধরি, ফাঁপা গোলকের অন্তঃব্যাসার্ধ = r_2 সে.মি.

এবং বহিঃব্যাসার্ধ = r_1

= 5 সে.মি. [দেওয়া আছে]

এখন, r_2 এর মান নির্ণয় করলে পুরুত্ব নির্ণয় করা যাবে।

আমরা জানি, উভয় গোলকের নিরেট লোহার আয়তন সমান যেহেতু একটিকে গলিয়ে অপরটি পাওয়া গিয়েছে।



প্রথম গোলকের আয়তন = দ্বিতীয় গোলকে লোহার আয়তন।

অর্থাৎ, $\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r_1^3 - \frac{4}{3}\pi r_2^3$

বা, $\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(r_1^3 - r_2^3)$

বা, $r^3 = r_1^3 - r_2^3$

বা, $r_2^3 = r_1^3 - r^3 = (5)^3 - (4)^3 = 125 - 64 = 61$

$\therefore r_2 = 3.937$ সে.মি.

$\therefore$ দ্বিতীয় গোলকের পুরুত্ব = $(r_1 - r_2)$

= (5 – 3.9364972) সে.মি.

= 1.0635028 সে.মি.

উত্তর: দ্বিতীয় গোলকের পুরুত্ব 1.06 সে.মি. (প্রায়)

১৮। একটি লোহার নিরেট গোলকের ব্যাসার্ধ 6 সে.মি.। এর লোহা থেকে 8 সে.মি. দৈর্ঘ্য ও 6 সে.মি. ব্যাসের কয়টি নিরেট সিলিন্ডার প্রস্তুত করা যাবে?

সমাধান:

দেওয়া আছে, নিরেট গোলকের ব্যাসার্ধ = 6 সে.মি.

এবং লোহার সিলিন্ডারের ব্যাস = 6 সে.মি.

বা ব্যাসার্ধ, $r = \frac{6}{2}$

= 3 সে.মি.

এবং দৈর্ঘ্য, $h = 8$ সে.মি.

আমরা জানি, গোলকের আয়তন = $\frac{4}{3}\pi(6)^3$ ঘন সে.মি.

এবং সিলিন্ডারের আয়তন = $\pi r^2 h$ ঘন একক

= $\pi r^2 8$ ঘন সে.মি.

= $\pi(3)^2\times 8$

যেহেতু, গোলক থেকে সিলিন্ডার তৈরি হবে অতএব গোলকের লোহার আয়তন সিলিন্ডার সমূহের লোহার আয়তনের সমান হবে।

মনে করি, n সংখ্যক সিলিন্ডার তৈরি হবে।

তাহলে, nটি সিলিন্ডারের আয়তন = 1টি গোলকের আয়তন

বা, $n\times\pi(3)^2\times 8 = \frac{4}{3}\pi\times 6^3$

বা, $n = \frac{\frac{4}{3}\pi\times 6^3}{\pi\times 3^2\times 8}$

$\therefore n = \frac{4\times 6^3}{3\times 3^2\times 8} = 4$

উত্তর: সিলিন্ডারের সংখ্যা 4 টি।

১৯। $\frac{22}{\pi}$ সে.মি. ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট একটি গোলক আকৃতির বল একটি ঘনক আকৃতির বাক্সে ঠিকভাবে এঁটে যায়। বাক্সটির অনধিকৃত অংশের আয়তন নির্ণয় কর। (VI)

সমাধানঃ

দেওয়া আছে, গোলকের ব্যাসার্ধ, $r = \frac{22}{\pi}$ সে.মি.

যেহেতু, গোলকটি ঘনক আকৃতির বাক্সে ঠিকভাবে এঁটে যায়।
সুতরাং, ঘনকের বাহু হবে গোলকের ব্যাসের সমান।

$\therefore$ ঘনকের বাহুর দৈর্ঘ্য = গোলকের ব্যাস

$= 2r$

$= 2 \times \frac{22}{r}$

$= \frac{44}{3.1416}$ সে.মি. (প্রায়)

$= 14.0056$ সে.মি.

$\therefore$ ঘনকের আয়তন = (যেকোনো এক বাহুর দৈর্ঘ্য)^3 ঘন একক

$= (14.0056)^3$ ঘন একক

$= 2747.2954$ ঘন সে.মি.

গোলকের আয়তন $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3} \times 3.1416 \times \left(\frac{22}{\pi}\right)^3$ ঘন সে.মি.

$= 1438.4832$ ঘন সে.মি.

$\therefore$ অনধিকৃত অংশের আয়তন = ঘনকের আয়তন – গোলকের আয়তন

$= (2747.2954 - 1438.4832)$ ঘন সে.মি.

$= 1308.812$ ঘন সে.মি.

উত্তরঃ অনধিকৃত অংশের আয়তন = 1308.812 ঘন সে.মি. (প্রায়)।

২০। 13 সে.মি. ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট একটি গোলকের কেন্দ্র থেকে 12 সে.মি. দূরবর্তী কোন বিন্দুর মধ্য দিয়ে ব্যাসের ওপর লম্ব সমতল গোলকটিকে ছেদ করে। উৎপন্ন তলটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান:

দেওয়া আছে, গোলকের ব্যাসার্ধ, OB = 13 সে.মি.
গোলকের কেন্দ্র থেকে তলের দূরত্ব, OA = 12 সে.মি.

তলের ক্ষেত্রফল নির্ণয়:

গোলকের ব্যাসার্ধ, r = 13 সে.মি.
এবং চিত্র থেকে, OA = 12 সে.মি.

$\therefore \Delta OBA$ থেকে পাই, $OB^2 = OA^2 + AB^2$

[এখানে, OB = গোলকের ব্যাসার্ধ, BA = তলের ব্যাসার্ধ, OA = কেন্দ্র থেকে তলের দূরত্ব]

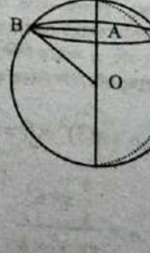
$\therefore AB^2 = OB^2 - OA^2$

$= 13^2 - 12^2$ [$\because$ OB = 12 এবং OA = 12 সে.মি.]

$= 169 - 144$

$= 25$

$\therefore AB = 5$ সে. মি.



এখন, সমতলটি একটি বৃত্ত হবে যার ব্যাসার্ধ = 5 সে.মি.
আমরা জানি,

বৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \pi r^2$ বর্গ একক

$\therefore$ উৎপন্ন তলের ক্ষেত্রফল $= \pi \times 5^2$ বর্গ সে.মি.

$= 25\pi$ বর্গ সে.মি.

$= 25 \times 3.1416$ বর্গ সে.মি.

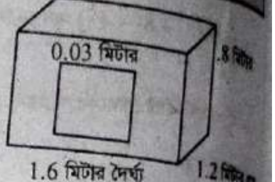
$= 78.54$ বর্গ সে.মি.

উত্তর: উৎপন্ন তলের ক্ষেত্রফল = 78.54 বর্গ সে.মি. (প্রায়)

২১। একটি ঢাকনাযুক্ত কাঠের বাক্সের বাইরের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ যথাক্রমে 1.6 মি., 1.2 মি. উচ্চতা 0.8 মিটার এবং এর কাঠ 3 সে.মি. পুরু। বাক্সটির ভেতরের তলের ক্ষেত্রফল ... প্রতি বর্গমিটার 14.44 টাকা হিসাবে বাক্সের ভেতর রং করতে কত খরচ হবে? (VI)

সমাধান:

দেওয়া আছে, বাক্সের বাইরের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ এবং উচ্চতা যথাক্রমে 1.6 মি., 1.2 মি., 0.8 মিটার। কাঠটি 3 সে.মি. বা 0.03 মি. পুরু।



বক্সটির ভিতরের তলের ক্ষেত্রফল নির্ণয়:

বাক্সের ভিতরের দৈর্ঘ্য, $a = (1.6 - 2 \times 0.03) = 1.54$ মি.

বাক্সের ভিতরের প্রস্থ, $b = (1.2 - 2 \times 0.03) = 1.14$ মি.

বাক্সের ভিতরের উচ্চতা, $c = (0.8 - 2 \times 0.03) = 0.74$ মি.

$\therefore$ ভিতরের তলের ক্ষেত্রফল,

$= 2(ab + bc + ca)$ বর্গমিটার

$= 2(1.54 \times 1.14 + 1.14 \times 0.74 + 0.74 \times 1.54)$ বর্গমিটার

[a, b এবং c এর মান বসিয়ে পাই]

$= 7.4776$ বর্গমিটার

$= 7.48$ বর্গমিটার (প্রায়)

খরচের পরিমাণ:

দেওয়া আছে, প্রতি বর্গমিটারে খরচ হয় = 14.44 টাকা

$\therefore$ বাক্সের ভিতরের 7.4776 বর্গমিটার ক্ষেত্রে খরচ হবে,

$= (14.44 \times 7.4776)$ টাকা

$= 107.98$ টাকা

উত্তর: বাক্সের ভিতরের তলের ক্ষেত্রফল 7.48 বর্গমিটার এবং খরচের পরিমাণ 107.98 টাকা। (প্রায়)

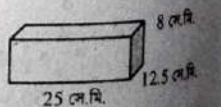
২২। 120 মি. দৈর্ঘ্য ও 90 মি. প্রস্থ বিশিষ্ট (বহির্মাপ) আয়তাকার বাগানের চতুর্দিকে 2 মি. উচ্চ ও 25 সে.মি. পুরু প্রাচীর নির্মাণ করতে 25 সে.মি. দৈর্ঘ্য, 12.5 সে.মি. প্রস্থ এবং 8 সে.মি. বেধ বিশিষ্ট কতগুলো ইট লাগবে? (VI)

সমাধান:

দেওয়া আছে,

বাগানের দৈর্ঘ্য, $A = 120$ মিটার

প্রস্থ, $B = 90$ মিটার



প্রাচীরের উচ্চতা, $H = 2$ মিটার

প্রাচীরের পুরুত্ব, $d = 25$ সে.মি.

$= 0.25$ মিটার

প্রতিটি ইটের দৈর্ঘ্য, $a = 25$ সে.মি.

$= 0.25$ মিটার।

প্রস্থ, $b = 12.5$ সে.মি.

$= 0.125$ মিটার

উচ্চতা, $c = 8$ সে.মি.

$= 0.08$ মিটার

প্রাচীর ছাড়া বাগানের দৈর্ঘ্য $= (A - 2d)$ মিটার

$= (120 - 2 \times 0.25)$ মিটার

$= 119.5$ মিটার

প্রাচীর ছাড়া বাগানের প্রস্থ $= (B - 2d)$ মিটার

$= (90 - 2 \times 0.25)$ মিটার

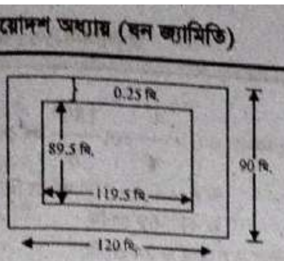
$= 89.5$ মিটার

$\therefore$ প্রাচীর ছাড়া বাগানের ক্ষেত্রফল $= (119.5 \times 89.5)$ বর্গমিটার

$= 10695.25$ বর্গমিটার

প্রাচীর সহ বাগানের ক্ষেত্রফল $= (120 \times 90)$ বর্গমিটার

$= 10800$ বর্গমিটার



∴ যে স্থানে প্রাচীর অবস্থিত সে স্থানের ক্ষেত্রফল,

= (প্রাচীর সহ বাগানের ক্ষেত্রফল – প্রাচীর ছাড়া বাগানের ক্ষেত্রফল)

$= (10800 - 10695.25)$ বর্গমিটার

$= 104.75$ বর্গমিটার

∴ প্রাচীরের আয়তন = প্রাচীরের অবস্থিত স্থানের ক্ষেত্রফল × প্রাচীরের উচ্চতা

$= (104.75 \times 2)$ ঘনমিটার

$= 209.5$ ঘনমিটার

প্রতিটি ইটের আয়তন = abc ঘন একক

$= 0.25 \times 0.125 \times 0.08$ ঘনমিটার

$= 0.0025$ মিটার।

মনে করি, প্রাচীরে মোট n টি ইট লাগে।

তাহলে, প্রাচীরের মোট আয়তন = n সংখ্যক ইটের আয়তন

$= n \times 0.0025$ ঘনমিটার

প্রশ্নমতে, $n \times 0.0025 = 209.5$

বা, $n = \frac{209.5}{0.0025}$

$\therefore n = 83800$

উত্তর: ইটের সংখ্যা 83800 টি।

২৩। একটি আয়তাকার ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের অনুপাত 4 : 3 এবং এর আয়তন 2304 ঘন সে.মি.। প্রতি বর্গসেন্টিমিটারে 10 টাকা হিসাবে ঐ বস্তুর তলায় সীসার প্রলেপ দিতে 1920 টাকা খরচ হলে, ঐ বস্তুর মাত্রাগুলো নির্ণয় কর।

সমাধান:

মনে করি, দৈর্ঘ্য = $4x$ সে.মি.

ও প্রস্থ = $3x$ সে.মি.

এবং উচ্চতা = h সে.মি.

ঐ বস্তুর আয়তন = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ × উচ্চতা

$= 4x \times 3x \times h$ ঘন সে.মি.

$= 12x^2h$ ঘন সে.মি.

প্রশ্নমতে, $12x^2h = 2304$ ... ... (i)

যেহেতু, প্রতি বর্গ সে.মি. 10 টাকা হিসেবে বস্তুটির তলায় সীসার প্রলেপ দিতে মোট খরচ হয় 1920 টাকা।

∴ তলের ক্ষেত্রফল = $\frac{1920}{10}$ বর্গ সে.মি.

$= 192$ বর্গ সে.মি.

$\therefore 4x \times 3x = 192$

বা, $12x^2 = 192$

বা, $x^2 = 16$

$\therefore x = 4$ সে.মি.

সমীকরণ (i) থেকে পাই, $12x^2h = 2304$

$h = \frac{2304}{12 \times (4)^2}$

$= 12$ সে.মি. $[\because x = 4]$

∴ দৈর্ঘ্য = $4x$

$= 4 \times 4$

$= 16$ সে.মি.

প্রস্থ = $3x$

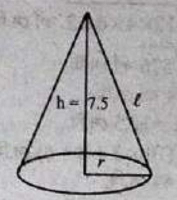
$= 3 \times 3$

$= 12$ সে.মি.

উত্তর: ঐ বস্তুর দৈর্ঘ্য = 16 সে.মি., প্রস্থ = 12 সে.মি., উচ্চতা = 12 সে.মি.

২৪। কোণক আকারের একটি তাঁবুর উচ্চতা 7.5 মিটার। এই তাঁবু দ্বারা 2000 বর্গমিটার জমি ঘিরতে চাইলে কী পরিমাণ ক্যানভাস লাগবে?

সমাধান:



ক্যানভাসের পরিমাণ নির্ণয়:

জমির ক্ষেত্রফল 2000 বর্গমিটার।

অতএব, কোণক আকৃতির ক্যানভাসের ভূমির ক্ষেত্রফল 2000 বর্গমিটার

ধরি, ভূমির ব্যাসার্ধ = r মি.

প্রশ্নমতে, $\pi r^2 = 2000$ [∵ কোণকের ভূমির ক্ষেত্রফল = πr^2 বর্গ একক]

বা, $r^2 = 636.62$

$\therefore r = 25.23129572$ মিটার

আমরা জানি,

কোণকের তির্যক বাহুর দৈর্ঘ্য, $\ell = \sqrt{h^2 + r^2}$ একক

$= \sqrt{(7.5)^2 + (25.23545895)^2}$ মিটার

$= 26.3223913$ মিটার

মোট ক্যানভাস পরিমাণ হবে কোণকের বক্রতলের ক্ষেত্রফলের সমান।

∴ তাঁবুর ক্যানভাসের পরিমাণ,

$= \pi r \ell$ বর্গমিটার [বক্রতলের ক্ষেত্রফলের সূত্রানুসারে]

$= 3.1416 \times 25.23129572 \times 26.3223913$ বর্গমিটার

$= 2086.487479 = 2086.49$ বর্গমিটার (প্রায়)

উত্তর: ক্যানভাসের পরিমাণ 2086.49 বর্গমিটার। (প্রায়)

[মনে রাখবে: ক্যানভাস মানে তাঁবুতে যে কাপড় ব্যবহার করা হয় তাকে বুঝায়]

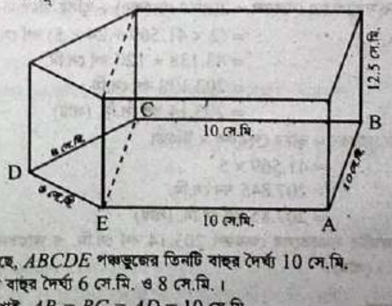
২৫। একটি পঞ্চভুজাকার প্রিজমের দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 6 সে.মি. ও 8 সে.মি. এবং অপর তিনটি বাহুর প্রত্যেকটির দৈর্ঘ্য 10 সে.মি., উচ্চতা 12.5 সে.মি.। প্রিজমটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয় কর।

সমাধান:

আমরা জানি, প্রিজমের নামকরণে এর ভূমি তলের নামের উপর নির্ভর করা হয়।

যেহেতু, প্রিজমের ভূমি একটি পঞ্চভুজ।

∴ প্রিজমটি পঞ্চভুজাকার।



দেওয়া আছে, $ABCDE$ পঞ্চভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য 10 সে.মি. এবং দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য 6 সে.মি. ও 8 সে.মি.।

চিত্র হতে পাই, $AB = BC = AD = 10$ সে.মি.

$CD = 8$ সে.মি.

এবং $DE = 6$ সে.মি.

পঞ্চভুজাকার প্রিজমটির ভূমি ABCE বর্গ এবং ΔCDE এর সমন্বয়ে গঠিত।

∴ $ABCE$ বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= (10)^2$ সে.মি. $= 100$ বর্গ সে.মি.

ΔCDE-এ, $CE = 10$ সে.মি.

∴ ত্রিভুজটির অর্ধপরিসীমা, $s = \frac{8+6+10}{2}$ সে.মি. $= 12$ সে.মি.

ΔCDE এর ক্ষেত্রফল $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ বর্গ একক

$= \sqrt{12(12-8)(12-6)(12-10)}$ বর্গ সে.মি.

$= \sqrt{12\times4\times6\times2}$ বর্গ সে.মি.

$= \sqrt{576}$ বর্গ সে.মি.

$= 24$ বর্গ সে.মি.

এখানে, প্রিজমের উচ্চতা, $h = 12.5$ সে.মি.

প্রিজমের ভূমির পরিসীমা $= (10\times3+8+6)$ সে.মি.

$= 44$ সে.মি.

আমরা জানি, প্রিজমের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল

$= 2$(ভূমির ক্ষেত্রফল) + ভূমির পরিসীমা $\times$ উচ্চতা

$= 2(100+24) + 44\times12.5$ বর্গ সে.মি.

$= 2\times124 + 550$ বর্গ সে.মি.

$= 798$ বর্গ সে.মি. **(উত্তর)**

এবং প্রিজমের আয়তন = ভূমির ক্ষেত্রফল $\times$ উচ্চতা

$= (100+24)\times12.5$ ঘন সে.মি.

$= 124\times12.5$ ঘন সে.মি.

$= 1550$ ঘন সে.মি. **(উত্তর)**

২৬ । 4 সে.মি. বাহুবিশিষ্ট একটি সুষম ষড়ভুজাকার প্রিজমের উচ্চতা 5 সে.মি. । ইহার সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল ও আয়তন বের কর। (VI)

সমাধান:

দেওয়া আছে, সুষম ষড়ভুজাকার প্রিজমের উচ্চতা = 5 সে.মি.

প্রিজমটি সুষম ষড়ভুজাকার বলে এখানে ভূমির ক্ষেত্রফল = 6টি সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের সমান যার প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য 4 সে.মি.

$\therefore$ প্রিজমটির ভূমির ক্ষেত্রফল $= 6\times\frac{\sqrt{3}}{4}$ (বাহুর দৈর্ঘ্য)^2

$= 6\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times4^2$

$= 6\sqrt{3}\times4$

$= 41.569$ বর্গ সে.মি.

$\therefore$ প্রিজমটির ভূমির পরিসীমা $= 6\times4$ সে.মি.

$= 24$ সে.মি

$\therefore$ প্রিজমের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $= 2$(ভূমির ক্ষেত্রফল) + ভূমির পরিসীমা $\times$ উচ্চতা

$= (2\times41.569 + 24\times5)$ বর্গ সে.মি.

$= 83.138 + 120$ বর্গ সে.মি.

$= 203.138$ বর্গ সে.মি.

$= 203.14$ বর্গ সে.মি. (প্রায়)

$\therefore$ প্রিজমের আয়তন = ভূমির ক্ষেত্রফল $\times$ উচ্চতা

$= 41.569\times5$

$= 207.845$ ঘন সে.মি.

$= 207.85$ ঘন সে.মি. (প্রায়)

উত্তর: প্রিজমটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল 203.14 বর্গ সে.মি. ও আয়তন 207.85 ঘন সে.মি.। (প্রায়)

বিকল্প পদ্ধতি:

দেওয়া আছে, সুষম ষড়ভুজাকার প্রিজমের উচ্চতা = 5 সে.মি.

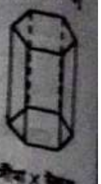
প্রিজমটি সুষম ষড়ভুজাকার বলে প্রিজমের ভূমি ষড়ভুজ, যার প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য = 4 সে.মি.

আমরা জানি,

n বাহু বিশিষ্ট সুষম বহুভুজের ক্ষেত্রফল $= n\times\frac{a^2}{4}\cot\frac{180°}{n}$ বর্গ একক

[যেখানে, a = বাহুর সংখ্যা]

$\therefore$ প্রিজমটির ভূমির ক্ষেত্রফল $= 6\times\frac{4^2}{4}\cot\frac{180°}{6}$ বর্গ সে.মি. [∵ n = 6]



$= 6\times4\cot30°$ বর্গ সে.মি.

$= 41.569$ সে.মি.

প্রিজমটির ভূমির পরিসীমা $= 6\times4 = 24$ সে.মি.

আমরা জানি,

প্রিজমের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $= 2$(ভূমির ক্ষেত্রফল) + ভূমির পরিসীমা $\times$ উচ্চতা

$= (2\times41.569 + 24\times5)$ বর্গ সে.মি.

$= 203.138$ বর্গ সে.মি.

$= 203.14$ বর্গ সে.মি. (প্রায়)

প্রিজমের আয়তন = ভূমির ক্ষেত্রফল $\times$ উচ্চতা

$= 41.569\times5$ ঘন সে.মি.

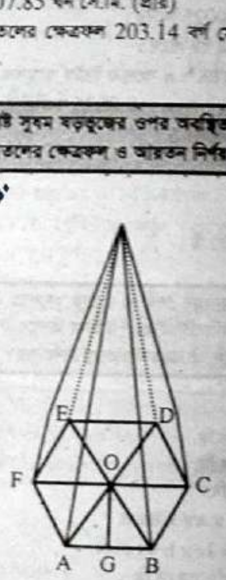
$= 207.845$ ঘন সে.মি.

$= 207.85$ ঘন সে.মি. (প্রায়)

উত্তর: প্রিজমটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল 203.14 বর্গ সে.মি. ও আয়তন 207.85 ঘন সে.মি.। (প্রায়)

২৭। 6 সে.মি. বাহুবিশিষ্ট সুষম ষড়ভুজের ওপর অবস্থিত একটি পিরামিডের উচ্চতা 10 সে.মি.। ইহার সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয় কর। (VVI)

সমাধান:



মনে করি, কোনো সুষম ষড়ভুজাকার পিরামিডের ভূমি ABCDEF। O, ভূমি বিপরীত কৌণিকবিন্দুগুলোর সংযোজক রেখাংশের ছেদ বিন্দু।

সুতরাং, O ভূমির কেন্দ্রবিন্দু। OP পিরামিডের উচ্চতা এবং OG ভূমির কেন্দ্র থেকে AB বাহুর উপর লম্বদূরত্ব।

অতএব, OG ভূমির অন্তর্বৃত্তের ব্যাসার্ধ।

দেওয়া আছে, সুষম ষড়ভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য, $AB = a = 6$ সে.মি.

এবং পিরামিডের উচ্চতা, $OP = h = 10$ সে.মি.

$\therefore$ পিরামিডের ভূমির পরিধি $= 6a$

$= 6\times6$ সে.মি.

$= 36$ সে.মি.

আমরা জানি, সুষম ষড়ভুজের বিপরীত কৌণিক বিন্দুগুলোর সংযোজক রেখাংশগুলোর পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে এবং ভূমিকে সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট ছয়টি সমবাহু ত্রিভুজে বিভক্ত করে।

$\therefore$ উৎপন্ন ΔOAB-এর $OA = AB = OB = a = 6$ সে.মি.

$\therefore$ সমবাহু ΔOAB-এর ক্ষেত্রফল $= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

$= \frac{\sqrt{3}}{4}\times6^2$ বর্গ সে.মি.

$= 9\sqrt{3}$ বর্গ সে.মি.

$\therefore$ পিরামিডের মোট ভূমির ক্ষেত্রফল $= 6\times9\sqrt{3}$ বর্গ সে.মি.

ধরি, $OG \perp AB$ এবং $OG = r$ সে.মি.

তাহলে, $AG = \frac{1}{2} AB$

$= \frac{6}{2}$ সে.মি.

$= 3$ সে.মি. [∵ সমবাহু ত্রিভুজের যেকোনো শীর্ষ থেকে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্ব ঐ বাহুকে সমদ্বিখণ্ডিত করে]

আবার, ΔOAB-এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times AB \times OG$

বা, $9\sqrt{3} = \frac{1}{2} \times 6 \times r$ বর্গ সে.মি.

বা, $3r = 9\sqrt{3}$ বর্গ সে.মি.

বা, $r = \frac{9\sqrt{3}}{3}$

$\therefore r = 3\sqrt{3}$

∴ পিরামিডের পার্শ্বতলের হেলানো উচ্চতা, $l = \sqrt{h^2 + r^2}$

$= \sqrt{(10)^2 + (3\sqrt{3})^2}$ সে.মি.

$= \sqrt{100 + 27}$ সে.মি.

$= \sqrt{127}$ সে.মি.

$= 11.269$ সে.মি.

∴ পিরামিডের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল = ভূমির ক্ষেত্রফল $+ \frac{1}{2}$ (ভূমির পরিধি × হেলানো উচ্চতা)

$= \left(6 \times 9\sqrt{3} + \frac{1}{2} \times 36 \times 11.269\right)$ বর্গ সে.মি.

$= (93.531 + 202.842)$ বর্গ সে.মি.

$= 296.373$ বর্গ সে.মি.

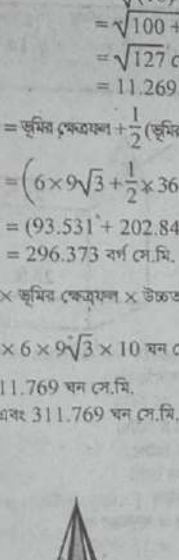
এবং পিরামিডের আয়তন $= \frac{1}{3} \times$ ভূমির ক্ষেত্রফল × উচ্চতা

$= \frac{1}{3} \times 6 \times 9\sqrt{3} \times 10$ ঘন সে.মি.

$= 311.769$ ঘন সে.মি.

উত্তর: 296.373 বর্গ সে.মি. এবং 311.769 ঘন সে.মি.।

বিকল্প পদ্ধতি:



সুষম পিরামিড

দেওয়া আছে, পিরামিডের ভূমি সুষম ষড়ভুজ যার প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য 6 সে.মি. এবং পিরামিডের উচ্চতা, $h = 10$ সে.মি.

আমরা জানি,

n বাহুবিশিষ্ট সুষম বহুভুজের ক্ষেত্রফল $= n \times \frac{a^2}{4} \cot \frac{180^\circ}{n}$ বর্গ একক

[যেখানে, a = বাহুর দৈর্ঘ্য]

∴ পিরামিডের ভূমির ক্ষেত্রফল $= 6 \times \frac{6^2}{4} \cot\left(\frac{180^\circ}{6}\right)$ বর্গ সে.মি. [∵ $n = 6$]

$= 6 \times 9 \times \cot 30^\circ$ বর্গ সে.মি.

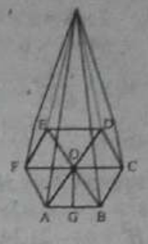
$= 93.53$ বর্গ সে.মি.

পিরামিডের ভূমির পরিসীমা $= (6 \times 6)$ সে.মি. [∵ বাহুর দৈর্ঘ্য = 6 সে.মি.]

$= 36$ সে.মি.

আমরা জানি,

সুষম পিরামিডের কেন্দ্র হতে যে কোনো শীর্ষবিন্দুর দূরত্ব = বাহুর দৈর্ঘ্য



$\therefore OA = 6$ সে.মি.

এবং $AG = \frac{6}{2} = 3$ সে.মি.

এখন,

সমকোণী OGA ত্রিভুজে, $OA^2 = OG^2 + AG^2$

বা, $OG^2 = OA^2 - AG^2$

$= 6^2 - 3^2$

$= 27$

এখন, পিরামিডের ভূমির কেন্দ্রবিন্দু হতে যেকোনো বাহুর লম্ব দূরত্ব r হলে,

$r^2 = OG^2$

$= 27$

অতএব, ইহার যেকোনো পার্শ্বতলের হেলানো উচ্চতা $= \sqrt{h^2 + r^2}$ একক

$= \sqrt{(10)^2 + 27}$ সে.মি.

$= 11.27$ সে.মি. (প্রায়)

আমরা জানি, পিরামিডের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল,

= ভূমির ক্ষেত্রফল $+ \frac{1}{2}$ (ভূমির পরিসীমা × হেলানো উচ্চতা)

$= \left\{93.53 + \frac{1}{2}(36 \times 11.27)\right\}$ বর্গ সে.মি.

$= \{93.53 + 202.86\}$ বর্গ সে.মি.

$= 296.39$ বর্গ সে.মি. (প্রায়)

পিরামিডের আয়তন $= \frac{1}{3} \times$ ভূমির ক্ষেত্রফল × উচ্চতা

$= \frac{1}{3} \times 93.53 \times 10$ ঘন সে.মি.

$= 311.77$ ঘন সে.মি. (প্রায়)

উত্তর: 311.77 ঘন সে.মি. (প্রায়)

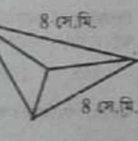
২৮। একটি সুষম চতুস্তলকের যেকোনো ধারের দৈর্ঘ্য 8 সে.মি. হলে, ইহার সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয় কর।

<u>সমাধান:</u>

দেওয়া আছে,

সুষম চতুস্তলকের যেকোনো ধারের দৈর্ঘ্য = 8 সে.মি.

আমরা জানি, সুষম চতুস্তলক এক ধরনের পিরামিড যা চারটি সমবাহু ত্রিভুজ দ্বারা গঠিত।



∴ চতুস্তলকের ভূমির ক্ষেত্রফল = সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times a^2$ বর্গ একক [a = বাহুর দৈর্ঘ্য]

$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times 8^2$ বর্গ সে.মি. $= 27.7128$ বর্গ সে.মি.

সুষম চতুস্তলকের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল

$= (4 \times 27.7128)$ বর্গ সে.মি. $= 110.85$ বর্গ সে.মি. (প্রায়)

চতুস্তলকের ত্রিভুজাকৃতি ভূমির লম্ব উচ্চতা h হলে

$8^2 = 4^2 + h^2$

বা, $h^2 = 8^2 - 4^2$

বা, $h^2 = 64 - 16$

বা, $h^2 = 48$ বা, $h = \sqrt{48}$ $\therefore h = 6.93$

এবং ত্রিভুজটির পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ x সে.মি. হলে-

ব্রহ্মগুপ্তের উপপাদ্য হতে পাই,

$8\times8=x\times h$

বা, $64=x\times6.93$

বা, $x=\frac{64}{6.93}$ $\therefore x=9.24$

$\therefore$ ব্যাসার্ধ $=\frac{x}{2}=\frac{9.24}{2}=4.62$ সে.মি.

$\therefore$ চতুস্তলকের উচ্চতা H হলে

$8^2=H^2+(4.62)^2$

বা, $H^2=64-21.34$

বা, $H^2=42.66$

বা, $H=\sqrt{42.66}$ $\therefore H=6.53146$

$\therefore$ চতুস্তলকটির আয়তন $=\frac{1}{3}\times$ ভূমির ক্ষেত্রফল $\times$ উচ্চতা

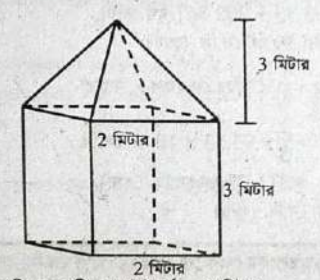
$=\frac{1}{3}\times\ 27.7128\times6.53146$

$=60.34$ ঘন সে.মি. (প্রায়)

উত্তর: চতুস্তলকটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল 110.85 বর্গ সে.মি. ও আয়তন 60.34 ঘন সে.মি.। (প্রায়)

২৯। একটি স্থাপনার নিচের অংশ 3 মি. দৈর্ঘ্য আয়তাকার ঘনবস্তু ও উপরের অংশ সুষম পিরামিড। পিরামিডের ভূমির বাহুর দৈর্ঘ্য 2 মি. এবং উচ্চতা 3 মি. হলে স্থাপনাটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয় কর।

সমাধান:



দেওয়া আছে, পিরামিডের ভূমির বাহুর দৈর্ঘ্য = 2 মিটার

উচ্চতা = 3 মিটার

$\therefore$ পিরামিডটি আয়তাকার ঘনবস্তুর উপর স্থাপিত বলে ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য, $a=2$ মিটার

প্রস্থ, $b=2$ মিটার

দেওয়া আছে, আয়তাকার ঘনবস্তুর উচ্চতা, $c=3$ মিটার

আমরা জানি, আয়তাকার ঘনবস্তুর আয়তন = abc ঘন একক

$=3\times2\times2$ ঘন মি.

$=12$ ঘন মি.

আবার, পিরামিডের ভূমির অর্থাৎ বর্গের ক্ষেত্রফল $=x^2$ বর্গ একক

$=2^2$ বর্গ মি.

$=4$ বর্গ মি.

আমরা জানি, পিরামিডের আয়তন $=\frac{1}{3}\times$ ভূমির ক্ষেত্রফল $\times$ উচ্চতা

$=\frac{1}{3}\times4\times3$ ঘন মিটার

$=4$ ঘন মি.

$\therefore$ স্থাপনাটির আয়তন $=(12+4)$ ঘন মি.

$=16$ ঘন মি.

আবার, আয়তাকার ঘন বস্তুর সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল,

$=2(ab+bc+ca)$ বর্গ একক

$=2(3\times2+2\times2+2\times3)$ বর্গ মিটার

$\therefore$ স্থাপনাটির নিচের আয়তাকার ঘনবস্তুটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল = 32 বর্গমিটার

পিরামিডের ভূমির পরিসীমা $=4\times2$ মিটার [$\because$ বাহুর দৈর্ঘ্য = 2 মি.]

$=8$ মিটার

পিরামিডের ভূমি কেন্দ্র হতে যেকোনো বিন্দুর লম্ব দূরত্ব,

$r=\frac{2}{2}=1$ মি.

$\therefore$ হেলানো উচ্চতা, $\ell=\sqrt{h^2+r^2}$ একক

$=\sqrt{3^2+1^2}$ মি.

$=3.162$ মি. (প্রায়)

$\therefore$ পিরামিডের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল,

$=$ ভূমির ক্ষেত্রফল $+\frac{1}{2}$ (ভূমির পরিসীমা $\times$ হেলানো উচ্চতা)

$=\left\{4+\frac{1}{2}(8\times3.162)\right\}$ বর্গ মিটার

$=(4+12.648)$ বর্গ মিটার

$=16.648$ বর্গ মিটার

$=16.65$ বর্গ মিটার

কিন্তু আয়তাকার ঘনবস্তুর উপরিতল এবং পিরামিডের ভূমি পরস্পরের ওপর স্থাপি...

যার ক্ষেত্রফল $=(4+4)$ বর্গ মিটার

$=8$ বর্গ মিটার

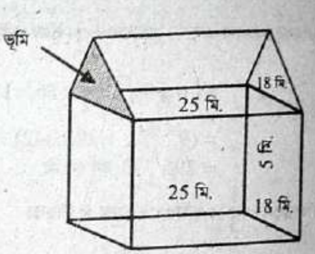
$\therefore$ স্থাপনাটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $=(32+16.65-8)$ বর্গ মি.

$=40.65$ বর্গ মিটার

উত্তর: 40.65 বর্গ মিটার, 16 ঘন সে.মি. (প্রায়)

৩০। 25 মি. দৈর্ঘ্য ও 18 মি. প্রস্থবিশিষ্ট ভূমির উপর অবস্থিত দোচালা গুদাম ঘরের দেয়ালের উচ্চতা 5 মি.। প্রতিটি চালার প্রস্থ 14 মি. হলে গুদাম ঘরটির আয়তন নির্ণয় কর।

সমাধান:



চিত্র থেকে পাই, দোচালা গুদাম ঘরটির নিচের অংশ একটি আয়তাকার ঘনবস্তু এবং উপরের অংশ একটি ত্রিভুজাকার প্রিজম।

$\therefore$ ঘনবস্তুটির দৈর্ঘ্য, $a=25$ মিটার,

প্রস্থ, $b=18$ মিটার

এবং উচ্চতা, $c=5$ মিটার

প্রিজমের উচ্চতা = ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য

$=25$ মিটার [$\therefore$ প্রিজমের উচ্চতা = চালার দৈর্ঘ্য]

প্রিজমের ভূমির একটি বাহু = ঘনবস্তুর প্রস্থ

$=18$ মিটার

প্রশ্নমতে,

প্রিজমের ভূমির অপর একটি বাহুর দৈর্ঘ্য = প্রতিটি চালার প্রস্থ

$=14$ মিটার।

আমরা জানি, ঘনবস্তুর আয়তন = abc ঘন একক

$=(25\times18\times5)$

$=2250$ ঘন মিটার

এবং সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $=\frac{b}{4}\sqrt{4a^2-b^2}$ বর্গ একক [যেখানে, a সমান বাহু...]

$\therefore$ প্রিজমের ভূমির ক্ষেত্রফল $=\frac{18}{4}\sqrt{4\times14^2-18^2}$ বর্গ সে.মি.

$=\frac{18}{4}\sqrt{(784-324)}$ বর্গ সে.মি.

$=96.5142$ বর্গ সে.মি. (প্রায়)

আবার, প্রিজমের আয়তন = ভূমির ক্ষেত্রফল $\times$ উচ্চতা

$=96.5142\times25$ ঘন মিটার

$=2412.855$ ঘন মিটার

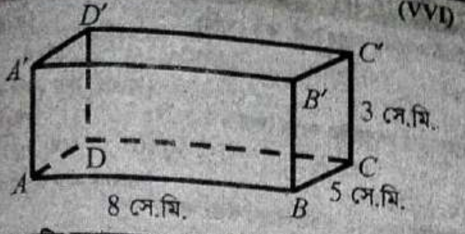
$=2412.86$ ঘন মিটার (প্রায়)

$\therefore$ দোচালা গুদাম ঘরটির আয়তন = ঘনবস্তুর + প্রিজমের আয়তন

$=(2250+2412.86)$ ঘন মি.

$=4662.86$ ঘন মিটার (প্রায়) (Ans.)

৩১। (VVI)



ক. চিত্রের ঘনবস্তুটির সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

খ. ঘনবস্তুটির কর্ণের সমান ধারবিশিষ্ট একটি ধাতব ঘনককে গলিয়ে 18 সে.মি. ব্যাসবিশিষ্ট কতগুলো নিরেট গোলক উৎপন্ন করা যাবে তা নিকটতম পূর্ণসংখ্যায় নির্ণয় কর।

গ. ঘনবস্তুটির $ABCD$ তলের সমান আয়তক্ষেত্রকে বৃহত্তর বাহুর চতুর্দিকে ঘোরালে যে ঘনবস্তু উৎপন্ন হয়, এর সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল এবং আয়তন নির্ণয় কর।

(ক) এর সমাধান:

চিত্র থেকে পাই, ঘনবস্তুটির দৈর্ঘ্য, $a = 8$ সে.মি.

প্রস্থ, $b = 5$ সে.মি.

এবং উচ্চতা, $c = 3$ সে.মি.

আমরা জানি,

ঘনবস্তুর সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল $= 2(ab + bc + ca)$ বর্গ একক

$= 2(8 \times 5 + 5 \times 3 + 3 \times 8)$ বর্গ সে.মি.

$= 158$ বর্গ সে.মি.

(খ) এর সমাধান:

আমরা জানি, ঘনবস্তুর কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ একক

$= \sqrt{8^2 + 5^2 + 3^2}$ ['ক' থেকে পাই]

$= 9.9$ সে.মি. (প্রায়)

প্রশ্নমতে,

ঘনকের ধার, $x =$ ঘনবস্তুর কর্ণের দৈর্ঘ্য $= 9.9$ সে.মি.

$\therefore$ ঘনকের আয়তন $= x^3$ ঘন একক

$= (9.9)^3$ ঘন সে.মি.

$= 970.299$ ঘন সে.মি. (প্রায়)

দেওয়া আছে,

গোলকের ব্যাস $= 8$ সে.মি.

$\therefore$ গোলকের ব্যাসার্ধ, $r = \frac{8}{2}$ সে.মি.

$= 4$ সে.মি.

আমরা জানি, গোলকের আয়তন $= \frac{4}{3}\pi r^3$ ঘন একক

$= \frac{4}{3}\pi \times 4^3$ ঘন সে.মি.

$= \frac{4}{3} \times 3.1416 \times 4^3$ ঘন সে.মি.

$= 268.0832$ ঘন সে.মি. (প্রায়)

ধরি, n সংখ্যক নিরেট গোলক তৈরি করা যাবে।

প্রশ্নমতে, $970.299 = n \times 268.0832$

বা, $n = \frac{970.299}{268.0832}$

$= 3.62$

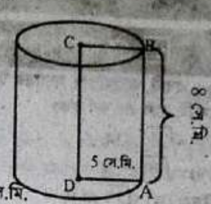
যেহেতু, নিকটতম পূর্ণসংখ্যায় গোলক উৎপন্ন করতে হবে।

$\therefore$ 3টি গোলক উৎপন্ন করা যাবে।

(গ) এর সমাধান:

$ABCD$ তলের সমান আয়তক্ষেত্রকে বৃহত্তর বাহুর চতুর্দিকে ঘোরালে একটি সমবৃত্তভূমিক সিলিন্ডার উৎপন্ন হয়, যার উচ্চতা, $h = AB = 8$ সে.মি.

এবং ভূমির ব্যাসার্ধ, $r = AD = 5$ সে.মি.



আমরা জানি, সিলিন্ডারের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল,

$= 2\pi r\,(r + h)$ বর্গ একক

$= 2 \times 3.1416 \times 5 \times (8 + 5)$ বর্গ সে.মি.

$= 408.408$ বর্গ সে.মি. (প্রায়)

এবং সিলিন্ডারের আয়তন $= \pi r^2 h$ ঘন একক

$= 3.1416 \times 5^2 \times 8$ ঘন সে.মি.

$= 628.32$ ঘন সে.মি. (প্রায়) **(Ans.)**

৩২। একটি সমবৃত্তভূমিক কোনকৃতির তাঁবুর উচ্চতা 8 মিটার এবং এর ভূমির ব্যাস 50 মিটার। **(VI)**

ক. তাঁবুটির হেলানো উচ্চতা নির্ণয় কর।

খ. তাঁবুটি স্থাপন করতে কত বর্গমিটার জমির প্রয়োজন হবে? তাঁবুটির ভিতরের শূন্যস্থানের পরিমাণ নির্ণয় কর।

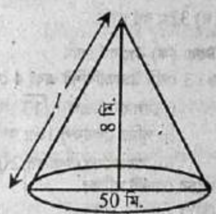
গ. তাঁবুটির প্রতি বর্গমিটার ক্যানভাসের মূল্য 125 টাকা হলে ক্যানভাস বাবদ কত খরচ হবে?

(ক) এর সমাধান:

দেওয়া আছে, তাঁবুর উচ্চতা, $h = 8$ মিটার

এবং ভূমির ব্যাস $= 50$ মিটার

$\therefore$ ভূমির ব্যাসার্ধ, $r = \frac{50}{2} = 25$ মিটার



আমরা জানি,

হেলানো উচ্চতা, $\ell = \sqrt{h^2 + r^2}$

$= \sqrt{8^2 + 25^2}$ মি.

$= 26.25$ মি. (প্রায়) **(উত্তর)**

(খ) এর সমাধান:

তাঁবুটি স্থাপন করতে তার তলের সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট জায়গা লাগবে যা একটি বৃত্ত।

$\therefore$ তাঁবুটির তলের ক্ষেত্রফল $= \pi r^2$ বর্গ একক

$= 3.1416 \times 25^2$ বর্গ মিটার

$= 1963.50$ বর্গ মিটার (প্রায়)

$\therefore$ তাঁবুটি স্থাপন করতে 1963.50 বর্গ মিটার জায়গা প্রয়োজন।

আবার, তাঁবুটির ভেতরের শূন্যস্থানের পরিমাণ তাঁবুটির আয়তনের সমান।

আমরা জানি,

তাঁবুটির আয়তন $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$ ঘন মি.

$= \frac{1}{3} \times 3.1416 \times 25^2 \times 8$ ঘন একক

$= 5236$ ঘন মিটার (প্রায়)

$\therefore$ তাঁবুটির শূন্যস্থানের পরিমাণ 5236 ঘন মিটার (প্রায়)

(গ) এর সমাধান:

তাবুটিতে মোট ক্যানভাসের পরিমাণ হলো, তাঁবুটির পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল,

$= \pi r \ell$ বর্গ একক

$= 3.1416 \times 25 \times 26.25$ বর্গ মিটার ['ক' থেকে পাই]

$= 2061.675$ বর্গ মিটার (প্রায়)।

$\therefore$ প্রতি বর্গমিটার ক্যানভাসের মূল্য 125 টাকা হলে ক্যানভাস বাবদ খরচ,

$=$ তাঁবুর পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল $\times$ প্রতি বর্গমিটার ক্যানভাসের মূল্য

$= (2061.675 \times 125)$ টাকা

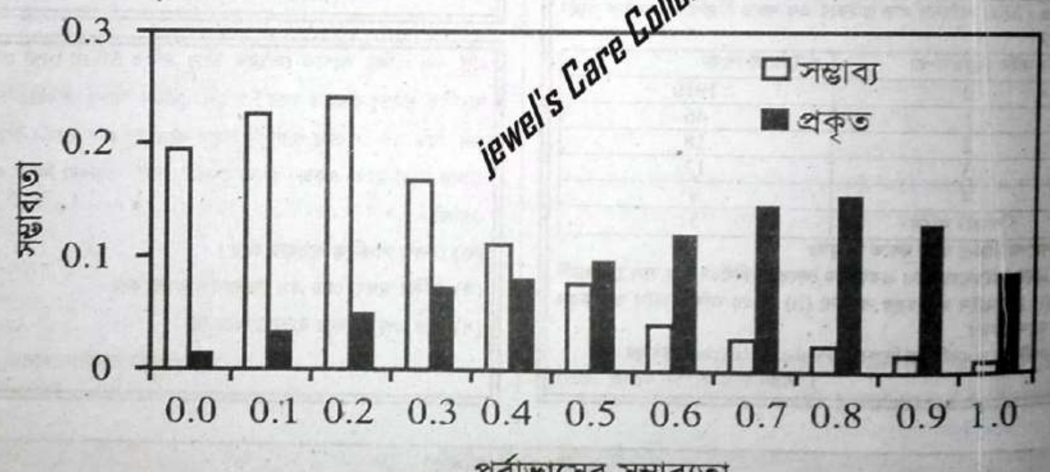
$= 257709.38$ টাকা (প্রায়) **(Ans)**

বাস্তব জীবনে এ অধ্যায়ের প্রয়োগ

নন্দিন জীবনের প্রতিটি ক্ষেত্রে সম্ভাব্যতার প্রয়োজনীয়তা অপরিসীম। আবহাওয়ার পূর্বাবাস প্রদানের ক্ষেত্রে আবহাওয়াবিদগন সম্ভাব্যতা ব্যবহার করে থাকে। তীত ও বর্তমান সময়ের পরিবেশের তাপমাত্রার উপর ভিত্তি করে সম্ভাব্যতার সাহায্যে আগামী দিনের তাপমাত্রা সম্পর্কে ভবিষ্যৎবাণী করে। একই ভাবে াগামী দিনের আর্দ্রতা, বৃষ্টিপাত, শৈত্য প্রবাহ, তুষারপাত প্রভৃতি সম্পর্কে পূর্বাভাস প্রদান করে থাকে।

কইভাবে কোচ এবং খেলোয়ার গন সম্ভাব্যতার সাহায্যে ভালো ফলাফলের জন্য পূর্বপরিকল্পনা করে থাকে। একজন ব্যাটসম্যান টানা ১৫টি ম্যাচে ৩টি র্ধশতক এবং ১টি শতক করলে পরবর্তী ম্যাচে তার ব্যাটিং দক্ষতা সম্ভাব্যতার সাহায্যে নির্ণয় করে কোচ তাকে প্রয়োজন অনুসারে মাঠে খেলার সুযোগ প্রদান করবে।

মেঘাচ্ছন্ন হওয়ার সম্ভাব্যতা $= \frac{8}{৫}$

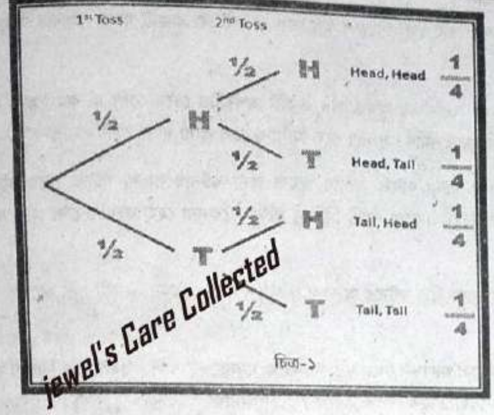


একই ভাবে একজন সুদক্ষ ফুটবলার ১০ ম্যাচে ১৫টি পরিকল্পিত শটের মাধ্যমে ৫টি গোল করলে পরবর্তী ম্যাচে তার গোল দেওয়ার ক্ষমতা সম্ভাব্যতার সাহায্যে নির্ণয় করা হয়।

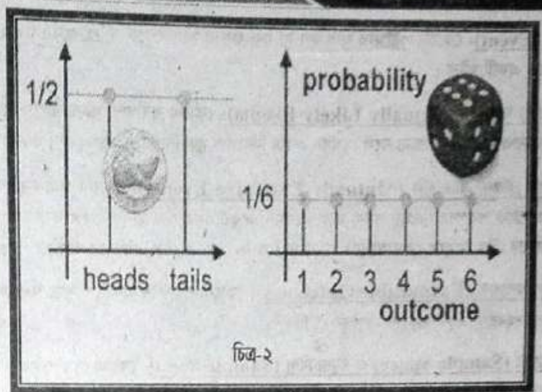
> "Success is simple. Do what's right, the right way, at the right time".
>
> — Arnold H. Glasow

১৪ সম্ভাবনা [Probability]

অনুশীলনী-১৪



চিত্র-১



চিত্র-২

ভূমিকা [Introduction]

আমরা প্রতিনিয়ত 'সম্ভাবনা' শব্দটি ব্যবহার করে থাকি। যেমন এবার এস.এস.সি. পরীক্ষায় যাদবের পাশ করার সম্ভাবনা খুব কম, এশিয়া কাপ ক্রিকেটে বাংলাদেশের জয়ের সম্ভাবনা বেশি, আগামীকাল তাপমাত্রা বৃদ্ধি পাওয়ার সম্ভাবনা বেশি, আজ বৃষ্টি হওয়ার সম্ভাবনা কম ইত্যাদি। অর্থাৎ কোনো ঘটনা ঘটার ক্ষেত্রে অনিশ্চয়তা থাকলেই কেবল আমরা সম্ভাবনার কথা বলি। আর অনিশ্চয়তার মাত্রার উপরই ঘটনাটা ঘটার সম্ভাবনা কম বা বেশি হবে তা নির্ভর করে। কিন্তু কোনো সাংখ্যিক মান দিতে পারে না। এই অধ্যায়ে কোনো ঘটনা ঘটার সম্ভাবনার সাংখ্যিক মান নির্ণয়ের বিভিন্ন সূত্র এবং নির্ণয় প্রণালী সম্পর্কে এবং নিশ্চিত ঘটনা, অসম্ভব ঘটনা ও সম্ভাব্য ঘটনা বর্ণনা করা হবে।

বোর্ড প্রশ্নাবলির বিশ্লেষণ [Board Questions Analysis]

এই অধ্যায় থেকে বিভিন্ন বোর্ডে বিগত দু'বছরের এসএসসি পরীক্ষায় মোট ১৬টি সৃজনশীল প্রশ্ন ও ৪০টি বহুনির্বাচনি প্রশ্ন এসেছে। নিচের 'Board Analysis' অংশে এই অধ্যায় থেকে কোন সালে কোন বোর্ডে কতটি প্রশ্ন হয়েছে তা দেওয়া আছে।

সৃজনশীল প্রশ্ন:

বোর্ড / সাল	ঢাকা	রাজশাহী	কুমিল্লা	যশোর	চট্টগ্রাম	বরিশাল	সিলেট	দিনাজপুর
২০১৬	১	১	১	১	১	১	১	১
২০১৫	১	১	১	১	১	১	১	১

বহুনির্বাচনি প্রশ্ন:

বোর্ড / সাল	ঢাকা	রাজশাহী	কুমিল্লা	যশোর	চট্টগ্রাম	বরিশাল	সিলেট	দিনাজপুর
২০১৬	২	২	৩	৩	৩	২	২	৩
২০১৫	২	২	৩	৩	৩	২	২	৩

মূল শব্দাবলি [Key Words]

দৈব পরীক্ষা *(Random Experiment)*, ঘটনা *(Event)*, সমসম্ভাব্য ঘটনাবলী *(Equally Likely Events)* পরস্পর বিচ্ছিন্ন ঘটনাবলী *(Mutually Exclusive Events)*, অনুকূল ফলাফল *(Favourable Outcomes)*, নমুনাক্ষেত্র *(Sample Space)*, নমুনা বিন্দু *(Sample Piont)*.

এ অধ্যায়ের আলোচ্যসূচি

• নিশ্চিত ঘটনা • অসম্ভব ঘটনা • দৈব পরীক্ষা	• নমুনাক্ষেত্র • নমুনা বিন্দু • যুক্তিভিত্তিক সম্ভাবনা নির্ণয়	• তথ্যভিত্তিক সম্ভাবনা নির্ণয় • নমুনা ক্ষেত্র দ্বারা সম্ভাবনা নির্ণয় • সম্ভাবনা Tree দ্বারা সম্ভাবনা নির্ণয়

প্রাথমিক আলোচনা

সম্ভাবনার সাথে জড়িত কিছু শব্দের ধারণা:

দৈব পরীক্ষা (Random Experiment): যখন কোনো পরীক্ষার সম্ভাব্য সকল ফলাফল আগে থেকে জানা থাকে কিন্তু পরীক্ষাটিতে কোনো একটা নির্দিষ্ট চেষ্টায় কী ফলাফল আসবে তা নিশ্চিত করে বলা যায় না, একে দৈব পরীক্ষা বলে। যেমন একটা মুদ্রা নিক্ষেপ পরীক্ষার সম্ভাব্য ফলাফল Head (H), Tail (T) হবে, তা আমরা আগে থেকেই জানি কিন্তু মুদ্রাটি নিক্ষেপের পূর্বে কোন ফলাফলটি ঘটবে তা আমরা নিশ্চিত করে বলতে পারি না। সুতরাং মুদ্রা নিক্ষেপ পরীক্ষা একটা দৈব পরীক্ষা।

ঘটনা (Event): কোনো পরীক্ষার ফলাফল বা ফলাফলের সমাবেশকে ঘটনা বলে। উদাহরণস্বরূপ একটা ছক্কা নিক্ষেপ পরীক্ষায় '3' পাওয়া একটা ঘটনা। আবার জোড় সংখ্যা পাওয়াও একটি ঘটনা।

সমসম্ভাব্য ঘটনাবলি (Equally Likely Events): কোনো পরীক্ষার ঘটনাগুলো ঘটার সম্ভাবনা সমান হয় অর্থাৎ যদি একটি অপরটির চেয়ে বেশি বা কম সম্ভাব্য না হয়, তবে ঘটনাগুলোকে সমসম্ভাব্য বলে। যেমন একটা নিরপেক্ষ মুদ্রা নিক্ষেপে হেড বা টেল আসার সম্ভাবনা সমান সমান। সুতরাং হেড আসা ও টেল আসা ঘটনা দুইটি সমসম্ভাব্য ঘটনা।

পরস্পর বিচ্ছিন্ন ঘটনাবলি (Mutually Exclusive Events): কোনো পরীক্ষায় যদি একটা ঘটনা ঘটলে অন্যটা অথবা অন্য ঘটনাগুলো না ঘটতে পারে তবে উক্ত ঘটনাগুলোকে পরস্পর বিচ্ছিন্ন ঘটনা বলে। যেমন, একটা নিরপেক্ষ মুদ্রা নিক্ষেপ করলে হেড আসা বা টেল আসা দুইটি বিচ্ছিন্ন ঘটনা। কেননা হেড আসলে টেল আসতে পারে না। আবার টেল আসলে হেড আসতে পারে না। অর্থাৎ হেড ও টেল একসাথে আসতে পারে না।

অনুকূল ফলাফল (Favourable Outcomes): কোনো পরীক্ষায় একটা ঘটনার স্বপক্ষের ফলাফলকে উক্ত ঘটনার অনুকূল ফলাফল বলে। যেমন, একটি ছক্কা নিক্ষেপ করলে বিজোড় সংখ্যা হওয়ার অনুকূল ফলাফল 3 টি।

নমুনাক্ষেত্র (Sample Space) ও নমুনা বিন্দু (Sample Point): কোনো দৈব পরীক্ষার সম্ভাব্য সকল ফলাফল নিয়ে গঠিত সেটকে নমুনাক্ষেত্র বলে। একটা মুদ্রা নিক্ষেপ করলে দুইটি সম্ভাব্য ফলাফল পাওয়া যায়। যথা হেড (H) ও টেল (T), এখন S দ্বারা এ পরীক্ষণের ফলাফলের সেটকে সূচিত করলে আমরা লিখতে পারি $S = \{H, T\}$। সুতরাং উক্ত পরীক্ষার নমুনাক্ষেত্র $S = \{H, T\}$. মনে করা যাক দুইটি মুদ্রা একসাথে নিক্ষেপ করা হলো। তাহলে নমুনাক্ষেত্রটি হবে $S = \{HH, HT, TH, TT\}$.
নমুনাক্ষেত্রের প্রতিটি উপাদানকে ফলাফলের নমুনা বিন্দু বলে। একটা মুদ্রা একবার নিক্ষেপ পরীক্ষায় নমুনাক্ষেত্র $S = \{H, T\}$ এবং এখানে H, T প্রত্যেকেই এক একটা নমুনা বিন্দু।

যুক্তিভিত্তিক সম্ভাবনা নির্ণয়:

উদাহরণ: মনে করি, একটা নিরপেক্ষ ছক্কা নিক্ষেপ করা হলো। 5 আসার সম্ভাবনা কত?

সমাধান: একটা ছক্কা নিক্ষেপ করলে সম্ভাব্য ফলাফলগুলো হচ্ছে: 1, 2, 3, 4, 5, 6। ছক্কাটি নিরপেক্ষ হলে ফলাফলগুলো সমসম্ভাব্য হবে। অর্থাৎ যেকোনো ফলাফল আসার সম্ভাবনা সমান। অতএব যেকোনো একটা ফলাফল আসার সম্ভাবনা ছয়ভাগের একভাগ। সুতরাং 5 আসার সম্ভাবনা $\frac{1}{6}$। আমরা এটাকে $P(5) = \frac{1}{6}$ এভাবে লেখি।

তাহলে সম্ভাবনাকে এভাবে সংজ্ঞায়িত করা যায়:

$$\text{কোনো ঘটনার সম্ভাবনা} = \frac{\text{উক্ত ঘটনার অনুকূল ফলাফল}}{\text{সমগ্র সম্ভাব্য ফলাফল}}$$

কোনো পরীক্ষণে কোনো ঘটনা ঘটার অনুকূল ফলাফল সর্বনিম্ন শূন্য এবং সর্বোচ্চ n (সমগ্র সম্ভাব্য ঘটনাবলি) হতে পারে।

যখন কোনো ঘটনার অনুকূল ফলাফলের মান শূন্য হয় তখন সম্ভাবনার মান শূন্য হয়। আর যখন অনুকূল ফলাফলের মান n হয় তখন সম্ভাবনার মান 1 হয়। এ কারণে সম্ভাবনার মান 0 হতে 1 এর মধ্যে থাকে।

দুটি বিশেষ ধরনের ঘটনা:

নিশ্চিত ঘটনা: কোনো পরীক্ষায় যে ঘটনা অবশ্যই ঘটবে একে নিশ্চিত ঘটনা বলে। **নিশ্চিত ঘটনার ক্ষেত্রে সম্ভাবনার মান 1 হয়।**

উদাহরণ: আগামীকাল সূর্য পূর্ব দিক থেকে উঠার সম্ভাবনা 1. আজ সূর্য পশ্চিম দিকে অস্ত যাবে এর সম্ভাবনাও 1. রাতের বেলায় সূর্য দেখা যাবে না এর সম্ভাবনা 1. একটা মুদ্রা নিক্ষেপ পরীক্ষায় H অথবা T আসার সম্ভাবনাও 1. একটা ছক্কা নিক্ষেপ পরীক্ষায় জোড় অথবা বিজোড় সংখ্যা আসার সম্ভাবনাও 1. এগুলির প্রত্যেকটি নিশ্চিত ঘটনা।

অসম্ভব ঘটনা: কোনো পরীক্ষায় যে ঘটনা কখনো ঘটবে না অর্থাৎ ঘটতে পারে না একে অসম্ভব ঘটনা বলে। **অসম্ভব ঘটনার সম্ভাবনা সব সময় শূন্য হয়।**

উদাহরণ: আগামীকাল সূর্য পশ্চিম দিকে উঠবে অথবা সূর্য পূর্বদিকে অস্ত যাবে এর সম্ভাবনা শূন্য। তেমনি রাত্রে সূর্য দেখা যাবে এর সম্ভাবনাও শূন্য।

তথ্যভিত্তিক সম্ভাবনা নির্ণয়: যুক্তিভিত্তিক সম্ভাবনা নির্ণয়ে ফলাফলগুলো সমসম্ভাব্য হতে হয়। বাস্তবে সকল ক্ষেত্রে ফলাফলগুলো সমসম্ভাব্য হয় না। তাছাড়া অনেক ক্ষেত্রে সম্ভাবনা যুক্তিভিত্তিক সংজ্ঞার মতো কিছু গণনা করা যায় না। যেমন আবহাওয়ার পূর্বাভাসে বলা হচ্ছে আজ বৃষ্টি হবার সম্ভাবনা 30% বিশ্বকাপ ফুটবলে ব্রাজিলের জয়ী হওয়ার সম্ভাবনা 40% এশিয়া কাপ ক্রিকেটে বাংলাদেশের জয়ী হওয়ার সম্ভাবনা 60%. এসব সিদ্ধান্ত নেয়া হয় অতীতের পরিসংখ্যান হতে এবং এটাই হচ্ছে তথ্যভিত্তিক সম্ভাবনার ধারণা।

ধরা যাক একটা মুদ্রা 1000 বার নিক্ষেপ করায় 523 বার হেড পাওয়া গেল। এ ক্ষেত্রে হেডের আপেক্ষিক গণসংখ্যা $\frac{523}{1000} = 0.523$। ধরা যাক মুদ্রাটিকে 2000 বার নিক্ষেপ করাতে 1030 বার হেড আসে। তাহলে 2000 বারের মধ্যে H এর আপেক্ষিক গণসংখ্যা $\frac{1030}{2000} = 0.515$। এখান থেকে বোঝা যায় যে, পরীক্ষাটি ক্রমাগত চালিয়ে গেলে (পরীক্ষাটি যতবেশি বার করা যাবে) আপেক্ষিক গণসংখ্যার মানটি এমন একটি সংখ্যার কাছাকাছি হবে যাকে মুদ্রাটি একবার নিক্ষেপ করলে হেড আসার সম্ভাবনা হবে। একেই তথ্যভিত্তিক সম্ভাবনা বলা হয়।

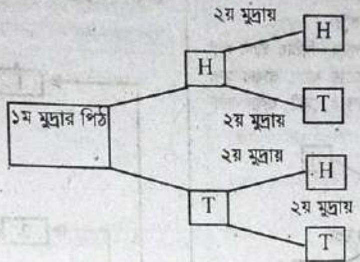
উদাহরণ: আবহাওয়া দপ্তর থেকে পাওয়া রিপোর্ট অনুযায়ী জুলাই মাসে ঢাকা শহরে 21 দিন বৃষ্টি হয়েছে। তাহলে 8 ই জুলাই বৃষ্টি হওয়ার সম্ভাবনা কত?

সমাধান: যেহেতু জুলাই মাস 31 দিন এবং জুলাই মাসে 21 দিন বৃষ্টি হয়েছে। তাহলে যেকোনো একদিন বৃষ্টি হওয়ার সম্ভাবনা $\frac{21}{31}$। অতএব 8 জুলাই বৃষ্টি হওয়ার সম্ভাবনা $\frac{21}{31}$.

নমুনা ক্ষেত্র এবং সম্ভাবনা Tree দ্বারা সম্ভাবনা নির্ণয়: আমরা জানি যে, কোনো পরীক্ষায় সম্ভাব্য ফলাফলগুলো নিয়ে যে ক্ষেত্র তৈরি হয় তাকে নমুনা ক্ষেত্র বলে। অনেক পরীক্ষায় নমুনাক্ষেত্রের আকার বেশ বড় হয়। এসব ক্ষেত্রে নমুনা বিন্দু গণনা করা ও নমুনা ক্ষেত্র তৈরি করার সময় সাপেক্ষ এমনকি ভুল হওয়ার সম্ভাবনাও থাকে। সেক্ষেত্রে আমরা সম্ভাবনা tree (probability tree) এর সাহায্যে নমুনাক্ষেত্র তৈরি করতে পারি ও বিভিন্ন ঘটনার সম্ভাবনাও বের করতে পারি।

উদাহরণ: মনে করি, দুইটি নিরপেক্ষ মুদ্রা একসাথে একবার নিক্ষেপ করা হলো। নমুনা ক্ষেত্রটি তৈরি করতে হবে। প্রথম মুদ্রায় H এবং দ্বিতীয় মুদ্রায় T আসার সম্ভাবনা নির্ণয় কর।

সমাধান: দুইটি মুদ্রা নিক্ষেপ পরীক্ষাকে দুই ধাপ হিসেবে বিবেচনা করা যায়। প্রথম ধাপে একটা মুদ্রা নিক্ষেপে 2 টি ফলাফল H অথবা T আসতে পারে। দ্বিতীয় ধাপে অপর মুদ্রা নিক্ষেপও 2 টি ফলাফল H অথবা T আসতে পারে। তাই পরীক্ষায় মোট ফলাফলকে Probability tree এর সাহায্যে নিম্নভাবে দেখানো হয়:



সম্ভাব্য নমুনা বিন্দুগুলো HH, HT, TH, TT.
তাহলে নমুনা ক্ষেত্রটি হবে {HH, HT, TH, TT}.

এখানে নমুনা বিন্দুর সংখ্যা 4 এবং প্রতিটি নমুনা বিন্দুর আসার সম্ভাবনা $\frac{1}{4}$। তাই প্রথম মুদ্রায় H ও দ্বিতীয় মুদ্রায় T আসার সম্ভাবনা হবে $P(HT) = \frac{1}{4}$.

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনমূলক কাজের সমাধান

ক কাজ: [পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-২৮৭]

১। একটি নিরপেক্ষ ছক্কা নিক্ষেপ করা হলো, নিম্নলিখিত সম্ভাবনাগুলো বের কর। (VVI)
(i) 4 আসা (ii) বিজোড় সংখ্যা আসা (iii) 4 অথবা 4 এর বেশি সংখ্যা আসা (iv) 5 এর কম সংখ্যা আসা।

২। একটি থলেতে একই ধরণের 6টি কালো, 5টি লাল, 8টি সাদা মার্বেল আছে। থলে হতে একটি মার্বেল দৈবভাবে নির্বাচন করা হলো। নির্বাচিত মার্বেলটি (i) লাল (ii) কালো (iii) সাদা (iv) কালো নয় সম্ভাবনাগুলো নির্ণয় কর। (VI)

১ এর সমাধান:

ছক্কা নিরপেক্ষ নিক্ষেপে সম্ভাব্য ফলাফলগুলা হচ্ছে: 1, 2, 3, 4, 5, 6। ছক্কাটি নিরপেক্ষ হওয়ায় প্রত্যেকটি সংখ্যা আসার সম্ভাবনা সমান হবে।

(i) এখানে সমগ্র সম্ভাব্য ফলাফল 6টি এবং 4 আসার অনুকূল ফলাফল 1টি

$\therefore$ 4 আসার সম্ভাবনা $P(4) = \frac{\text{উক্ত ঘটনার অনুকূল ফলাফল}}{\text{সমগ্র সম্ভাব্য ফলাফল}} = \frac{1}{6}$

(ii) নিরপেক্ষ ছক্কাটিতে বিজোড় সংখ্যা 1, 3, 5। অর্থাৎ বিজোড় সংখ্যার অনুকূল ফলাফল 3।

$\therefore$ বিজোড় সংখ্যা আসার সম্ভাবনা

$P(\text{বিজোড় সংখ্যা}) = \frac{\text{অনুকূল ফলাফল}}{\text{সমগ্র সম্ভাব্য ফলাফল}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

(iii) নিরপেক্ষ ছক্কাটিতে 4 অথবা 4 এর চেয়ে বড় সংখ্যা হলো 4, 5, 6। অর্থাৎ 4 অথবা 4 এর চেয়ে বেশি সংখ্যার অনুকূল ফলাফল 3।

$\therefore$ 4 অথবা 4 এর চেয়ে বড় সংখ্যা আসার সম্ভাবনা

$= \frac{\text{উক্ত ঘটনার অনুকূল ফলাফল}}{\text{সমগ্র সম্ভাব্য ফলাফল}} = = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

(iv) নিরপেক্ষ ছক্কাটিতে 5 এর কম বা ছোট সংখ্যাগুলো হলো 1, 2. 3, 4। অর্থাৎ 5 এর চেয়ে ছোট সংখ্যার অনুকূল ফলাফল 4।

$\therefore$ 5 এর কম সংখ্যা আসার সম্ভাবনা

$= \frac{\text{উক্ত ঘটনার অনুকূল ফলাফল}}{\text{সমগ্র সম্ভাব্য ফলাফল}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

২ এর সমাধান:

থলেটিতে 6টি কালো, 5টি লাল, 8টি সাদা মার্বেল আছে। সুতরাং মোট মার্বেল সংখ্যা 6 + 5 + 8 = 19টি। অর্থাৎ সমগ্র সম্ভাব্য ফলাফল = 19। থলে থেকে একটি মার্বেল দৈবভাবে নির্বাচন করা হলে সেটি 19টি মার্বেলের যেকোনো একটি হবে।

(i) ধরি, লাল হওয়ার ঘটনা R। থলেতে 5টি লাল মার্বেল আছে। এই 5টি মার্বেলের যেকোনো একটি আসলে লাল মার্বেল বলে গণ্য হবে। সুতরাং লাল হওয়ার অনুকূল ফলাফল = 5।

$\therefore P(R) = \frac{\text{লাল মার্বেলের অনুকূল ফলাফল}}{\text{সমগ্র সম্ভাব্য ফলাফল}} = \frac{5}{19}$

(ii) ধরি, কালো মার্বেল হওয়ার ঘটনা B। থলেতে 6টি কালো মার্বেল আছে। এদের যেকোনো একটি আসলে কালো মার্বেল বলে গণ্য হবে। সুতরাং কালো হওয়ার অনুকূল ফলাফল = 6

$\therefore P(B) = \frac{\text{কালো মার্বেলের অনুকূল ফলাফল}}{\text{সমগ্র সম্ভাব্য ফলাফল}} = \frac{6}{19}$

(iii) ধরি, সাদা মার্বেল হওয়ার ঘটনা w^1 থলেটিতে 8টি সাদা মার্বেল আছে। এদের যে কোন একটি আসলে সাদা মার্বেল বলে গণ্য হবে। সুতরাং সাদা হওয়ার অনুকূল ফলাফল = 8।

$P(w) = \frac{\text{সাদা মার্বেলের অনুকূল ফলাফল}}{\text{সমগ্র সম্ভাব্য ফলাফল}} = \frac{8}{19} = 0$

অর্থাৎ হলুদ মার্বেল আসার কোনো সম্ভাবনা নাই।

(iv) ধরি, মার্বেলটি কালো না হওয়ার ঘটনা (NB)। মার্বেলটি কালো না হলে লাল অথবা সাদার যেকোনো একটি হবে। লাল ও সাদা মার্বেলের সংখ্যা 5 + 8 = 13।

সুতরাং লাল অথবা সাদা মার্বেলের অনুকূল ঘটনা = 13

$\therefore P(NB) = \frac{\text{লাল অথবা সাদা মার্বেলের অনুকূল ফলাফল}}{\text{সমগ্র সম্ভাব্য ফলাফল}} = \frac{13}{19}$

বিকল্প পদ্ধতি:

ধরি, কালো না হওয়ার ঘটনা NB।

আমরা জানি, সমগ্র ঘটনার মোট সম্ভাবনা 1। সুতরাং মার্বেলটি কালো না হওয়ার সম্ভাবনা।

$\therefore P(NB) = 1 -$ মার্বেলটি কালো হওয়ার সম্ভাবনা,

$= 1 - P(B)$

$= 1 - \frac{\text{কালো মার্বেলের অনুকূল ফলাফল}}{\text{সমগ্র মার্বেলের সম্ভাব্য ফলাফল}}$

$= 1 - \frac{6}{19} = \frac{19-6}{18} = \frac{13}{19}$

খ কাজ: [পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-২৮৮]

একটি জরিপে দেখা গেল কোনো এক বিশ্ববিদ্যালয়ে ১ম বর্ষে 284 জন ছাত্র অর্থনীতিতে, 106 জন ছাত্র ইতিহাসে, 253 জন ছাত্র সমাজবিজ্ঞানে, 169 জন ছাত্র ইংরেজিতে ভর্তি হয়েছে। একজন ছাত্রকে দৈবভাবে নির্বাচিত করলে নির্বাচিত ছাত্রটি সমাজবিজ্ঞানের ছাত্র হবে না এর সম্ভাবনা কত?

সমাধান:

বিশ্ববিদ্যালয়ে ১ম বর্ষে 284 জন ছাত্র অর্থনীতিতে, 106 জন ছাত্র ইতিহাসে, 253 জন ছাত্র সমাজবিজ্ঞানে এবং 169 জন ছাত্র ইংরেজিতে ভর্তি হয়। সুতরাং মোট ভর্তিকৃত ছাত্র সংখ্যা = (284 + 106 + 253 + 169) = 812

সমাজবিজ্ঞানে ভর্তিকৃত ছাত্র সংখ্যা = 253 জন

সমাজবিজ্ঞানে নির্বাচিত বা ভর্তিকৃত নয় এমন ছাত্র সংখ্যা = 812 − 253 = 559 জন

দৈবভাবে নির্বাচিত ছাত্রটি সমাজবিজ্ঞানের না হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{559}{812}$

[পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-২৯১]

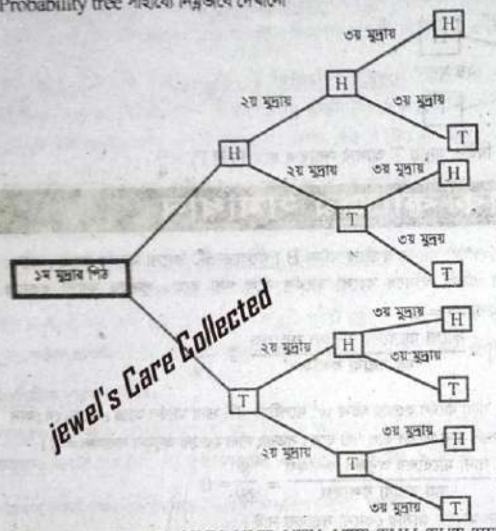
কাজ:

১। Probability tree এর সাহায্যে তিনবার মুদ্রা নিক্ষেপে সকল সম্ভাব্য ফলাফল লেখ এবং নমুনা ক্ষেত্রটি তৈরি কর। এখান হতে (i) মুদ্রা 3টিতে একই ফলাফল (ii) কমপক্ষে 2T (iii) বড়জোড় 2T আসার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। (VI)

২। একটি ছক্কা ও 2টি মুদ্রা নিক্ষেপ ঘটনায় Probability tree তৈরি কর। (VI)

১ এর সমাধানঃ

একটি মুদ্রার তিনবার নিক্ষেপ পরীক্ষাকে তিন ধাপ হিসেবে বিবেচনা করি। প্রথম ধাপে মুদ্রা নিক্ষেপে 2টি ফলাফল $\{H$ অথবা $T\}$ আসতে পারে। দ্বিতীয় ধাপে মুদ্রা নিক্ষেপে 2টি ফলাফল $\{H$ অথবা $T\}$ আসতে পারে। এবং তৃতীয় ধাপে আবার মুদ্রা নিক্ষেপে 2টি ফলাফল $\{H$ অথবা $T\}$ আসতে পারে। পরীক্ষার মোট ফলাফলকে Probability tree সাহায্যে নিম্নভাবে দেখানো



যাবে। সম্ভাব্য সকল নমুনা- $HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT$
তাহলে নমুনা ক্ষেত্রটি হবে $\{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$ এখানে মোট নমুনা বিন্দু 8টি।

(i) মুদ্রা তিনটিতে একই ফলাফল আসার ঘটনা $\{HHH, TTT\} = 2$ টি

$\therefore P\{3\text{ টি একই ফলাফল}\} = \dfrac{\text{ঘটনার অনুকূল ফলাফল}}{\text{সমগ্র সম্ভাব্য ফলাফল}} = \dfrac{2}{8} = \dfrac{1}{4}$

(ii) কমপেক্ষ 2টি T আসার অনুকূল ঘটনা $\{HTT, THT, TTH, TTT\} = 4$টি

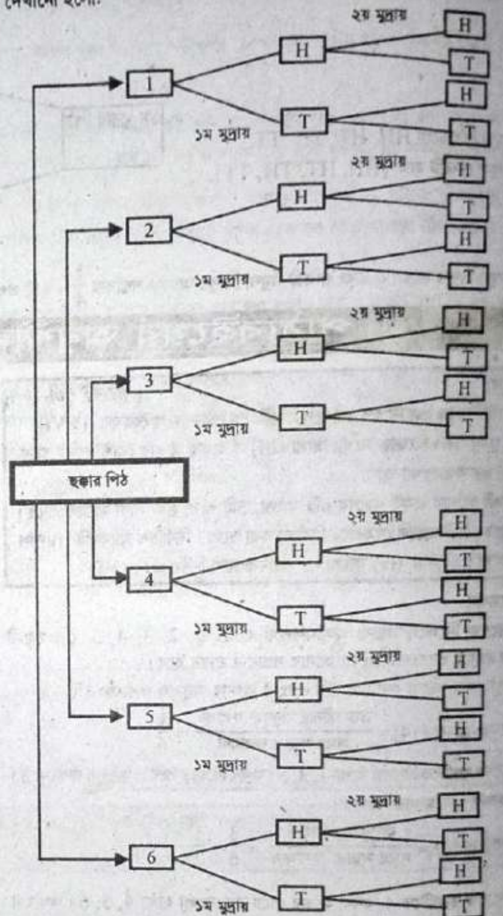
$\therefore P\{\text{কমপক্ষে } 2T\} = \dfrac{\text{অনুকূল ফলাফল}}{\text{সমগ্র সম্ভাব্য ফলাফল}} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$

(iii) বড় জোর $2T$ পাওয়া অনুকূল ঘটনা
$\{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH\} = 7$টি

$\therefore P\{\text{বড় জোর } 2T\} = \dfrac{\text{ঘটনার অনুকূল ফলাফল}}{\text{সমগ্র সম্ভাব্য ফলাফল}} = \dfrac{7}{8}$

২ এর সমাধানঃ

একটি ছক্কা ও দুইটি মুদ্রা নিক্ষেপ পরীক্ষাকে তিন ধাপে হিসেব করি। প্রথম ধাপে ছক্কা নিক্ষেপে 6টি ফলাফল $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ আসতে পারে। পরবর্তী ধাপে একটি মুদ্রা নিক্ষেপে 2টি ফলাফল $\{H, T\}$ আসতে পারে। ৩য় ধাপে অপর মুদ্রা নিক্ষেপে $\{H, T\}$ আসতে পারে। সুতরাং মোট ফলাফলকে Probability tree এর সাহায্যে দেখানো হলোঃ



নমুনা ক্ষেত্রটি হলেঃ $\{1HH, 1HT, 1TH, 1TT, 2HH, 2HT, 2TH, 2TT, 3HH, 3HT, 3TH, 3TT, 4HH, 4HT, 4TH, 4TT, 5HH, 5HT, 5TH, 5TT, 6HH, 6HT, 6TH, 6TT\} = 24$

পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনী-১৪

১। একটি ছক্কা মারলে 3 উঠার সম্ভাবনা কোনটি?

(ক) $\frac{1}{6}$ (খ) $\frac{1}{3}$ (গ) $\frac{2}{3}$ (ঘ) $\frac{1}{2}$

নিচের তথ্য থেকে (২ ও ৩) নম্বর প্রশ্নের উত্তর দাওঃ
একটি থলিতে নীল বল 12টি, সাদা বল 16টি এবং কালো বল 20টি আছে। দৈবভাবে একটা বল নেওয়া হলো।

২। বলটি নীল হওয়ার সম্ভাবনা কত?

(ক) $\frac{1}{16}$ (খ) $\frac{1}{12}$ (গ) $\frac{1}{8}$ (ঘ) $\frac{1}{4}$

৩। বলটি সাদা না হওয়ার সম্ভাবনা কত?

(ক) $\frac{1}{3}$ (খ) $\frac{2}{3}$ (গ) $\frac{1}{16}$ (ঘ) $\frac{1}{48}$

নিচের তথ্য থেকে (৪-৫) নম্বর প্রশ্নের উত্তর দাওঃ
একটি মুদ্রাকে তিনবার নিক্ষেপ করা হলো।

৪। সর্বাধিক বার H আসার সম্ভাবনা কত?

(ক) 1 বার (খ) 2 বার (গ) 3 বার (ঘ) 4 বার

৫। সবচেয়ে কম সংখ্যক বার T আসার সম্ভাবনা কত?

(ক) 0 (খ) $\frac{1}{2}$ (গ) 1 (ঘ) 2

৬। দুইটি মুদ্রা নিক্ষেপের ক্ষেত্রে-

i. বড়জোড় একটি H পাওয়ার সম্ভাবনা = 0.75
ii. কমপক্ষে একটি H পাওয়ার সম্ভাবনা = 0.75
iii. HH একটি নমুনা বিন্দু।

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

৭। 30টি টিকেটে 1 থেকে 30 পর্যন্ত ক্রমিক নম্বর দেয়া আছে। টিকিটগুলো ভালভাবে মিশিয়ে একটি টিকেট দৈবভাবে নেয়া হলো। টিকেটটি (i) জোড় সংখ্যা (ii) ৩ দ্বারা বিভাজ্য (iii) 8 এর চেয়ে ছোট (iv) 22 এর চেয়ে বড় হওয়ার সম্ভাবনাগুলো নির্ণয় কর।

৮। কোনো একটি লটারিতে 570 টি টিকেট বিক্রি হয়েছে। রহিম 15 টি টিকেট কিনেছে। টিকেটগুলো ভালোভাবে মিশিয়ে একটি টিকেট দৈবভাবে প্রথম পুরস্কারের জন্য তোলা হলো। রহিমের প্রথম পুরস্কার পাওয়ার সম্ভাবনা কত?

৯। একটি ছক্কা একবার নিক্ষেপ করা হলে জোড় সংখ্যা অথবা তিন দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা ওঠার সম্ভাবনা কত?

১০। কোনো একটি স্বাস্থ্য কেন্দ্রের রিপোর্ট অনুযায়ী কম ওজনের 155 শিশু, স্বাভাবিক ওজনের 386 শিশু এবং বেশি ওজনের 98 টি শিশু জন্ম নেয়। এখান হতে একটি শিশু দৈবভাবে নির্বাচন করলে নির্বাচিত শিশুটি বেশি ওজনের হবে এর সম্ভাবনা কত?

১১। দুই হাজার লাইসেন্স প্রাপ্ত ড্রাইভার এক বছরে নিম্নলিখিত সংখ্যক ট্রাফিক আইন ভঙ্গ করে।

ট্রাফিক আইন ভঙ্গের সংখ্যা	ড্রাইভারের সংখ্যা
0	1910
1	46
2	18
3	12
4	9
5 বা তার অধিক	5

একজন ড্রাইভারকে দৈবভাবে নির্বাচন করলে ড্রাইভারটির 1টি আইন ভঙ্গ করার সম্ভাবনা কত? ড্রাইভারটির 4 এর অধিক আইন ভঙ্গ করার সম্ভাবনা কত?

১২। কোনো একটি ফ্যাক্টরীতে নিয়োগকৃত লোকদের কাজের ধরণ অনুযায়ী নিম্নভাবে শ্রেণিকৃত করা যায়:

শ্রেণিকরণ	সংখ্যা
ব্যবস্থাপনায়	157
পরিদর্শক হিসেবে	52
উৎপাদন কাজে	1473
অফিসিয়াল কাজে	215

একজনকে দৈবভাবে নির্বাচন করলে লোকটি ব্যবস্থাপনায় নিয়োজিত এর সম্ভাবনা কত? লোকটি ব্যবস্থাপনায় অথবা উৎপাদন কাজে নিয়োজিত এর সম্ভাবনা কত? লোকটি উৎপাদন কাজে নিয়োজিত নয় এর সম্ভাবনা কত?

১৩। 1টি মুদ্রা ও 1টি ছক্কা নিক্ষেপ ঘটনায় Probability tree তৈরি কর।

১৪। Probability tree এর সাহায্যে নিচের ছকটি পূরণ কর:

মুদ্রা নিক্ষেপ	সকল সম্ভাব্য ফলাফল	সম্ভাবনা
একবার মুদ্রা নিক্ষেপ		$P(T) =$
দুইবার মুদ্রা নিক্ষেপ		$P(1H) =$ $P(HT) =$
তিনবার মুদ্রা নিক্ষেপ		$P(HHT) =$ $P(2H) =$

১৫। কোনো একজন লোকের ঢাকা হতে রাজশাহী ট্রেনে যাওয়ার সম্ভাবনা $\frac{5}{9}$ এবং রাজশাহী হতে খুলনা বাসে যাওয়ার সম্ভাবনা $\frac{2}{7}$. Probability tree ব্যবহার করে লোকটি ঢাকা হতে রাজশাহী ট্রেনে নয় এবং রাজশাহী হতে খুলনা বাসে যাওয়ার সম্ভাবনা কত বের কর। লোকটি রাজশাহী ট্রেনে কিন্তু খুলনা বাসে না যাওয়ার সম্ভাবনা বের কর।

১৬। একজন লোকের ঢাকা হতে রাজশাহী ট্রেনে যাওয়ার সম্ভাবনা $\frac{2}{9}$, বাসে যাওয়ার সম্ভাবনা $\frac{3}{7}$, প্লেনে যাওয়ার সম্ভাবনা $\frac{1}{9}$। লোকটির রাজশাহী হতে খুলনায় বাসে যাওয়ার সম্ভাবনা $\frac{2}{5}$ এবং ট্রেনে যাওয়ার সম্ভাবনা $\frac{3}{7}$। Probability tree ব্যবহার করে লোকটি রাজশাহী ট্রেনে এবং খুলনায় বাসে যাওয়ার সম্ভাবনা বের কর।

১৭। একটি দুই টাকার মুদ্রা চার বার নিক্ষেপ করা হলো। (এর শাপলার পিঠকে L এবং প্রাথমিক শিক্ষার শিশুর পিঠকে C বিবেচনা কর)

ক. যদি মুদ্রাটিকে চারবারের পরিবর্তে দুইবার নিক্ষেপ করা হয় তবে একটি L আসার সম্ভাবনা এবং একটি C না আসার সম্ভাবনা কত?

খ. সম্ভাব্য ঘটনার *Probability tree* অঙ্কন কর। এবং নমুনা ক্ষেত্রটি লিখ।

গ. দেখাও যে, মুদ্রাটি n সংখ্যক বার নিক্ষেপ করলে সংঘটিত ঘটনা 2^n কে সমর্থন করে।

১৮। একটি ঝুড়িতে 8টি লাল, 10টি সাদা ও 7টি কালো মার্বেল আছে। দৈবভাবে একটি মার্বেল নেয়া হল।

ক. সমগ্র সম্ভাব্য ফলাফল নির্ণয় কর।

খ. মার্বেলটি (i) লাল হওয়ার সম্ভাবনা এবং (ii) সাদা না হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর।

গ. যদি প্রতিস্থাপন না করে একটি করে পরপর চারটি মার্বেল তুলে নেয়া হয় তবে সবগুলো মার্বেল সাদা হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর।

অনুশীলনী ১৪ এর সমাধান:

১। একটি ছক্কা মারলে 3 উঠার সম্ভাবনা কোনটি?

(ক) $\frac{1}{6}$ (খ) $\frac{1}{3}$ (গ) $\frac{2}{3}$ (ঘ) $\frac{1}{2}$

উত্তর: (ক) $\frac{1}{6}$

ব্যাখ্যা:

একটি ছক্কার মোট ফলাফল $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = 6$টি 3 ওঠার ঘটনা 1টি।

সুতরাং 3 ওঠার সম্ভাবনা $P(3) = \frac{\text{অনুকূল ফলাফল}}{\text{সমগ্র সম্ভাব্য ফলাফল}} = \frac{1}{6}$

নিচের তথ্য থেকে (২ ও ৩) নম্বর প্রশ্নের উত্তর দাও:

একটি থলিতে নীল বল 12টি, সাদা বল 16টি এবং কালো বল 20টি আছে। দৈবভাবে একটা বল নেওয়া হলো। (VVI)

২। বলটি নীল হওয়ার সম্ভাবনা কত?

(ক) $\frac{1}{16}$ (খ) $\frac{1}{12}$ (গ) $\frac{1}{8}$ (ঘ) $\frac{1}{4}$

উত্তর: (ঘ) $\frac{1}{4}$

ব্যাখ্যা:

থলিতে নীল বল 12টি, সাদা বল 16টি এবং কালো বল 20টি। মোট বল আছে $(12 + 16 + 20) = 48$. নীল বলের সংখ্যা = 12টি। অর্থাৎ নীল বলের অনুকূল ফলাফল 12।

বলটি নীল হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{\text{অনুকূল ফলাফল}}{\text{সমগ্র সম্ভাব্য ফলাফল}} = \frac{12}{48} = \frac{1}{4}$

৩। বলটি সাদা না হওয়ার সম্ভাবনা কত?

(ক) $\frac{1}{3}$ (খ) $\frac{2}{3}$ (গ) $\frac{1}{16}$ (ঘ) $\frac{1}{48}$

উত্তর: (খ) $\frac{2}{3}$

ব্যাখ্যা:

মোট বল $(12 + 16 + 20) = 48$ সাদা বল = 16টি

সাদা বল হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{16}{48} = \frac{1}{3}$

$\therefore$ সাদা না হওয়ার সম্ভাবনা $= 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

নিচের তথ্য থেকে (৪ ও ৫) নম্বর প্রশ্নের উত্তর দাও:

একটি মুদ্রাকে তিনবার নিক্ষেপ করা হলো। (VI)

৪। সর্বাধিক বার H আসার সম্ভাবনা কত?

(ক) 1 বার (খ) 2 বার (গ) 3 বার (ঘ) 4 বার

ব্যাখ্যা:

একটি মুদ্রাকে 3 বার নিক্ষেপ করা হলে নমুনা ক্ষেত্রটি হবে

$\{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\} = 8$ টি।

এখানে সর্বাধিক বার H আছে 1 টিতে অর্থাৎ 3টি H আছে 1 টিতে।

এবং সর্বাধিক বার H আসার সম্ভাবনা $= \frac{1}{8}$

দৃষ্টি আকর্ষণ: যদি প্রশ্নটি এমন হয় যে সর্বাধিক H কতবার আসতে পারে। তাহলে দেখা যাচ্ছে যে নমুনাক্ষেত্রে সর্বাধিক H বিদ্যমান আছে HHH। অর্থাৎ সর্বাধিক H তিনটি যা একবার ঘটেছে। এক্ষেত্রে উত্তর (ক)।

৫। সবচেয়ে কম সংখ্যক বার T আসার সম্ভাবনা কত?

(ক) 0 (খ) $\frac{1}{2}$ (গ) 1 (ঘ) 2

ব্যাখ্যা:

একটি মুদ্রা 3 বার নিক্ষেপ করলে নমুনা বিন্দু 8টি। সবচেয়ে কম সংখ্যক বার T আসবে একটিতে $\{HHH\}$। সুতরাং সবচেয়ে কম সংখ্যক বার T আসার সম্ভাবনা $= \frac{1}{8}$

দৃষ্টি আকর্ষণ: প্রশ্নটি আসলে সবচেয়ে কম সংখ্যক কত বার T আসতে পারে। সবচেয়ে কম সংখ্যক T অর্থাৎ T এর সংখ্যা শূন্য ধরলে এমন ক্ষেত্র মাত্র একটি যা HHH। সুতরাং শূন্য বার T অর্থাৎ আসবে না এমন ঘটনা মাত্র একটি। এক্ষেত্রে উত্তর (গ)।

৬। দুইটি মুদ্রা নিক্ষেপের ক্ষেত্রে-

i. বড়জোড় একটি H পাওয়ার সম্ভাবনা = 0.75

ii. কমপক্ষে একটি H পাওয়ার সম্ভাবনা = 0.75

iii. HH একটি নমুনা বিন্দু।

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

উত্তর: (ঘ) i, ii ও iii

ব্যাখ্যা:

দুইটি মুদ্রা নিক্ষেপের নমুনা ক্ষেত্র

{TT, TH, HT} = 3টি

∴ বড়জোড় একটি H আসার সম্ভাব্য অনুকূল ফলাফল।

{HH, TH, HT} = 3টি

∴ কমপক্ষে একটি H আসার সম্ভাবনা $= \frac{3}{4}$ নমুনাক্ষেত্রের প্রতিটি উপাদানকে ফলাফলের নমুনা বিন্দু বলে।

সুতরাং HH একটি নমুন বিন্দু।

৭। 30টি টিকেটে 1 থেকে 30 পর্যন্ত ক্রমিক নম্বর দেয়া আছে। টিকিটগুলো ভালভাবে মিশিয়ে একটি টিকেট দৈবভাবে নেয়া হলো। টিকেটটি (i) জোড় সংখ্যা (ii) চার দ্বারা বিভাজ্য (iii) 8 এর চেয়ে ছোট (iv) 22 এর চেয়ে বড় হওয়ার সম্ভাবনাগুলো নির্ণয় কর।

সমাধান:

30টি টিকেটে 1 থেকে 30 পর্যন্ত ক্রমিক নম্বর দেয়া আছে।

অর্থাৎ সমগ্র সম্ভাব্য ফলাফল 30.

(i) 1 থেকে 30 নম্বরের মধ্যে মোট জোড় সংখ্যা 15টি। অর্থাৎ সংখ্যাটি জোড় হওয়ার অনুকূল ঘটনা = 15

∴ সংখ্যাটি জোড় হওয়ার সম্ভাবনা,

$$P\,(\text{জোড় সংখ্যা}) = \frac{\text{জোড় সংখ্যা পাওয়ার অনুকূল ফলাফল}}{\text{সমগ্র সম্ভাব্য ফলাফল}} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$$

(ii) 1 থেকে 30 এর মধ্যে 4 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যাগুলো হলো:

{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28} = 7টি

∴ 4 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যার অনুকূল ফলাফল = 7

∴ সংখ্যাটি 4 দ্বারা বিভাজ্য হওয়ার সম্ভাবনা

$$= \frac{\text{4 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা পাওয়ার অনুকূল ফলাফল}}{\text{সমগ্র সম্ভাব্য ফলাফল}} = \frac{7}{30}$$

(iii) 8 এর চেয়ে ছোট সংখ্যাগুলো {1, 2, 3, 4, 5, 7}

সুতরাং উক্ত ঘটনার অনুকূল ফলাফল = 7.

8 এর চেয়ে ছোট সংখ্যা হওয়ার সম্ভাবনা

$$= \frac{\text{উক্ত ঘটনার অনুকূল ফলাফল}}{\text{সমগ্র সম্ভাব্য ফলাফল}} = \frac{7}{30}$$

(iv) 1 থেকে 30 এর মধ্যে 22 এর চেয়ে বড় সংখ্যাগুলো হলো:

{23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30}

সুতরাং উক্ত ঘটনার অনুকূল ফলাফল = 8

∴ 22 এর চেয়ে বড় সংখ্যা হওয়ার সম্ভাবনা

$$= \frac{\text{উক্ত ঘটনার অনুকূল ফলাফল}}{\text{সমগ্র সম্ভাব্য ফলাফল}} = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$$

Ans: (i) $\frac{1}{2}$; (ii) $\frac{7}{30}$; (iii) $\frac{7}{30}$; (iv) $\frac{4}{15}$.

৮। কোনো একটি লটারিতে 570 টি টিকেট বিক্রি হয়েছে। রহিম 15 টি টিকেট কিনেছে। টিকেটগুলো ভালোভাবে মিশিয়ে একটি টিকেট দৈবভাবে প্রথম পুরস্কারের জন্য তোলা হলো। রহিমের প্রথম পুরস্কার পাওয়ার সম্ভাবনা কত?

সমাধান:

লটারিতে মোট টিকেট সংখ্যা 570 টি। সুতরাং সমগ্র সম্ভাব্য ফলাফল 570। রহিম সাহেব 15টি টিকেট কিনেছে তার প্রথম পুরস্কার পাওয়ার অনুকূল ফলাফল = 15

অতএব রহিম সাহেব ১ম পুরস্কার পাওয়ার সম্ভাবনা

$$= \frac{\text{উক্ত ঘটনার অনুকূল ফলাফল}}{\text{সমগ্র সম্ভাব্য ফলাফল}} = \frac{15}{570} = \frac{1}{38} \quad \textbf{Ans: } \frac{1}{38}$$

৯। একটি ছক্কা একবার নিক্ষেপ করা হলে জোড় সংখ্যা অথবা তিন দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা ওঠার সম্ভাবনা কত? (VI)

সমাধান:

ছক্কা নিক্ষেপে সম্ভাব্য ফলাফলগুলো হলো {1, 2, 3, 4, 5, 6} = 6 টি।

এদের মধ্যে জোড় সংখ্যা {2, 4, 6} এবং 3 দ্বারা বিভাজ্য {3, 6} সুতরাং জোড় সংখ্যা অথবা 3 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা {2, 3, 4, 6,}.

অর্থাৎ জোড় সংখ্যা অথবা 3 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যার অনুকূল ফলাফল 4.

অতএব, জোড় সংখ্যা অথবা 3 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যার উঠার সম্ভাবনা

$$= \frac{\text{উক্ত ঘটনার অনুকূল ফলাফল}}{\text{সমগ্র সম্ভাব্য ফলাফল}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \quad \textbf{Ans: } \frac{2}{3}$$

১০। কোনো একটি স্বাস্থ্য কেন্দ্রের রিপোর্ট অনুযায়ী কম ওজনের 155 শিশু, স্বাভাবিক ওজনের 386 শিশু এবং বেশি ওজনের 98 টি শিশু জন্ম নেয়। এদের হতে একটি শিশু দৈবভাবে নির্বাচন করলে নির্বাচিত শিশুটি বেশি ওজনের হবার সম্ভাবনা কত?

সমাধান:

রিপোর্ট অনুযায়ী 155 শিশু কম ওজনের, 386 শিশু স্বাভাবিক ওজনের এবং 98টি শিশু বেশি ওজনের জন্ম নেয়।

মোট শিশু (155 + 386 + 98) = 639 টি

অর্থাৎ সমগ্র সম্ভাব্য ফলাফল = 639

বেশি ওজনের শিশুর সংখ্যা = 98টি।

সুতরাং দৈবভাবে একটি শিশু নির্বাচন করলে শিশুটি বেশি ওজনের হওয়ার সম্ভাবনা = $\frac{98}{639}$। নির্ণেয় সম্ভাবনা $\frac{98}{639}$ (Ans)

১১। দুই হাজার লাইসেন্স প্রাপ্ত ড্রাইভার এক বছরে নিম্নলিখিত সংখ্যক ট্রাফিক আইন ভঙ্গ করে। (VI)

ট্রাফিক আইন ভঙ্গের সংখ্যা	ড্রাইভারের সংখ্যা
0	1910
1	46
2	18
3	12
4	9
5 বা তার অধিক	5

একজন ড্রাইভারকে দৈবভাবে নির্বাচন করলে ড্রাইভারটির 1টি আইন ভঙ্গ করার সম্ভাবনা কত? ড্রাইভারটির 4 এর অধিক আইন ভঙ্গ করার সম্ভাবনা কত?

সমাধান:

ট্রাফিক আইন ভঙ্গ করে এরকম মোট ড্রাইভার (1910 + 46 + 18 + 12 + 9 + 5) = 2000 জন

1 টি আইন ভঙ্গ করে এরকম ড্রাইভারের সংখ্যা = 46।

সুতরাং, একজন ড্রাইভারের 1টি আইন ভঙ্গ করার সম্ভাবনা $= \frac{46}{2000}$

$$= \frac{23}{1000}$$

আবার, 4 এর অধিক আইন ভঙ্গকারি অর্থাৎ 5 বা তার অধিক ড্রাইভারের সংখ্যা = 5 জন।

অতএব একজন ড্রাইভার 4 এর অধিক আইন ভঙ্গ করার সম্ভাবনা

$$= \frac{5}{2000} = \frac{1}{400}$$

Ans: $\frac{23}{1000}, \frac{1}{400}$

১২। কোনো একটি ফ্যাক্টরীতে নিয়োগকৃত লোকদের কাজের ধরন অনুযায়ী নিম্নভাবে শ্রেণিকৃত করা যায়: (VI)

শ্রেণিকরণ	সংখ্যা
ব্যবস্থাপনায়	157
পরিদর্শক হিসেবে	52
উৎপাদন কাজে	1473
অফিসিয়াল কাজে	215

একজনকে দৈবভাবে নির্বাচন করলে লোকটি ব্যবস্থাপনায় নিয়োজিত এর সম্ভাবনা কত? লোকটি ব্যবস্থাপনায় অথবা উৎপাদন কাজে নিয়োজিত এর সম্ভাবনা কত? লোকটি উৎপাদন কাজে নিয়োজিত নয় এর সম্ভাবনা কত?

সমাধান:

ফ্যাক্টরীতে নিয়োগকৃত মোট লোক সংখ্যা $(157 + 52 + 1473 + 215)$
$= 1897$ জন।

ব্যবস্থাপনায় নিয়োজিত লোকের সংখ্যা $= 157$ জন

দৈবভাবে নির্বাচন করলে একজন লোক ব্যবস্থাপনায় নিয়োজিত হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{157}{1897}$

আবার, ব্যবস্থাপনা অথবা উৎপাদন কাজে নিয়োজিত লোকের সংখ্যা =
$(157 + 1473) = 1630$ জন

দৈবভাবে নির্বাচন করলে একজন লোক ব্যবস্থাপনায় অথবা উৎপাদন কাজে নিয়োজিত হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{1630}{1897}$

আবার, উৎপাদন কাজে নিয়োজিত নয় এরকম লোকের সংখ্যা =
$(1897 - 1473) = 424$ জন

দৈব নির্বাচনে লোকটি উৎপাদন কাজে নিয়োজিত না হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{424}{1897}$

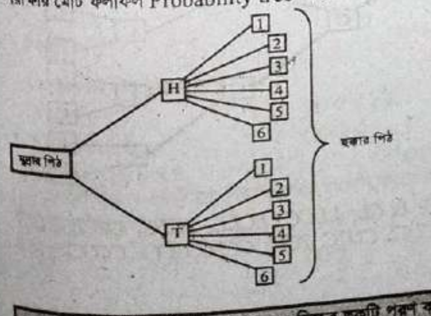
নির্ণেয় সম্ভাবনা $= \frac{157}{1897}, \frac{1630}{1897}, \frac{424}{1897}$ **(Ans.)**

১৩। 1টি মুদ্রা ও 1টি ছক্কা নিক্ষেপ ঘটনায় Probability tree তৈরি কর। (VI)

সমাধান:

একটি মুদ্রা ও একটি ছক্কা নিক্ষেপের পরীক্ষাকে দুই ধাপে বিবেচনা করি। প্রথম ধাপে মুদ্রা নিক্ষেপের ফলাফল $\{H, T\} = 2$ টি। এবং ২য় ধাপে ছক্কা নিক্ষেপের ফলাফল $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = 6$টি।

পরীক্ষার মোট ফলাফল Probability tree সাহায্যে দেখানো হলো:

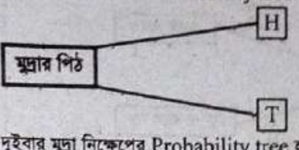


১৪। Probability tree এর সাহায্যে নিচের ছকটি পূরণ কর: (VI)

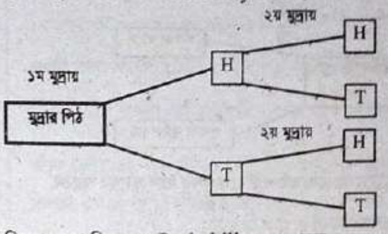
মুদ্রা নিক্ষেপ	সকল সম্ভাব্য ফলাফল	সম্ভাবনা
একবার মুদ্রা নিক্ষেপ		$P(T) =$ $P(1H) =$
দুইবার মুদ্রা নিক্ষেপ		$P(HT) =$
তিনবার মুদ্রা নিক্ষেপ		$P(HHT) =$ $P(2H) =$

সমাধান:

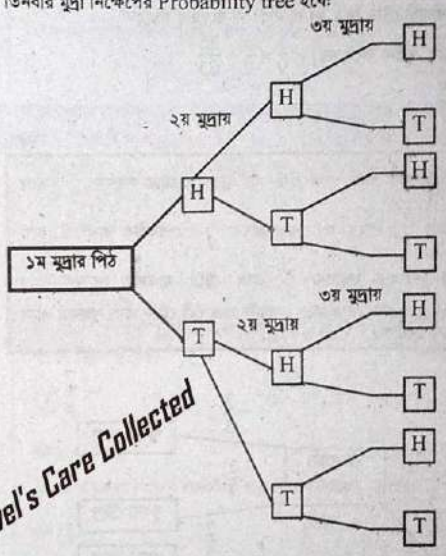
একবার মুদ্রা নিক্ষেপের Probability tree হবে:



দুইবার মুদ্রা নিক্ষেপের Probability tree হবে:



তিনবার মুদ্রা নিক্ষেপের Probability tree হবে:



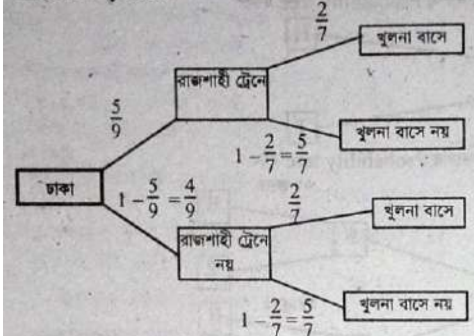
পূরণ করা ছক:

মুদ্রা নিক্ষেপ	সকল সম্ভাব্য ফলাফল	সম্ভাবনা
একবার মুদ্রা নিক্ষেপ	$\{H, T\} = 2$	$P(T) = \frac{1}{2}$
দুইবার মুদ্রা নিক্ষেপ	$\{HH, HT, TH, TT\} = 4$	$P(1H) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, $P(HT) = \frac{1}{4}$
তিনবার মুদ্রা নিক্ষেপ	$\{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\} = 8$	$P(HHT) = \frac{1}{8}$, $P(2H) = \frac{3}{8}$

১৫। কোনো একজন লোকের ঢাকা হতে রাজশাহী ট্রেনে যাওয়ার সম্ভাবনা $\frac{5}{9}$ এবং রাজশাহী হতে খুলনা বাসে যাওয়ার সম্ভাবনা $\frac{2}{7}$. Probability tree ব্যবহার করে লোকটি ঢাকা হতে রাজশাহী ট্রেনে নয় এবং রাজশাহী হতে খুলনা বাসে যাওয়ার সম্ভাবনা কত বের কর। লোকটি রাজশাহী ট্রেনে কিন্তু খুলনা বাসে না যাওয়ার সম্ভাবনা বের কর।

সমাধান:

Probability tree:



লোকটি ঢাকা হতে রাজশাহী ট্রেনে নয় এবং রাজশাহী হতে খুলনা বাসে যাওয়ার সম্ভাবনা,

P [রাজশাহী ট্রেনে নয়, খুলনা বাসে] $=\frac{4}{9}\times\frac{2}{7}=\frac{8}{63}$

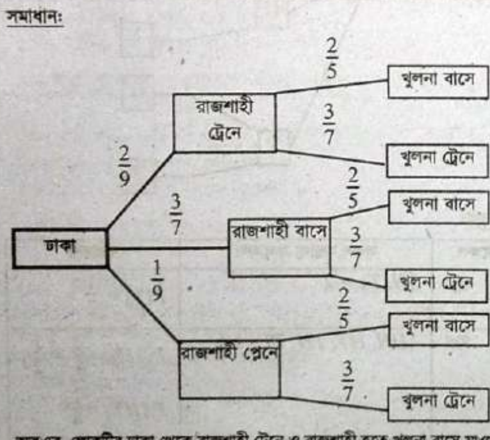
এবং লোকটি রাজশাহী ট্রেনে কিন্তু খুলনা বাসে না যাওয়ার সম্ভাবনা

P [রাজশাহী ট্রেনে, খুলনা বাসে নয়] $=\frac{5}{9}\times\frac{5}{7}=\frac{25}{63}$

উত্তর: $\frac{8}{63}, \frac{25}{63}$

১৬। একজন লোকের ঢাকা হতে রাজশাহী ট্রেনে যাওয়ার সম্ভাবনা $\frac{2}{9}$, বাসে যাওয়ার সম্ভাবনা $\frac{3}{7}$, প্লেনে যাওয়ার সম্ভাবনা $\frac{1}{9}$। লোকটির রাজশাহী হতে খুলনায় বাসে যাওয়ার সম্ভাবনা $\frac{2}{5}$ এবং ট্রেনে যাওয়ার সম্ভাবনা $\frac{3}{7}$। **Probability tree** ব্যবহার করে লোকটি রাজশাহী ট্রেনে এবং খুলনায় বাসে যাওয়ার সম্ভাবনা বের কর।

সমাধান:



অতএব, লোকটির ঢাকা থেকে রাজশাহী ট্রেনে ও রাজশাহী হতে খুলনা বাসে যাওয়ার সম্ভাবনা

P [রাজশাহী ট্রেনে ও খুলনা বাসে] $=\frac{2}{9}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{45}$ (উত্তর)

১৭। একটি দুই টাকার মুদ্রা চার বার নিক্ষেপ করা হলো। (এর শাপলার পিঠকে L এবং প্রাথমিক শিক্ষার শিশুর পিঠকে C বিবেচনা কর)

ক. যদি মুদ্রাটিকে চারবারের পরিবর্তে দুইবার নিক্ষেপ করা হয় তবে একটি L আসার সম্ভাবনা এবং একটি C না আসার সম্ভাবনা কত?

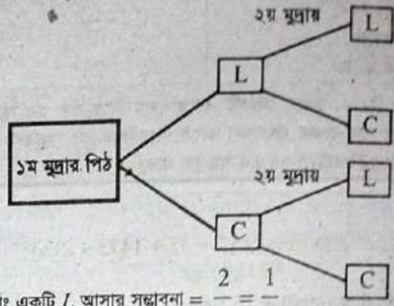
খ. সম্ভাব্য ঘটনার *Probability tree* অঙ্কন কর। এবং নমুনা ক্ষেত্রটি লিখ।

গ. দেখাও যে, মুদ্রাটি n সংখ্যক বার নিক্ষেপ করলে সংঘটিত ঘটনা 2^n কে সমর্থন করে।

(ক) এর সমাধান:

দুইটি মুদ্রা নিক্ষেপে পরীক্ষাকে দুই ধাপে হিসেব বিবেচনা করা যায়। প্রতি ধাপে 2টি ফলাফল $\{L$ অথবা $C\}$ আসতে পারে। সুতরাং মোট ফলাফলকে *Probability tree* এর সাহায্যে নিম্নভাবে দেখানো যায়।

নমুনা ক্ষেত্রটি $\{LL, LC, CL, CC\}$



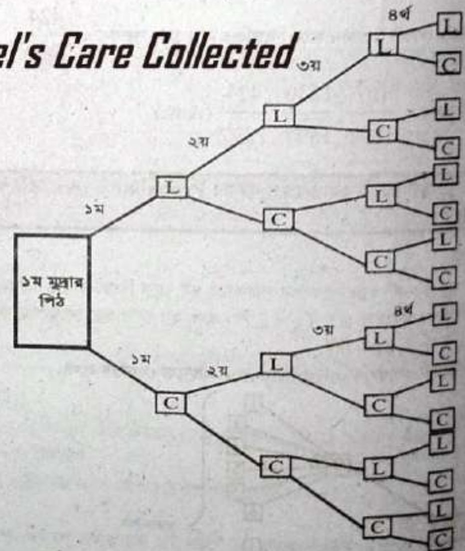
সুতরাং একটি L আসার সম্ভাবনা $=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

আর একটি C " " $=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

$\therefore$ একটি C না আসার সম্ভাবনা $=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

(খ) এর সমাধান:

প্রথমে মুদ্রা চারটিকে চার ধাপ হিসেবে বিবেচনা করা এবং প্রতি ধাপে 2টি ফলাফল $\{L, C\}$ আসতে পারে। সুতরাং *Probability tree*



নমুনা ক্ষেত্রটি–

$\{LLLL, LLLC, LLCL, LLCC, LCLL, LCLC, LCCL, LCCC, CLLL, CLLC, CLCL, CLCC, CCLL, CCLC, CCCL, CCCC\} = 16$টি

(গ) এর সমাধান:

'খ' নং এর *Probability tree* হতে,

একবার মুদ্রা নিক্ষেপ পরীক্ষায় নমুনা বিন্দুর সংখ্যা $= 2 = 2^1$

দুইবার মুদ্রা নিক্ষেপ পরীক্ষায় নমুনা বিন্দুর সংখ্যা $= 4 = 2^2$

তিনবার মুদ্রা নিক্ষেপ পরীক্ষায় নমুনা বিন্দুর সংখ্যা $= 8 = 2^3$

চারবার মুদ্রা নিক্ষেপ পরীক্ষায় নমুনা বিন্দুর সংখ্যা $= 16 = 2^4$

$\therefore n$ বার মুদ্রা নিক্ষেপে সংঘটিত ঘটনা/নমুনা বিন্দুর সংখ্যা $= 2^n$ (দেখানো হলো)

১৮। একটি ঝুড়িতে 4টি লাল, 10টি সাদা ও 7টি কালো মার্বেল আছে। দৈবভাবে একটি মার্বেল নেয়া হল।
ক. সমগ্র সম্ভাব্য ফলাফল নির্ণয় কর।
খ. মার্বেলটি (i) লাল হওয়ার সম্ভাবনা এবং (ii) সাদা না হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর।
গ. যদি প্রতিস্থাপন না করে একটি করে পরপর চারটি মার্বেল তুলে নেয়া হয় তবে সবগুলো মার্বেল সাদা হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর।

(ক) এর সমাধান:

ঝুড়িতে 8টি লাল, 10টি সাদা এবং 7টি কালো মার্বেল আছে। সুতরাং দৈবভাবে একটি মার্বেল নেওয়া হলে সমগ্র সম্ভাব্য ফলাফল $= 8 + 10 + 7 = 25$

(খ) এর সমাধান:

i. 25টি মার্বেলের মধ্যে 8টি লাল মার্বেল থাকায় মার্বেলটি লাল হওয়ার অনুকূল ঘটনা $= 8$

$$P\,(\text{লাল হওয়ার সম্ভাবনা}) = \frac{\text{লাল হওয়ার অনুকূল ঘটনা}}{\text{সমগ্র সম্ভাব্য ফলাফল}} = \frac{8}{25}$$

ii. মার্বেলটি সাদা হওয়ার অনুকূল ঘটনা $= 10$টি

$$P\,(\text{সাদা হওয়ার সম্ভাবনা}) = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$$

$\therefore$ মার্বেলটি সাদা না হওয়ার সম্ভাবনা $= 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$

(গ) এর সমাধান:

১ম মার্বেলটি সাদা হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{10}{25}$

একটি সাদা মার্বেল তুলে নেওয়ার পর মার্বেল অবশিষ্ট থাকে 24টি যার মধ্যে সাদা মার্বেল 9টি। সুতরাং ২য় মার্বেলটি সাদা হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{9}{24}$

অনুরূপভাবে ৩য় এবং ৪র্থ মার্বেলটি সাদা হওয়ার সম্ভাবনা যথাক্রমে $\frac{8}{23}$ এবং $\frac{7}{22}$

সুতরাং প্রতিস্থাপন না করে একটি করে পরপর চারটি মার্বেল তুলে নেয়া হয় তবে সবগুলো মার্বেল সাদা হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{\overset{2}{\cancel{10}}}{\underset{5}{\cancel{25}}} \times \frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{\underset{3}{\cancel{24}}} \times \frac{8}{23} \times \frac{7}{\underset{11}{\cancel{22}}} = \frac{21}{1265}$

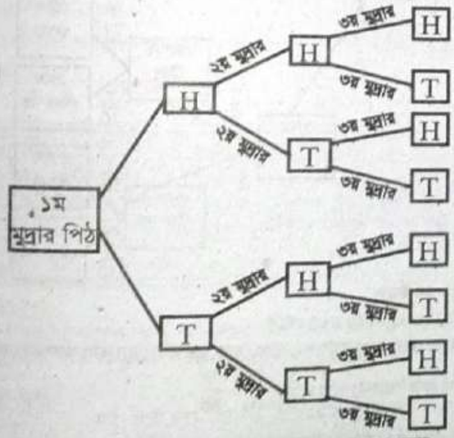
অতিরিক্ত সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর

বিগত এসএসসি পরীক্ষার সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর

প্রশ্ন নং-১: একটি নিরপেক্ষ মুদ্রা তিনবার নিক্ষেপ করা হল।
(ক) উদাহরণসহ সমসম্ভাব্য ঘটনা ও নমুনা ক্ষেত্রের সংজ্ঞা লিখ।
(খ) উদ্দীপকের আলোকে Probability tree এর মাধ্যমে নমুনা ক্ষেত্র তৈরি কর।
(গ) উল্লিখিত পরীক্ষার জন্য (i) কমপক্ষে একটি হেড; এবং (ii) তিনটাই টেল পাওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর।
[ঢাকা বোর্ড-২০১৬]

(ক)-এর উত্তর:
সম্ভাব্য ঘটনা: যদি কোনো পরীক্ষার ঘটনাগুলো ঘটার সম্ভাবনা সমান হয় অর্থাৎ একটি অপরটির চেয়ে বেশি বা কম সম্ভাব্য না হয় তবে ঘটনাগুলোকে সমসম্ভাব্য ঘটনা বলে। যেমন একটি নিরপেক্ষ মুদ্রা নিক্ষেপে হেড বা টেল আসার সম্ভাবনা সমান। সুতরাং হেড আসা এবং টেল আসা ঘটনা দুইটি সমসম্ভাব্য ঘটনা।
নমুনা ক্ষেত্র: কোনো দৈব পরীক্ষার সম্ভাব্য সকল ফলাফল নিয়ে গঠিত সেটকে নমুনাক্ষেত্র বলে। একটি মুদ্রা নিক্ষেপ করলে দুইটি সম্ভাব্য ফলাফল পাওয়া যায়। যথা হেড (H) ও টেল। (T), এখন, S দ্বারা এ- পরীক্ষণের ফলাফলের সেটকে সূচিত করলে আমরা লিখতে পারি, S = {H,T}
সুতরাং উক্ত পরীক্ষা নমুনা ক্ষেত্র S = {H,T}

(খ)-এর উত্তর:
প্রথম মুদ্রা তিনটিকে তিনধাপ বিবেচনা করা হলো এবং প্রতিধাপে ২টি ফলাফল H অথবা T আসতে পারে। সুতরাং সম্ভাব্য ঘটনাসমূহকে Probability Tree এর সাহায্যে নিম্নোক্তভাবে দেখানো যায়:



∴ নমুনা ক্ষেত্রটি হবে: {HHH,HHT,HTH,HTT,THH,THT,TTH,TTT}

(গ)-এর উত্তর:
'খ' হতে পাই,
উল্লিখিত পরীক্ষার নমুনাক্ষেত্রটি হচ্ছে: {HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT}
এদের যেকোনো একটি ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা $\frac{1}{8}$
(i) কমপক্ষে একটি হেড (H) পাওয়ার অনুকূল ঘটনাগুলো {HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH} = 7টি
$\therefore$ P (কমপক্ষে 1H) $= \frac{7}{8}$
(ii) তিনটিই টেল (T) পাওয়ার অনুকূল ঘটনা {TTT} = 1টি
$\therefore$ P (TTT) $= \frac{1}{8}$

প্রশ্ন নং-২: 40 থেকে 60 পর্যন্ত ক্রমিক নম্বর দেওয়া টিকেটগুলি ভালোভাবে মিশিয়ে একটি টিকেট দৈবভাবে নেওয়া হল।–
(ক) টিকেটটি 8 দ্বারা বিভাজ্য হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর।
(খ) টিকেটটি মৌলিক নয় এবং 6 দ্বারা বিভাজ্য হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর।
(গ) টিকেটটি বিজোড় অথবা 5 এর গুণিতক হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর।
[রাজশাহী বোর্ড-২০১৬]

(ক)-এর উত্তর:
টিকেটগুলো ভালোভাবে মিশিয়ে একটি টিকেট দৈবভাবে নেওয়া হলে সম্ভাব্য ফলাফল:
{40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60}
এখানে মোট ঘটনা হলো 21টি।
8 দ্বারা বিভাজ্য হওয়ায় অনুকূল ফলাফল = {40, 48, 56}
8 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা আসার ঘটনা 3টি।
$\therefore$ P (8 দ্বারা বিভাজ্য) $= \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$

(খ)-এর উত্তর:
টিকেটটি মৌলিক নয় এবং 6 দ্বারা বিভাজ্য হওয়ায় অনুকূল ফলাফল = 42, 48, 54, 60 অর্থাৎ 4টি।
$\therefore$ P (মৌলিক নং এবং 6 দ্বারা বিভাজ্য) $= \frac{4}{21}$

(গ)-এর উত্তর:
টিকিটটি বিজোড় অথবা 5 এর গুণিতক হওয়ায় অনুকূল ফলাফল = 41, 43, 45, 47, 49, 50, 51, 53, 55, 57, 59, 60 অর্থাৎ 12টি।
$\therefore$ P (বিজোড় অথবা 5 এর গুণিতক) $= \frac{13}{21}$

প্রশ্ন নং-৩: একটি স্কুলের ৯ম শ্রেণির A, B, C, D, E ও F শাখার শিক্ষার্থী সংখ্যা যথাক্রমে 50, 55, 60, 45, 40 এবং 30 জন। A, B, C শাখার শিক্ষার্থী বিজ্ঞান বিভাগের D ও E শাখার শিক্ষার্থী ব্যবসায় শিক্ষা বিভাগের এবং F শাখার শিক্ষার্থী মানবিক বিভাগের। উপস্থিত বক্তৃতার জন্য একজন শিক্ষার্থী দৈবভাবে নির্বাচন করা হলো।
(ক) নিশ্চিত ঘটনা ও অসম্ভব ঘটনা কাকে বলে?
(খ) নির্বাচিত শিক্ষার্থী বিজ্ঞান বিভাগের হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর।
(গ) নির্বাচিত শিক্ষার্থী মানবিক বিভাগের অথবা ব্যবসায় শিক্ষা বিভাগের হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর।
[যশোর বোর্ড-২০১৬]

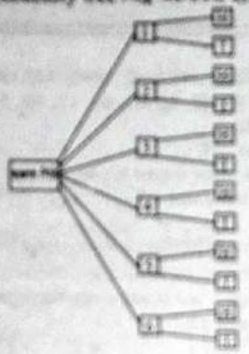
(ক)-এর উত্তর:
নিশ্চিত ঘটনা: কোনো পরীক্ষায় যে ঘটনা অবশ্যই ঘটবে তাকে নিশ্চিত ঘটনা বলে। নিশ্চিত ঘটনার ক্ষেত্রে সম্ভাবনার মান 1 হয়। যেমন : আগামীকাল সূর্য পূর্ব দিকে উঠার সম্ভাবনা 1 আজ সূর্য পশ্চিম দিকে অস্ত যাবে, এর সম্ভাবনা ও 1 রাতের বেলা সূর্য দেখা যাবে না, এর সম্ভাবনা ও 1 এগুলো প্রত্যেকটি নিশ্চিত ঘটনা।
অসম্ভব ঘটনা: কোনো পরীক্ষায় যে ঘটনা কখনো ঘটবেনা অর্থাৎ ঘটতে পারে না একে অসম্ভব ঘটনা বলে। অসম্ভব ঘটনার মান সব সময় শূন্য হয়।
যেমন আগামীকাল সূর্য পশ্চিম দিক থেকে উঠবে অথবা, সূর্য পূর্বদিকে অস্ত যাবে এর সম্ভাবনা শূন্য।

(খ)-এর উত্তর:
নবম শ্রেণির মোট শিক্ষার্থীর সংখ্যা (50 + 55 + 60 + 45 + 40 + 30) জন = 280 জন
বিজ্ঞান বিভাগের শিক্ষার্থীর সংখ্যা = (A + B + C) = (50 + 55 + 60) = 165 জন
$\therefore$ নির্বাচিত শিক্ষার্থী বিজ্ঞান বিভাগের হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{165}{280} = \frac{33}{56}$

(গ)-এর উত্তর:
মানবিক বিভাগের শিক্ষার্থী সংখ্যা F = 30 জন
এবং ব্যবসায় শিক্ষা বিভাগের শিক্ষার্থীর সংখ্যা (D + E) = (45 + 40) জন = 85 জন
$\therefore$ মানবিক ও ব্যবসায় শিক্ষা বিভাগের মোট শিক্ষার্থী সংখ্যা (30 + 85) জন = 125 জন
আবার, 'খ' হতে পাই, মোট শিক্ষার্থীর সংখ্যা 280 জন
$\therefore$ নির্বাচিত শিক্ষার্থী মানবিক বিভাগের অথবা ব্যবসায় শিক্ষা বিভাগের হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{125}{280} = \frac{25}{56}$

[illegible] একটি নিরপেক্ষ ছক্কা ও একটি মুদ্রা নিক্ষেপ করা হল।
(ক) নমুনা ক্ষেত্রের Probability tree অঙ্কন কর।
(খ) নমুনাক্ষেত্র হতে ছক্কার জোড় ও মুদ্রার টেল [illegible] পাওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর।
(গ) মুদ্রাটি যদি 3 বার নিক্ষেপ করা হয়, তবে কমপক্ষে একটি হেড পাওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। [illegible বোর্ড-২০১৬]

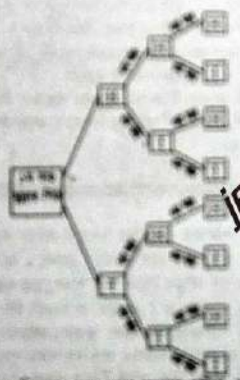
প্রশ্ন (ক)-এর উত্তর
প্রদত্ত নমুনা ক্ষেত্রের Probability tree নিচে অঙ্কন করা হলো-



প্রশ্ন (খ)-এর উত্তর
'ক' এর Probability tree অনুযায়ী
নমুনা ক্ষেত্রটি হলো : {1H, 1T, 2H, 2T, 3H, 3T, 4H, 4T, 5H, 5T, 6H, 6T}
এখানে, মোট নমুনা বিন্দু 12টি।
নমুনা ক্ষেত্র হতে ছক্কার বিজোড় ও মুদ্রার টেল পাওয়ার অনুকূল ঘটনাগুলো {1T, 3T, 5T} = 3টি

$\therefore$ P (ছক্কার বিজোড় ও মুদ্রার টেল পাওয়া) $= \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

প্রশ্ন (গ)-এর উত্তর



একটি মুদ্রা 3 বার নিক্ষেপ করা হলে নমুনা ক্ষেত্রের Probability Tree এর মাধ্যমে নিম্নরূপভাবে দেখানো যায়।
নমুনা ক্ষেত্র = {HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT} = 8টি
কমপক্ষে 1টি হেড পাওয়ার অনুকূল ঘটনাগুলো {HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH} = 7টি

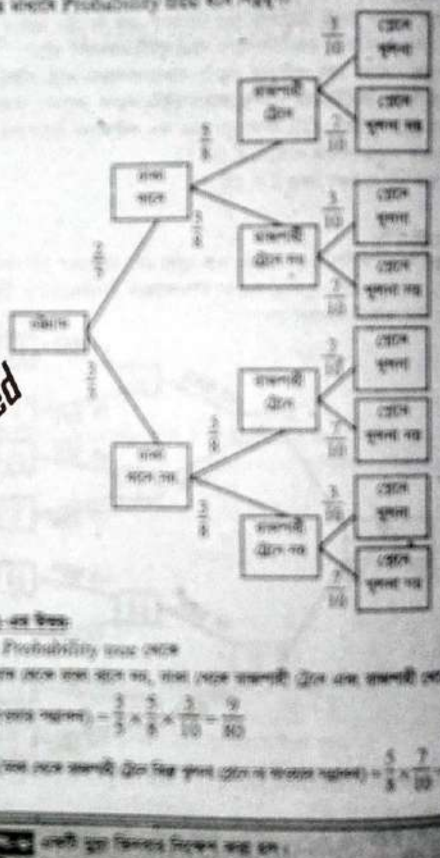
$\therefore$ P (কমপক্ষে 1টি H) $= \frac{7}{8}$

[illegible] [illegible] $\frac{2}{5}$, [illegible] $\frac{5}{8}$ [illegible] $\frac{3}{10}$।

(ক) নিশ্চিত ঘটনা ও অসম্ভব ঘটনা কী?
(খ) সম্ভাবনার মাধ্যমে Probability tree অঙ্কন কর।
(গ) [illegible] রাজশাহী ট্রেন [illegible] ধুমপান [illegible] সম্ভাবনা নির্ণয় কর। [illegible বোর্ড-২০১৬]

প্রশ্ন (ক)-এর উত্তর
নিশ্চিত ঘটনা: কোনো পরীক্ষায় যে ঘটনা অবশ্যই ঘটবে একে নিশ্চিত ঘটনা বলে। নিশ্চিত ঘটনার ক্ষেত্রে সম্ভাবনার মান 1।
অসম্ভব ঘটনা: কোনো পরীক্ষায় যে ঘটনা কখনো ঘটবে না [illegible]
একে অসম্ভব ঘটনা বলে।

প্রশ্ন (খ)-এর উত্তর
সম্ভাবনার মাধ্যমে Probability tree হলো নিম্নরূপ-



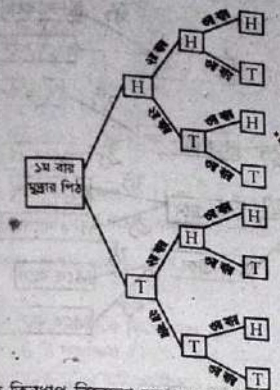
প্রশ্ন (গ)-এর উত্তর
'খ' এর Probability tree থেকে
P ([illegible] রাজশাহী ট্রেন [illegible] ধুমপান [illegible] পাওয়ার সম্ভাবনা) $= \frac{3}{5} \times \frac{5}{8} \times \frac{3}{10} = \frac{9}{80}$

এবং P ([illegible] রাজশাহী ট্রেন [illegible] ধুমপান [illegible] সম্ভাবনা) $= \frac{5}{8} \times \frac{7}{10} = \frac{7}{16}$

[illegible] একটি মুদ্রা তিনবার নিক্ষেপ করা হল।
(ক) উদাহরণসহ নমুনাক্ষেত্রের সংজ্ঞা দাও।
(খ) নমুনা ক্ষেত্রের Probability Tree অঙ্কন করে নমুনা ক্ষেত্রটি লিখ।
(গ) দেখাও যে, তিনটি হেড পাওয়ার সম্ভাবনা এবং নূন্যতম দুটি [illegible] পাওয়ার সম্ভাবনার সমষ্টি 1. [illegible বোর্ড-২০১৬]

প্রশ্ন (ক)-এর উত্তর
কোনো দৈব পরীক্ষার সম্ভাব্য সকল ফলাফল নিয়ে গঠিত সেটকে নমুনাক্ষেত্র বলে।
একটি মুদ্রা নিক্ষেপ করলে দুইটি সম্ভাব্য ফলাফল পাওয়া যায়। যথা হেড (H) ও টেল (T)। এখন S দ্বারা এ পরীক্ষণের ফলাফলের সেটকে সূচিত করলে আমরা লিখতে পারি, S = {H,T}
সুতরাং উক্ত পরীক্ষার নমুনা ক্ষেত্র S = {H,T}

(খ)-এর উত্তর:



প্রথমে মুদ্রা তিনটিকে তিনধাপ বিবেচনা করা হলো এবং প্রতিধাপে ২টি ফলাফল H অথবা T আসতে পারে। সুতরাং সম্ভাব্য ঘটনাসমূহকে Probability Tree এর সাহায্যে নিম্নোক্তভাবে দেখানো যায়:

∴ নমুনা ক্ষেত্রটি হবে: {HHH,HHT,HTH,HTT,THH,THT,TTH,TTT}

(গ)-এর উত্তর:

'খ' থেকে পাই,

নমুনা ক্ষেত্রটি হবে: {HHH,HHT,HTH,HTT,THH,THT,TTH,TTT} = ৪টি। তিনটি হেড পাওয়ার সম্ভাব্য ঘটনা {HHH} = 1টি

∴ P (তিনটি হেড পাওয়ার সম্ভাবনা) $= \frac{1}{8}$

আবার বড়জোড় দুইটি টেল পাওয়ার সম্ভাব্য ঘটনা {HHT,HTH,HTT,THH,THT,TTH,HHH} = 7টি

∴ P (বড়জোড় দুইটি টেল) $= \frac{7}{8}$

সুতরাং, তিনটি হেড পাওয়ার সম্ভাবনা এবং বড়জোড় দুইটি টেল পাওয়ার সম্ভাবনার সমষ্টি $= \frac{1}{8} + \frac{7}{8} = \frac{8}{8} = 1$ [দেখানো হলো]

প্রশ্ন নং-৭: একটি ছক্কা ও দুইটি মুদ্রা একসঙ্গে নিক্ষেপ করা হইল।

(ক) নমুনা ক্ষেত্র ও নমুনা বিন্দু কী?

(খ) সম্ভাব্য ঘটনার **Probability tree** তৈরি কর এবং নমুনা ক্ষেত্রটি লিখ।

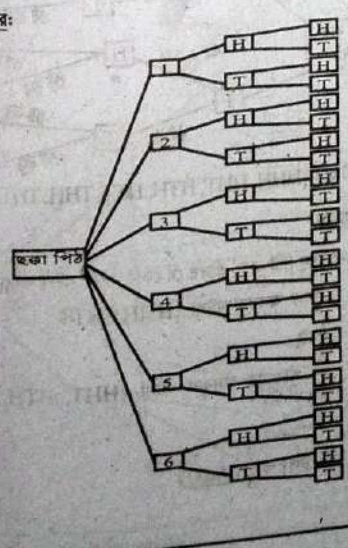
(গ) মুদ্রায় কমপক্ষে একটি T এবং ছক্কায় ২ ও ৩ এর গুণিতক আসার সম্ভাবনা কত?

[সিলেট বোর্ড-২০১৬]

(ক)-এর উত্তর:

নমুনা ক্ষেত্র: কোনো দৈব পরীক্ষার সম্ভাব্য সকল ফলাফল নিয়ে গঠিত সেটকে নমুনা ক্ষেত্র বলে।
নমুনা বিন্দু: নমুনাক্ষেত্রের প্রতিটি উপাদানকে ফলাফলের নমুনা বিন্দু বলে।

(খ)-এর উত্তর:



দুইটি মুদ্রা ও ১টি ছক্কা নিক্ষেপ পরীক্ষাকে দুই ধাপ হিসেবে বিবেচনা করি। প্রথম ধাপে ছক্কা নিক্ষেপে 6টি ফলাফল {1, 2, 3, 4, 5, 6} আসতে পারে। দ্বিতীয় ধাপে মুদ্রা নিক্ষেপে ২টি ফলাফল {H অথবা T} আসতে পারে। তাই পরীক্ষায় মোট ফলাফলকে Probability tree– এর সাহায্যে নিম্নভাবে দেখানো যাবে।

নমুনা ক্ষেত্রটি হবে–

{1HH, 1HT, 1TH, 1TT, 2HH, 2HT, 2TH, 2TT, 3HH, 3HT, 3TH, 3TT, 4HH, 4HT, 4TH, 4TT, 5HH, 5HT, 5TH, 5TT, 6HH, 6HT, 6TH, 6TT}

(গ)-এর উত্তর:

'খ' এর নমুনা ক্ষেত্র থেকে মুদ্রায় কমপক্ষে একটি T এবং ছক্কায় 2 ও 3 এর গুণিতক আসার অনুকূল ঘটনা = {2HT, 2TH, 2TT, 3HT, 3TH, 3TT, 4HT, 4TH, 4TT, 6HT, 6TH, 6TT} = 12টি

'খ' এর নমুনাক্ষেত্র থেকে পাই সমগ্র সম্ভাব্য ফলাফল = 24

∴ P (মুদ্রায় কমপক্ষে একটি T এবং ছক্কায় 2 এবং 3 এর গুণিতক) $= \frac{\text{অনুকূল ঘটনা}}{\text{সমগ্র সম্ভাব্য ফলাফল}}$

$= \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$

প্রশ্ন নং-৮: মুশফিকুর রহিমের সর্বশেষ 10টি আন্তর্জাতিক T – 20 ইনিংসের রান নিম্নরূপ:
37, 51, 30, 2, 42, 38, 43, 62, 5, 13.

(ক) একটি নিরপেক্ষ মুদ্রা দুইবার নিক্ষেপ করা হলে সংঘটিত ঘটনার **Probability tree** অংকন কর।

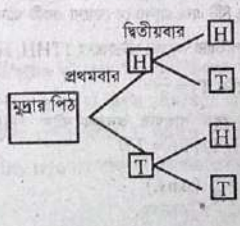
(খ) যে কোনো একটি ইনিংসে অর্ধশত রান করার সম্ভাবনা এবং না করার সম্ভাবনার মধ্যে পার্থক্য নির্ণয় কর।

(গ) যে কোনো একটি ইনিংসের রান বিজোড় অথবা 5 এর গুণিতক হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর।

[দিনাজপুর বোর্ড-২০১৬]

(ক)-এর উত্তর:

একটি নিরপেক্ষ মুদ্রা দুইবার নিক্ষেপ করা হলে সংঘটিত ঘটনার Probability Tree নিম্নরূপ:



(খ)-এর উত্তর:

এখানে, মোট ইনিংস 10টি
অর্ধশত রান করা ইনিংস 2টি
অর্ধশত রান না করা ইনিংস 8টি

∴ যেকোনো একটি ইনিংস অর্ধশত রান করার সম্ভাবনা $= \frac{2}{10}$

আবার, অর্ধশতরান না করার সম্ভবনা $= \left(1 - \frac{2}{10}\right) = \frac{8}{10}$

সুতরাং, পার্থক্য, $= \frac{8}{10} - \frac{2}{10}$

$= \frac{6}{10}$

$= \frac{3}{5}$

(গ)-এর উত্তর:

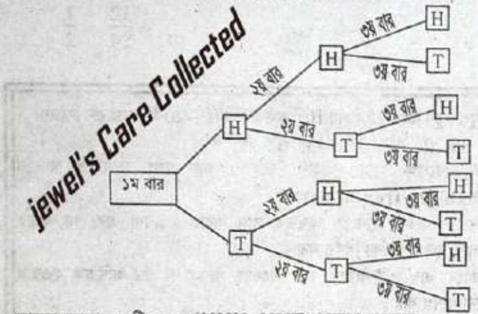
এখানে, মোট ইনিংস 10টি
সুতরাং, বিজোড় অথবা, 5 এর গুণিতক রানের ইনিংস হওয়ার অনুকূল ফলাফল 37, 51, 43, 5, 13, 30
এখানে, ইনিংসের রান বিজোড় অথবা 5 এর গুণিতক হওয়ার অনুকূল ফলাফল 6টি

∴ নির্ণেয় সম্ভাবনা $= \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

প্রশ্ন নং- ৯ । একটি নিরপেক্ষ মুদ্রা তিনবার নিক্ষেপ করা হলো।
(ক) উদাহরণসহ নমুনাক্ষেত্রের সংজ্ঞা দাও।
(খ) উদ্দীপকের আলোকে Probability tree- এর মাধ্যমে নমুনাক্ষেত্র তৈরি কর।
(গ) উল্লেখিত পরীক্ষার জন্য নিচের ঘটনাগুলো ঘটার সম্ভাবনা নির্ণয় কর:
(i) কেবল একটি টেল পাওয়া;
(ii) কমপক্ষে একটি হেড পাওয়া। [ঢাকা বোর্ড- ২০১৫]

(ক) এর সমাধান:
কোনো দৈব পরীক্ষার সম্ভাব্য সকল ফলাফল নিয়ে গঠিত সেটকে **নমুনাক্ষেত্র বলে।** একটা মুদ্রা নিক্ষেপ করলে দুইটি সম্ভাব্য ফলাফল পাওয়া যায়। যথা হেড (H) ও টেল (T), এখন S দ্বারা এ পরীক্ষণের ফলাফলের সেটকে সূচিত করলে আমরা লিখতে পারি $S = \{H, T\}$।

(খ) এর সমাধান:
একটি নিরপেক্ষ মুদ্রা তিনবার নিক্ষেপকে তিনধাপ হিসেবে বিবেচনা করতে হবে। প্রতিধাপে 2টি ফলাফল H অথবা T আসতে পারে। সুতরাং মোট ফলাফলকে Probability tree দ্বারা নিম্নভাবে দেখান যায়।



তাহলে নমুনাক্ষেত্রটি হবে: {HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT}।

(গ) এর সমাধান:
এখানে মোট নমুনা বিন্দু 8টি এবং এদের যে কোনো একটি ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা $= \frac{1}{8}$

(i) কেবল একটি টেল পাওয়ার অনুকূল ঘটনাগুলো {THH, HHT, HTH} = 3টি

$\therefore$ P (কেবল একটি টেল T) $= \frac{3}{8}$

(ii) কমপক্ষে একটি হেড পাওয়ার অনুকূল ঘটনা {HHH, HHT, HTH, THH, HTT, TTH, THT} = 7 টি

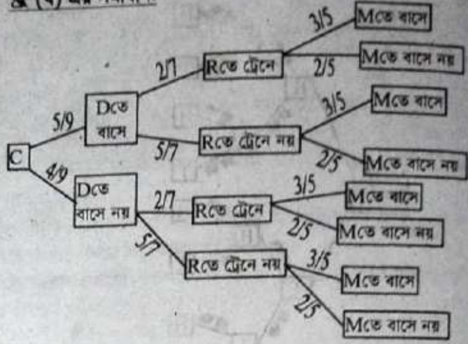
$\therefore$ P[কমপক্ষে 1 H] $= \frac{7}{8}$.(Ans.)

প্রশ্ন নং- ১০ । একজন লোকের চিটাগাং থেকে ঢাকা বাসে যাওয়ার সম্ভাবনা $\frac{5}{9}$, ঢাকা থেকে রাজশাহী ট্রেনে যাওয়ার সম্ভাবনা $\frac{2}{7}$, রাজশাহী থেকে কুসুম্বা মসজিদ বাসে যাওয়ার সম্ভাবনা $\frac{3}{5}$। (চিটাগাং C, ঢাকা D, রাজশাহী R এবং কুসুম্বা মসজিদ M ধর্তব্য)
(ক) ঢাকা থেকে রাজশাহী ট্রেনে না যাওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর।
(খ) সম্ভাব্য ঘটনার Probability tree অঙ্কন কর।
(গ) Probability tree ব্যবহার করে ঢাকা বাসে নয়, রাজশাহীতে ট্রেনে এবং কুসুম্বা মসজিদ বাসে না যাওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর। [রাজশাহী বোর্ড- ২০১৫]

(ক) এর সমাধান:
(ক) ঢাকা থেকে রাজশাহী ট্রেনে যাওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{2}{7}$

$\therefore$ ঢাকা থেকে রাজশাহী ট্রেনে না যাওয়ার সম্ভাবনা $= 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$

(খ) এর সমাধান:



(গ) এর সমাধান:
সুতরাং লোকটির ঢাকা বাসে নয়, রাজশাহীতে ট্রেনে এবং কুসুম্বা মসজিদ বাসে না যাওয়ার সম্ভাবনা

$\therefore$[D তে বাসে নয়, Rতে ট্রেনে, Mতে বাসে নয়] $= \frac{4}{9} \times \frac{2}{7} \times \frac{2}{5}$

$= \frac{16}{315}$ (**Ans:**)

প্রশ্ন নং- ১১ । একটি মুদ্রা তিনবার নিক্ষেপ করা হল—
(ক) মুদ্রাটি একবার নিক্ষেপ করলে হেড ও টেল আসার সম্ভাবনার সমষ্টি নির্ণয় কর।
(খ) সম্ভাব্য ঘটনার Probability tree অঙ্কন কর এবং নমুনাক্ষেত্রটি লিখ।
(গ) তিনটি হেড এবং কমপক্ষে একটি টেল পাওয়ার সম্ভাবনা বের কর। [চট্টগ্রাম বোর্ড- ২০১৫]

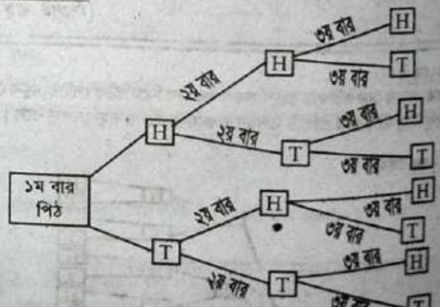
(ক) এর সমাধান:
মুদ্রাটি একবার নিক্ষেপ করলে তার নমুনা ক্ষেত্র = {H,T}

হেড আসার সম্ভাবনা $= \frac{1}{2}$

টেল আসার সম্ভাবনা $= \frac{1}{2}$

সুতরাং হেড ও টেল আসার সম্ভাবনার সমষ্টি $= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

(খ) এর সমাধান:



সুতরাং নমুনাক্ষেত্রটি হবে {HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT}

(গ) এর সমাধান:
এখানে, মোট নমুনা বিন্দু 8টি এবং এদের যে কোন একটি ঘটনা ঘটার সম্ভাবনা $= \frac{1}{8}$

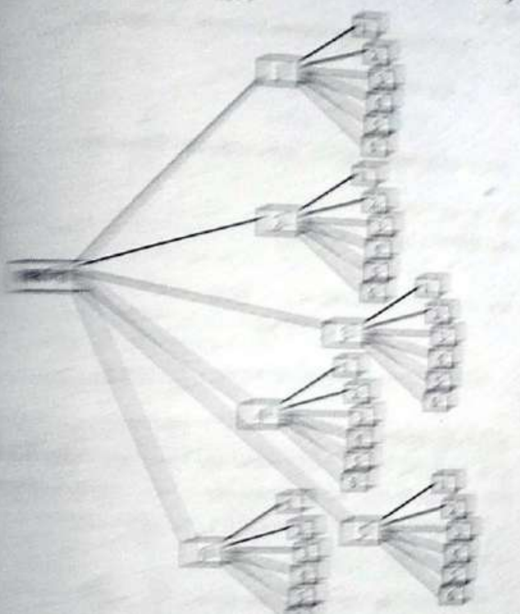
তিনটি হেড(H) পাওয়ার অনুকূল ঘটনা {HHH} = 1টি

$\therefore P(HHH) = \frac{1}{8}$ টি

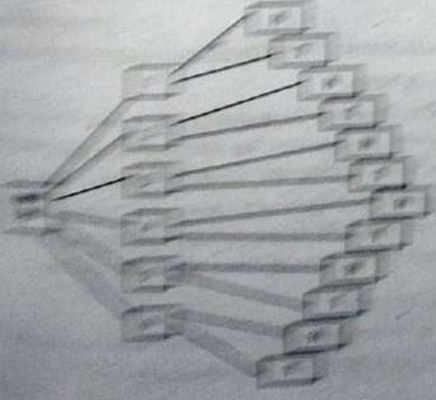
কমপক্ষে একটি টেল পাওয়ার অনুকূল ঘটনা {HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT}
= 7টি

$\therefore$ P [কমপক্ষে 1টি টেল] $= \frac{7}{8}$ (**Ans:**)

[illegible]



[illegible] {11, 12, 13, 14, 15, 16, 21, 22, 23, 24, 25, ... 46, 51, 52, 53, ... 64, 65, 66}



[illegible] (1, 2, 3, 4, 5, 6) [illegible] (H [illegible] T) [illegible] Probability tree [illegible]

[illegible] {1H, 1T, 2H, 2T, 3H, 3T, 4H, 4T, 5H, 5T, 6H, 6T} [illegible] 12 [illegible]

[illegible] 5 [illegible] H [illegible] $P(5H) = \frac{1}{12}$

[illegible] $\frac{2}{7}$ [illegible] $\frac{5}{8}$ [illegible]

(ক) [illegible]

(খ) [illegible] Probability tree [illegible] HH [illegible]

(গ) Probability tree [illegible]

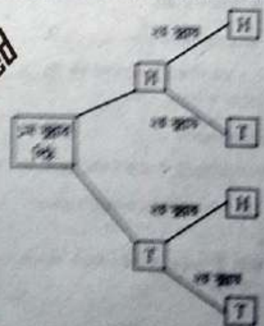
[সিলেট বোর্ড- ২০২৪]

ক (ক) এর সমাধান:

[illegible]

ক (খ) এর সমাধান:

[illegible] H [illegible] T [illegible] H [illegible] T [illegible] Probability tree [illegible]



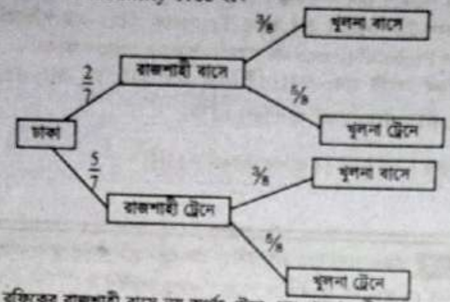
[illegible] HH, HT, TH, TT.

[illegible] {HH, HT, TH, TT} [illegible] 4 [illegible] $\frac{1}{4}$ [illegible]

[illegible] H [illegible] H [illegible] $P(HH) = \frac{1}{4}$

(গ) এর সমাধান:

সম্ভাবনার মাধ্যমে Probalility Tree হবে



সুতরাং রফিকের রাজশাহী বাসে নয় অর্থাৎ ট্রেনে এবং খুলনায় ট্রেনে যাওয়ার সম্ভাবনা

P[রাজশাহী ট্রেনে, খুলনায় ট্রেনে] $= \frac{5}{7} \times \frac{5}{8} = \frac{25}{56}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন নং- ১৪ জনাব আলত্রেড দশম শ্রেণির উচ্চতর গণিতের ক্লাসে গিয়ে ঐ শ্রেণির ছাত্রী জেসিকে 20 থেকে 30 পর্যন্ত স্বাভাবিক সংখ্যাগুলো লিখতে বলায় জেসি তা সঠিকভাবে বোর্ডে লিখল। এরপর তিনি ছাত্রীদের যে কোনো একটি সংখ্যা দৈবভাবে চয়ন করতে বললেন।

(ক) সংখ্যাটি মৌলিক না হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর।

(খ) সংখ্যাটি পৃথকভাবে 2, 3 ও 5 দ্বারা বিভাজ্য হওয়ার সম্ভাবনা এবং একই সাথে 2, 3 ও 5 দ্বারা বিভাজ্য হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর।

(গ) দেখাও যে, সংখ্যাটি মৌলিক হওয়ার সম্ভাবনা এবং 2, 3 এবং 5 এর গুণিতক হওয়ার সম্ভাবনার যোগফল 1। [যশোর বোর্ড- ২০১৫]

(ক) এর সমাধান:

20 থেকে 30 পর্যন্ত মোট সংখ্যা = 11টি

এর মধ্যে মৌলিক সংখ্যা নয় এমন সংখ্যাগুলো হল 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 30.

সুতরাং মৌলিক নয় এমন সংখ্যার পরিমান = 9টি

$\therefore$ সংখ্যাটি মৌলিক না হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{9}{11}$ **(Ans:)**

(খ) এর সমাধান:

20 থেকে 30 এর মধ্যে 2 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যাগুলি হল 20, 22, 24, 26, 28, 30.

2 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যার পরিমান = 6টি

$\therefore$ 2 দ্বারা বিভাজ্য হওয়ার সম্ভাব্যতা $= \frac{6}{11}$

20 থেকে 30 এর মধ্যে 3 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যাগুলি হল 21,24,27,30.

3 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যার পরিমান = 4টি

$\therefore$ 3 দ্বারা বিভাজ্য হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{4}{11}$

20 থেকে 30 এর মধ্যে 5 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যাগুলো হল 20, 25, 30

$\therefore$ 5 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যার পরিমান = 3টি

$\therefore$ 5 দ্বারা বিভাজ্য হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{3}{11}$

20 থেকে 30 এর মধ্যে একইসাথে 2, 3 এবং 5 দ্বারা বিভাজ্য হয় এমন সংখ্যা হল = 30

$\therefore$ একই সাথে 2,3এবং 5 দ্বারা বিভাজ্য হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{1}{11}$

(গ) এর সমাধান:

20 থেকে 30 এর মধ্যে 2, 3এবং 5 এর গুণিতক সংখ্যাগুলো হল 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 30

অর্থাৎ 9টি

এবং মৌলিক সংখ্যা হল 23, 29 অর্থাৎ 2টি

$\therefore$ 2, 3 এবং 5 এর গুণিতক হওয়ার সম্ভাবনা $P(A) = \frac{9}{11}$

এবং মৌলিক হওয়ার সম্ভাবনা $P(3) = \frac{2}{11}$

$P(A) + P(B) = \frac{9}{11} + \frac{2}{11} = \frac{9+2}{11} = \frac{11}{11}$

$= 1$ (দেখানো হল)

প্রশ্ন নং- ১৫ একটি ফলের ঝুড়িতে 2টি আম, 24টি আপেল এবং 15টি কমলা আছে। ঝুড়ি হতে দৈবভাবে একটি ফল নেয়া হল।

(ক) দেখাও যে, কোনো ঘটনার সম্ভাবনার মান 0 থেকে 1 এর মধ্যে সীমাবদ্ধ থাকে।

(খ) ফলটি আম অথবা আপেল হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর।

(গ) ফলটি কমলা কিন্তু আপেল না হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় কর।

[বরিশাল বোর্ড- ২০১৫]

(ক) এর সমাধান:

ধরি, সমগ্র সম্ভাব্য ফলাফল = n

কোনো ঘটনার অনুকূল ফলাফল এর সর্বনিম্ন মান হতে পারে 0।

$\therefore$ উক্ত ঘটনার সম্ভাবনা $= \frac{0}{n}$

$= 0$

আবার,

কোনো ঘটনার অনুকূল ফলাফল এর সর্বোচ্চ মান হতে পারে n।

$\therefore$ উক্ত ঘটনার সম্ভাবনা $= \frac{n}{n}$

$= 1$

কোনো ঘটনার সম্ভাবনার মান 0 থেকে 1 এর মধ্যে সীমাবদ্ধ থাকে।

(খ) এর সমাধান:

মোট ফল আছে = (2 + 24 + 15)টি

= 41টি

আম এবং আপেল রয়েছে মোট = (2 + 24)টি

= 26টি

$\therefore$ ফলটি আম অথবা আপেল হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{26}{41}$ (Ans:)

(গ) এর সমাধান:

প্রশ্নটি থেকে বুঝা যাচ্ছে যে, ফলটি কমলা হবে। এখন যেহেতু একটি ফলই নিতে হবে। তাই কমলা নিলে আপেল নেওয়ার সম্ভাবনা শূন্য। তাই মূলত ফলটি কমলা হওয়ার সম্ভাবনাই চেয়েছে। মোট ফল (2 + 24 + 15) টি = 41টি

এ মধ্যে কমলা আছে = 15টি

$\therefore$ ফলটি কমলা কিন্তু আপেল না হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{15}{41}$ **(Ans.)**

প্রশ্ন নং- ১৬ একটি মুদ্রা চার বার নিক্ষেপ করা হলো।

(ক) দৈব পরীক্ষা বলতে কী বুঝ?

(খ) সম্ভাব্য ঘটনার Probability tree অঙ্কন কর এবং নমুনাক্ষেত্রটি লিখ।

(গ) চারটি হেড এবং কমপক্ষে একটি টেল পাওয়ার সম্ভাবনা কত তা বের কর।

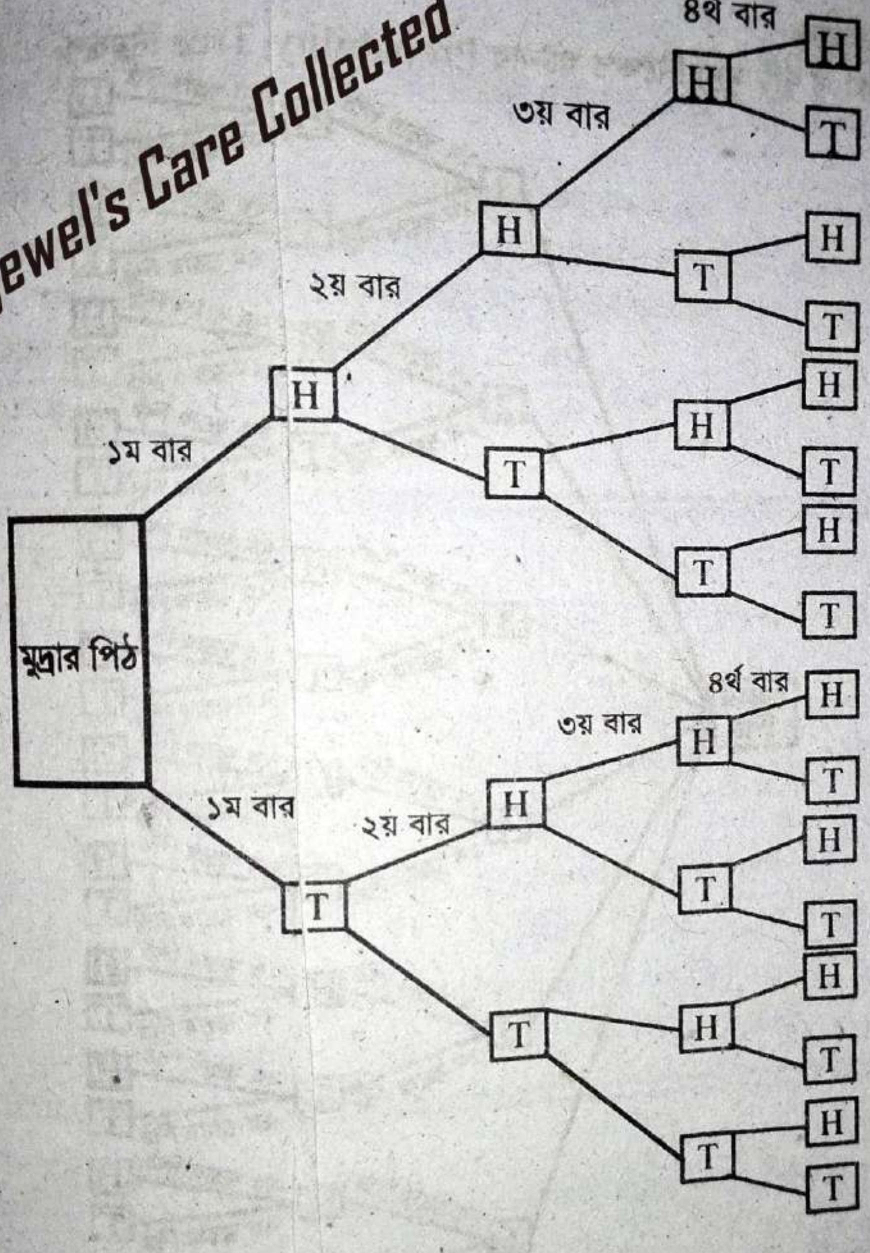
[দিনাজপুর বোর্ড- ২০১৫]

(ক) এর সমাধান:

দৈব পরীক্ষা (Random Experiment): যখন কোনো পরীক্ষার সম্ভাব্য সকল ফলাফল আগে থেকে জানা থাকে কিন্তু পরীক্ষাটিতে কোনো একটা নির্দিষ্ট চেষ্টায় কী ফলাফল আসবে তা নিশ্চিত করে বলা যায় না, একে দৈব পরীক্ষা বলে। যেমন একটা মুদ্রা নিক্ষেপ পরীক্ষার সম্ভাব্য ফলাফল (H, T) হবে, তা আমরা আগে থেকেই জানি কিন্তু মুদ্রাটি নিক্ষেপের পূর্বে কোন ফলাফলটি ঘটবে তা আমরা নিশ্চিত করে বলতে পারি না। সুতরাং মুদ্রা নিক্ষেপ পরীক্ষা একটা দৈব পরীক্ষা।

(খ) এর সমাধান:

প্রথমে মুদ্রা নিক্ষেপের চার ধাপকে চার ধাপ হিসেবে বিবেচনা করা এবং প্রতি ধাপে 2টি ফলাফল (H, T) আসতে পারে। সুতরাং Probability tree



নমুনা ক্ষেত্রটি–
{$HHHH$, $HHHT$, $HHTH$, $HHTT$, $HTHH$, $HTHT$, $HTTH$, $HTTT$,
$THHH$, $THHT$, $THTH$, $THTT$, $TTHH$, $TTHT$, $TTTH$, $TTTT$} = 16 টি

ঐ (গ) এর সমাধানঃ
(খ) নং হতে পাই, সমান সম্ভাব্য ফলাফল =16টি। চারটি হেড{H,H,H,H} আসার অনুকূল ঘটনা = 1টি কমপক্ষে একটি টেল আসার অনুকূলঘটনা = (16 – 1)টি = 15 টি

∴ চারটি হেড পাওয়ার সম্ভাবনা = $\frac{1}{16}$ এবং কমপক্ষে একটি টেল পাওয়ার সম্ভাবনা = $\frac{15}{16}$

প্রশ্নোত্তর