সূচক ও লগারিদম প্রথম অংশ

উদাহরণ ১। মান নির্ণয় কর : (ক) $\frac{5^2}{5^3}$ (খ) $\left(\frac{2}{3}\right)^5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{-5}$

উদাহরণ ২। সরল কর : (ক) $\frac{5^4 \times 8 \times 16}{2^5 \times 125}$ (খ) $\frac{3 \cdot 2^n - 4 \cdot 2^{n-2}}{2^n - 2^{n-1}}$

উদাহরণ ৩। দেখাও যে, $(a^p)^{q-r} \cdot (a^q)^{r-p} (a^r)^{p-q} = 1$

উদাহরণ ৪। সরল কর : (ক) $7^{\frac{3}{4}} \cdot 7^{\frac{1}{2}}$ (খ) $(16)^{\frac{3}{4}} \div (16)^{\frac{1}{2}}$ (গ) $\left(10^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}$

উদাহরণ ৫। সরল কর : (ক) $(12)^{-\frac{1}{2}} \times \sqrt[3]{54}$ (খ) $(-3)^3 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2$

উদাহরণ ৬। সমাধান কর : $4^{x+1} = 32$

$\therefore x = \frac{3}{2}$

অনুশীলনী ৪·১

সরল কর (১ – ১০) :

১। $\frac{3^3 \cdot 3^5}{3^6}$ ২। $\frac{5^3 \cdot 8}{2^4 \cdot 125}$ ৩। $\frac{7^3 \times 7^{-3}}{3 \times 3^{-4}}$ ৪। $\frac{\sqrt[3]{7^2} \cdot \sqrt[3]{7}}{\sqrt{7}}$ ৫। $(2^{-1}+5^{-1})$

৬। $(2a^{-1}+3b^{-1})^{-1}$ ৭। $\left(\frac{a^2b^{-1}}{a^{-2}b}\right)^2$ ৮। $\sqrt{x^{-1}y} \cdot \sqrt{y^{-1}z} \cdot \sqrt{z^{-1}x}, (x>0, y>0, z>$

৯। $\frac{2^{n+4} - 4 \cdot 2^{n+1}}{2^{n+2} + 2}$ ১০। $\frac{3^{m+1}}{(2^m)^{m-1}} \div \frac{9^{m+1}}{(3^{m-1})^{m+1}}$ (৩০)

প্রমাণ কর (১১ – ১৮) :

১১। $\frac{4^n - 1}{2^n - 1} = 2^n + 1$ ১২। $\frac{2^{p+1} \cdot 3^{2p-q} \cdot 5^{p+q} \cdot 6^q}{6^q \cdot 10^{q+2} \cdot 15^p} = \frac{1}{50}$

১৩। $\left(\frac{a^l}{a^m}\right)^n \cdot \left(\frac{a^m}{a^n}\right)^l \cdot \left(\frac{a^n}{a^l}\right)^m = 1$ ১৪। $\frac{a^{p+q}}{a^{2r}} \times \frac{a^{q+r}}{a^{2p}} \times \frac{a^{r+p}}{a^{2q}} = 1$

১৫। $\left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{\frac{1}{ab}} \cdot \left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{\frac{1}{bc}} \cdot \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{\frac{1}{ca}} = 1$ ১৬। $\left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{a+b} \cdot \left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{b+c} \cdot \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{c+a} = 1$

১৭। $\left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{b+q-r} \times \left(\frac{x^q}{x^r}\right)^{q+r-p} \times \left(\frac{x^r}{x^p}\right)^{r+p-q} = 1$

১৮। যদি $a^x = b$, $b^y = c$ এবং $c^z = a$ হয়, তবে দেখাও যে, $xyz = 1$

সমাধান কর (১৯ – ২২) :

১৯। $4^x = 8$ ২০। $2^{2x+1} = 128$ ২১। $(\sqrt{3})^{x+1} = (\sqrt[3]{3})^{2x-1}$ ২২। $2^x + 2^{1-x} = 3$

(২৭)

অনু – ৪.১

সূচকের সূত্র :

1. $a^m \times a^n = a^{m+n}$
2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $[m>n]$
3. $\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}$ $[n>m]$
4. $(ab)^n = a^n b^n$
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
6. $a^0 = 1$ $[a \neq 0]$ $\{a^1 = a,\ 10^1\}$
7. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $[a \neq 0]$
8. $(a^m)^n = a^{mn}$
9. $a^x = a^y$ হলে, $x = y$ $[a>0,\ a \neq 1]$
10. $a^x = b^x$ হলে, $a = b$ $[a>0,\ b>0,\ x \neq 0]$

মিলবমেলা

ক : ১ → (1-5)
ক : ২ → (9, 10, 11, 12)
ক : ৩ → (13 - 17)
ক : ৪ → (19 - 22)

11. সংখ্যার বৈজ্ঞানিক রূপ : $a \times 10^n$ [$1 \le a < 10$ এবং $n \in \mathbb{Z}$]

12. $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$, $\sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{m}}$, $(\sqrt[m]{a})^n = a^{\frac{n}{m}}$

Note :

১। মান নির্ণয় কর।

⇒ প্রমাণ রাশি।

২। দেখাও যে / প্রমাণ করো যে।

⇒ বামপক্ষ / ডানপক্ষ।

৩। অসীমান কর।

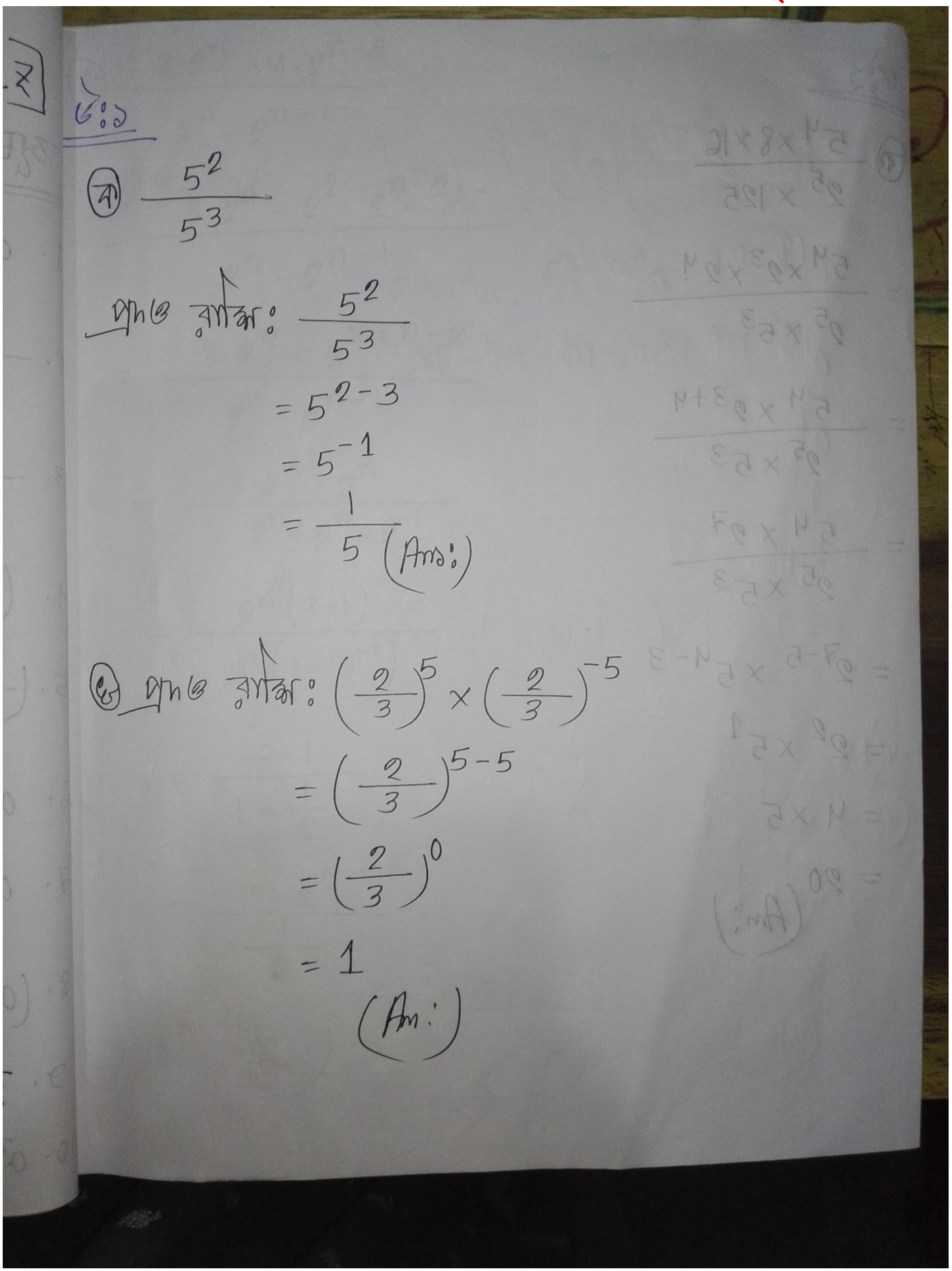
⇒ $x / a / \theta$ - এর মান বের করা।

৪। অবলে কর।

⇒ বড় রাশি থেকে ছোট রাশি তৈরী করা।

৫। অসীমান ছোট নির্ণয় কর।

⇒ $x / a / \theta$ - এর মান বের করে ১১ থেকে আরও কর।



উঃ ১

(ক) $\frac{5^2}{5^3}$

প্রশ্নে ব্যাখ্যা: $\frac{5^2}{5^3}$

$= 5^{2-3}$

$= 5^{-1}$

$= \frac{1}{5}$ (Ans:)

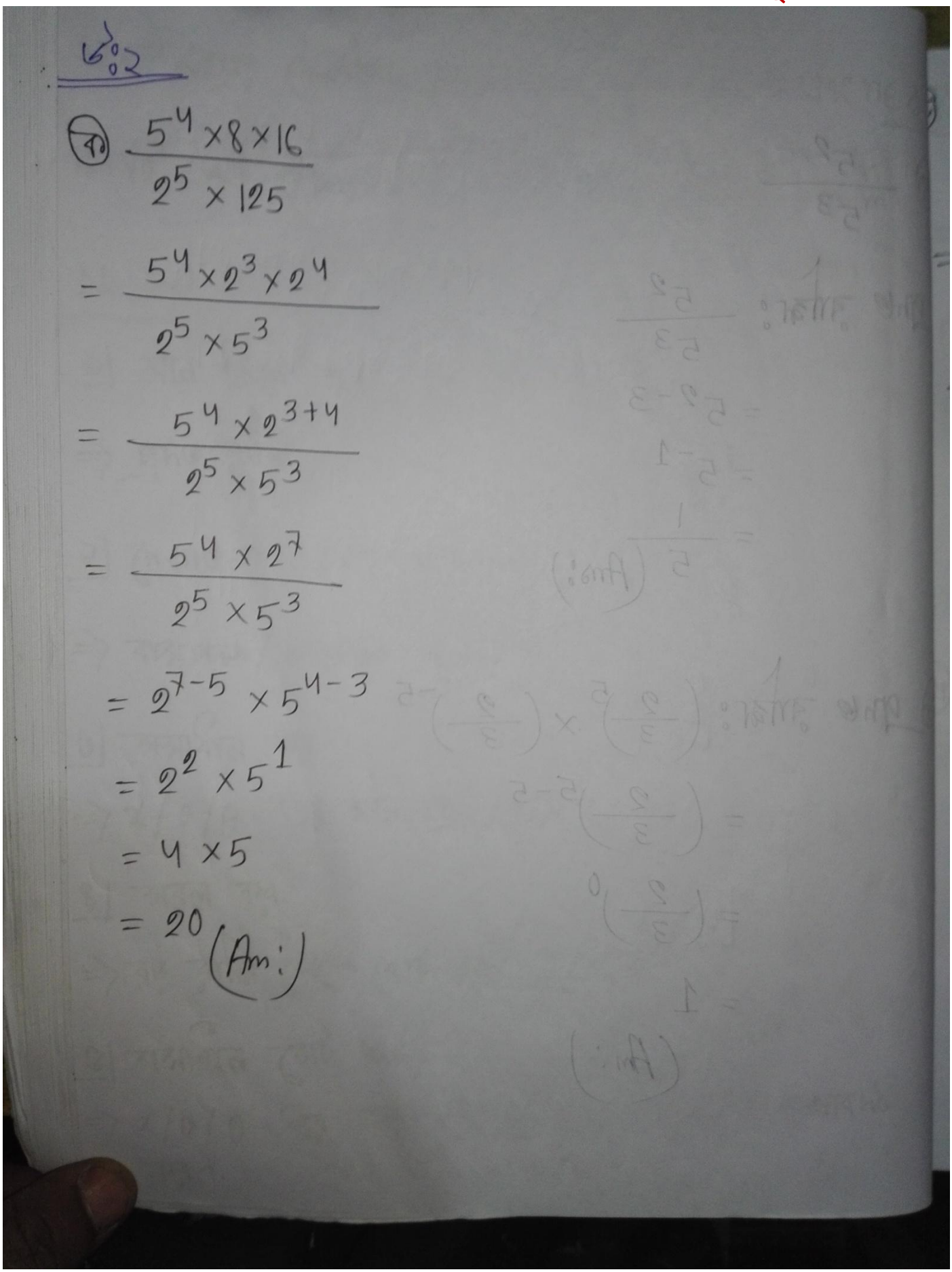
(খ) প্রশ্নে ব্যাখ্যা: $\left(\frac{2}{3}\right)^5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{-5}$

$= \left(\frac{2}{3}\right)^{5-5}$

$= \left(\frac{2}{3}\right)^0$

$= 1$

(Ans:)



$$\text{(ক)}\quad \frac{5^4 \times 8 \times 16}{2^5 \times 125}$$

$$= \frac{5^4 \times 2^3 \times 2^4}{2^5 \times 5^3}$$

$$= \frac{5^4 \times 2^{3+4}}{2^5 \times 5^3}$$

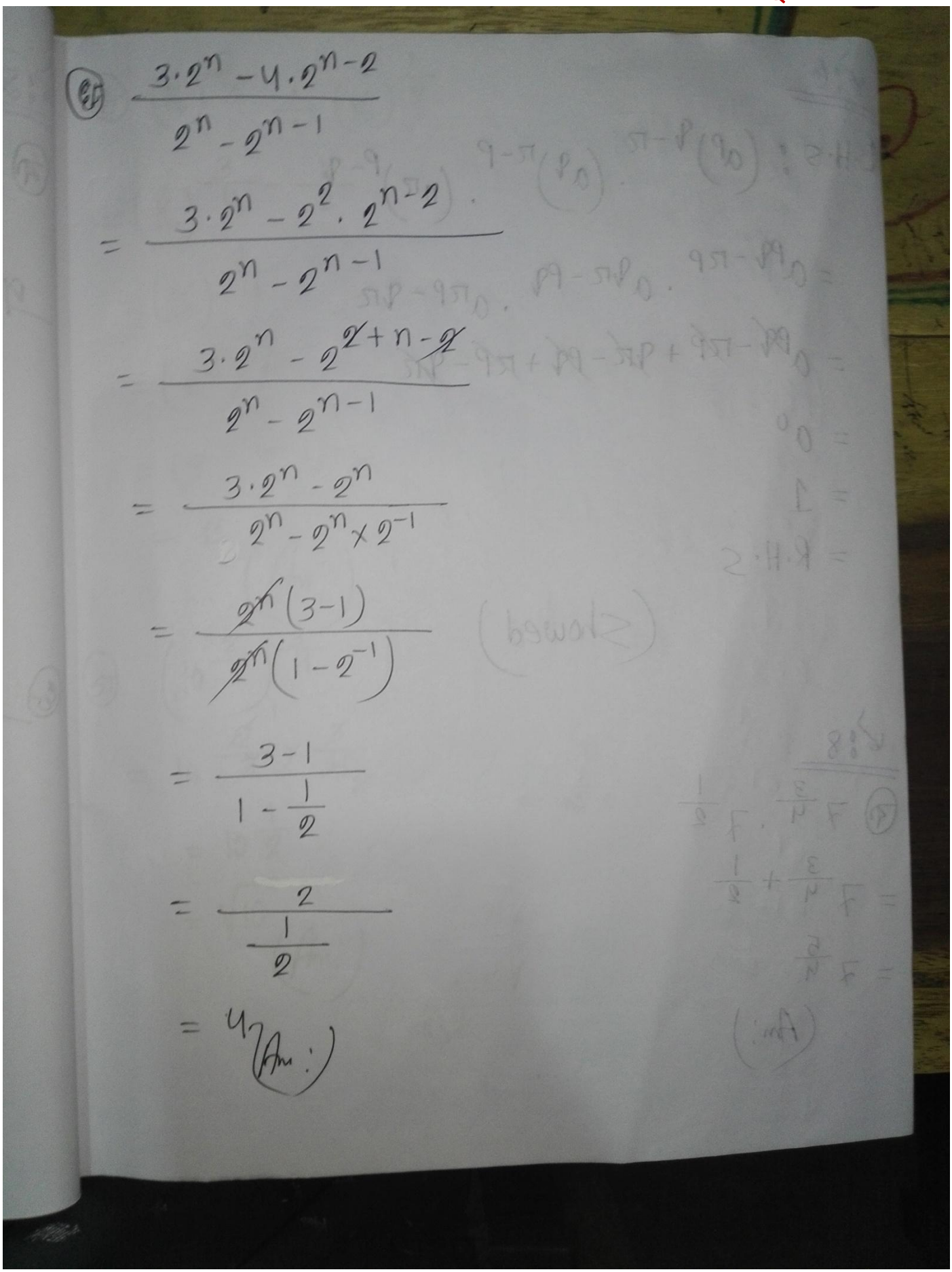
$$= \frac{5^4 \times 2^7}{2^5 \times 5^3}$$

$$= 2^{7-5} \times 5^{4-3}$$

$$= 2^2 \times 5^1$$

$$= 4 \times 5$$

$$= 20 \quad (\text{Ans:})$$



$$\text{(ঙ)}\quad \frac{3\cdot 2^n - 4\cdot 2^{n-2}}{2^n - 2^{n-1}}$$

$$= \frac{3\cdot 2^n - 2^2\cdot 2^{n-2}}{2^n - 2^{n-1}}$$

$$= \frac{3\cdot 2^n - 2^{2+n-2}}{2^n - 2^{n-1}}$$

$$= \frac{3\cdot 2^n - 2^n}{2^n - 2^n \times 2^{-1}}$$

$$= \frac{2^n(3-1)}{2^n(1-2^{-1})}$$

$$= \frac{3-1}{1-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{2}{\frac{1}{2}}$$

$$= 4 \quad \text{(Ans:)}$$

উঃ৬

$$\text{L.H.S} : (a^{p})^{q-r} \cdot (a^{q})^{r-p} \cdot (a^{r})^{p-q}$$

$$= a^{pq-rp} \cdot a^{qr-pq} \cdot a^{rp-qr}$$

$$= a^{pq-rp+qr-pq+rp-qr}$$

$$= a^{0}$$

$$= 1$$

$$= \text{R.H.S}$$

(Showed)

উঃ৪

(ক) $7^{\frac{3}{4}} \cdot 7^{\frac{1}{2}}$

$= 7^{\frac{3}{4}+\frac{1}{2}}$

$= 7^{\frac{5}{4}}$

(Ans:)

(৪) $(16)^{\frac{3}{4}} \div (16)^{\frac{1}{2}}$

$= (16)^{\frac{3}{4} - \frac{1}{2}}$

$= (16)^{\frac{1}{4}}$

$= (2^4)^{\frac{1}{4}}$

$= (2)^{\frac{4}{4}}$

$= 2$ (Ans:)

(৫) $\left(10\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{4}}$

$= 10^{\frac{2}{3} \times \frac{3}{4_2}}$

$= 10^{\frac{1}{2}}$

$= \sqrt{10}$ (Ans:)

উঃ ৫

(ক) $(12)^{-\frac{1}{2}} \times \sqrt[3]{54}$

$= \frac{1}{(12)^{\frac{1}{2}}} \times (54)^{\frac{1}{3}}$

$= \frac{1}{(2^2 \times 3)^{\frac{1}{2}}} \times (3^3 \times 2)^{\frac{1}{3}}$

$= \frac{1}{(2^2)^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{2}}} \times (3^3)^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}$

$= \frac{1}{2 \cdot 3^{\frac{1}{3}}} \times 3 \cdot 2^{\frac{1}{3}}$

$= \frac{2^{\frac{1}{3}}}{2^1} \times \frac{3^1}{3^{\frac{1}{2}}}$

$= \frac{3^{1-\frac{1}{2}}}{2^{1-\frac{1}{3}}}$

$= \frac{3^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{2}{3}}}$

$= \frac{3^{\frac{1}{2}}}{4^{\frac{1}{3}}}$

$= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{4}}$ (Ans.)

(ঙ) $(-3)^3 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2$

$= (-3)(-3)(-3) \times \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)$

$= -27 \times \frac{1}{4}$

$= -\frac{27}{4}$ (Ans:)

৬।৬

$\therefore 4^{x+1} = 32$

বা, $\left(2^2\right)^{x+1} = 2^5$

বা, $2^{2x+2} = 2^5$

বা, $2x + 2 = 5$

বা, $2x = 3$

বা, $x = \frac{3}{2}$ (Ans:)

সমাধান :

১। $\frac{3^3 \cdot 3^5}{3^6}$

$= \frac{3^{3+5}}{3^6}$

$= \frac{3^8}{3^6}$

$= 3^{8-6}$

$= 3^2$

$= 9$ (Ans:)

২। $\frac{5^3 \cdot 8}{2^4 \cdot 125}$

$= \frac{5^3 \cdot 2^3}{2^4 \cdot 5^3}$

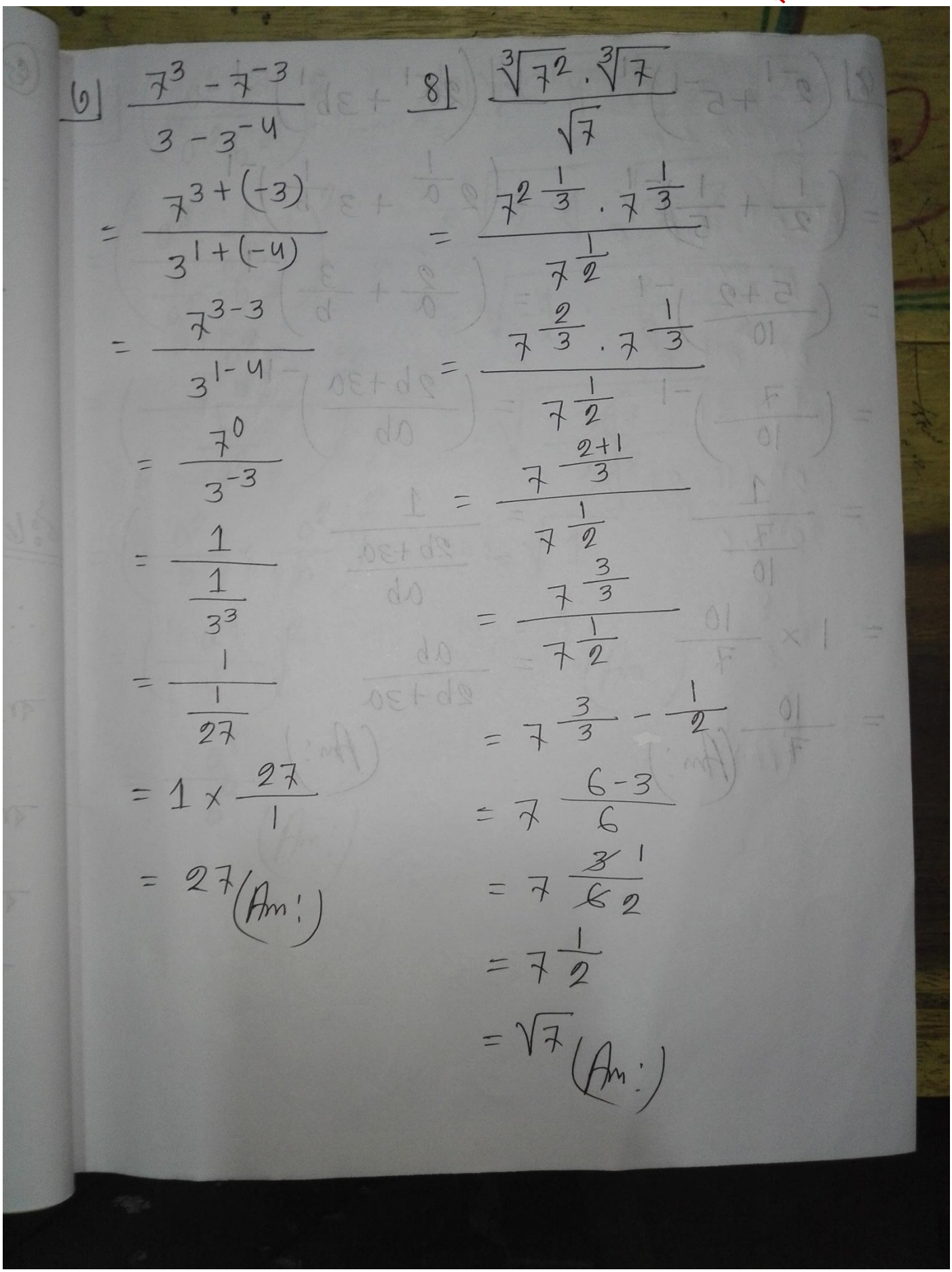
$= \frac{2^3 \cdot 5^3}{2^4 \cdot 5^3}$

$= 2^{3-4} \cdot 5^{3-3}$

$= 2^{-1} \cdot 5^0$

$= \frac{1}{2} \cdot 1$

$= \frac{1}{2}$ (Ans:)



৬। $\frac{7^3 - 7^{-3}}{3 - 3^{-4}}$

$= \frac{7^{3+(-3)}}{3^{1+(-4)}}$

$= \frac{7^{3-3}}{3^{1-4}}$

$= \frac{7^0}{3^{-3}}$

$= \frac{1}{\frac{1}{3^3}}$

$= \frac{1}{\frac{1}{27}}$

$= 1 \times \frac{27}{1}$

$= 27$ (Ans:)

৪। $\frac{\sqrt[3]{7^2} \cdot \sqrt[3]{7}}{\sqrt{7}}$

$= \frac{7^{2\frac{1}{3}} \cdot 7^{\frac{1}{3}}}{7^{\frac{1}{2}}}$

$= \frac{7^{\frac{2}{3}} \cdot 7^{\frac{1}{3}}}{7^{\frac{1}{2}}}$

$= \frac{7^{\frac{2+1}{3}}}{7^{\frac{1}{2}}}$

$= \frac{7^{\frac{3}{3}}}{7^{\frac{1}{2}}}$

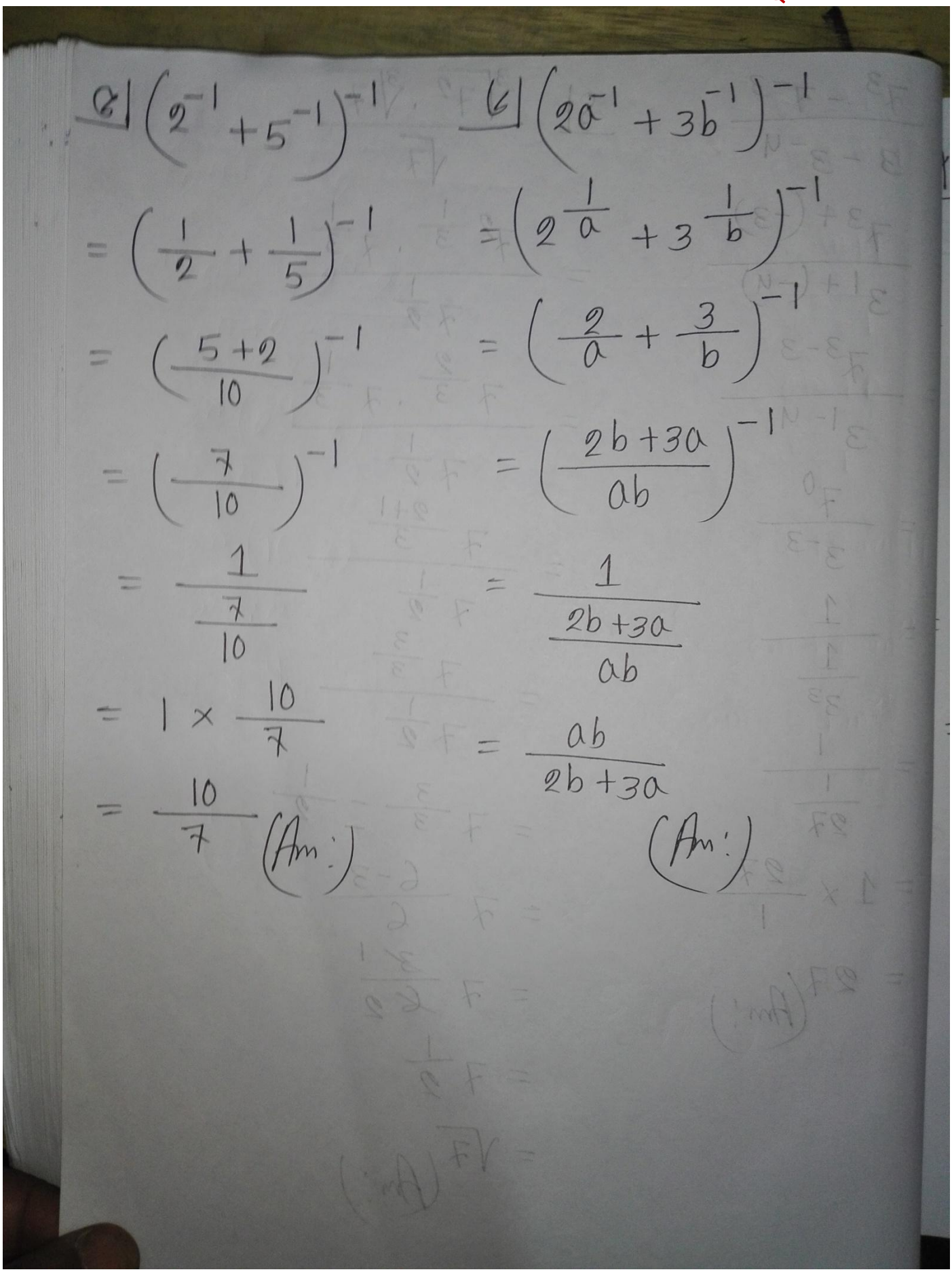
$= 7^{\frac{3}{3} - \frac{1}{2}}$

$= 7^{\frac{6-3}{6}}$

$= 7^{\frac{3^1}{6_2}}$

$= 7^{\frac{1}{2}}$

$= \sqrt{7}$ (Ans:)



ক) $\left(2^{-1}+5^{-1}\right)^{-1}$

$= \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right)^{-1}$

$= \left(\frac{5+2}{10}\right)^{-1}$

$= \left(\frac{7}{10}\right)^{-1}$

$= \frac{1}{\frac{7}{10}}$

$= 1 \times \frac{10}{7}$

$= \frac{10}{7}$ (Ans:)

খ) $\left(2a^{-1}+3b^{-1}\right)^{-1}$

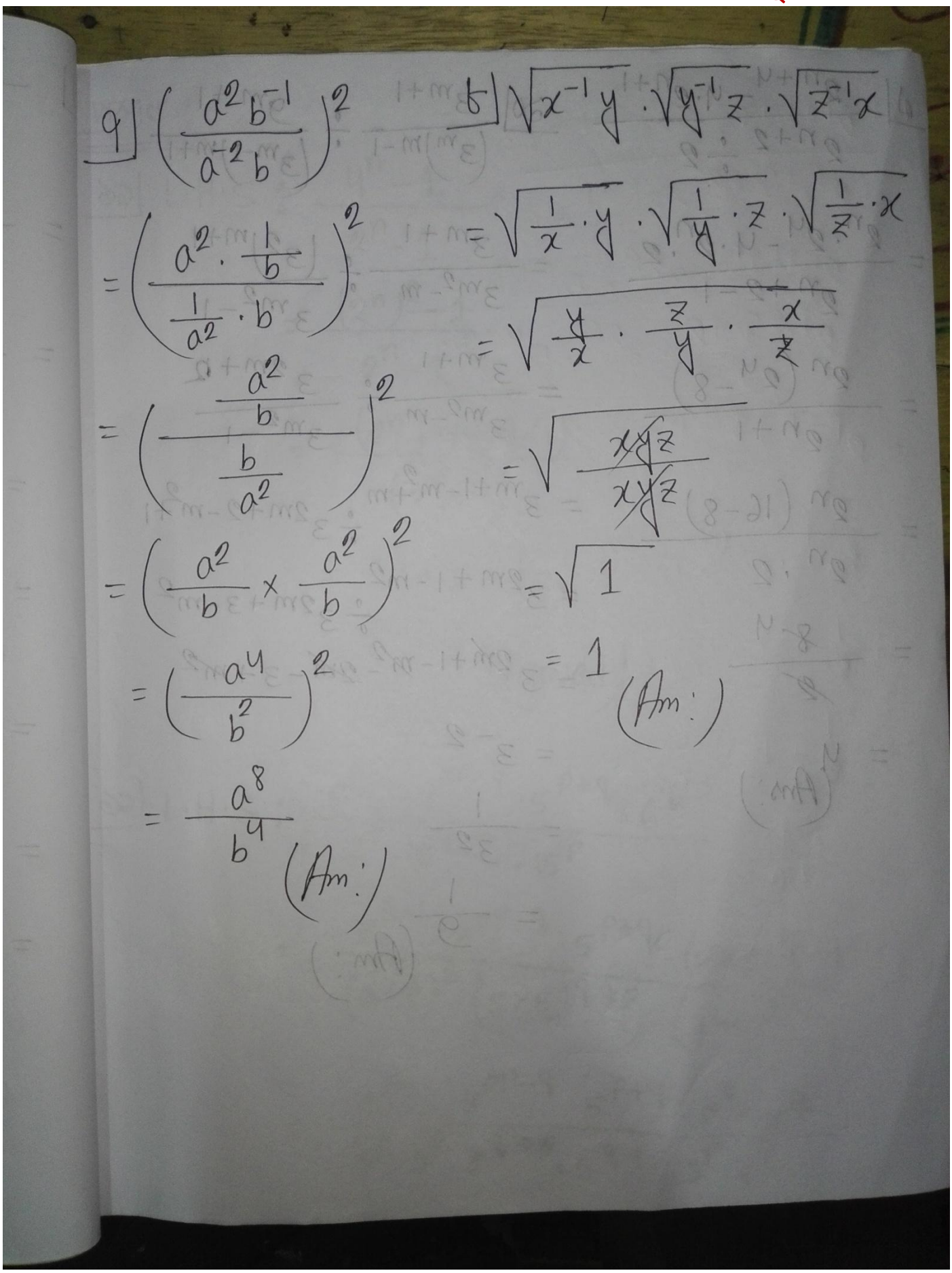
$= \left(2\frac{1}{a}+3\frac{1}{b}\right)^{-1}$

$= \left(\frac{2}{a}+\frac{3}{b}\right)^{-1}$

$= \left(\frac{2b+3a}{ab}\right)^{-1}$

$= \frac{1}{\frac{2b+3a}{ab}}$

$= \frac{ab}{2b+3a}$ (Ans:)



q] $\left(\frac{a^2 b^{-1}}{a^{-2} b}\right)^2$

$= \left(\frac{a^2 \cdot \frac{1}{b}}{\frac{1}{a^2} \cdot b}\right)^2$

$= \left(\frac{\frac{a^2}{b}}{\frac{b}{a^2}}\right)^2$

$= \left(\frac{a^2}{b} \times \frac{a^2}{b}\right)^2$

$= \left(\frac{a^4}{b^2}\right)^2$

$= \frac{a^8}{b^4}$ (Ans:)

b] $\sqrt{x^{-1}y} \cdot \sqrt{y^{-1}z} \cdot \sqrt{z^{-1}x}$

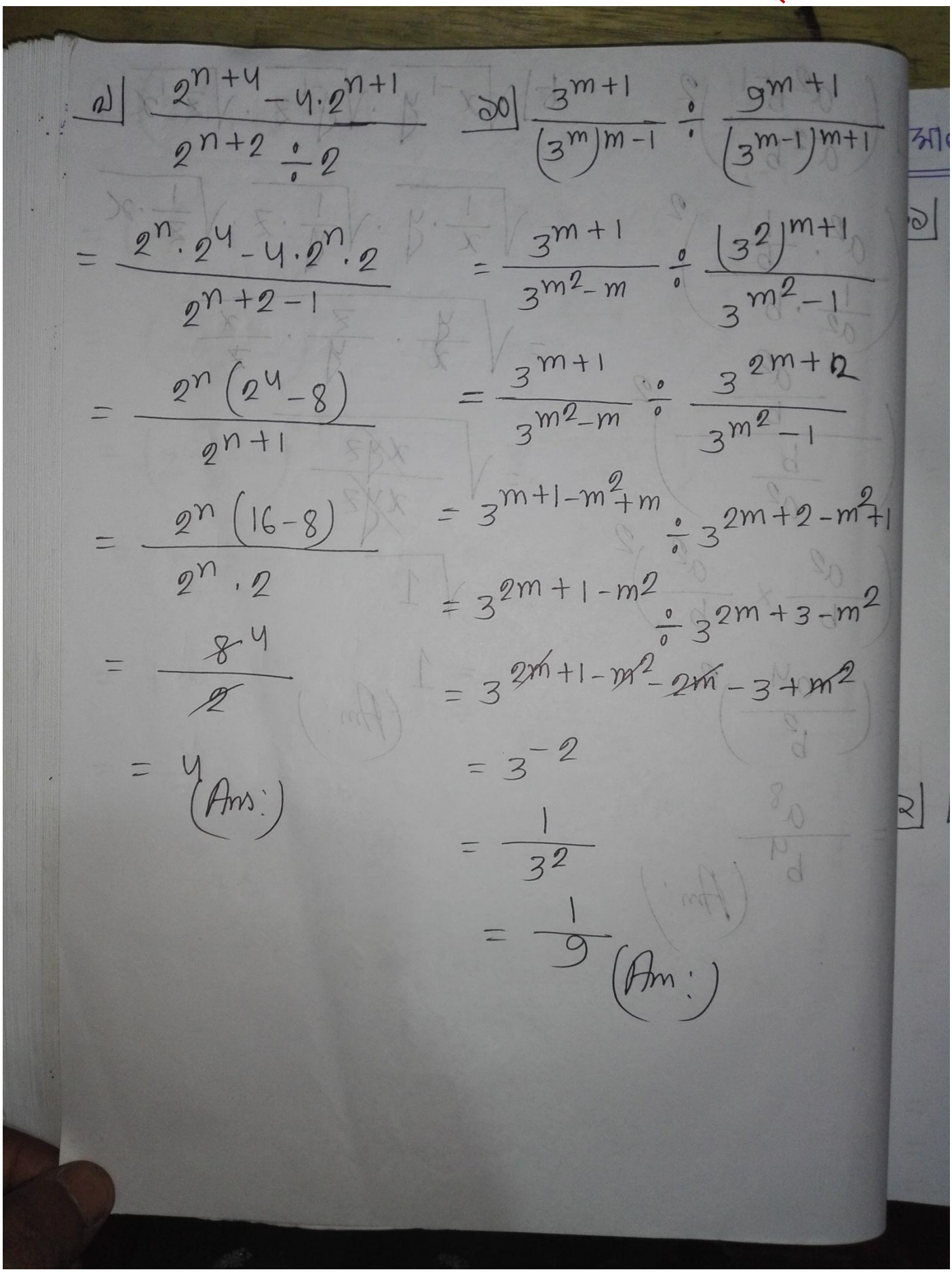
$= \sqrt{\frac{1}{x} \cdot y} \cdot \sqrt{\frac{1}{y} \cdot z} \cdot \sqrt{\frac{1}{z} \cdot x}$

$= \sqrt{\frac{y}{x} \cdot \frac{z}{y} \cdot \frac{x}{z}}$

$= \sqrt{\frac{xyz}{xyz}}$

$= \sqrt{1}$

$= 1$ (Ans:)



২। $\frac{2^{n+4} - 4 \cdot 2^{n+1}}{2^{n+2} \div 2}$

$= \frac{2^n \cdot 2^4 - 4 \cdot 2^n \cdot 2}{2^{n+2-1}}$

$= \frac{2^n (2^4 - 8)}{2^{n+1}}$

$= \frac{2^n (16-8)}{2^n \cdot 2}$

$= \frac{8}{2}^4$

$= 4$ (Ans:)

২০। $\frac{3^{m+1}}{(3^m)^{m-1}} \div \frac{9^{m+1}}{(3^{m-1})^{m+1}}$

$= \frac{3^{m+1}}{3^{m^2-m}} \div \frac{(3^2)^{m+1}}{3^{m^2-1}}$

$= \frac{3^{m+1}}{3^{m^2-m}} \div \frac{3^{2m+2}}{3^{m^2-1}}$

$= 3^{m+1-m^2+m} \div 3^{2m+2-m^2+1}$

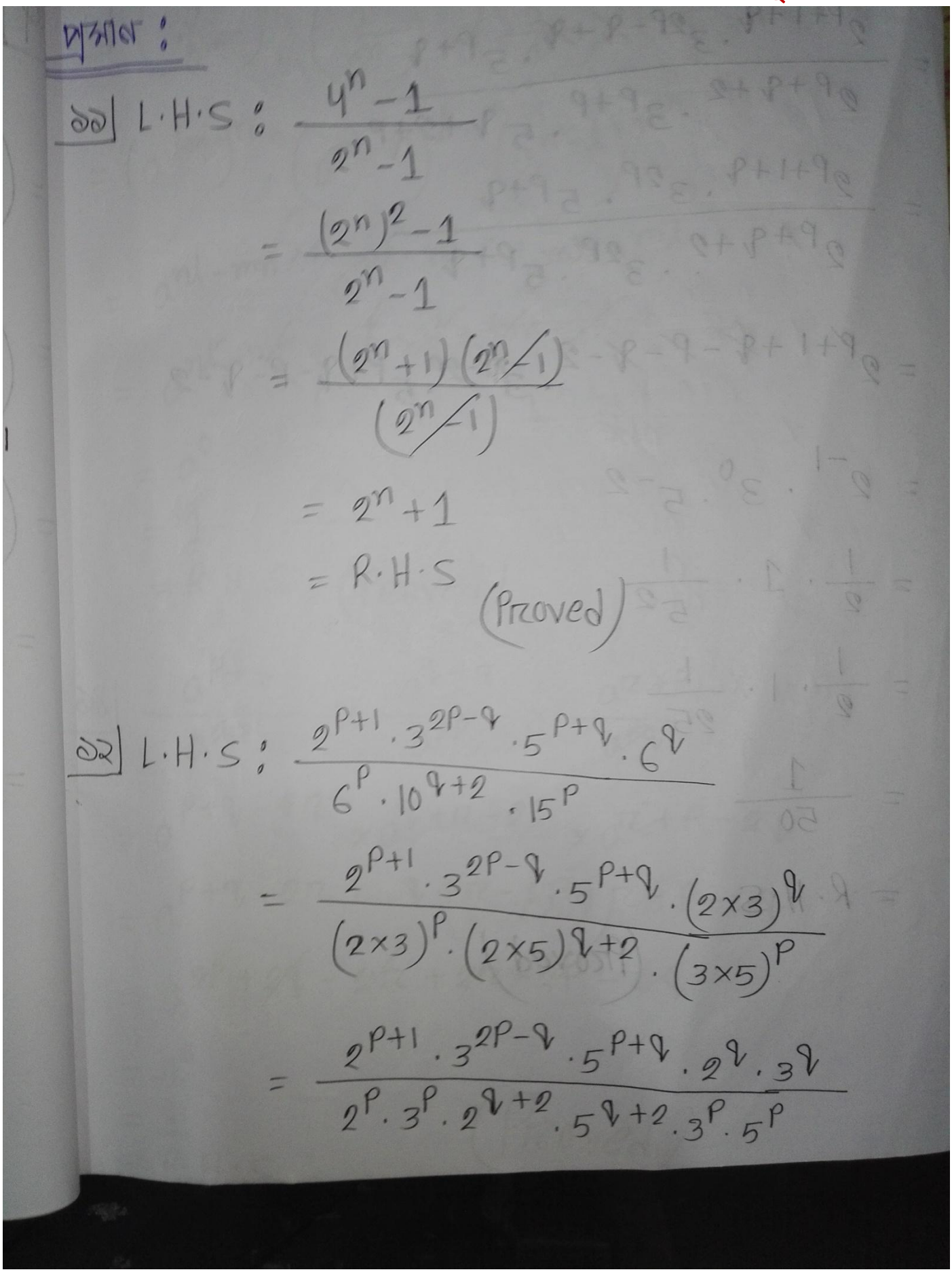
$= 3^{2m+1-m^2} \div 3^{2m+3-m^2}$

$= 3^{2m+1-m^2-2m-3+m^2}$

$= 3^{-2}$

$= \frac{1}{3^2}$

$= \frac{1}{9}$ (Ans:)



দ্রষ্টব্য :

১১। L.H.S : $\frac{4^n-1}{2^n-1}$

$= \frac{(2^n)^2-1}{2^n-1}$

$= \frac{(2^n+1)(2^n-1)}{(2^n-1)}$

$= 2^n+1$

$= R.H.S$

(Proved)

১২। L.H.S : $\frac{2^{p+1}\cdot 3^{2p-q}\cdot 5^{p+q}\cdot 6^q}{6^p\cdot 10^{q+2}\cdot 15^p}$

$= \frac{2^{p+1}\cdot 3^{2p-q}\cdot 5^{p+q}\cdot (2\times 3)^q}{(2\times 3)^p\cdot (2\times 5)^{q+2}\cdot (3\times 5)^p}$

$= \frac{2^{p+1}\cdot 3^{2p-q}\cdot 5^{p+q}\cdot 2^q\cdot 3^q}{2^p\cdot 3^p\cdot 2^{q+2}\cdot 5^{q+2}\cdot 3^p\cdot 5^p}$

$$= \frac{2^{P+1+q} \cdot 3^{2P-q+q} \cdot 5^{P+q}}{2^{P+q+2} \cdot 3^{P+P} \cdot 5^{q+2+P}}$$

$$= \frac{2^{P+1+q} \cdot 3^{2P} \cdot 5^{P+q}}{2^{P+q+2} \cdot 3^{2P} \cdot 5^{P+q}}$$

$$= 2^{P+1+q-P-q-2} \cdot 3^{2P-2P} \cdot 5^{P+q-P-q-2}$$

$$= 2^{-1} \cdot 3^{0} \cdot 5^{-2}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{5^2}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{25}$$

$$= \frac{1}{50}$$

$$= R.H.S$$

(Proved)

১৬। $\left(\frac{a^l}{a^m}\right)^n \cdot \left(\frac{a^m}{a^n}\right)^l \cdot \left(\frac{a^n}{a^l}\right)^m$

$= (a^{l-m})^n \cdot (a^{m-n})^l \cdot (a^{n-l})^m$

$= a^{nl-mn} \cdot a^{ml-nl} \cdot a^{mn-ml}$

$= a^{nl-mn+ml-nl+mn-ml}$

$= a^0$

$= 1$

$= R.H.S$ (Proved)

১৪। $\frac{a^{p+q}}{a^{2r}} \times \frac{a^{q+r}}{a^{2p}} \times \frac{a^{r+p}}{a^{2q}}$

$= a^{p+q-2r} \times a^{q+r-2p} \times a^{r+p-2q}$

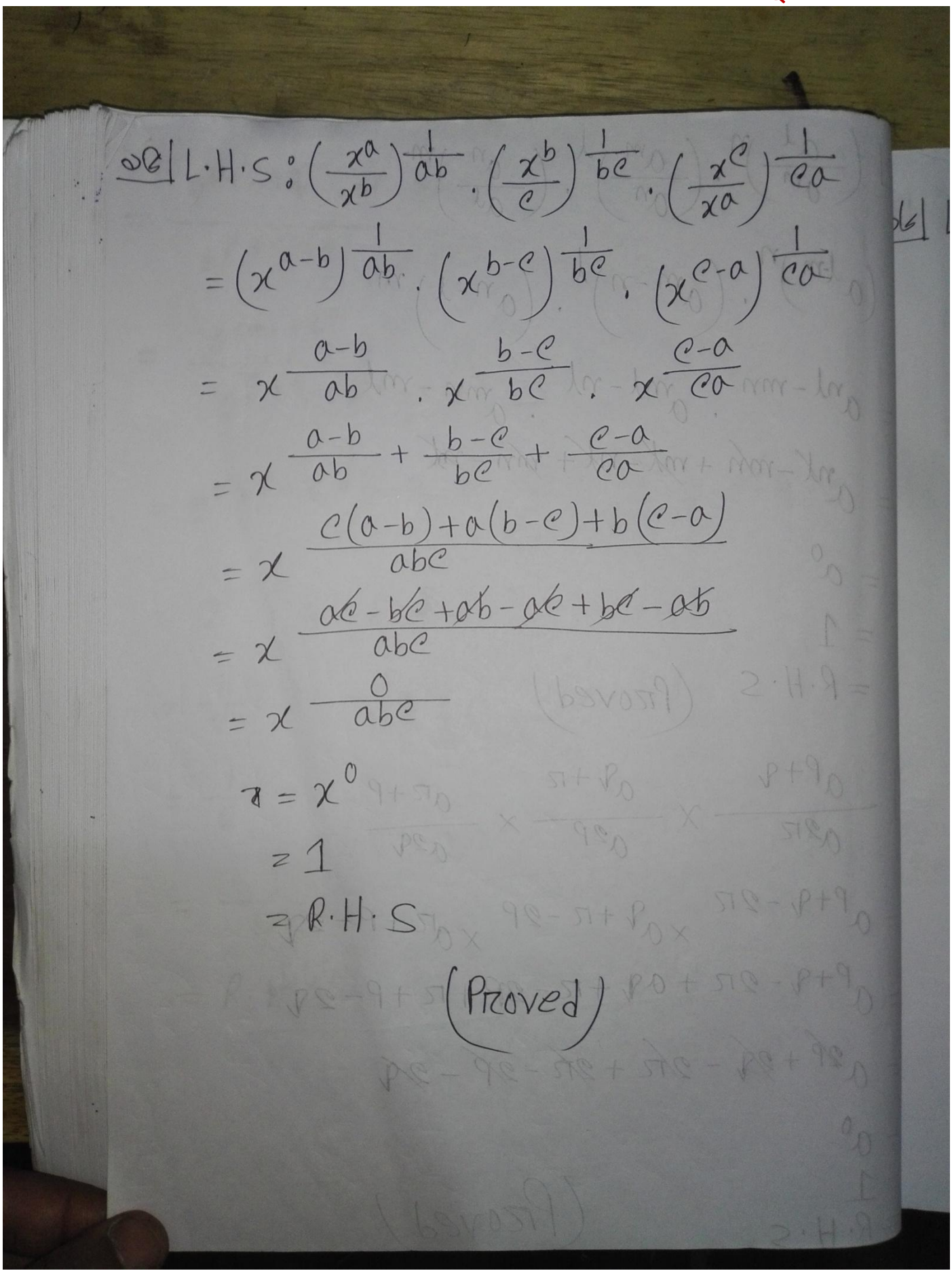
$= a^{p+q-2r+q+r-2p+r+p-2q}$

$= a^{2p+2q-2r+2r-2p-2q}$

$= a^0$

$= 1$

$= R.H.S$ (Proved)



$$\text{L.H.S} = \left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{\frac{1}{ab}} \cdot \left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{\frac{1}{bc}} \cdot \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{\frac{1}{ca}}$$

$$= \left(x^{a-b}\right)^{\frac{1}{ab}} \cdot \left(x^{b-c}\right)^{\frac{1}{bc}} \cdot \left(x^{c-a}\right)^{\frac{1}{ca}}$$

$$= x^{\frac{a-b}{ab}} \cdot x^{\frac{b-c}{bc}} \cdot x^{\frac{c-a}{ca}}$$

$$= x^{\frac{a-b}{ab} + \frac{b-c}{bc} + \frac{c-a}{ca}}$$

$$= x^{\frac{c(a-b)+a(b-c)+b(c-a)}{abc}}$$

$$= x^{\frac{ac - bc + ab - ac + bc - ab}{abc}}$$

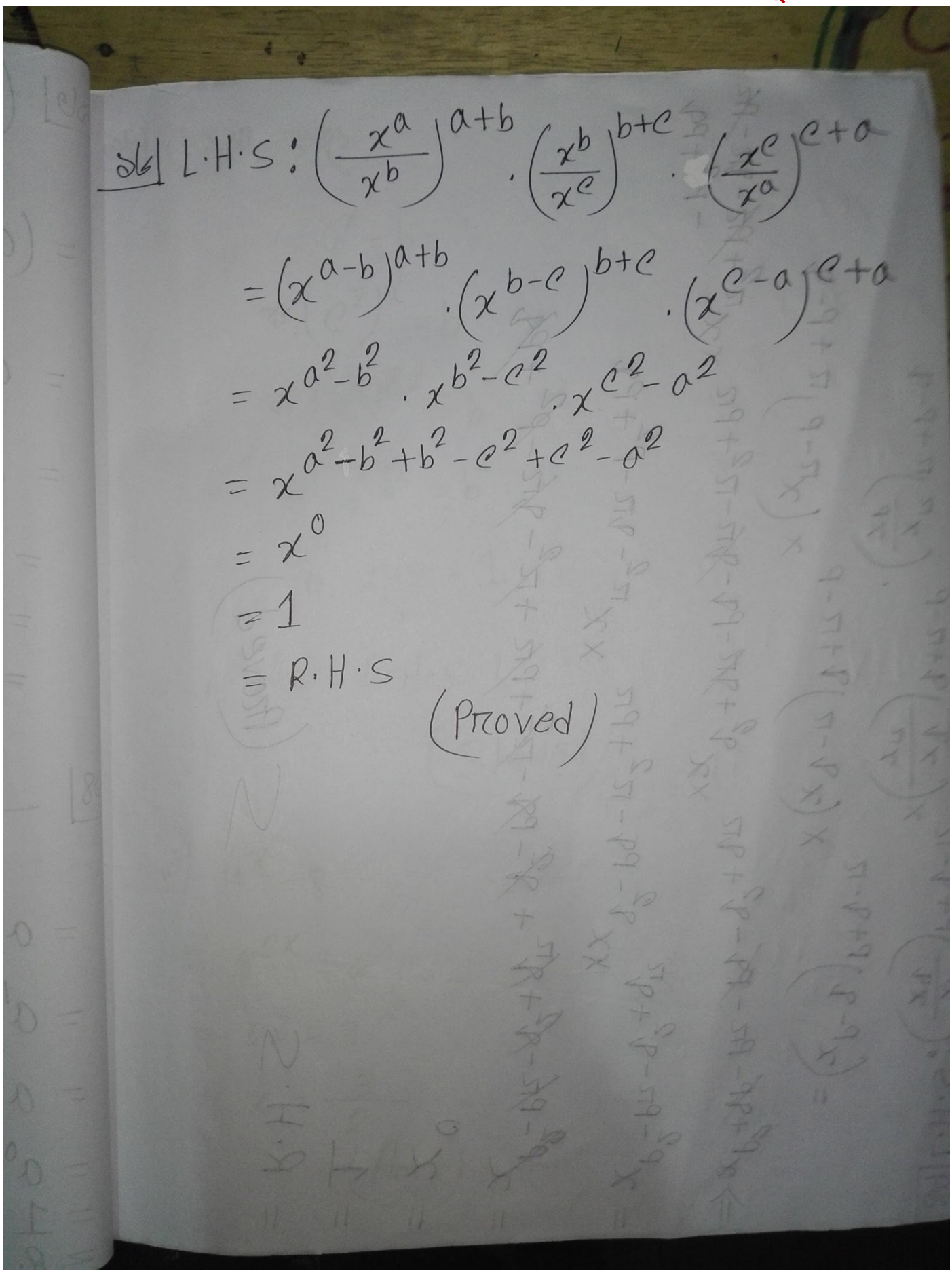
$$= x^{\frac{0}{abc}}$$

$$= x^0$$

$$= 1$$

$$= \text{R.H.S}$$

(Proved)


১৬। L.H.S : $\left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{a+b} \cdot \left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{b+c} \cdot \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{c+a}$
$= (x^{a-b})^{a+b} \cdot (x^{b-c})^{b+c} \cdot (x^{c-a})^{c+a}$
$= x^{a^2-b^2} \cdot x^{b^2-c^2} \cdot x^{c^2-a^2}$
$= x^{a^2-b^2+b^2-c^2+c^2-a^2}$
$= x^0$
$= 1$
$= R.H.S$
(Proved)

১৭| L.H.S: $\left(\frac{x^p}{x^q}\right)^{p+q-r} \times \left(\frac{x^q}{x^r}\right)^{q+r-p} \cdot \left(\frac{x^r}{x^p}\right)^{r+p-q}$

$= \left(x^{p-q}\right)^{p+q-r} \times \left(x^{q-r}\right)^{q+r-p} \times \left(x^{r-p}\right)^{r+p-q}$

$\Rightarrow x^{p^2+qp-pr-pq-q^2+qr} \times x^{q^2+qr-pq-qr-r^2+pr} \times x^{r^2+pr-qr-pr-p^2+pq}$

$= x^{p^2-pr-q^2+qr} \times x^{q^2-pq-r^2+pr} \times x^{r^2-qr-p^2+pq}$

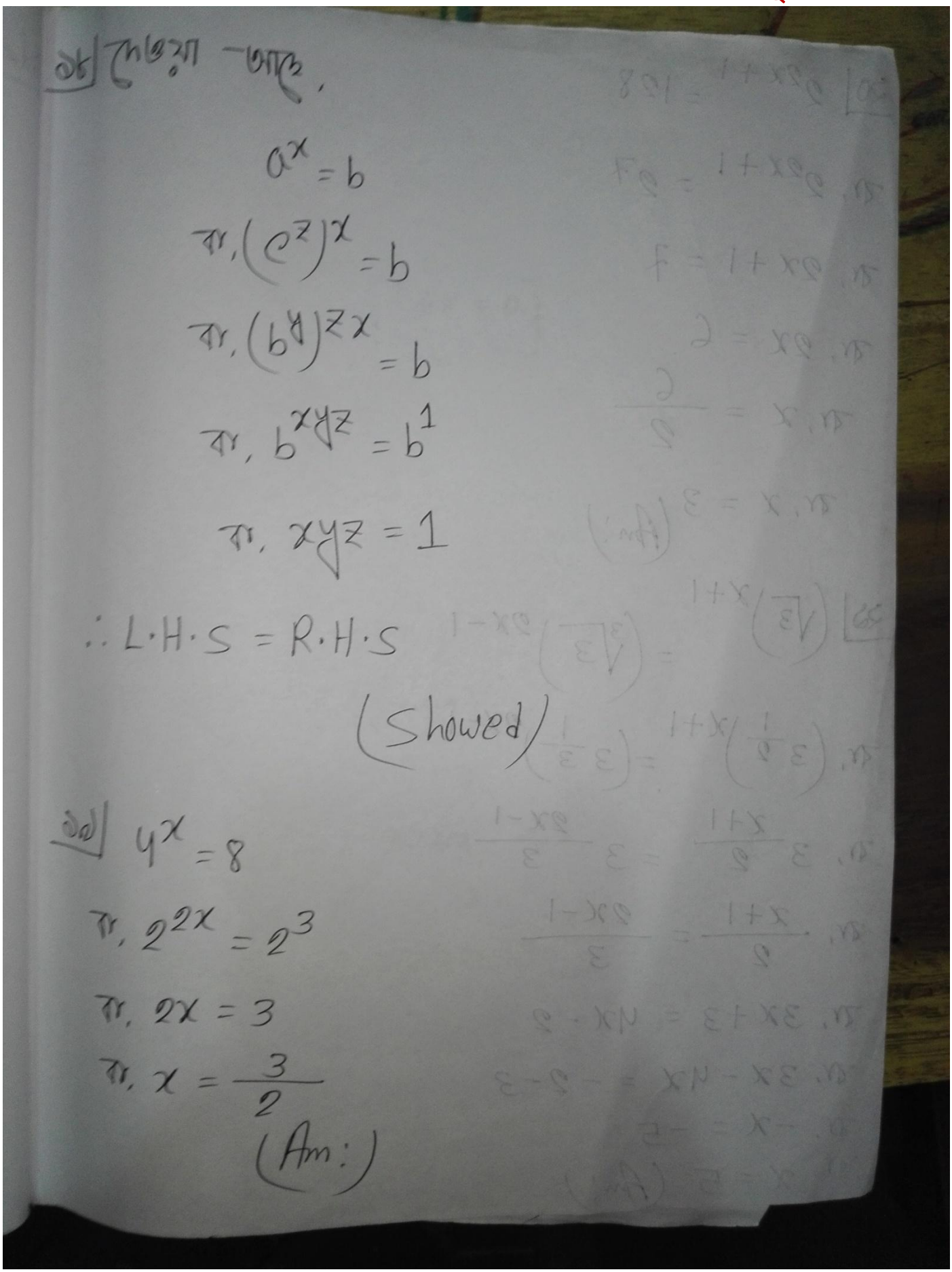
$= x^{p^2-pr-q^2+qr+q^2-pq-r^2+pr+r^2-qr-p^2+pq}$

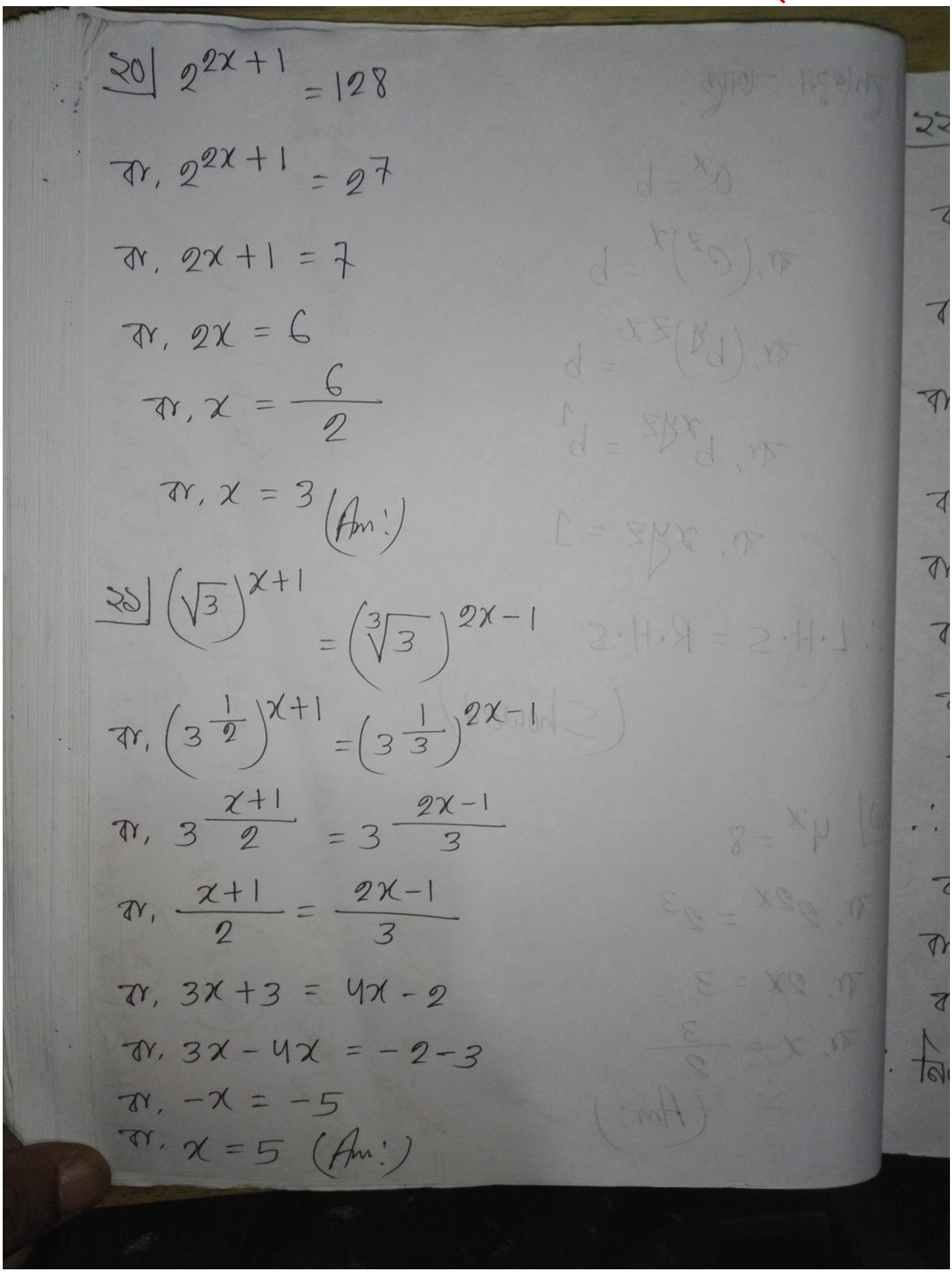
$= x^0$

$= 1$

$=$ R.H.S

(Proved)


$a^x = b$
বা, $(c^z)^x = b$
বা, $(b^y)^{zx} = b$
বা, $b^{xyz} = b^1$
বা, $xyz = 1$
$\therefore L.H.S = R.H.S$
(Showed)
$4^x = 8$
বা, $2^{2x} = 2^3$
বা, $2x = 3$
বা, $x = \frac{3}{2}$
(Ans:)



২০। $2^{2x+1} = 128$

বা, $2^{2x+1} = 2^7$

বা, $2x+1 = 7$

বা, $2x = 6$

বা, $x = \frac{6}{2}$

বা, $x = 3$ (Ans:)

২১। $\left(\sqrt{3}\right)^{x+1} = \left(\sqrt[3]{3}\right)^{2x-1}$

বা, $\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{x+1} = \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^{2x-1}$

বা, $3^{\frac{x+1}{2}} = 3^{\frac{2x-1}{3}}$

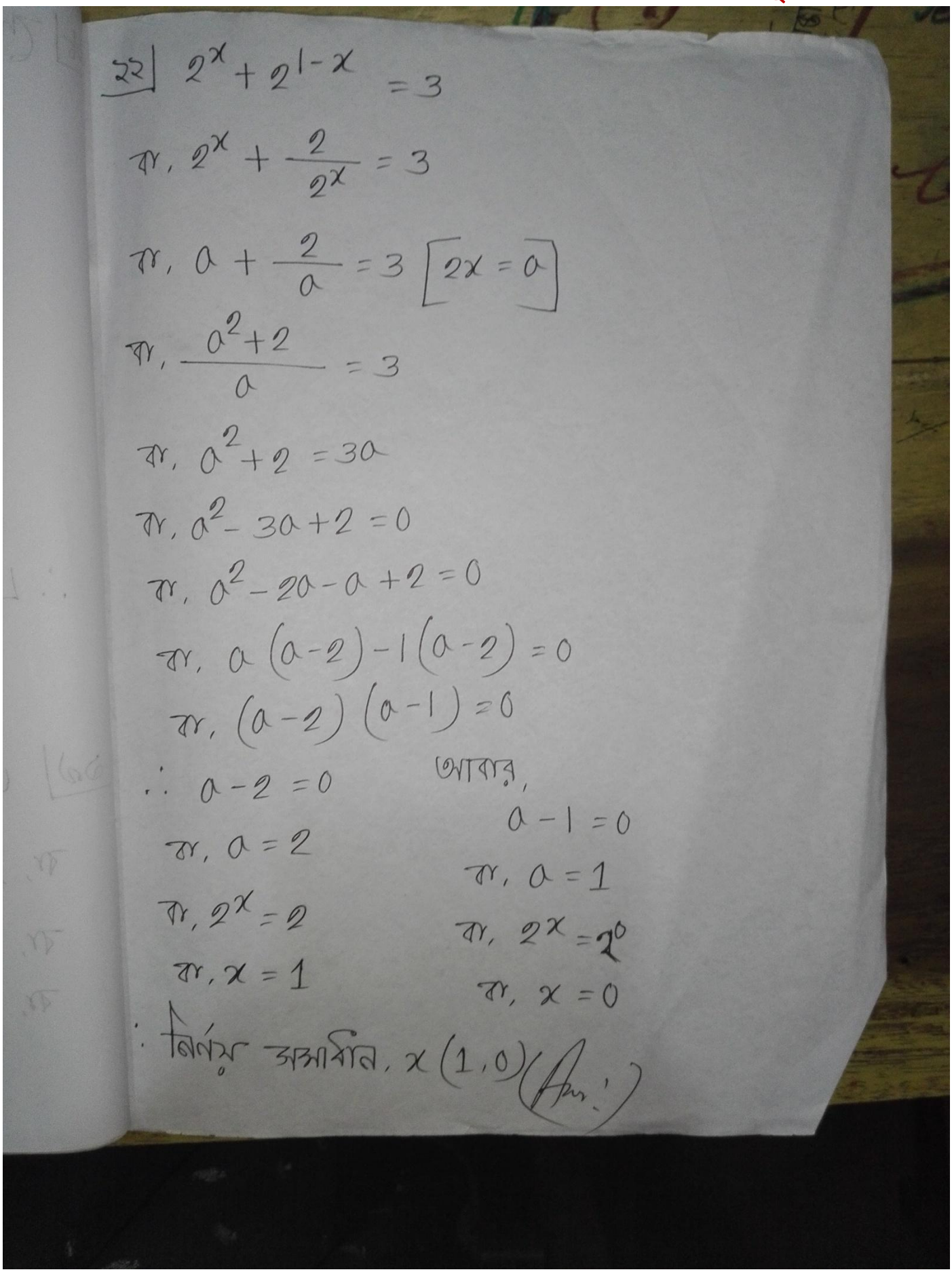
বা, $\frac{x+1}{2} = \frac{2x-1}{3}$

বা, $3x+3 = 4x-2$

বা, $3x-4x = -2-3$

বা, $-x = -5$

বা, $x = 5$ (Ans:)


22| $2^x + 2^{1-x} = 3$
বা, $2^x + \frac{2}{2^x} = 3$
বা, $a + \frac{2}{a} = 3$ [$2^x = a$]
বা, $\frac{a^2+2}{a} = 3$
বা, $a^2 + 2 = 3a$
বা, $a^2 - 3a + 2 = 0$
বা, $a^2 - 2a - a + 2 = 0$
বা, $a(a-2) - 1(a-2) = 0$
বা, $(a-2)(a-1) = 0$
$\therefore a - 2 = 0$
বা, $a = 2$
বা, $2^x = 2$
বা, $x = 1$
আবার,
$a - 1 = 0$
বা, $a = 1$
বা, $2^x = 2^0$
বা, $x = 0$
$\therefore$ নির্ণয় অক্ষাংশ, $x(1, 0)$ (Ans.)